COMPOSITIO MATHEMATICA

D. VAN DANTZIG

Zur topologischen Algebra. II. Abstrakte bv-adische Ringe

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 201-223
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__201_0>

Zur topologischen Algebra

II. Abstrakte $\mathfrak{b}_\nu$-adische Ringe

von

D. van Dantzig

Delft (Holland)

Seite

§ 1. *Einleitung.*

Als erste Anwendung der in der ersten Arbeit dieser Reihe [1]) behandelten Komplettierungstheorie ist diese Arbeit der Theorie der $\mathfrak{b}_\nu$-adischen Ringe gewidmet, d.h. der durch Topologisierung nach den Restklassen nach einer Vielfachenkette von Idealen und nachträgliche Komplettierung entstandenen topologischen Ringe. Solche Ringe sind zuerst von K. Hensel [1, 2] [2]) eingeführt und sehr eingehend untersucht worden (die ganzen p-adischen, q-adischen und $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen bilden solche Ringe). Später hat H. Prüfer [2] seine „idealen'' Zahlen eingeführt, unter denen die ganzen (bei gegebenem Ausgangskörper) gleichfalls einen Ring bilden. In dieser Arbeit wird der Begriff ganz allgemein und abstrakt gefaßt. Die Sätze der einleitenden §§ 2 bis 5 habe ich (zwecks Verwendung in späteren Arbeiten) sehr allgemein gehalten, sogar für nichtkommutative Ringe formuliert. In den

[1]) D. van Dantzig, Zur topologischen Algebra, I. Komplettierungstheorie [Math. Ann. 107 (1932), 587—626], zitiert als I. (Die dort S. 588, Fußnote [3]) genannten Titel und die Reihenfolge der Arbeiten habe ich seitdem geändert.

[2]) Die Nummern zwischen eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis in I, 623—626.

weiteren §§ wird meistens Kommutativität vorausgesetzt, und es werden dann die Ringe allmählich weiter spezialisiert. Die typisch nicht-kommutativen Ergebnisse werde ich erst in einer späteren Arbeit bringen.

In einer an andrer Stelle zu veröffentlichenden Arbeit [3]) werde ich den wichtigsten Spezialfall: die $\nu!$-adischen oder universellen (d. s. Prüfers ganze rationale ideale) Zahlen eingehender behandeln, weil diese Zahlen für die Theorie der $\mathfrak{B}_\nu$-adischen Gruppen [4]) eine große Bedeutung haben; diese entspricht ganz der Bedeutung der *natürlichen* Zahlen für die Theorie der *endlichen* Gruppen. Die in dieser Arbeit bewiesenen Sätze habe ich zum größten Teil schon (wenigstens für kommutative Ringe) im Jahre 1928 bewiesen und 1931 in meiner Dissertation [5]) veröffentlicht. Für den Spezialfall der Prüferschen Zahlen wurden die entsprechenden Sätze (ausgenommen die Isomorphiesätze TR. 28, 29 und die Sätze von §§ 4, 5, 7) zum größten Teil schon 1926 von J. von Neumann [1] bewiesen. Insbesondere erwähne ich die Zerlegungssätze TR. 39 und 41, sowie die Sätze TR. 48—52 des § 8, die ganz den v. Neumannschen Sätzen entsprechen. Auch die Beweismethode stimmt hier im wesentlichen mit der v. Neumannschen überein.

§ 2. $\mathfrak{b}_\nu$-*adische Ringe.*

TR. 24. *Ist* $\mathfrak{b}_\nu$ *eine Vielfachenkette von zweiseitigen Idealen in einem beliebigen abzählbaren* [6]) *Ring* $\mathfrak{R}$, *deren Durchschnitt das Nullideal ist, so definieren die Restklassen nach den* $\mathfrak{b}_\nu$ $\mathfrak{R}$ *als topologischen Ring.*

Beweis. Es sei also:

$$\mathfrak{b}_\nu - \mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{b}_\nu, \quad \mathfrak{b}_\nu \mathfrak{R} \subset \mathfrak{b}_\nu, \quad \mathfrak{R}\mathfrak{b}_\nu \subset \mathfrak{b}_\nu, \quad \therefore \mathfrak{R}\mathfrak{b}_\nu\mathfrak{R} \subset \mathfrak{b}_\nu, \tag{1}$$

$$\mathfrak{b}_{\nu+1} \equiv 0\,(\mathfrak{b}_\nu) \tag{2}$$

$$[\mathfrak{b}_\nu] = [\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots] = (0), \tag{3}$$

$$U_n(x) = x + \mathfrak{b}_n = \{y\}_{y \equiv x(\mathfrak{b}_n)}. \tag{4}$$

Daß die $U_\nu(x)$ den Umgebungsaxiomen T. 1 bis 5 (I, 594) genügen, ist leicht zu verifizieren. Wir führen nur den Beweis von T. 4 an: Ist $x \neq y$, so ist $x - y \not\equiv 0(0)$, also wegen (3) gibt es ein n mit

[3]) D. van Dantzig, Nombres universels ou $\nu!$-adiques. Erscheint in Annales Ecole Norm.

[4]) D. van Dantzig, Zur topologischen Algebra, III. Brouwersche und Cantorsche Gruppen, zitiert als III. Erscheint denmächst in dieser Zeitschrift.

[5]) D. van Dantzig [3].

[6]) Die Bedingung der Abzählbarkeit ist wieder unwesentlich und kann durch die Forderung oder die Hypothese der Wohlordenbarkeit ersetzt werden.

$x - y \not\equiv 0(\mathfrak{b}_n)$. Dann ist aber $\mathfrak{D}(U_n(x), U_n(y)) = \circ$. Denn würde dieser Durchschnitt ein Element z enthalten, so wäre $z \equiv x(\mathfrak{b}_n)$, $z \equiv y(\mathfrak{b}_n)$, also $x - y \equiv 0(\mathfrak{b}_n)$.

Ist nun $x_\nu \to x$, $y_\nu \to y$, also $x_\nu \equiv x(\mathfrak{b}_\mu)$, $y_\nu \equiv y(\mathfrak{b}_\lambda)$, $\mu \to \infty$, $\lambda \to \infty$, so kann man $\lambda = \mu$ annehmen, indem man beide durch hr Minimum ersetzt. Dann ist aber auch $x_\nu \pm y_\nu \equiv x \pm y(\mathfrak{b}_\mu)$, $x_\nu y_\nu \equiv xy(\mathfrak{b}_\mu)$, also den Axiomen TR. 1, 2, (I, 617) wird auch genügt, d.h. $\mathfrak{R}$ ist ein T-Ring.

Bemerkung 1. Jede Fundamentalfolge ist mit einer *reduzierten* Folge konkurrent, d. i. einer Folge x_ν für die $x_{\nu+1} - x_\nu \equiv 0(\mathfrak{b}_\nu)$ ist.

Bemerkung 2. Die Ideale $\mathfrak{b}_\nu$ sind offen, also wegen TR 4 (I, 618) auch abgeschlossen.

TR. 25. *Der in* TR 24. *definierte* T-*Ring ist komplettierbar.*

Beweis. Ist $\{x_\nu\}$ eine Nullfolge, also $x_\nu \equiv 0(\mathfrak{b}_\lambda)$, $\lambda \to \infty$, y_ν eine beliebige Folge (also nicht notwendig eine Fundamentalfolge), so ist $x_\nu y_\nu \equiv y_\nu x_\nu \equiv 0(\mathfrak{b}_\lambda)$, also $x_\nu y_\nu$ und $y_\nu x_\nu$ sind auch Nullfolgen. Also ist $\mathfrak{R}$ komplettierbar gemäß TR. 21, 23 (I, 620).

TR 26. *Definition.* Die Komplettierung $\tilde{\mathfrak{R}}$ des in TR. 24 definierten T-Ringes heißt der $\mathfrak{b}_\nu$*-adische Ring über* $\mathfrak{R}$ und wird mit $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ bezeichnet.

Bemerkung 1. Ist der Durchschnitt $\mathfrak{b} = [\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots]$ *nicht* das Nullideal, so kann man das Verfahren von TR. 24 dennoch anwenden. Nur gilt dann T. 4 nicht mehr für die *Elemente* von $\mathfrak{R}$, sondern für die *Restklassen modulo* $\mathfrak{b}$, d.h. es wird nicht $\mathfrak{R}$ selbst, sondern der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}$ topologisiert. *Wir lassen weiterhin die Bedingung* (3), d.h. $\mathfrak{b} = (0)$, fallen, und gestatten also, daß $\tilde{\mathfrak{R}}$ einen mit $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}$ anstatt mit $\mathfrak{R}$ isomöomorphen überall dichten Teilring enthält. Das einem Elemente $x \varepsilon \mathfrak{R}$ entsprechende Element $(x+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ von $\tilde{\mathfrak{R}}$ wird gleichfalls mit x bezeichnet, das einem Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{R}$ entsprechende Ideal $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}'$. Insbesondere wird $\mathfrak{R}$ auf den in $\tilde{\mathfrak{R}}$ dichten Ring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{b}$ abgebildet. N. B. $\mathfrak{a}'$ ist ein Ideal bzgl. $\mathfrak{R}'$, nicht bzgl. $\tilde{\mathfrak{R}}$. Es ist $\mathfrak{b}' = [\mathfrak{b}_1', \mathfrak{b}_2', \ldots] = (0)$. *Wenn nötig* werden Elemente oder Mengen in $\mathfrak{R}'$ bzw. $\tilde{\mathfrak{R}}$ mit einem $'$ bzw. $\tilde{}$ bezeichnet.

Bemerkung 2. Sind alle (oder fast alle) $\mathfrak{b}_\nu$ gleich, $\therefore \mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu) = \mathfrak{R}/\mathfrak{b}$. Restklassenringe sind also $\mathfrak{b}_\nu$-adische Ringe spezieller Art. Sind alle $\mathfrak{b}_\nu = (0)$, so ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu) = \mathfrak{R}$, d.h. jeder diskrete[6a]) Ring ist $\mathfrak{b}_\nu$-adisch. Dieser letztere triviale Fall bleibe übrigens weiterhin außer Betracht.

[6a]) Eine T-Menge heißt *diskret*, falls kein Punkt Häufungspunkt von andren Punkten der Menge ist.

Bemerkung 3. Man kann den kompletten Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ auch definieren als die Menge aller Restklassenschachtelungen $\{x_\nu + \mathfrak{b}_\nu\}$ (wo also $x_{\nu+1} + \mathfrak{b}_{\nu+1} \subset x_\nu + \mathfrak{b}_\nu$, d.h. $(x_{\nu+1} - x_\nu) \varepsilon \mathfrak{b}_\nu$ ist).

Bemerkung 4. Man kann das Verfahren von TR. 24 („Topologisierung nach den Restklassen einer Vielfachenkette und nachträgliche Komplettierung") auch anwenden, falls $\mathfrak{R}$ selbst schon ein (nicht notwendig abzählbarer) *topologischer* Ring ist, vorausgesetzt daß die $\mathfrak{b}_\nu$ (in der ursprünglichen Topologisierung) *offene*[7]) Ideale sind. Werden die $\mathfrak{b}_\nu$ beliebig klein (d.h. gibt es zu jeder ursprünglichen Umgebung U der Null ein $\mathfrak{b}_n \subset U$, so ist die neue Topologisierung mit der alten äquivalent. In diesem Fall ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ einfach die *Komplettierung* von $\mathfrak{R}$, also mit $\mathfrak{R}$ identisch, falls $\mathfrak{R}$ selbst schon komplett ist.

Bemerkung 5. In $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ bilden die abgeschlossenen Ideale $\overline{\mathfrak{b}'_\nu}$ eine Vielfachenkette von offenen Idealen; diese werden beliebig klein. Weil $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ selbst schon komplett ist, ist also $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)\,(\overline{\mathfrak{b}'_\nu}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$. Wir können also weiterhin die Entstehungsweise von $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ aus einem *abzählbaren* Unterring $\mathfrak{R}$ außer Betracht lassen und einfach annehmen, daß $\mathfrak{b}_\nu$ *eine die Null oder ein Ideal* $\mathfrak{b}$ *definierende Folge von offenen* (also auch abgeschlossenen) *zweiseitigen Idealen in* $\tilde{\mathfrak{R}}$ *ist, und daß* $\tilde{\mathfrak{R}}$ *komplett ist.* Der zuerst betrachtete Fall ist darunter begriffen: als ursprüngliche Topologisierung von $\tilde{\mathfrak{R}}$ wähle man diejenige, in der $\mathfrak{R}$ *diskret* ist, jedes Element also für sich eine offene Menge bildet.

TR. 27. *Jeder* $\mathfrak{b}_\nu$*-adische Ring ist nulldimensional.*

Beweis. Die $\mathfrak{b}_\nu$ sind offen und abgeschlossen und definieren die Null. Also folgt die Behauptung aus TG. 9 (I, 608).

TR. 28. *Homomöomorphiesatz Sind* $\mathfrak{b}_\nu$ *und* $\mathfrak{c}_\nu$ *Vielfachenketten von zweiseitigen Idealen in* $\mathfrak{R}$ *und gibt es eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen* n_ν, *derart daß für alle* ν

$$\mathfrak{c}_{n_\nu} \equiv 0(\mathfrak{b}_\nu)$$

ist, so ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ *eindeutiges stetiges homomorphes Bild von* $\mathfrak{R}(\mathfrak{c}_\nu)$.

Beweis. Ist $\{x_\nu\}$ eine Fundamentalfolge bzgl. der $\mathfrak{c}_\nu$, also $x_{\mu+1} \equiv x_\mu(\mathfrak{c}_\nu)$, $\mu \geqq k_\nu$, so ist a fortiori $x_{\mu+1} \equiv x_\mu(\mathfrak{b}_\nu)$, $\mu \geqq k_{n_\nu}$, d.h. $\{x_\nu\}$ ist auch eine Fundamentalfolge bzgl. der $\mathfrak{b}_\nu$. Weil konkurrente

7) Bei Gruppen ist die entsprechende Bedingung (Offenheit der Normalteiler) nicht notwendig; die Abgeschlossenheit genügt da. Falls die Normalteiler nulldimensional sind, erhält man durch Umtopologisierung und Komplettierung Gruppen vom solenoidalen Typus. Vgl. D. van Dantzig [2], sowie: Groupes monoboliques et fonctions presque périodiques [C. R. **196** (1933), 1074—1076], Le groupe fondamental d'un groupe compact abstrait [ibidem, 1156—1158].

Folgen bzgl. der $\mathfrak{c}_\nu$ in ebensolche bzgl. der $\mathfrak{b}_\nu$ übergehen, entspricht jedem Elemente von $\mathfrak{R}(\mathfrak{c}_\nu)$ eindeutig ein Element von $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$. Offenbar ist diese Zuordnung eine homomorphe und eindeutig stetige, also eine Homomöomorphie.

Bemerkung 1. Ist $\bar{\mathfrak{b}}_\nu$ die Abschließung von $\mathfrak{b}_\nu$ in $\mathfrak{R}(\mathfrak{c}_\nu)$, und $\mathfrak{d} = [\bar{\mathfrak{b}}_1, \bar{\mathfrak{b}}_2, \cdot\ \cdot]$, so ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu) \cong \mathfrak{R}(\mathfrak{c}_\nu)/\mathfrak{d}$ [7a]. Es ist zu beachten, daß keineswegs $\mathfrak{d} = \bar{\mathfrak{b}}$ ist, so daß aus $\mathfrak{b} = (0)$ keineswegs $\mathfrak{d} = (0)$ folgt. *Beispiel*: $\mathfrak{R}$ = Ring der ganzen rationalen Zahlen, $\mathfrak{b}_\nu = (p^\nu)$, p prim, $\mathfrak{c}_\nu = (pq)^\nu$, $q \not\equiv 0(p)$. Nach Hensel [2, S. 78] ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{c}_\nu)$ direkte Summe von mit $\mathfrak{R}(p^\nu)$ und $\mathfrak{R}(q^\nu)$ isomorphen Ringen, also ist $\mathfrak{d} \cong \mathfrak{R}(q^\nu)$, obwohl $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = (0)$ ist.

Bemerkung 2. Spezialfall $\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} \equiv 0(\mathfrak{b})$. Dann ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}$ homomorphes Bild von $\mathfrak{R}/\mathfrak{c}$, nämlich $\mathfrak{R}/\mathfrak{b} \cong (\mathfrak{R}/\mathfrak{c})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{c})$.

TR. 29. *Isomöomorphiesatz. Sind* $\mathfrak{b}_\nu$ *und* $\mathfrak{c}_\nu$ *zwei Vielfachenketten von zweiseitigen Idealen in* $\mathfrak{R}$ *und gibt es zwei monoton wachsende Folgen natürlicher Zahlen* m_ν *und* n_ν *derart, daß für alle* ν

$$\mathfrak{b}_{m_\nu} \equiv 0(\mathfrak{c}_\nu), \quad \mathfrak{c}_{n_\nu} \equiv 0(\mathfrak{b}_\nu)$$

ist, so sind $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ *und* $\mathfrak{R}(\mathfrak{c}_\nu)$ *isomöomorph.*

Beweis. Ist $\{x_\nu\}$ eine Nullfolge bzgl. der $\mathfrak{b}_\nu$, so ist $x_\mu \equiv 0(\mathfrak{b}_\nu)$, $\mu \geqq k_\nu$, also $x_\mu \equiv 0(\mathfrak{b}_\nu)$ für $\mu \geqq k_{m_\nu}$, d.h. $\{x_\nu\}$ ist auch eine Nullfolge bzgl. der $\mathfrak{c}_\nu$. Bei der Abbildung nach TR. 28 wird also nur die Null von $\mathfrak{R}(\mathfrak{c}_\nu)$ auf die Null von $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ abgebildet (d.h. $\mathfrak{d} = (0)$), d.h. die Abbildung ist eineindeutig, folglich eine Isomöomorphie.

§ 3. *Beispiele.*

A. *Beispiele in Zahlenringen.*

1. $\mathfrak{R}$ = Ring der ganzen Zahlen aus einem algebraischen Zahlkörper; $\mathfrak{p}$ = ein Primideal aus $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}^\nu)$ = Ring der ganzen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen von Hensel [1]. Ist speziell $\mathfrak{R}$ der Ring der ganzen *rationalen* Zahlen, so erhält man für $\mathfrak{b}_\nu = (p^\nu)$, p prim die (ganzen) p-adischen, für $\mathfrak{b}_\nu = (g^\nu)$ (g beliebig) die (ganzen) g-adischen Zahlen von Hensel [2]. Für $g = 0$ ist $\mathfrak{R}(0^\nu)$ gleich $\mathfrak{R}$ selbst; für $g = 1$ ist $\mathfrak{R}(1^\nu) = \mathfrak{R}/\mathfrak{R}$ der „leere Ring", d.h. der Ring der nur aus einer Null besteht.

2. $\mathfrak{R}$ wie oben; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ seien sämtliche Primideale aus $\mathfrak{R}$, irgendwie geordnet; $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{p}_1^n \mathfrak{p}_2^{n-1} \ldots \mathfrak{p}_{n-2}^2 \mathfrak{p}_n$; $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ = Ring der (ganzen) „idealen Zahlen" von Prüfer [2], J. von Neumann [1]. Wegen des Isomorphiesatzes TR. 29 kann man allgemeiner $\mathfrak{b}_n = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ setzen, wo die $\mathfrak{a}_\nu$ die sämtlichen (irgendwie

---

[7a]) Gemäß TG. 6 (I, S. 607) bedeutet $\cong$ „ist isomöomorph mit".

angeordneten) Ideale von $\mathfrak{R}$ durchlaufen, oder auch, einfacher $\mathfrak{d}_n = (\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)^n$ setzen. Anstatt „ideale" Zahlen sagen wir lieber „*universelle Zahlen*" *über* $\mathfrak{R}$ [8]), und falls speziell $\mathfrak{R}$ der Ring der ganzen *rationalen* Zahlen ist, *universelle Zahlen* schlechthin. Weil $\mathfrak{d}_n$ in $N_n = N(\mathfrak{d}_n)$ (d.h. absolute Norm von $\mathfrak{d}_n$), also a fortiori in $N_n!$ aufgeht, während anderseits jedes $m!$ Basis eines $\mathfrak{a}_n$ ist, also in einem $\mathfrak{d}_n$ aufgeht, ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{d}_\nu) \overset{\frown}{\underset{\smile}{=}} \mathfrak{R}(\nu!)$, so daß wir die universellen Zahlen auch $\nu!$-adische Zahlen nennen können.

In den beiden Beispielen erhält man die gebrochenen Zahlen Hensels bzw. Prüfers einfach durch Quotientenbildung.

B. *Beispiele in Polynomringen* $\mathfrak{K}[\xi, \eta]$; $\mathfrak{K}$ sei z.B. der Körper der rationalen Zahlen. Mit $f_\nu \to f$ soll immer gemeint sein, daß die Polynome $f_\nu = f_\nu(\xi, \eta)$ $\mathfrak{d}_\nu$-adisch gegen f konvergieren. Im allgemeinen wird dann $f = f(\xi, \eta)$ eine formale Potenzreihe sein, die nicht im gewöhnlichen Sinne zu konvergieren braucht. Die nachfolgenden *geometrischen* Veranschaulichungen haben offenbar nur dann Sinn, wenn die $f(\xi, \eta)$ auch im gewöhnlichen Sinne, z.B. als analytische Funktionen, existieren. In diesem Falle zeigen sie eine gewisse Beziehung zwischen $\mathfrak{d}_\nu$-adischer und gewöhnlicher Konvergenz. Dazu sei noch bemerkt, daß die $\mathfrak{d}_\nu$-adische Konvergenz keinesfalls *notwendig* für die entsprechende geometrische Approximation ist (hinreichend ist sie wohl, falls die Grenzfunktion existiert). Dazu müßte man ja auch die topologischen Beziehungen im Körper $\mathfrak{K}$ selbst mit in Betracht ziehen und als Umgebungen der Null im Ringe $\mathfrak{R}(\mathfrak{d}_\nu)$ nicht die Ideale $\mathfrak{d}_\nu$ selbst, sondern die topologischen *Produkte* aus solchen Idealen und Umgebungen der Null im Körper definieren. Man erhielte so Ringe, die nicht mehr vom $\mathfrak{d}_\nu$-adischen, sondern vom solenoidalen Typus [9]) und nicht mehr nulldimensional, sondern (wenn der Ausgangskörper $\mathfrak{K}$ zusammenhängend ist) unendlichdimensional wären.

3. $\mathfrak{d}_n = (\xi, \eta)^n$. Falls $f_\nu = f_\nu(\xi, \eta)$ $\mathfrak{d}_\nu$-adisch gegen $f = f(\xi, \eta)$ konvergiert, approximieren die f_ν f immer genauer in $O = (0, 0)$ Geometrisch: die Flächen $\zeta = f_\nu(\xi, \eta)$ im (ξ, η, ζ)-Raum haben mit $\zeta = f(\xi, \eta)$ in O eine Berührung von immer höherer Ordnung. Wegen $(\xi, \eta)^{2\nu-1} \equiv 0(\xi^\nu, \eta^\nu) \equiv 0(\xi, \eta)^\nu$ ist $\mathfrak{R}((\xi, \eta)^\nu)$ mit $\mathfrak{R}(\xi^\nu, \eta^\nu)$ isomorph.

4. $\mathfrak{d}_n = (\xi^n)$ bzw. $\mathfrak{d}_n = (f(\xi, \eta))^n$. Die f_ν haben mit f eine

---

[8]) Weil das Wort „ideal" schon andre Bedeutungen hat, und die Bedeutung des universellen Ringes über $\mathfrak{R}$ derjenigen der universellen Überlagerungsgruppen und -flächen genau entspricht.

[9]) Vgl. Fußnote [7]).

Berührung von immer höherer Ordnung über allen Punkten der η-Achse bzw. der Kurve $f(\xi, \eta) = 0$.

5. $\mathfrak{d}_n = (\xi^n, \eta)$. Die Durchschnittskurven von f_ν bzw. f mit der (ξ, ζ)-Ebene schneiden sich über O und approximieren letztere daselbst immer genauer.

6. $\mathfrak{d}_n = \left(\prod_{i=1}^{n} (\eta - m_i\xi),\ (\xi, \eta)^{n+1}\right)$. Die f_ν durchschneiden f über O in immer mehr gegebenen Richtungen.

7. $\mathfrak{d}_n = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n$, $\mathfrak{p}_n = (\xi - a_n, \eta - b_n)$. Die f_ν haben mit f immer mehr Punkte (a_ν, b_ν) gemeinsam.

8. $\mathfrak{d}_n = (\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_n)^n$, $\mathfrak{p}_n$ wie oben. Die f_ν berühren f überdies in allen diesen Punkten immer stärker.

§ 4. *Spezielle $\mathfrak{d}_\nu$-adische Ringe.*

TR. 30. *Definition.* Der $\mathfrak{d}_\nu$-adische Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{d}_\nu)$ heißt *universell* (bzgl. $\mathfrak{R}$), falls zu jedem Ideale $\mathfrak{a} \neq (0) \subset \mathfrak{R}$ ein $\mathfrak{d}_n \subset \mathfrak{a}$ existiert. Man erhält den universellen Ring über den (als abzählbar und der Endlichkeitsbedingung R. 26 genügend vorausgesetzten[9a])) Ring $\mathfrak{R}$ wenn man die sämtlichen Ideale von $\mathfrak{R}$ in irgendeiner Reihenfolge $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ abzählt, und z.B. $\mathfrak{d}_n = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ setzt. Wegen des Isomorphiesatzes TR. 29 ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{d}_\nu)$ von der gewählten Reihenfolge unabhängig. *Beispiele*: 2 und 7.

TR. 31. *Definition.* Ein $\mathfrak{d}_\nu$-adischer Ring heißt $\mathfrak{p}$-*adisch*, falls $\mathfrak{d}_\nu = \mathfrak{p}^\nu$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Im engeren Sinne nennen wir $\mathfrak{R}(\mathfrak{d}_\nu)$ auch $\mathfrak{p}$-adisch, falls überdies $\mathfrak{p}$ teilerlos ist und die $\mathfrak{p}^\nu$ eine Kompositionsreihe bilden. In diesem Falle ist $\mathfrak{p} = (\pi)$ Hauptideal (vgl. § 8) und $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}^\nu) = \mathfrak{R}(\pi^\nu)$ heißt auch π-*adisch*. *Beispiele*: 1, 4 (falls $f(\xi, \eta)$ irreduzibel ist.) (Im weiteren Sinne auch 3.)

TR. 32. *Definition.* Der $\mathfrak{d}_\nu$-adische Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{d}_\nu)$ heißt *primitiv*, falls die $\mathfrak{d}_\nu = \mathfrak{q}_\nu$ primäre Ideale sind, die alle zum selben Primideal $\mathfrak{p}$ gehören. *Beispiele*: 3, 5 und die $\mathfrak{p}$-adischen.

TR. 33. *Jeder $\mathfrak{d}_\nu$-adische Ring über $\mathfrak{R}$ ist homomöomorphes Bild vom universellen Ring über $\mathfrak{R}$.*

Beweis. Ergibt sich sofort aus dem Homomöomorphiesatz TR. 28.

Bemerkung. Dieser Satz rechtfertigt das Wort „universell": der universelle Ring über $\mathfrak{R}$ entspricht also gewissermaßen einer universellen Überlagerungsfläche oder -gruppe.

TR. 34. *Definition.* Ein *Cantorscher Ring* bzw. ein *offener Cantorscher Ring* ist ein mit der Cantorschen Menge homöomorpher

[9a]) Man kann auch zulassen, daß $\mathfrak{R}$ schon topologisiert und nicht-abzählbar ist, wenn man $\mathfrak{a}_\nu$ sämtliche *offene* Ideale durchlaufen läßt.

oder endlicher, bzw. ein mit der offenen Cantorschen Menge homöomorpher oder diskreter Ring. Vgl. T. 23, 24 (I, 597).

TR. 35. *Jeder $\mathfrak{b}_\nu$-adische Ring, für den alle Restklassenringe $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}_n$ endlich sind, ist Cantorsch.*

Beweis. Wegen TR. 27 genügt es, zu beweisen, daß $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ kompakt ist. Ist x_ν eine beliebige Folge von Elementen aus $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$, $x_{0\nu}$ eine ihr entsprechende Folge im Ausgangsring $\mathfrak{R}$ (so daß $x_\nu = (x_{0\nu} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ ist) und $x_{n\nu}$ eine solche Teilfolge von $x_{n-1,\nu}$, daß $x_{n\nu} \equiv x_{n1}(\mathfrak{b}_n)$ ist für alle ν, so ist diese Bedingung für $n = 0$ erfüllt, wenn wir $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{R}$ setzen. Es gibt dann modulo $\mathfrak{b}_{n+1}$ nur endlich viele Reste, weil $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}_{n+1}$ endlich ist; einer von ihnen muß also unendlich oft vorkommen; die entsprechende Teilfolge von $x_{n\nu}$ sei $x_{n+1,\nu}$, so daß die Induktionsvoraussetzung erfüllt ist. Für die Folge $y_\nu = x_{\nu\nu}$ gilt dann $y_\nu \equiv y_n(\mathfrak{b}_n)$ für alle $\nu \geqq n$, d.h. die y_ν bilden eine (reduzierte) Fundamentalfolge. Weil $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ komplett ist, konvergieren sie also gegen ein Element $y \varepsilon \mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$, d.h. $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ ist kompakt. Falls alle $\mathfrak{b}_\nu \neq \mathfrak{b}$ sind, gibt es eine Nullfolge von Elementen $\neq 0$; also ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ dann in sich dicht und mit der Cantorschen Menge homöomorph. Sind dagegen fast alle $\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu) = \mathfrak{R}/\mathfrak{b}$ endlich.

Verschärfung. Sind fast alle Restklassenideale $\mathfrak{b}_{\nu+1}/\mathfrak{b}_\nu$ endlich, so ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ offen Cantorsch.

Beweis. Nach Voraussetzung sind alle $\mathfrak{b}_{\nu+1}/\mathfrak{b}_\nu$ für $\nu \geqq n$ endlich. Der Beweis von TR. 35 bleibt dann gültig, falls fast alle x_ν in $\mathfrak{b}_n$ liegen. Also ist $\bar{\mathfrak{b}}_n$ kompakt und $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ mikrokompakt, woraus wegen TR. 27 die Behauptung unmittelbar folgt.

TR. 36. *Jeder Cantorsche Ring $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{b}_\nu$-adisch; alle Restklassenringe $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}_n$ sind endlich.* (Umkehrung von TR. 35).

Beweis. Zu beweisen ist, daß jede Umgebung U der Null ein zweiseitiges offenes Ideal enthält. Aus dem entsprechenden gruppentheoretischen Satz TG. 40[10]) geht hervor, daß jedes U eine offene additive Gruppe enthält. Ist nun β_ν eine die Null definierende Folge von offenen additiven Gruppen, so sind die von ihnen erzeugten zweiseitigen Ideale $\mathfrak{b}_\nu = \beta_\nu + \mathfrak{R}\beta_\nu + \beta_\nu\mathfrak{R} + \mathfrak{R}\beta_\nu\mathfrak{R}$ gleichfalls offen. Wäre kein $\mathfrak{b}_n$ in U enthalten, so gäbe es eine Folge von Elementen

$$x_\nu = u_{1\nu} + a_{1\nu}u_{2\nu} + u_{3\nu}a_{2\nu} + a_{3\nu}u_{4\nu}a_{4\nu}, \quad u_{i\nu}\varepsilon\beta_\nu, \quad a_{i\nu}\varepsilon\mathfrak{R} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

außerhalb von U. Weil $\mathfrak{R}$ kompakt ist, gäbe es eine Teilfolge, für die alle $a_{i\nu}$ konvergieren: $a_{i\nu} \to a_i$. Wegen $u_{i\nu} \to 0$ wäre also $x_\nu \to 0$, im Widerspruch zur Annahme daß x_ν nicht in U läge.

---

[10]) Vgl. die in Fußnote [4]) genannte Arbeit III.

Also definieren die $\mathfrak{b}_\nu$ die Null, d.h. $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{b}_\nu$-adisch. Daß $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}_n$ endlich sein muß, folgt daraus, daß dieser Restklassenring diskret und eindeutiges stetiges Bild von $\mathfrak{R}$, also kompakt ist.

TR. 37. *Die n-reihigen Matrices mit Bestimmungszahlen aus einem $\mathfrak{b}_\nu$-adischen Ring $\mathfrak{R}$ bilden einen ebensolchen Ring $\mathfrak{R}^{(n)}$.* Ist *$\mathfrak{R}$ Cantorsch, so ist $\mathfrak{R}^{(n)}$ es auch.*

Beweis. Wir sagen, daß eine Matrix M durch ein (zweiseitiges) Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ teilbar ist, wenn ihre sämtlichen Bestimmungszahlen M_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar sind. Die sämtlichen durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Matrices bilden ein Ideal $\mathfrak{a}^{(n)}$ in $\mathfrak{R}^{(n)}$. Denn ist $\mathsf{M}_{ij} \equiv 0\ (\mathfrak{a})$, $\mathsf{N}_{ij} \equiv 0(\mathfrak{a})$, $\mathsf{K}_{ij} \varepsilon \mathfrak{R}$, so ist $\mathsf{M}_{ij} \pm \mathsf{N}_{ij} \equiv 0(\mathfrak{a})$, $\sum\limits_j \mathsf{M}_{ij}\mathsf{K}_{jk} \equiv 0(\mathfrak{a})$ und $\sum\limits_j \mathsf{K}_{ij}\mathsf{M}_{jk} \equiv 0(\mathfrak{a})$, d.h. mit M und N gehören auch $\mathsf{M} \pm \mathsf{N}$, MK und KM zu $\mathfrak{a}^{(n)}$. Die den $\mathfrak{b}_\nu$ in dieser Weise zugeordneten $\mathfrak{b}_\nu^{(n)}$ definieren offenbar $\mathfrak{R}^{(n)}$ als $\mathfrak{b}_\nu^{(n)}$-adischen Ring. Ist $\mathfrak{R}$ Cantorsch, so enthält $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}_\nu$ endlich viele, z.B. b_ν Elemente; dann enthält $\mathfrak{R}^{(n)}/\mathfrak{b}_\nu^{(n)}$ b_ν^n Elemente, also ist auch $\mathfrak{R}^{(n)}$ Cantorsch.

§ 5. *Vier Hilfssätze über allgemeine Ringe.*

Es sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Ring, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ seien irgend zwei Ideale in $\mathfrak{R}$.

R. 50. *Das Kongruenzsystem*

$$x \equiv c_1\ (\mathfrak{a}_1), \quad x \equiv c_2\ (\mathfrak{a}_2)$$

ist dann und nur dann lösbar, wenn

$$c_1 \equiv c_2\ (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$$

ist.

Beweis. Daß die Bedingung notwendig ist, ist klar. Andrerseits ergibt sie die Existenz zweier Elemente $a_1 \varepsilon \mathfrak{a}_1$, $a_2 \varepsilon \mathfrak{a}_2$ mit $c_1 - c_2 = a_1 - a_2$. Dann ist aber $x = c_1 - a_1 = c_2 - a_2$ eine Lösung. Diese ist offenbar modulo $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2]$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung 1. Der Satz gilt allgemein, wenn $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ zwei Untergruppen einer beliebigen Abelschen Gruppe $\mathfrak{R}$ sind.

Bemerkung 2. Die Bedingung ist offenbar immer erfüllt, wenn $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ teilerfremde Ideale sind.

R. 51. *Sind die endlich vielen zweiseitigen Ideale $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ im Ring $\mathfrak{R}$ mit Eins paarweise teilerfremd, so ist das Kongruenzsystem*

$$x \equiv c_i(\mathfrak{a}_i)$$

immer und modulo $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ eindeutig lösbar [11]).

---

[11]) Vgl. B. L. van der Waerden, [3] II, S. 46, wo der Satz für kommutative Ringe bewiesen wird. Für den Ring der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers kommt der Satz schon in Dedekinds 11. Supplement zu Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie vor (§ 180).

Beweis. Es sei

$$\mathfrak{x}_i = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n]$$

das Komplementärideal von $\mathfrak{a}_i$ in $\mathfrak{a}$. Dann ist wegen $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j) = (1)$ $(i \neq j)$ auch $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{x}_i) = (1)$. Denn aus der Voraussetzung folgt die Existenz von $n(n-1)$ Elementen $a_{ij} \varepsilon \mathfrak{a}_i$ $(j \neq i)$ mit $a_{ij} + a_{ji} = 1$. Dann enthält $1 = \prod\limits_{j \neq i} (a_{ij} + a_{ji})$ (i fest) erstens Glieder mit mindestens einem Faktor a_{ij}; diese sind alle $\equiv 0(\mathfrak{a}_i)$, weil $\mathfrak{a}_i$ *zweiseitiges* Ideal ist; zweitens enthält die Summe noch das Glied $\prod\limits_{j \neq i} a_{ji}$, das $\equiv 0(\mathfrak{x}_i)$ ist.

Für jedes i gibt es also ein x_i mit

$$x_i \equiv \begin{cases} 1(\mathfrak{a}_i) \\ 0(\mathfrak{x}_i) \equiv 0(\mathfrak{a}_j), \quad j \neq i. \end{cases}$$

Setzt man dann aber

$$x = \sum_{1}^{n} x_i c_i,$$

so ist x eine Lösung des Kongruenzsystems, die offenbar modulo $\mathfrak{a}$ eindeutig bestimmt ist.

Bemerkung. Für Ringe ohne Eins gilt Satz R. 51 (im Gegensatz zu R. 50) im allgemeinen nicht. *Gegenbeispiel*: $\mathfrak{R}$ ist der Ring der Polynome in zwei Unbestimmten ξ und η mit ganzen Koeffizienten, deren konstantes Glied Null ist. Dann sind die drei Gleichungen

$$f \equiv 0\ (\xi), \quad f \equiv 0\ (\eta), \quad f \equiv \xi\ (\xi + \eta)$$

nicht lösbar, obwohl $(\xi, \eta) = (\xi, \xi + \eta) = (\xi + \eta, \eta) = \mathfrak{R}$ ist.

R. 52. *Es sei* $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$ *ein vom Nullideal verschiedenes Ideal im kommutativen Ring* $\mathfrak{R}$ *mit Endlichkeitsbedingung,* $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{k'}]$ *ein Vielfaches von* $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}'$ *seien unverkürzbar dargestellt durch die größten primären Komponenten* $\mathfrak{q}_i$ *bzw.* $\mathfrak{q}'_j$, *und von den* $k + k'$ *zugehörigen Primidealen* $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}'_i$ *sei keins ein echtes Vielfaches eines andren* [11a]). *Dann kann durch Umordnung der* $\mathfrak{q}'_j$ *erreicht werden, daß*

$$\mathfrak{q}'_i \equiv 0(\mathfrak{q}_i), \qquad i = 1, \ldots, k,$$

ist, so daß insbesondre $k' \geqq k$ *ist.*

Vorbemerkung. Der Beweis ist so gestaltet, daß nur Kommutativität und Endlichkeitsbedingung, aber weder Vielfachenkettensatz, noch Existenz einer Eins vorausgesetzt zu werden braucht.

[11a]) Satz und Beweis bleiben gültig, wenn zu jedem $\mathfrak{p}_i$ höchstens ein $\mathfrak{p}'_j$ und zu jedem $\mathfrak{p}'_j$ höchstens ein $\mathfrak{p}_i$ existiert, so daß $\mathfrak{p}'_j \equiv 0(\mathfrak{p}_i)$ ist, ohne daß $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}'_j$ zu sein braucht.

Beweis. Das Primideal $\mathfrak{p}_i$ kann mit höchstens einem $\mathfrak{p}'_j$ identisch sein. *Wenn* ein solches $\mathfrak{p}'_j$ existiert, bringen wir $\mathfrak{q}'_j$ an die (durch $\mathfrak{q}'_j$ eindeutig bestimmte) i-te Stelle. Dann ist also sicher $\mathfrak{p}'_j \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)$ für $j \neq i$, also auch $\mathfrak{c}'_i \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)$, wenn $\mathfrak{c}'_i = [\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{i-1}, \mathfrak{q}'_{i+1}, \ldots, \mathfrak{q}'_{k'}]$ das Komplementärideal von $\mathfrak{q}'_i$ in $\mathfrak{a}'$ ist. Denn ist λ_j der Exponent von $\mathfrak{q}'_j$, also $\mathfrak{p}'^{\lambda_j}_j \equiv 0(\mathfrak{q}'_j)$, so würde aus $\mathfrak{c}'_i \equiv 0(\mathfrak{p}_i)$ für ein gewisses i folgen:

$$\prod_{j\neq i} \mathfrak{p}'^{\lambda_j}_j \equiv 0\ \Big(\prod_{j\neq i} \mathfrak{q}'_j\Big) \equiv 0\ (\mathfrak{c}'_j) \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i).$$

Es müßte also mindestens ein $\mathfrak{p}'_j$ $(j \neq i)$ durch $\mathfrak{p}_i$ teilbar sein, entgegen der Voraussetzung.

Nun ist aber

$$(\mathfrak{c}'_i, \mathfrak{q}_i)\,\mathfrak{q}'_i \equiv 0(\mathfrak{a}', \mathfrak{q}_i\mathfrak{q}'_i) \equiv 0(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_i) \equiv 0(\mathfrak{q}_i).$$

Der erste Faktor $(\mathfrak{c}'_i, \mathfrak{q}_i)$ kann nicht durch $\mathfrak{p}_i$ teilbar sein, weil schon $\mathfrak{c}'_i \not\equiv 0(\mathfrak{p}_i)$ ist. Also ist $\mathfrak{q}'_i \equiv 0(\mathfrak{q}_i)$, was zu beweisen war.

Bemerkung. Mit Hilfe einer kleinen Verschärfung der Voraussetzung bzgl. der *Verschiedenheit* der $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}'_j$ zu *Teilerfremdheit* der $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{q}'_j$, kann man auf die Primärität der $\mathfrak{q}'_i$, $\mathfrak{q}_i$ und damit auf die Kommutativität und die Endlichkeitsbedingung des Ringes verzichten. Der Ring muß dann aber eine Eins enthalten. Der Satz lautet dann folgendermaßen:

R. 52*a*. *Von $k'+k$ zweiseitigen Idealen $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{k'}; \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ in einem beliebigen Ring $\mathfrak{R}$ mit Eins sei jedes $\mathfrak{q}'_j$ bzw. $\mathfrak{q}_i$ $(i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, k')$ mit allen $\mathfrak{q}_i$ bzw. $\mathfrak{q}'_i$ bis auf höchstens eine Ausnahme teilerfremd. Ist dann $\mathfrak{a}' \equiv 0(\mathfrak{a})$, wo $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_{k'}]$, $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$ ist, so kann man durch Umordnung der $\mathfrak{q}'_j$ erreichen, daß $\mathfrak{q}'_i \equiv 0(\mathfrak{q}_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ wird, so daß insbesondre $k' \geqq k$ ist.*

Beweis. *Falls* zu einem gegebenen $\mathfrak{q}'_j$ ein Ausnahme-$\mathfrak{q}_i$ existiert, bringen wir $\mathfrak{q}'_j$ an die i-te Stelle, so daß jedenfalls $(\mathfrak{q}'_j, \mathfrak{q}_i) = (1)$ für $j \neq i$ ist. Dann ist (wie man ebenso wie in R. 51 beweist) auch $(\prod_{j\neq i} \mathfrak{q}'_j, \mathfrak{q}_i) = (1)$, also, wenn $\mathfrak{c}'_i$ wie oben definiert wird, $(\mathfrak{c}'_i, \mathfrak{q}_i) = (1)$, d.h. es gibt Elemente $c'_i \varepsilon \mathfrak{c}'_i$, $q_i \varepsilon \mathfrak{q}_i$ mit $c'_i + q_i = 1$. Dann ist für ein beliebiges $q'_i \varepsilon \mathfrak{q}'_i$ $c'_i q'_i = q'_i - q_i q'_i \equiv q'_i(\mathfrak{q}_i)$, also wegen $c'_i q'_i \varepsilon \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_i$ $q'_i \varepsilon \mathfrak{q}_i$; also ist $\mathfrak{q}'_i \equiv 0(\mathfrak{q}_i)$.

R. 53. *In einem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit Eins ist jedes Ideal $\mathfrak{a}$ mit endlichem Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ Produkt von endlich vielen einartigen* [12]) *Idealen.*

---

[12]) Ein *einartiges* Ideal ist ein zu einem teilerlosen Primideal gehöriges primäres Ideal. Vgl. B. L. van der Waerden, [3] II, S. 48.

Beweis. Weil $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ endlich ist, ist in ihm das Nullideal KGV von endlich vielen primären Idealen. Folglich ist auch $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$, $\mathfrak{q}_i$ primär. Sind $\mathfrak{p}_i$ die zugehörige Primideale, so ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}_i \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{a}\big/\mathfrak{p}_i/\mathfrak{a}$, also ein endlicher Ring ohne Nullteiler, d.h. ein Körper. Folglich ist $\mathfrak{p}_i$ teilerlos. Dann sind aber die $\mathfrak{q}_i$ einartig, und es ist $(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) = (1)$, also auch $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_j) = (1)$ für $i \neq j$.

Korollar. Ist $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}'$ (also a fortiori $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$) endlich, so ist auf die Faktorzerlegungen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ Satz R. 52 anwendbar.

§ 6. *Zerlegungssätze.*

Voraussetzungen. 1. Kommutativität. 2. Endlichkeitsbedingung R. 26 (I, 603) [13]. 3. $\mathfrak{R}$ enthält eine Eins. 4. Die gemäß R. 28 (I, 603) zu den $\mathfrak{b}_\nu$ gehörenden größten primären Komponenten sind für jedes feste ν paarweise teilerfremd [14].

Vorbemerkung. Wegen des Isomorphiesatzes TR. 29 kann man ohne Beschränkung annehmen, daß bei der (als unverkürzbar vorausgesetzten) Zerlegung

$$\mathfrak{b}_n = [\mathfrak{q}_{1n}, \ldots, \mathfrak{q}_{k_n n}] = \mathfrak{q}_{1n} \cdots \mathfrak{q}_{k_n n}$$

$k_n \leqq n$ ist (indem man, falls nötig, neue $\mathfrak{b}_\nu$ zwischenfügt). Wegen des Hilfssatzes R. 52 kann man dann annehmen, daß

$$\mathfrak{q}_{r,\nu+1} \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_{r\nu})$$

ist. Ist jetzt $k_n < n$, so kann man für $r > k_n$ $\mathfrak{q}_{rn} = \mathfrak{R}$ setzen; es wird dann

$$k_n = n, \quad \mathfrak{b}_n = \mathfrak{q}_{1n} \cdots \mathfrak{q}_{nn} \, .$$

Wir setzen weiter für $r \leqq n$

$$\mathfrak{c}_{rn} = \mathfrak{q}_{1n} \cdots \mathfrak{q}_{r-1,\,n}\,\mathfrak{q}_{r+1,\,n} \cdots \mathfrak{q}_{nn}.$$

TR. 38. *Definition.* Ein T-Ring $\mathfrak{R}$ heißt *direkte Summe* der (endlich oder unendlich vielen) Ideale (Ringe) $\underset{1}{\mathfrak{e}}, \underset{2}{\mathfrak{e}}, \ldots$, falls jedes Element $x \varepsilon \mathfrak{R}$ eine eindeutig bestimmte Zerlegung in eine (endliche oder konvergent unendliche) Summe $x = \underset{1}{x} + \underset{2}{x} + \ldots$ mit $\underset{r}{x} \varepsilon \underset{r}{\mathfrak{e}}$ besitzt, derart daß $\lim x_\nu = x$ mit $\lim \underset{r}{x_\nu} = \underset{r}{x}$ (für jedes r) gleichwertig ist. Wegen R. 46 (I, 605) ist diese Definition für *endliche* Summen mit der üblichen äquivalent.

Es ist dann $\underset{r}{\mathfrak{e}}\,\underset{s}{\mathfrak{e}} = (0)$ für $r \neq s$ und $\sum \underset{r}{\mathfrak{e}} = \mathfrak{R}$.

---

[13]) Die Endlichkeitsbedingung wird nur für einen abzählbaren überall dichten Teilring von $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$, oder auch für die *offenen* Ideale von $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ selbst vorausgesetzt. Sie dient nur dazu, die Darstellung der $\mathfrak{b}_\nu$ als KGV von endlich vielen primären Idealen zu erzwingen.

[14]) Diese Voraussetzung ist z.B. immer erfüllt, wenn jedes Primideal teilerlos ist.

TR. 39. *Additive Zerlegung. Unter den obengenannten Voraussetzungen* 1, 2, 3, 4 *ist* $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}(\mathfrak{d}_\nu)$ *direkte Summe von (endlich oder unendlich vielen) primitiven Ringen.*

Beweis. Wegen Hilfssatz R. 51 ist das Kongruenzsystem

$$\underset{r}{e_n} \equiv 1(\mathfrak{q}_{rn}), \quad \underset{r}{e_n} \equiv 0\,(\mathfrak{c}_{rn})$$

modulo $[\mathfrak{q}_{rn}, \mathfrak{c}_{rn}] = \mathfrak{d}_n$ eindeutig lösbar. Dann ist aber

$$\underset{r}{e_{\nu+1}} - \underset{r}{e_\nu} \equiv 0([\mathfrak{q}_{r\nu}, \mathfrak{c}_{r\nu}]) \equiv 0(\mathfrak{d}_\nu),$$

so daß die $\underset{r}{e_\nu}$ eine (reduzierte) Fundamentalfolge bilden, also ein Element $\underset{r}{e} \varepsilon \tilde{\mathfrak{R}}$ definieren. Die $\underset{r}{e}$ nennen wir die *Einheiten* von $\mathfrak{R}$. Für diese gilt:

$$\underset{r}{e} \equiv 1\ (\tilde{\mathfrak{q}}_{r\nu}) \quad \underset{r}{e} \equiv 0\ (\tilde{\mathfrak{c}}_{r\nu})$$

für alle ν. Also ist auch

$$\underset{1}{e} + \underset{2}{e} + \dots + \underset{r}{e} \equiv 1(\tilde{\mathfrak{d}}_\nu), \quad r \leqq \nu,$$

d.h. die Elemente $1 - \sum_1^\nu \underset{r}{e}$ bilden eine Nullfolge in $\tilde{\mathfrak{R}}$. Definieren wir $\sum_1^\infty \underset{r}{e}$ als $\lim_{\nu\to\infty} \sum_1^\nu \underset{r}{e}$, so ist also

$$1 = \sum_1^\infty \underset{r}{e} = \underset{1}{e} + \underset{2}{e} + \dots .$$

Für ein beliebiges Element x folgt daraus:

$$x = \underset{1}{x} + \underset{2}{x} + \dots \quad \text{mit} \quad \underset{r}{x} = x\underset{r}{e}.$$

Die Summe ist direkt. Denn aus der Definition der $\underset{r}{e_\nu}$ folgt $\underset{r}{e_\nu^2} \equiv \underset{r}{e_\nu}(\tilde{\mathfrak{d}}_\nu)$, $\underset{r}{e_\nu}\underset{s}{e_\nu} \equiv 0(\tilde{\mathfrak{d}}_\nu)$ für $s \neq r$, also auch

$$\underset{r}{e}^2 = \underset{r}{e},$$
$$\underset{r}{e}\underset{s}{e} = 0.$$

Aus $\sum \underset{r}{x} = \sum \underset{r}{y}$, $\underset{r}{x} = x\underset{r}{e}$, $\underset{r}{y} \equiv 0(\underset{r}{e})$ folgt dann nämlich:

$$(\sum \underset{r}{x})\underset{s}{e} = \underset{r}{x} \sum \underset{r}{e}\underset{s}{e} = \underset{s}{x} = (\sum \underset{r}{y})\underset{s}{e} = \underset{s}{y},$$

d.h. die Komponenten $\underset{r}{x}$ sind eindeutig bestimmt. Daß die Limesbedingung erfüllt ist, ist nach dem Obigen trivial.

Zu beweisen bleibt also nur noch, daß die durch die $\underset{r}{e}$ erzeugten Hauptideale $\underset{r}{\mathfrak{e}} = (\underset{r}{e})$ primitive Ringe sind. Nach Voraussetzung

(Vorbemerkung) bilden die $\mathfrak{q}_{r\nu}$ (für festes r) eine Vielfachenkette in $\mathfrak{R}$; folglich definieren sie einen primitiven Ring $\mathfrak{R}(\mathfrak{q}_{r\nu})$, der wegen TR. 27 homomöomorphes Bild von $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ ist: Definiert man

$$\overset{r}{z} = 1 - \underset{r}{e} = \sum_{s=1}^{r-1} \underset{s}{e} + \sum_{s=r+1}^{\infty} \underset{s}{e},$$

$$\overset{r}{\mathfrak{z}} = (\overset{r}{z}),$$

so ist $\overset{r}{z} \equiv 0(\tilde{\mathfrak{c}}_{r\nu})$ für alle ν, während umgekehrt jedes Element $x\varepsilon\tilde{\mathfrak{R}}$, das $\equiv 0(\tilde{\mathfrak{c}}_{r\nu})$ für alle ν ist, in $\overset{r}{\mathfrak{z}}$ liegt: $\overset{r}{\mathfrak{z}} = [\tilde{\mathfrak{c}}_{r1}, \tilde{\mathfrak{c}}_{r2}, \ldots]$. Folglich wird beim Homomorphismus das Ideal $\overset{r}{\mathfrak{z}}$ auf das Nullideal von $\mathfrak{R}(\mathfrak{q}_{r\nu})$ abgebildet: $\mathfrak{R}(\mathfrak{q}_{r\nu}) \underset{\smile}{\simeq} \mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)/\overset{r}{\mathfrak{z}}$. Weil aber die Summe $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu) = \underset{r}{\mathfrak{e}} \dotplus \overset{r}{\mathfrak{z}}$ direkt und der Homomorphismus offenbar umkehrbar stetig ist, ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)/\overset{r}{\mathfrak{z}} \cong \underset{r}{\mathfrak{e}}$, w.z.b.w.

Bemerkung 1. Zu einem r mit $\mathfrak{q}_{r\nu} = (1)$ für alle ν gehört ein $\underset{r}{e} = 0$ und umgekehrt.

Bemerkung 2. Sobald mindestens zwei verschiedene $\underset{r}{e} \neq 0$ sind, sind sämtliche $\underset{r}{e}$ Nullteiler in $\tilde{\mathfrak{R}}$. Falls der Ring $\tilde{\mathfrak{R}}$ nullteilerfrei ist, muß er also primitiv sein. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, auch nicht wenn $\mathfrak{b} = (0)$ ist. *Gegenbeispiel*: $\mathfrak{R} = \mathfrak{K}[\xi, \eta]$, $\eta^2 = \xi^2 + \xi^3$, $\mathfrak{q}_n = (\xi^n)$ $(n \geqq 2)$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 = (\xi, \eta)$, $\mathfrak{b} = [\mathfrak{q}_\nu] = (0)$. Approximiert man jetzt $\sqrt{1+\xi}$ mittels Polynomen $\varphi_\nu(\xi)$, so daß $\varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu \equiv 0(\xi^\nu)$ und $\varphi_\nu^2 \equiv 1 + \xi(\xi^\nu)$ ist, und setzt man $x_\nu = \eta - \xi\varphi_\nu$, $y_\nu = \eta + \xi\varphi_\nu$, so ist $x_\nu y_\nu = \eta^2 - \xi^2\varphi_\nu^2 \equiv 0\ (\xi^{\nu+2})$. Für $x = \lim x_\nu$, $y = \lim y_\nu$ gilt also $xy = 0$, während $x \neq 0$, $y \neq 0$ ist. x und y stellen „Kurven" dar, die je mit einem der beiden Zweige von $\eta^2 = \xi^2 + \xi^3$ eine Berührung unendlich hoher Ordnung haben, oder auch: sie stellen diese beiden Zweige selbst dar[14a]).

Bemerkung 3. Die Ideale $\underset{r}{\mathfrak{e}}$ sind abgeschlossen. Denn ist $y = \lim x_\nu \underset{r}{e}$, so ist $y\underset{r}{e} = \lim x_\nu \underset{r}{e}$, $\therefore\ y\underset{r}{e} = y\varepsilon\underset{r}{\mathfrak{e}}$. Ähnlich beweist man, daß auch die $\overset{r}{\mathfrak{z}}$ abgeschlossen sind.

Bemerkung 4. Falls die $\mathfrak{b}_\nu$ den Bedingungen von Satz 52*a* genügen, kann man auf die Kommutativität von $\mathfrak{R}$ verzichten

[14a]) Dieses Beispiel verdanke ich Herrn B. L. van der Waerden.

(wobei dann aber die direkten Summanden nicht primitiv werden). Weil die $\mathfrak{q}_{r\nu}$ zweiseitig sind, wird dann für beliebige x_ν $\underset{r}{e_\nu} x_\nu \underset{s}{e_\nu} \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_{t\nu})$, $(r \neq s)$ für *jedes* t, so daß die „Orthogonalitätsrelation" $\underset{r}{e}\underset{s}{e} = 0$ sich zu der (im nicht kommutativen Fall wesentlich schärferen) $\underset{r}{e} x \underset{s}{e} = 0$ für alle $x \varepsilon \tilde{\mathfrak{R}}$ verschärft. Also ist $\underset{r}{e} x = \sum_s \underset{r}{e} x \underset{s}{e} = \underset{r}{e} x \underset{r}{e} = \sum_s \underset{s}{e} x \underset{r}{e} = x \underset{r}{e}$, d.h. die Zerlegung $\tilde{\mathfrak{R}} = \sum \underset{r}{\mathfrak{e}}$ ist *zweiseitig* direkt.

Bemerkung 5. Es ist:

$$\overset{r}{z} \equiv 0(\bar{\mathfrak{q}}_{r\nu}), \quad \underset{r}{z} \equiv 1 \quad (\bar{\mathfrak{c}}_{r\nu}) \text{ für alle } \nu,$$

$$\underset{r}{e} + \overset{r}{z} = 1, \quad \overset{r}{z}{}^2 = \overset{r}{z}, \quad \underset{r}{e}\overset{r}{z} = \overset{r}{z}\underset{r}{e} = 0.$$

$$\underset{r}{e}\overset{s}{z} = \overset{s}{z}\underset{r}{e} = \underset{r}{e}, \quad \overset{r}{z}\overset{s}{z} = \overset{s}{z}\overset{r}{z} = \overset{r}{z} + \overset{s}{z} - 1 = 1 - \underset{r}{e} - \underset{s}{e} \text{ für } s \neq r.$$

Bemerkung 6. Die Abbildung $\tilde{\mathfrak{R}} \to \underset{r}{e}\tilde{\mathfrak{R}} = \underset{r}{\mathfrak{e}}$ ist wegen TR. 28 für jedes r ein Homomorphismus. Ist $\mathfrak{R}$ irgendein in $\tilde{\mathfrak{R}}$ dichter Teilring, und ist der Durchschnitt der Verengungsideale (vgl. Definition R. 38, I, 604) $\mathfrak{q}_{r\nu *} = [\mathfrak{c}_{r\nu}, \mathfrak{R}]$ das Nullideal, so ist die Abbildung $\mathfrak{R} \to (\underset{r}{e}\mathfrak{R})_* = [\underset{r}{e}\mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ ein *Iso*morphismus.

TR. 40. *Jeder kommutative Cantorsche Ring* $\mathfrak{R}$ *mit Eins ist direkte Summe von* (*endlich oder unendlich vielen*) *primitiven Cantorschen Ringen.*

Beweis. Wegen TR. 37 sind alle Restklassenringe $\mathfrak{R}/\mathfrak{b}_n$ endlich. Folglich ist Satz R. 53, also auch R. 52 anwendbar. Also sind die Voraussetzungen 1, 3, 4 dieses Paragraphen erfüllt. Wegen Fußnote [13]) brauchen wir uns um Voraussetzung 2 weiter nicht zu kümmern. Satz TR. 39 ist also anwendbar. Weil die direkten Summanden wegen TR. 39, Bemerkung 3 abgeschlossene Teilmengen einer Cantorschen oder endlichen Menge und homogen sind, sind sie gleichfalls Cantorsch oder endlich, womit alles bewiesen ist.

TR. 41. *Multiplikative Zerlegung. Jedes Element* $x \varepsilon \tilde{\mathfrak{R}}$ *kann eindeutig in ein* (*endliches oder konvergent unendliches*) *Produkt* $x = \prod_1^\infty \overset{r}{x}$ *entwickelt werden, wo die* $\overset{r}{x}$ *durch*

$$\overset{r}{x} = \overset{r}{z} + \underset{r}{x} = \overset{r}{z} + x\underset{r}{e}$$

gegeben sind.

Beweis. Für $r \neq s$ ist $\overset{r}{x}\overset{s}{x} = \overset{r}{z}\overset{s}{z} + x_r + x_s = x_r + x_s + (1 - e_r - e_s)$.
Allgemein ist

$$\prod_1^{\nu} \overset{r}{x} = \sum_1^{\nu} x_r + (1 - \sum_1^{\nu} e_r).$$

Weil das erste Glied rechts gegen x und das zweite gegen Null konvergiert, folgt daraus die behauptete Produktdarstellung.

Bemerkung 1. Die Faktoren $\overset{r}{x}$ sind eindeutig bestimmt, im allgemeinen aber nicht primär.

Bemerkung 2. Die $\overset{r}{z}$ selbst sind die multiplikativen Komponenten der Null.

Bemerkung 3. Im nichtkommutativen Fall (TR. 39, Bemerkung 3) gilt der Zerlegungssatz gleichfalls; überdies sind sämtliche Komponenten $\overset{r}{x}$ mit einander vertauschbar. In der Tat ist für $r \neq s$

$$\overset{r}{x}\overset{s}{x} = \overset{r}{z}\overset{s}{z} + \overset{r}{z}xe_s + xe_r\overset{s}{z} + xe_rxe_s = \overset{r}{z}\overset{s}{z} + \overset{r}{z}e_sxe_s + xe_r = x_r + x_s + (1 - e_r - e_s) = \overset{s}{x}\overset{r}{x}.$$

Daraus folgt, daß auch für beliebige x und y $\overset{r}{x}\overset{s}{y} = \overset{s}{x}\overset{r}{y}$ ist für $r \neq s$. Im allgemeinen ist aber $\overset{r}{x}\overset{r}{y} \neq \overset{r}{y}\overset{r}{x}$.

TR 42. *Für jedes Ideal* $\mathfrak{x}$ *von* $\widetilde{\mathfrak{R}}$ *gilt*:

$$(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots) \subset \mathfrak{x} \subset \sum \mathfrak{x}_r \subset \sum \overline{\mathfrak{x}}_r = \sum \overline{\mathfrak{x}}_r e_r = \overline{\mathfrak{x}},$$

$$\prod \overset{r}{\mathfrak{x}} = \sum \mathfrak{x}_r,$$

wo $\mathfrak{x}_r = \mathfrak{x}e_r$ *und* $\overset{r}{\mathfrak{x}} = (\mathfrak{x}_r, \overset{r}{\mathfrak{z}})$ *ist. Für ein abgeschlossenes Ideal* $\mathfrak{x} = \overline{\mathfrak{x}}$ *ist also* $\mathfrak{x} = \sum \mathfrak{x}_r = \prod \overset{r}{\mathfrak{x}}$.

Vorbemerkung. $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots)$ bezeichnet den gewöhnlichen GGT, d.h. das kleinste Ideal das alle $\mathfrak{x}_r$ enthält; dieses besteht aus allen Summen von je *endlich vielen* Elementen der $\mathfrak{x}_r$ (diese aber natürlich als Ideale in $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ betrachtet). Dagegen bezeichnet $\sum \mathfrak{x}_r$ die Menge aller endlichen oder konvergent unendlichen Summen von Elementen der $\mathfrak{x}_r$. Entsprechend $\prod \overset{r}{\mathfrak{x}}$. $\overline{\mathfrak{x}}_r$ bezeichnet die Abschließung von $\mathfrak{x}_r$.

Beweis. 1. Es ist $\underset{r}{\mathfrak{x}} \subset \mathfrak{x}$, also $(\underset{1}{\mathfrak{x}}, \underset{2}{\mathfrak{x}}, \ldots) \subset \mathfrak{x}$.

2. Ist $x \varepsilon \mathfrak{x}$, so ist $x = \sum \underset{r}{x} \varepsilon \sum \underset{r}{\mathfrak{x}}$.

3. $\sum \underset{r}{\mathfrak{x}} \subset \sum \underset{r}{\overline{\mathfrak{x}}}$ ist trivial.

4. Ist $x \varepsilon \underset{r}{\overline{\mathfrak{x}}}$, so ist $x = \lim \underset{r}{x_\nu} = \lim \underset{r}{x_\nu}\underset{r}{e} = (\lim \underset{r}{x_\nu})\underset{r}{e} = x\underset{r}{e}$.

Also ist $\underset{r}{\overline{\mathfrak{x}}} = \underset{r}{\overline{\mathfrak{x}}}\underset{r}{e} \subset \overline{\mathfrak{x}}\underset{r}{e}$ (weil $\underset{r}{\overline{\mathfrak{x}}} \subset \overline{\mathfrak{x}}$ wegen $\underset{r}{\mathfrak{x}} \subset \mathfrak{x}$ trivial ist).

5. Ist $x \varepsilon \overline{\mathfrak{x}}\underset{r}{e}$, so ist $x = (\lim x_\nu)\underset{r}{e} = \lim \underset{r}{x_\nu} \varepsilon \underset{r}{\overline{\mathfrak{x}}}$. Also ist $\overline{\mathfrak{x}}\underset{r}{e} = \underset{r}{\overline{\mathfrak{x}}}$.

6. Wegen 4 und 5 ist $\sum \underset{r}{\overline{\mathfrak{x}}} = \sum \underset{r}{\overline{\mathfrak{x}}}\underset{r}{e} = \sum \overline{\mathfrak{x}}\underset{r}{e} = \overline{\mathfrak{x}}$.

Damit ist die erste Zeile bewiesen.

7. Ist $x \varepsilon \sum \underset{r}{\mathfrak{x}}$, so ist $\underset{r}{x} \varepsilon \underset{r}{\mathfrak{x}}$, $\therefore \overset{r}{x} \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{x}}$, $\therefore x = \prod \overset{r}{x} \varepsilon \prod \overset{r}{\mathfrak{x}}$.

8. Ist $x \varepsilon \prod \overset{r}{\mathfrak{x}}$, so ist $\underset{r}{x} = x\underset{r}{e} \varepsilon (\prod_{s} \overset{s}{\mathfrak{x}})\underset{r}{e} = \prod_{s} (\overset{s}{\mathfrak{x}}\underset{r}{e})$, weil $\underset{r}{e}$ idempotent ist. Wegen $\overset{r}{\mathfrak{x}}\underset{r}{e} = \underset{r}{\mathfrak{x}}$, $\overset{s}{\mathfrak{x}}\underset{r}{e} = \underset{r}{\mathfrak{e}}$ für $s \neq r$ ist also

$$\underset{r}{x} \varepsilon \Big(\prod_{s \neq r} \underset{r}{\mathfrak{e}}\Big)\underset{r}{\mathfrak{x}} = \underset{r}{\mathfrak{x}}, \quad \therefore x = \sum \underset{r}{x} \varepsilon \sum \underset{r}{\mathfrak{x}}.$$

Damit ist auch die zweite Zeile bewiesen.

TR. 43. *Es gelten die folgenden zu einander dualen Beziehungen* $(s \neq r)$:

1. $\sum \underset{r}{\mathfrak{e}} = (1)$, $\underset{r}{(1)} = \underset{r}{\mathfrak{e}}$. $\qquad \prod \overset{r}{\mathfrak{z}} = (0)$, $\overset{r}{(0)} = \overset{r}{\mathfrak{z}}$.

2. $\overset{r}{(1)} = (1)$. $\qquad \underset{r}{(0)} = (0)$.

3. $\underset{r}{\mathfrak{e}} + \underset{r}{\mathfrak{e}} = \underset{r}{\mathfrak{e}}$. $\qquad \mathfrak{z}\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$.

4. $\overset{r}{\mathfrak{z}} + \overset{r}{\mathfrak{z}} = \overset{rr}{\mathfrak{z}} = \overset{r}{\mathfrak{z}}$. $\qquad \underset{r}{\mathfrak{e}}\underset{r}{\mathfrak{e}} = \underset{rr}{\mathfrak{e}} = \underset{r}{\mathfrak{e}}$.

5. $\underset{r}{\mathfrak{e}} + \overset{r}{\mathfrak{z}} = \underset{r}{\overset{r}{\mathfrak{e}}} = (1)$ $\qquad \overset{r}{\mathfrak{z}}\underset{r}{\mathfrak{e}} = \underset{r}{\overset{r}{\mathfrak{z}}} = (0)$.

6. $\overset{r}{\mathfrak{z}} + \overset{s}{\mathfrak{z}} = \overset{rs}{\mathfrak{z}} = (1)$. $\qquad \underset{r}{\mathfrak{e}}\underset{s}{\mathfrak{e}} = \underset{rs}{\mathfrak{e}} = (0)$.

7. $\underset{r}{\mathfrak{e}} + \overset{s}{\mathfrak{z}} = \underset{r}{\overset{s}{\mathfrak{e}}} = \overset{s}{\mathfrak{z}}$. $\qquad \overset{r}{\mathfrak{z}}\underset{s}{\mathfrak{e}} = \underset{s}{\overset{r}{\mathfrak{z}}} = \underset{s}{\mathfrak{e}}$.

Ist $\mathfrak{x}$ ein beliebiges abgeschlossenes Ideal, so ist:

8. $\overset{r}{\mathfrak{x}} = \underset{r}{\mathfrak{x}} + \overset{r}{\mathfrak{z}} = \mathfrak{x} + \overset{r}{\mathfrak{z}} = \overset{r}{\mathfrak{x}} + \overset{r}{\mathfrak{z}}. \qquad \underset{r}{\mathfrak{x}} = \overset{r}{\mathfrak{x}}\underset{r}{\mathfrak{e}} = \mathfrak{x}\underset{r}{\mathfrak{e}} = \underset{r}{\mathfrak{x}}\underset{r}{\mathfrak{e}}.$

9. $\mathfrak{x} = \Sigma \underset{r}{\mathfrak{x}}. \qquad \mathfrak{x} = \Pi \overset{r}{\mathfrak{x}}.$

Bemerkung. Die Addition ist die idealtheoretische, d.h. die GGT-Bildung. Die dazu duale Operation, die KGV-Bildung, geht hier in die Multiplikation über, weil diese in den hier vorkommenden Fällen kommutativ ist (auch wenn der Ring nichtkommutativ ist) und es sich um teilerfremde Ideale handelt. Die *multiplikativen* Beziehungen bleiben alle gültig, wenn die Ideale durch Elemente ersetzt werden; die *additiven* nur mit Ausnahme von 3^{I}, 4^{I}, 6^{I}, 7^{I}, 8^{I}, wo dann die Summe (jetzt im gewöhnlichen Sinne!) durch den GGT ersetzt werden muß.

TR. 44. *Die r-ten additiven und die r-ten multiplikativen Komponenten aller* [15]) *Ideale aus* $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ *bilden isomorphe Idealkörper* [16]).

Beweis. Aus den Eigenschaften 8, 9, 5, 3 von TR. 43 folgt sofort, daß für beliebige Ideale $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{v}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{w}$

$$\overset{r}{\mathfrak{x}}\overset{r}{\mathfrak{y}} = \underset{r}{\mathfrak{x}}\underset{r}{\mathfrak{y}} + \overset{r}{\mathfrak{z}} = \overset{r}{\mathfrak{w}},$$

$$\underset{r}{\mathfrak{x}} + \underset{r}{\mathfrak{y}} = (\overset{r}{\mathfrak{x}} + \overset{r}{\mathfrak{y}})\underset{r}{\mathfrak{e}} = \underset{r}{\mathfrak{v}}$$

ist; entsprechendes gilt für beliebig viele Ideale. Weiter ist

$$[\overset{r}{\mathfrak{x}}, \overset{r}{\mathfrak{y}}] = [\underset{r}{\mathfrak{x}} + \overset{r}{\mathfrak{z}}, \underset{r}{\mathfrak{y}} + \overset{r}{\mathfrak{z}}] = [\underset{r}{\mathfrak{x}}, \underset{r}{\mathfrak{y}}] + \overset{r}{\mathfrak{z}},$$

denn $u \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{x}}$ bedeutet, daß $\underset{r}{u} \varepsilon \underset{r}{\mathfrak{x}}$ ist, also $u \varepsilon [\overset{r}{\mathfrak{x}}, \overset{r}{\mathfrak{y}}]$, daß $\underset{r}{u} \varepsilon [\underset{r}{\mathfrak{x}}, \underset{r}{\mathfrak{y}}]$ ist. Schließlich ist

$$\overset{r}{\mathfrak{x}} : \overset{r}{\mathfrak{y}} = \overset{r}{\mathfrak{x}} : (\underset{r}{\mathfrak{y}} + \overset{r}{\mathfrak{z}}) = [\overset{r}{\mathfrak{x}} : \underset{r}{\mathfrak{y}}, \overset{r}{\mathfrak{x}} : \overset{r}{\mathfrak{z}}] = \qquad {}^{16a)}$$

$$= [\underset{r}{\mathfrak{x}} : \underset{r}{\mathfrak{y}}, (1)] = \underset{r}{\mathfrak{x}} : \underset{r}{\mathfrak{y}},$$

womit die Isomorphie vollständig bewiesen ist.

---

[15]) Von jetzt an betrachten wir (auch ohne ausdrückliche Erwähnung) ausschließlich *abgeschlossene* Ideale in $\tilde{\mathfrak{R}}$.

[16]) Ein (vollständiger) *Idealkörper* ist ein System von Idealen, das zu beliebig vielen Idealen auch deren GGT, KGV und Produkt, sowie zu je zweien auch deren Quotient enthält. Die sämtlichen Ideale eines Ringes bilden immer einen Idealkörper. Zwei Idealkörper sind *isomorph*, wenn ihre Ideale sich derart eineindeutig auf einander abbilden lassen, daß sich dabei GGT, KGV, Produkt und Quotient entsprechen. Vgl. H. Grell [1].

[16a]) Bekanntlich ist $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = [\mathfrak{a} : \mathfrak{b}, \mathfrak{a} : \mathfrak{c}]$. Vgl. z.B. B. L. van der Waerden [2], II, 30.

Korollar 1. Die Faktoren $\mathfrak{x}$ sind dann und nur dann prim oder primär, wenn dies für die entsprechenden $\mathfrak{q}_{r\nu}$-adischen Summanden $\overset{r}{\mathfrak{x}}$ der Fall ist. Insbesondre stimmt die Zerlegung $\mathfrak{x} = \prod \overset{r}{\mathfrak{x}}$ dann und nur dann für alle $\mathfrak{x}$ mit der Zerlegung in größte primäre Komponenten überein, wenn für jedes r *jedes Ideal in* $\mathfrak{R}(\mathfrak{q}_{r\nu})$ *primär ist.*

Korollar 2. *In* $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ *kann dann und nur dann jedes Element bis auf Einsteiler eindeutig in Faktoren zerlegt werden, wenn dies in jedem der primitiven Ringe* $\mathfrak{R}(\mathfrak{q}_{r\nu})$ *der Fall ist.*

§ 7. *Primitive Ringe.*

Voraussetzungen. 1. Kommutativität. 2. Endlichkeitsbedingung. 3. Ring mit Eins.

Vorbemerkung. Wir betrachten in diesem und dem folgenden Paragraphen einen beliebigen der Ringe $\mathfrak{R}(\mathfrak{q}_{r\nu})$ und lassen dementsprechend den Index r überall weg, d.h. wir setzen $\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{q}_{r\nu}$. Wegen des Isomorphiesatzes können wir ohne Beschränkung annehmen, daß die $\mathfrak{q}_\nu$ eine Kompositionsreihe bilden; insbesondre sei $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}$. Wir beschränken uns auf den Fall, wo $\mathfrak{p}$ ein *teilerloses* Primideal ist [17]). Wegen TR. 40 ist diese beschränkende Annahme für kommutative *Cantorsche* Ringe mit Eins erfüllt, so daß die Sätze dieses Paragraphen auf solche Ringe anwendbar sind.

TR. 45. *Definition.* Ein Element $x \varepsilon \mathfrak{R}$ hat die *Höhe* [18]) n, wenn

$$x \equiv 0(\mathfrak{q}_n) \not\equiv 0(\mathfrak{q}_{n+1})\ ^{19})$$

ist. Für jedes n mit $\mathfrak{q}_n \neq (0)$ gibt es wegen $\mathfrak{q}_{n+1} \neq \mathfrak{q}_n$ ein Element von der Höhe n. Für $\mathfrak{q}_n = (0)$ sei 0 als einziges Element von der Höhe n definiert.

TR. 46. *Ist x ein beliebiges Element von der Höhe n, so ist*

$$\mathfrak{q}_n = (x, \mathfrak{q}_{n+1}).$$

Beweis. Vorerst ist $\mathfrak{q}_{n+1} \equiv 0(x, \mathfrak{q}_{n+1}) \equiv 0(\mathfrak{q}_n)$. Also muß $(x, \mathfrak{q}_{n+1})$ entweder gleich $\mathfrak{q}_{n+1}$ oder gleich $\mathfrak{q}_n$ sein. Der erste Fall ist nur möglich für $x = 0$, also $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}_{n+1} = (0)$. In beiden Fällen ist also die behauptete Beziehung erfüllt.

---

[17]) D.h. die $\mathfrak{q}_\nu$ seien einartig. Vgl. Fußnote [13]) und [20]).

[18]) Bei HENSEL und in D. VAN DANTZIG [3] „Ordnung" genannt; wir gebrauchen dieses Wort aber im gruppentheoretischen Sinne.

[19]) D.h. $x \equiv 0(\mathfrak{q}_n)$, aber $x \not\equiv 0(\mathfrak{q}_{n+1})$, also $\mathfrak{q}_n \not\equiv 0(\mathfrak{q}_{n+1})$.

TR. 47. *Entwicklungssatz in primitiven Ringen. Es sei gegeben:* 1. *für jedes n ein Element q_n von der Höhe n,* 2. *ein Repräsentantensystem Σ modulo $\mathfrak{p}$. Dann kann jedes Element $x \varepsilon \tilde{\mathfrak{R}}$ eindeutig in eine konvergente Reihe*

$$x = \sum_0^\infty \xi_\nu q_\nu$$

entwickelt werden, wo die ξ_ν zu Σ gehören. Umgekehrt stellt jede solche Reihe ein Element von $\mathfrak{R}(\mathfrak{q}_\nu)$ vor.

Beweis. Die letzte Behauptung, sowie die Konvergenz der Reihe ist wegen $q_\nu \equiv 0(\mathfrak{q}_n)$ für $\nu \geqq n$ klar. Es sei also ein beliebiges Element $x \varepsilon \tilde{\mathfrak{R}}$ gegeben. Die Elemente ξ_i seien für $i < n$ so bestimmt, daß

$$x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i q_i \equiv x\ (\mathfrak{q}_n)$$

ist. (Für $n = 0$ sei $x_{n-1} = 0$). Wegen TR. 46 gibt es dann ein solches Element η_n, daß

$$x - x_{n-1} \equiv \eta_n q_n\ (\mathfrak{q}_{n+1})$$

ist. Es sei nun ξ_n der von η_n modulo $\mathfrak{p}$ bestimmte Rest und $x_n = x_{n-1} + \xi_n q_n$. Dann ist

$$\eta_n q_n - \xi_n q_n \equiv 0\ (\mathfrak{p}\mathfrak{q}_n) \equiv 0\ (\mathfrak{q}_{n+1}), \qquad ^{19a})$$

also $x - x_{n-1} \equiv \xi_n q_n (\mathfrak{q}_{n+1})$, d.h.

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i q_i \equiv x\ (\mathfrak{q}_{n+1}),$$

so daß die Induktionsvoraussetzung erfüllt ist. Wegen $x - x_\nu \to 0$ ist also $x = \sum_0^\infty \xi_\nu q_\nu$.

Zum Beweise, daß die Entwicklung eindeutig bestimmt ist, sei $\sum \xi_\nu q_\nu = \sum \xi'_\nu q_\nu$ und für alle $i < n$ sei schon bewiesen, daß $\xi_i = \xi'_i$ ist. (Für $n = 0$ ist nichts vorauszusetzen). Wegen $q_\nu \equiv 0(\mathfrak{q}_{n+1})$ für $\nu \geqq n+1$ ist dann $(\xi_n - \xi'_n)q_n \equiv 0(\mathfrak{q}_{n+1})$, also, weil $\mathfrak{q}_{n+1}$ primär ist, entweder $\xi_n - \xi'_n \equiv 0(\mathfrak{p})$, also $\xi_n = \xi'_n$, weil beide aus demselben Repräsentantensystem modulo $\mathfrak{p}$ gewählt sind, oder $q_n \equiv 0(\mathfrak{q}_{n+1})$, $\therefore q_n = 0$, $\therefore \mathfrak{q}_n = (0)$, in welchem Falle die Reihe schon mit $\xi_{n-1} q_{n-1}$ oder früher abbricht (so daß die weiteren ξ_ν natürlich belanglos sind).

Bemerkung 1. Sowohl die q_ν als Σ können in dem zur Kon-

[19a]) Daß $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_n \subset \mathfrak{q}_{n+1}$ ist, folgt aus $\mathfrak{q}_{n+1} \subset \mathfrak{p}\mathfrak{q}_n \subset \mathfrak{q}_n$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_n \neq \mathfrak{q}_n$. Vgl. B. L. van der Waerden [1], § 25.

struktion von $\tilde{\mathfrak{R}}$ dienenden diskreten Ring $\mathfrak{R}$ gewählt werden. Es sei z.B. $q_0 = 1$.

Bemerkung 2. Daß die ξ_ν alle aus demselben Repräsentantensystem gewählt werden können, ist äquivalent mit dem bekannten Isomorphiesatz [20])

$$\mathfrak{R}/\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_0/\mathfrak{q}_1 \cong \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_2 \cong \mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_3 \cong \dots .$$

§ 8. *$\mathfrak{p}$-adische Ringe* [21]).

Voraussetzungen wie in § 7. Überdies seien die $\mathfrak{q}_\nu$ (die wiederum eine Kompositionsreihe bilden mögen) Potenzen eines (teilerlosen) Primideals $\mathfrak{p}$.

Vorbemerkung. Die Voraussetzungen sind z.B. erfüllt, wenn der Ausgangsring $\mathfrak{R}$ den folgenden Bedingungen genügt:

1. Kommutativität. 2. Endlichkeitsbedingung. 3. Ring ohne Nullteiler. 4. Vielfachenkettensatz. 5. Ganz-Abgeschlossenheit. Weil daraus die Existenz einer Eins folgt [21a]), sind die Entwicklungen von § 7 gültig mit $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}^n$.

TR. 48. (Verschärfung von TR. 46). *Für alle $\nu \geqq n$ ist*

$$\mathfrak{p}^n = (q_n, \mathfrak{p}^\nu).$$

Beweis. Für $\nu = n$ ist die Behauptung trivial. Es sei also $\nu \geqq n+1$. Dann ist wegen $q_n \equiv 0(\mathfrak{p}^n)$:

$$\mathfrak{p}^\nu \equiv 0(q_n, \mathfrak{p}^\nu) \equiv 0(\mathfrak{p}^n).$$

Also ist $(q_n, \mathfrak{p}^\nu)$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges primäres Ideal, folglich eine Potenz von $\mathfrak{p}$: $(q_n, \mathfrak{p}^\nu) = \mathfrak{p}^m$, $m \geqq n$. Wegen $q_n \not\equiv 0(\mathfrak{p}^{n+1})$ [21b]) ist aber $m < n+1$, also ist $m = n$, womit die Behauptung bewiesen ist.

TR. 49. *Das Produkt von zwei Elementen von den Höhen m bzw. n hat die Höhe $m+n$.*

Beweis. Gegeben sei

$$x \equiv 0(\mathfrak{p}^m) \not\equiv 0(\mathfrak{p}^{m+1}), \qquad y \equiv 0(\mathfrak{p}^n) \not\equiv 0(\mathfrak{p}^{n+1}).$$

Dann ist $xy \equiv 0(\mathfrak{p}^{m+n})$, und wegen TR. 46: $\mathfrak{p}^m = (x, \mathfrak{p}^{m+1})$, $\mathfrak{p}^n = (y, \mathfrak{p}^{n+1})$ Also ist

$$\mathfrak{p}^{m+n} = (x, \mathfrak{p}^{m+1}) \cdot (y, \mathfrak{p}^{n+1}) \equiv 0\,(xy, \mathfrak{p}^{m+n+1}),$$

---

[20]) Vgl. z.B. B. L. van der Waerden [1]. In R. 33 (I, 604) soll hinzugefügt werden: falls $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}$ teilerlos ist.

[21]) Im engeren Sinne.

[21a]) Dies folgt aus der Definition R. 30 (I, 603), weil $x^2 - x = 0$ eine ganze Gleichung in $\mathfrak{R}$ ist, oder auch gemäß der dortigen Bezeichnungen für $n = 1$, $\alpha = \beta \neq 0$: $\alpha - \alpha = 0$, also $\exists\, x \varepsilon \mathfrak{R}$, $\alpha = x\alpha$.

[21b]) Außer für $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{n+1} = (0)$, $q_n = 0$; der Satz ist dann aber trivial.

so daß für $\mathfrak{p}^{m+n} \neq \mathfrak{p}^{m+n+1}$ $xy \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}^{m+n+1})$ ist, d.h. die Höhe von xy gleich $m+n$ ist. Für $\mathfrak{p}^{m+n} = \mathfrak{p}^{m+n+1} = (0)$ dagegen ist $xy = 0$, d.h. seine Höhe ist gleichfalls (u. a.) gleich $m+n$.

TR. 50. *Entwicklungssatz in $\mathfrak{p}$-adischen Ringen. Es sei* 1. *ein beliebiges Element π vom der Höhe* 1, 2. *ein Repräsentantensystem Σ modulo $\mathfrak{p}$ gegeben. Dann kann jedes Element $x \varepsilon \mathfrak{R}(\mathfrak{p}^\nu)$ in eine konvergente Potenzreihe*

$$x = \sum_0^\infty \xi_\nu \pi^\nu$$

entwickelt werden, wo die ξ_ν zu Σ gehören. Umgekehrt stellt jede solche Reihe ein Element von $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}^\nu)$ dar.

Beweis. Wegen TR. 47 genügt es zu beweisen, daß π^n die Höhe n hat. Dies folgt aber durch vollständige Induktion nach n unmittelbar aus TR. 49.

TR. 51. *Jedes Element von der Höhe Null ist ein Einsteiler.*

Beweis. Es sei $x = \Sigma \xi_\nu \pi^\nu$ ein Element von der Höhe Null, also $\xi_0 \neq 0$, d.h. $\xi_0 \not\equiv 0(\mathfrak{p})$. Weil $\mathfrak{p}$ nach Voraussetzung teilerlos ist, gibt es ein $y_0 = \eta_0$ mit $\xi_0\eta_0 \equiv 1(\mathfrak{p})$, $\therefore xy_0 \equiv 1(\mathfrak{p})$. Es sei nun für alle $i < n$, $n \geqq 1$ bewiesen, daß ein Element y_i existiert mit $xy_i \equiv 1(\mathfrak{p}^{i+1})$. Wegen TR. 46 existiert dann ein η_n mit $xy_{n-1} \equiv 1 + \eta_n \pi^n (\mathfrak{p}^{n+1})$. Setzt man dann $y_n = y_{n-1}(1 - \eta_n \pi^n)$, so ist $xy_n \equiv (1+\eta_n\pi^n)(1-\eta_n\pi^n) \equiv 1(\mathfrak{p}^{n+1})$. Weiter ist $y_n - y_{n-1} \equiv$ $\equiv - y_{n-1}\eta_n\pi^n \equiv 0(\mathfrak{p}^n)$, so daß die Folge der y_ν gegen ein Element y konvergiert, für welches $xy = 1$ ist.

TR. 52. *Je zwei Elemente gleicher Höhe sind assoziiert* [22]).

Beweis. Ist $x = \sum_n^\infty \xi_\nu \pi^\nu$ $(\xi_n \neq 0)$ ein Element von der Höhe n, so hat $x\pi^{-n} = \sum_0^\infty \xi_{\nu+n}\pi^\nu$ die Höhe Null. Es gibt also ein y mit $x\pi^{-n}y = 1$, d.h. π^n und x sind assoziiert. Weil dies für jedes Element x von der Höhe n gilt und diese Relation transitiv ist, ist der Satz bewiesen.

TR. 53. *Jeder $\mathfrak{p}$-adische Ring (im engeren Sinne) ist π-adisch.*

Beweis. Das Ideal $\mathfrak{p}$ ist die Menge aller Elemente von einer Höhe $\geqq 1$ und wird also wegen TR. 52 durch π erzeugt. D.h. $\mathfrak{p} = (\pi)$ und $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}^\nu) = \mathfrak{R}(\pi^\nu)$.

TR. 54. *Jeder $\mathfrak{p}$-adische Ring (im engeren Sinne) mit $\mathfrak{p}^n \neq (0)$ für alle n ist euklidisch* [22a]).

---

[22]) D.h. jedes derselben ist ein Vielfaches des andren.

[22a]) Ein Ring heißt nach VAN DER WAERDEN *euklidisch*, falls er keine Nullteiler enthält und jedes Ideal Hauptideal ist.

Beweis. Vorerst hat $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}^\nu)$ keine Nullteiler. Denn ist $xy = 0$, $y \neq 0$, und hat y die Höhe n, so ist wegen TR. 52 $x\pi^n = 0$, $\therefore \sum \xi_\nu \pi^{\nu+n} = 0$, also wegen der Eindeutigkeit der Reihenentwicklung (TR. 47) $\xi_\nu = 0$, $\therefore x = 0$. Zum Beweise, daß jedes Ideal Hauptideal ist, genügt es, zu zeigen, daß es in $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}^\nu)$ keine andren Ideale als die $\mathfrak{p}^\nu = (\pi^\nu)$ gibt. Dabei sind $(\pi^0) = (1)$, $(\pi^\infty) = (0)$ mit einbegriffen. Ist nun $\mathfrak{x}$ ein Ideal, n die kleinste in $\mathfrak{x}$ vorkommende Höhe, so ist jedes Element $x \varepsilon \mathfrak{x}$ durch ein π^k, $k \geqq n$ teilbar. Also ist $\mathfrak{x} \equiv 0(\pi^n)$. Wegen TR. 52 ist aber auch $\pi^n \equiv 0(\mathfrak{x})$, also $\mathfrak{x} = (\pi^n)$.

Korollar. Der Quotientenring eines $\mathfrak{p}$-adischen Ringes (im engeren Sinne) ohne Nullteiler ist ein Körper. Ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}^\nu)$ kompakt, also Cantorsch, so ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}\mathfrak{R}^{-1}$ offen Cantorsch oder endlich. Umgekehrt ergibt die Theorie der mikrokompakten T-Körper [23]), daß jeder offene Cantorsche Körper Quotientenkörper eines $\mathfrak{p}$-adischen Ringes ist; für einen endlichen Körper ist dies trivial.

TR. 55. *Jeder den Voraussetzungen von § 6 genügende euklidische $\mathfrak{d}_\nu$-adische Ring ist $\mathfrak{p}$-adisch oder ein Körper.*

Beweis. Weil $\mathfrak{R}(\mathfrak{d}_\nu)$ keine Nullteiler haben darf, muß er wegen TR. 39, Bemerkung 2, primitiv sein: $\mathfrak{d}_n = \mathfrak{q}_n$. Weil $\mathfrak{q}_n$ Hauptideal ist, muß $\mathfrak{q}_n = (q_n)$ sein. Es sei $\pi = q_1$. Abgesehen vom trivialen Fall $\mathfrak{p} = (0)$ (wo $\mathfrak{R}(\mathfrak{d}_\nu) = \mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ein Körper ist, weil in einem euklidischen Ring jedes Primideal teilerlos ist) kann die Kette der $\mathfrak{q}_\nu$ wegen der Nullteilerfreiheit und wegen $\pi^n \equiv 0(\mathfrak{q}_n)$ nicht abbrechen: $\mathfrak{q}_\nu \neq (0)$. Es sei dann für alle $i < n$ bewiesen, daß $\mathfrak{q}_i = (q_i) = (\pi^i)$ ist, was für $n \leqq 2$ der Fall ist. Dann ist $q_n \equiv 0\,(\pi^{n-1})$, $\therefore q_n = r\pi^{n-1}$. Wäre $r \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ so gäbe es ein s mit $rs \equiv 1\,(\mathfrak{p})$, also $q_n s - \pi^{n-1} \equiv 0\,(\pi^{n-1}\mathfrak{p}) \equiv 0(\pi^n)$, $\therefore \pi^{n-1} \equiv 0\,(\pi^n)$, $\therefore \mathfrak{p} = (1)$, $\therefore \mathfrak{R}(\mathfrak{q}_\nu) = \mathfrak{R}/\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(1^\nu)$. Sonst ist $r \equiv 0(\pi)$. Dagegen kann r nicht $\equiv 0(\pi^2)$ sein, weil sonst das Ideal π^n zwischen (π^{n-1}) und $\mathfrak{q}_n$ eingeschaltet werden könnte. Es ist also $r = u\pi$, $u \not\equiv 0(\pi)$, $\therefore uv \equiv 1(\pi)$, $\therefore q_n v - \pi^n \equiv 0\,(\pi^{n+1}) \equiv 0\,(q_{n+1}) \equiv 0\,(q_n)$, $\therefore \pi^n \equiv 0\,(q_n)$, also wegen $q_n \equiv 0\,(\pi^n)$: $(q_n) = (\pi^n)$, w. z. b. w.

---

23) D. van Dantzig [3].

(Eingegangen den 24. Februar 1934.)