R. WEITZENBÖCK

# Über einen Satz von Deruyts

*Compositio Mathematica*, tome 2 (1935), p. 224-229
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__224_0>

# Über einen Satz von Deruyts

von

R. Weitzenböck

Laren (N.H.)

---

Wir geben in Folgendem einen sehr einfachen Beweis des Satzes von Deruyts, demzufolge alle projektiven Invarianten von Formen, deren Koeffizienten durch projektiv-invariante Gleichungen verknüpft sind, aus projektiven Invarianten von Formen mit frei-veränderlichen Koeffizienten erhalten werden können. Am Schlusse zeigen wir an einem Beispiele, daß ein analoger Satz für Semiinvarianten im Allgemeinen nicht gilt.

§ 1. *Freie Invarianten.*

Wir gehen von einem beliebigen System von $n$-ären Grundformen

$$f = \Sigma a^{ikl\cdots} x_i x_k x_l \ldots = (ax)^p, \; g = (\alpha x)^q, \ldots$$

aus, deren Koeffizienten wir kurz durch $a, \alpha, \ldots$ andeuten wollen, und die wir vorläufig als frei-veränderlich betrachten.

Wenn die $x_i$ projektiv transformiert werden

$$(1) \qquad x_i = e_i^k \bar{x}_k \qquad |e_i^k| = \Delta \neq 0,$$

erleiden auch die Koeffizienten $a$ von $f$ eine lineare homogene Transformation

$$(2) \qquad \bar{a}^{ikl\cdots} = a^{rst\cdots} e_r^i \, e_s^k \, e_t^l \ldots$$

und man hat für die Symbolreihen $a$ (Koeffizienten von Linearformen)

$$(3) \qquad \bar{a}^i = a^r e_r^i.$$

Für eine ganze, rationale, projektive Invariante $P(a, \alpha, \ldots)$ der Grundformen gilt dann identisch in allen $e_i^k$ und Formenkoeffizienten:

$$(4) \qquad \bar{P} = P(\bar{a}, \bar{\alpha}, \ldots) = \Delta^s \cdot P(a, \alpha, \ldots).$$

Wir werden statt der Matrix $\|e_i^k\|$ die folgende nehmen:

$$(5)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} e_1^1\, e_1^2 \ldots e_1^n \\ e_2^1\, e_2^2 \ldots e_2^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e_n^1\, e_n^2 \ldots e_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1\, \eta_1 \ldots \zeta_1 \\ \xi_2\, \eta_2 \ldots \zeta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_n\, \eta_n \ldots \zeta_n \end{vmatrix} = (\xi\eta \ldots \zeta).$$

Dies hat zur Folge, daß jetzt die Gleichungen (3) durch

$$(6)\qquad \bar{a}^1 = (a\xi)\,,\quad \bar{a}^2 = (a\eta)\,,\quad \ldots,\ \bar{a}^n = (a\zeta)$$

dargestellt sind; (4) dagegen wird:

$$(7)\qquad \bar{P} = P((a\xi),\ (a\eta)\,, \ldots,\ (\alpha\xi)\,, \ldots) = (\xi\eta \ldots \zeta)^s \cdot P(a^1, a^2\,, \ldots,\ \alpha^1\,, \ldots).$$

$P$ nennen wir eine *freie* [1]) Invariante, wenn die Koeffizienten der Grundformen untereinander unabhängig sind.

Man kann eine freie projektive Invariante $P(a, \alpha\,, \ldots)$ auch durch Polaroperationen (Differentialgleichungen) charakterisieren. Bedeutet $D_{\xi\eta}$ die Operation

$$D_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi_1}\eta_1 + \frac{\partial}{\partial\xi_2}\eta_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial\xi_n}\eta_n,$$

so ist, wie aus (7) sofort abzulesen,

$$(8)\qquad D_{uv}\bar{P} = 0,\qquad D_{uu}\bar{P} = s\cdot\bar{P},$$

wo $u$ und $v \neq u$ zwei beliebige der $n$ Reihen $\xi,\ \eta\,, \ldots,\ \zeta$ sind.

Im Folgenden benötigen wir den Satz [2]): Ist $G(a, \alpha\,, \ldots)$ ein Polynom, homogen in den Koeffizienten jeder Grundform $f, g, \ldots$, und unterwirft man $\bar{G} = G(\bar{a}, \bar{\alpha}\,, \ldots)$ so oft dem Prozesse

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\xi_1} & \frac{\partial}{\partial\xi_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial\xi_n} \\ \frac{\partial}{\partial\eta_1} & \frac{\partial}{\partial\eta_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial\eta_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial\zeta_1} & \frac{\partial}{\partial\zeta_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial\zeta_n} \end{vmatrix}$$

bis $\Omega^m\bar{G}$ keine $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ mehr enthält, so ist $\Omega^m\bar{G}$ entweder

[1]) Ich folge mit der Benennung „frei" und „gebunden" der Bezeichnung Weyls im Zentralbl. f. Math. 4 (1932), 243.

[2]) D. Hilbert, Math. Ann. 36 (1890).

Null oder eine Invariante $P$. Der Beweis ist sehr einfach, wenn $G$ symbolisch geschrieben wird:

$$\overline{G}=G(\overline{a},\overline{\alpha},\ldots)=G((a\zeta),(a\eta),\ldots,(\alpha\xi),\ldots)$$

ist dann ein Polynom von Linearfaktoren, und der Satz ergibt sich dann auf Grund der Gleichung

$$\Omega((a\xi)\cdot(b\eta)\ldots(d\zeta))=(ab\ldots d).$$

Der Satz gilt genau so für $\Omega^{m+h}(\Delta^h\overline{G})$, wenn also $\overline{G}$ vorher mit einer Potenz von $\Delta$ multipliziert wird.

§ 2. *Gebundene Invarianten.*

Wir nehmen jetzt an, daß die Koeffizienten $a^{ikl\cdots}$, $\alpha^{rst\cdots}$, ... der Grundformen $f, g, \ldots$ untereinander abhängig sind, und daß diese Abhängigkeit durch ein projektiv-invariantes System von ganzen rationalen Relationen darstellbar ist:

$$(9)\quad S_1(a,\alpha,\ldots)=0,\ S_2(a,\alpha,\ldots)=0,\ \ldots,\ S_\nu(a,\alpha,\ldots)=0.$$

Jedes Polynom $S_\varrho$ ist hier homogen in den Koeffizienten von $f$, homogen in den Koeffizienten von $g$, u.s.f., und „projektiv-invariant" bedeutet:

Bildet man

$$\overline{S}_\varrho=S_\varrho(\overline{a},\overline{\alpha},\ldots)=S_\varrho((a\xi),\ldots,(\alpha\eta),\ldots),$$

so ist jeder Koeffizient $S^{pq\ldots r\ldots}$ des Polynoms

$$S_\varrho((a\xi),\ldots,(\alpha\eta),\ldots)=\sum S^{pq\ldots r\ldots}\xi_1^p\xi_2^q\ldots\eta_1^r\ldots$$

in (9) anwesend, d. h. es ist

$$\overline{S}_\varrho=\varphi_1 S_{\varrho_1}+\varphi_2 S_{\varrho_2}+\ldots,$$

wo die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Potenzprodukte der $\xi_i, \eta_k, \ldots, \zeta_l, \ldots$ sind und die $S_{\varrho_1}, S_{\varrho_2}, \ldots$ in (9) vorkommen. (9) zerfällt also in Teilsysteme, deren jedes einzelne entsteht, wenn man eine Kovariante

$$S_\varrho((a\xi),\ldots,(\alpha\eta),\ldots)$$

gleich Null setzt für alle $\xi, \eta, \ldots$ (Satz vom Gram [3])).

Eine *gebundene* projektive Invariante $P^*$ der Grundformen liegt dann vor, wenn die Gleichung (7) oder

$$(10)\qquad \overline{P}^*=(\xi\eta\ldots\zeta)^s\cdot P^*$$

[3]) J. P. Gram, Math. Ann. 7 (1873), 230—240.

für Grundformen $f, g, \ldots$ gilt, deren Koeffizienten an die Gleichungen (9) gebunden sind. Jede freie Invariante ist natürlich auch eine gebundene, aber nicht umgekehrt.

Man kann dies auch wie folgt formulieren. Im (eventuell mehrfach-projektiven) Koeffizientenraum $R$ der Grundformen stellt jedes $S_\varrho = 0$ eine Hyperfläche dar, und der Schnitt aller $S_\varrho = 0$ bestimmt eine Mannigfaltigkeit $M_s$, deren Punkte den gebundenen Formen entsprechen. Bei freien Invarianten gilt (7) für alle Punkte des Raumes $R$, bei gebundenen Invarianten gilt (10) für jeden Punkt von $M_s$; (10) gilt dann wohl identisch in allen $\xi, \eta, \ldots, \zeta$, aber nicht identisch in den Koeffizienten der Grundformen, d. h. $\overline{P}^* - \Delta^s \cdot P^*$ verschwindet auf $M_s$.

Aus allen homogenen Polynomen $T(a^{ikl\cdots}, \ldots)$ der Formenkoeffizienten, die auf der Mannigfaltigkeit $M_s$ verschwinden, läßt sich nach dem Hilbertschen Basissatz eine endlich Anzahl derart auswählen, daß jedes $T$ in der Gestalt

$$T = A_1 T_1 + A_2 T_2 + \ldots + A_\mu T_\mu \tag{11}$$

dargestellt werden kann. Daher ist nach (10) auch

$$\overline{P}^* - \Delta^s P^* = A_1 T_1 + \ldots + A_\mu T_\mu , \tag{12}$$

wo die $A_i$ Polynome der Formenkoeffizienten $a^{ikl\cdots}, \ldots$ und der $\xi, \eta, \ldots$ sind. Wenden wir jetzt den Prozess $\Omega^s$ an, so folgt

$$P - cP^* = B_1 T_1 + \ldots + B_\mu T_\mu , \tag{13}$$

wo die Konstante

$$c = \Omega^s(\Delta^s) = \frac{n!(n+1)! \ldots (n+s-1)!}{1!\ 2! \ldots (s-1)!} \neq 0.$$

(13) drückt den Satz von Deruyts [4]) aus:

*Jede gebundene projektive Invariante $P^*$ fällt auf $M_s$ mit einer freien projektiven Invariante $P$ zusammen.*

## § 3. *Schlußbemerkungen.*

Das Ersetzen des Gleichungssystems $S_1 = 0, S_2 = 0, \ldots, S_\nu = 0$ durch die Gleichungen $T_i = 0$ kann wie folgt interpretiert werden.

---

[4]) J. Deruyts, Essai d'une théorie générale des formes algébriques [Luik (1890), 154]. Deruyts sagt, daß gebundene Invarianten eine „particularité essentielle" besitzen; freie Invarianten nennt er „régulières".

Die Mannigfaltigkeit $M_s$ ist Nullstellenmannigfaltigkeit des Polynomideals $\mathfrak{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_\nu)$. Das Ideal $\mathfrak{T} = (T_1, \ldots, T_\mu)$ dagegen ist das zu $M_s$ „gehörige" Ideal [5]). Dann und nur dann ist $M_s$ irreduzibel, wenn $\mathfrak{T}$ ein Primideal ist.

Bei *freien* projektiven Invarianten $P$ gilt der leicht zu beweisende Satz: Ist $P$ in zwei ganze, nicht konstante Faktoren zerlegbar, $P = P_1 P_2$, so sind die $P_i$ wieder Invarianten. Bei *gebundenen* projektiven Invarianten gilt dies i. A. nicht mehr.

Dagegen bleibt die *Endlichkeit* der gebundenen Invarianten bestehen, wenn man sich auf die Mannigfaltigkeit $M_s$ beschränkt, d. h. mod $\mathfrak{T}$ bilden die gebundenen projektiven Invarianten einen endlichen Integritätsbereich. Dies folgt aus $P^* \equiv P \pmod{\mathfrak{T}}$ und der Endlichkeit aller freien Invarianten $P$.

Wir wollen schließlich noch an einem Beispiel zeigen, daß der Satz von Deruyts nicht auf die Invarianten aller linearer Gruppen $\mathfrak{G}$ übertragbar ist [6]). Er gilt nämlich nicht für die Semiinvarianten.

Sei z.B. $n = 2$ und $f = a_x^2 = a^{11}x_1^2 + 2a^{12}x_1x_2 + a^{22}x_2^2$ eine binäre quadratische Form. Sie hat die freien Semiinvarianten

$$J_1 = a^{22}, \qquad J_2 = a^{11}a^{22} - (a^{12})^2,$$

d. h. $J_1$ und $J_2$ sind absolute Invarianten bei den Transformationen

$$(14) \qquad \begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 \\ x_2 = \beta\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \bar{a}^1 = a^1 + \beta a^2 \\ \bar{a}^2 = \phantom{a^1 + \beta} a^2 \end{cases}.$$

Hier ist z.B. $J = a^{22} = 0$ eine semiinvariante Gleichung $S = 0$. Dann ist $J^* = a^{12}$ bezüglich dieses $S = 0$ eine gebundene Semiinvariante, denn wir haben nach (14):

$$\bar{J}^* = \bar{a}^{12} = a^{12} + \beta a^{22}, \text{ also } \bar{J}^* \equiv J^* \quad (\text{mod S}).$$

Es gibt aber keine freie Semiinvariante $J$, die auf $M_s$ mit $J^* = a^{12}$ zusammenfällt.

Die freien Semiinvarianten von binären Formen $f$ sind freie

---

[5]) Vgl. z.B. B. L. VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra II, 52 [Springer (1931)].

[6]) Einem Briefe von H. WEYL entnehme ich ein Verfahren, das — obwohl nicht algebraisch — so schön und einfach ist, daß ich es hier mitteilen möchte. Ist die lineare Gruppe $\mathfrak{G}$ geschlossen und $J^*$ eine gebundene Invariante bezüglich $\mathfrak{G}$, $s$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$, so gibt die Integration über alle Elemente $s$ von $\mathfrak{G}$

$$J = \int s(J^*) \cdot ds, \qquad \int ds = 1$$

zu jedem $J^*$ eine *freie* $\mathfrak{G}$-Invariante $J$. Für $\mathfrak{G}$ = unitäre Gruppe ergibt sich der Satz von Deruyts.

projektive Invarianten dieser Formen und der Linearform $l_x = l^1 x_1 + l^2 x_2 = -x_1$. Dies ist i. A. nicht auf gebundene Semiinvarianten übertragbar, d. h. gebundene Semiinvarianten der $f$ sind i. A. nicht auch gebundene projektive Invarianten von $f$ und $l_x$.

(Eingegangen den 22. November 1933.)