

# COMPOSITIO MATHEMATICA

ALEXANDER OSTROWSKI

**Beiträge zur Topologie der orientierten  
Linielemente II. Ein Zusammenhang zwischen  
der Tangendrehung längs eines Bogens und seinen  
Ordnungen in Bezug auf die beiden Endpunkte**

*Compositio Mathematica*, tome 2 (1935), p. 177-193

<[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1935\\_\\_2\\_\\_177\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__177_0)>

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente II

Ein Zusammenhang zwischen der Tangentendrehung längs  
eines Bogens und seinen Ordnungen in Bezug  
auf die beiden Endpunkte

von

Alexander Ostrowski

Basel

---

## 1. *Einleitung.*

Wir behalten im Folgenden alle in der ersten Abhandlung (Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente I: Über eine topologische Verschärfung des Rolleschen Satzes, später mit L. I zitiert) eingeführten Bezeichnungen bei.

Es sei  $W$  ein offener Jordanbogen, längs dessen sich eine Tangentenrichtungsfunktion  $\Theta(P)$  definieren läßt.  $A$  sei der Anfangs-,  $B$  der Endpunkt von  $W$ . Den Zuwachs der Tangentenrichtungsfunktion von  $A$  bis  $B$  wollen wir im Folgenden als *die Tangentendrehung längs  $W$*  bezeichnen.

Wir wollen nun die Ordnungen von  $W$  auch in Bezug auf  $A$  und  $B$  definieren — die übliche Definition der Ordnung ist ja nur anwendbar, wenn der Punkt, in Bezug auf den die Ordnung zu definieren ist, *außerhalb* des Kurvenbogens liegt. Es seien  $A'$ ,  $B'$  zwei auf  $W$  in der Nähe von  $A$  bzw.  $B$  gelegene Punkte. Dann definieren wir als die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $A$  den Grenzwert der Ordnung des Bogens  $A'B$  in Bezug auf  $A$ , wenn  $A'$  längs  $W$  gegen  $A$  strebt. Und die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $B$  ist der Grenzwert der Ordnung von  $AB'$  in Bezug auf  $B$ , wenn  $B'$  gegen  $B$  geht. Die Existenz des ersten Grenzwerts folgt daraus, daß die Ordnung von  $A'B$  in Bezug auf  $A$  gleich ist

$$\Theta(A, B) - \Theta(A, A').$$

Denn, wenn  $A'$  gegen  $A$  geht, konvergiert dieser Ausdruck gegen

$$\Theta(A, B) - \Theta(A, A+0) = \Theta(A, B) - \Theta(A).$$

Was aber die Existenz des zweiten Grenzwerts anbetrifft, so

ergibt sie sich aus der Existenz des ersten Grenzwerts, wenn man den Bogen  $W$  in der Richtung von  $B$  nach  $A$  durchläuft.

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist nun der Beweis des folgenden Satzes:

**SATZ 1.** *Die Tangentendrehung längs eines offenen Jordanbogens  $W$ , längs dessen sich eine Tangentenrichtungsfunktion definieren läßt, ist gleich der Summe der Ordnungen von  $W$  in Bezug auf seine Endpunkte.*

Wir geben im Folgenden zwei Beweise dieses Satzes. Der erste beruht auf einer Betrachtung, die die Theorie der Sehnenrichtungsfunktion in einer bestimmten Richtung vertieft. Es handelt sich dabei vor Allem um den Beweis der Stetigkeit der Sehnenrichtungsfunktion als Funktion ihres *ersten* Arguments (Satz 3). In L. I wurde nur die Stetigkeit der Sehnenrichtungsfunktion als Funktion ihres zweiten Arguments in der Definition postuliert.

Die im Satz 3 enthaltene Tatsache läßt sich noch etwas anders auffassen. Kehrt man den Durchlaufungssinn des Kurvenbogens  $W$  um, so wird eine Tangentenrichtungsfunktion des entstehenden Weges  $\bar{W}$  durch  $\Theta(P) + \pi$  geliefert, wenn  $\Theta(P)$  eine Tangentenrichtungsfunktion von  $W$  ist. Der Inhalt des Satzes 3 ist nun mit der Aussage äquivalent, daß zwischen den entsprechenden Sehnenrichtungsfunktionen  $\Theta_{\bar{W}}(Q, P)$  und  $\Theta_W(P, Q)$  die Beziehung besteht:

$$\Theta_{\bar{W}}(Q, P) = \Theta_W(P, Q) + \pi.$$

Der zweite Beweis des Satzes I beruht auf

**SATZ 2.** *Es sei  $C$  ein offener Jordanbogen, der seinen Anfangspunkt  $A$  mit dem Endpunkt  $B$  derart verbindet, daß er dabei die durch  $A$  und  $B$  hindurchgehende Gerade  $g$  nur in endlich vielen Punkten trifft und dabei in jedem Schnittpunkt durchsetzt. Werden die Schnittpunkte von  $C$  mit  $g$  in der Reihenfolge, in der sie ange troffen werden, wenn  $C$  von  $A$  nach  $B$  durchlaufen wird, mit*

$$A = P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1} = B$$

*bezeichnet, so mögen je zwei aufeinander folgende Schnittpunkte  $P_\mu, P_{\mu+1}$ ,  $0 < \mu < n$ , auf  $g$  stets entweder durch  $A$  oder durch  $B$  (oder durch beide Punkte  $A, B$ ) getrennt werden.*

*Dann behaupten wir, daß es einen Index  $m$  gibt derart, daß die Punktepaare*

$$P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{m-1} P_m$$

*durch  $A$  und die Punktepaare*

$$P_m P_{m+1}, \dots, P_{n-1} P_n$$

nur durch  $B$  getrennt werden und höchstens ein Punktepaar  $(P_{m-1}P_m)$  durch beide Punkte  $A, B$  getrennt wird. Dabei gilt  $1 \leq m \leq n$ , und für  $m = 1$  gibt es keine durch  $A$  getrennten, für  $m = n$  keine nur durch  $B$  getrennten Punktepaare. Für  $m > 1$  wird  $P_0P_1$  nicht durch  $B$  getrennt.

Der Sinn der Aussage des Satzes 2 ist einfach der, daß unter seinen Voraussetzungen die Teilbögen der Kurve  $C$  zwischen den aufeinanderfolgenden Schnittpunkten mit  $g$  zuerst den Punkt  $A$  „umkreisen“ und sodann den Punkt  $B$ , wobei höchstens ein „Übergangs“-Bogen sowohl  $A$  als  $B$  umkreist. Wie man sieht, ist dies eine Aussage, die fast mehr in das Gebiet der *récréations mathématiques* gehört. Der Beweis des Satzes 2 verlangt allerdings ziemlich detailliertes Eingehen auf verschiedene Möglichkeiten.

2. Die Sehnenrichtungsfunktion  $\Theta(Q, P)$  als Funktion des ersten Arguments.

In L. I, Nr. 5 wurde die Sehnenrichtungsfunktion  $\Theta(Q, P)$  für Punktepaare  $Q, P$  definiert, bei denen  $P$  auf  $Q$  folgt. Und zwar haben wir  $\Theta(Q, P)$  durch die beiden Forderungen charakterisiert, daß die von  $Q$  nach  $P$  gezogene Sehne mit der Nullrichtung den Winkel  $\Theta(Q, P)$  bildet, und daß  $\Theta(Q, P)$  eine stetige Funktion von  $P$  ist, solange  $P$  auf  $Q$  folgt, und  $\Theta(Q+0) = \Theta(Q, Q+0)$  gilt. Wir beweisen nun:

SATZ 3.  $\Theta(Q, P)$  ist eine stetige Funktion von  $Q$ , solange  $P$  auf  $Q$  folgt, und insbesondere gilt

$$(1) \quad \Theta(P-0) = \Theta(P-0, P).$$

Was zunächst die Relation (1) anbetrifft, so folgt sie daraus, daß nach den Grundeigenschaften der Tangentenrichtungsfunktion zu jedem positiven  $\varepsilon$  ein solcher Punkt  $P_0$  vor  $P$  gefunden werden kann, daß

$$|\Theta(P_1) - \Theta(P-0)| < \varepsilon$$

bleibt für alle Punkte  $P_1$ , die zwischen  $P_0$  und  $P$  liegen.

Denn dann hat das Tangentenrichtungsbüschel des Bogens  $P_1P$  höchstens die Öffnung  $2\varepsilon$ , und, da nach dem Sehnenrichtungssatz alle Werte der Sehnenrichtungsfunktion  $\Theta(Q, P)$  für  $Q$  auf dem Bogen  $P_1P$  in demselben Richtungsbüschel liegen, gilt für alle solche  $Q$

$$|\Theta(Q, P) - \Theta(P-0)| \leq 2\varepsilon,$$

woraus die Relation (1) ohne weiteres folgt.

Was aber die Stetigkeit von  $\Theta(Q, P)$  in Bezug auf  $Q$  anbetrifft, so werden wir sogar beweisen, daß, wenn  $Q$  von  $P$  verschieden ist und vor  $P$  liegt,  $\Theta(Q, P)$  sogar *stetig in Bezug auf das Punktepaar  $Q, P$  in der „Umgebung“ dieses Punktepaares ist*. Denn aus der Definition der Tangentenrichtungsfunktion folgt die Existenz eines kleinen Bogens  $\beta$  auf  $W$  um  $Q$ , der  $P$  nicht enthält, und für den das Tangentenrichtungsbüschel die Öffnung  $< \frac{3\pi}{2}$  hat. Man entferne nun aus  $W$  das Innere des Bogens  $\beta$  und bezeichne die Entfernung des Restes  $\varrho$  vom Punkt  $Q$  mit  $\delta$ .  $\varrho$  besteht aus höchstens zwei zusammenhängenden Bögen  $\varrho_1, \varrho_2$ . Es möge  $P$  auf  $\varrho_1$  liegen. Es sei nun  $\varepsilon$  eine positive Zahl  $< \frac{\pi}{8}$ , und man setze

$$d = \frac{\delta}{2} \sin \varepsilon.$$

Man beschreibe jetzt um die Punkte  $Q$  und  $P$  kleine Bögen  $\gamma_1, \gamma_2$  auf  $W$ , deren sämtliche Punkte von  $Q$  bzw.  $P$  höchstens die Distanz  $d$  haben. Wir wollen nun zeigen, daß, wenn  $Q'$  ein beliebiger Punkt auf  $\gamma_1$  und  $P'$  ein beliebiger Punkt auf  $\gamma_2$  ist, die Relation

$$(2) \quad |\Theta(Q', P') - \Theta(Q, P)| \leq \varepsilon$$

gilt, womit der Satz 3 bewiesen sein wird.

Zu dem Zwecke ziehen wir die Geraden  $PQ$  und  $P'Q'$  und schätzen den Winkel ab, den sie mit einander bilden. Es seien  $d_1, d_2$  die Distanzen der Punkte  $Q, P$  von der Geraden  $Q'P'$ .

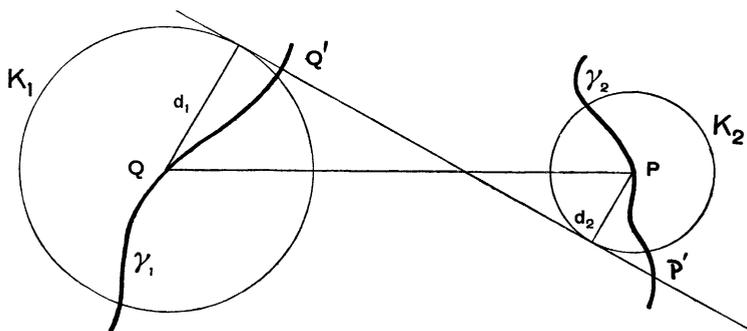


Fig. 1.

Die Zahlen  $d_1, d_2$  sind beide höchstens gleich  $d$ . Beschreibt man nun um  $Q$  bzw.  $P$  Kreise  $\kappa_1, \kappa_2$  mit dem Radius  $d_1$  bzw.  $d_2$ , so ist die Gerade  $Q'P'$  eine gemeinsame Tangente der Kreise  $\kappa_1, \kappa_2$ , während die Gerade  $QP$  ihre Zentrallinie ist (vgl. Fig. 1).

Hierbei kann die Gerade  $Q'P'$  innere oder äußere Tangente des Kreispaars  $\kappa_1, \kappa_2$  sein (in der Fig. 1 ist sie die innere Tangente), in beiden Fällen ist aber der Winkel der beiden Geraden höchstens gleich (vgl. Fig. 1) der größeren der beiden Zahlen

$$\arcsin \frac{2d_1}{\delta}, \quad \arcsin \frac{2d_2}{\delta},$$

also auf jeden Fall höchstens gleich

$$\arcsin \frac{2d}{\delta} = \varepsilon.$$

Diese Abschätzung bleibt offenbar insbesondere auch dann richtig, wenn  $P'$  mit  $P$  zusammenfällt. Endlich kann in diesem letzteren Falle der Punkt  $P$  mit jedem Punkt auf dem Bogen  $\varrho_1$  identifiziert werden. In jedem Falle bleibt der Winkel der Geraden  $Q'P$  und  $QP$  höchstens gleich  $\varepsilon$ .

Aus diesem Ergebnis folgt aber nun die Relation

$$(3) \quad \Theta(Q', P') - \Theta(Q, P) = \psi + 2n\pi,$$

wo der absolute Betrag von  $\psi$  höchstens gleich  $\varepsilon$ , also sicher kleiner als  $\frac{\pi}{8}$  bleibt, während  $n$  eine ganze Zahl ist. Da aber die Funktion  $\Theta(Q', P')$  eine stetige Funktion von  $P'$  ist, ist auch die rechte Seite von (3) stetig in  $P'$ , solange  $P'$  auf  $\varrho_1$  bleibt.

Daher muß  $n$  nach dem über den absoluten Betrag von  $\psi$  Gesagten für alle diese  $P'$  konstant bleiben. Es gilt daher insbesondere

$$(3') \quad \Theta(Q', P) - \Theta(Q, P) = \psi + 2n\pi$$

mit demselben Wert von  $n$ . Hier ist aber wiederum die linke Seite stetig in  $P$ , und nach dem über  $\psi$  Gesagten muß daher  $n$  den gleichen Wert für alle  $P$  auf  $\varrho_1$  haben. Ist daher  $P_0$  der  $\beta$  und  $\varrho_1$  gemeinsame Punkt, so gilt insbesondere

$$(4) \quad \Theta(Q', P_0) - \Theta(Q, P_0) = \psi + 2n\pi$$

mit dem gleichen ganzzahligen Wert von  $n$ . Nun ist aber die Öffnung des Tangentenrichtungsbüschels von  $\beta$  kleiner als  $\frac{3\pi}{2}$ . Daher ist auch der absolute Betrag der linken Seite von (4)  $< \frac{3\pi}{2}$ . Aus (4) folgt daher  $|2n\pi| < 2\pi$ , so daß  $n = 0$  sein muß, daher folgt aus (4), (3') und (3)

$$\Theta(Q', P') - \Theta(Q, P) = \psi,$$

womit (2) bewiesen ist. Damit ist der Beweis des Satzes 3 erbracht.

Aus den damit bewiesenen Eigenschaften der Funktion  $\Theta(Q, P)$  folgt nunmehr: sind  $Q, Q'$  zwei Punkte auf  $W$ , die vor  $P$  liegen, so ist die Ordnung des Bogens  $QQ'$ , von  $Q$  nach  $Q'$  durchlaufen, in Bezug auf  $P$  gleich der Differenz

$$\Theta(Q', P) - \Theta(Q, P).$$

Insbesondere ist die Ordnung des Bogens  $QP$  in Bezug auf den Punkt  $P$  gleich

$$(5) \quad \lim_{Q' \rightarrow P} (\Theta(Q', P) - \Theta(Q, P)) = \Theta(P-0) - \Theta(Q, P).$$

### 3. Erster Beweis des Satzes 1.

Aus dem in der letzten Nummer Bewiesenen folgt nunmehr der Satz 1 ohne jede Schwierigkeit. In der Tat, es sei  $\Theta(P)$  die Tangentenrichtungsfunktion und  $\Theta(Q, P)$  die Sehnenrichtungsfunktion von  $W$ . Sind ferner  $A, B$  der Anfangs- und der Endpunkt von  $W$ , so ist die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $A$  gleich

$$\Theta(A, B) - \Theta(A+0);$$

ebenso ist die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $B$  nach (5) gleich

$$\Theta(B-0) - \Theta(A, B).$$

Die Summe dieser beiden Zahlen ist aber gleich

$$\Theta(B-0) - \Theta(A+0),$$

und dies ist die Tangendendrehung von  $A$  bis  $B$  längs  $W$ , w.z.b.w.

### 4. Beweis des Satzes 2. Reduktion auf den Fall $k = n + 1$ .

Wir zeigen zuerst, daß ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Kurve  $C$  in der Umgebung der Schnittpunkte mit  $g$  als geradlinig angenommen werden kann. Dies folgt sofort aus dem Unbewalltheitssatz. Nach diesem Satz kann nämlich zu jedem der Punkte  $P_v$  nach Festsetzung eines beliebig kurzen durch  $P_v$  hindurchgehenden Teilbogens  $C_v$  von  $C$  eine so kleine Umgebung  $U_v$  von  $P_v$  gefunden werden, daß in diese Umgebung keine Punkte von  $C$  eindringen, die nicht zu  $C_v$  gehören. Wir wählen für ein bestimmtes  $P_v$  den Bogen  $C_v$  so klein, daß auf ihm keine weiteren Schnittpunkte mit  $g$  liegen. Wir wählen ferner zwei Punkte  $p, q$  auf  $C_v$  innerhalb der Umgebung  $U_v$ , die auf *verschiedenen* Seiten von  $g$  liegen. Man betrachte nun die geradlinige Strecke  $h$ , die die Punkte  $p$  und  $q$  verbindet. Es sei  $D_1$  der erste Punkt, in dem  $C$ , von  $A$  nach  $B$  durchlaufen, die Strecke  $h$  trifft. Ebenso

sei  $D_2$  der letzte Punkt, in dem die Strecke  $h$  von  $C$  getroffen wird. Ersetzt man nun den Bogen  $D_1D_2$  von  $C$  durch die geradlinige Strecke  $D_1D_2$ , so trifft die neue Kurve die Gerade  $g$  innerhalb  $U_\nu$  in einem Punkte  $Q_\nu$ , in dem sie  $g$  längs der geradlinigen Strecke  $D_1D_2$  durchsetzt, und es genügt offenbar, den Satz für die neue Kurve zu beweisen. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens mit selbstverständlichen Modifikationen im Falle von  $A, B$  können wir erreichen, daß  $C$  in der Umgebung sämtlicher Punkte  $P_\mu$  geradlinig ist. Wir können daher von vornherein voraussetzen, daß die Kurve  $C$  diese Eigenschaft besitzt.

Es sei nun  $k$  größte Index, für den das Punktepaar  $P_{k-1}P_k$  durch  $A$  getrennt wird. Gibt es kein solches Punktepaar, so bedeutet dies, daß alle unsere Punktepaare durch  $B$  getrennt werden, und es ist nichts zu beweisen. Wir können daher annehmen, daß  $2 \leq k \leq n+1$  ist.

Unser nächstes Ziel besteht nun darin, den Beweis unseres Satzes auf den Beweis des Spezialfalles zurückzuführen, in dem  $k = n+1$  ist. In der Tat: Es sei  $2 \leq k \leq n$ , und es möge die Behauptung unseres Satzes falsch sein. Dies würde bedeuten, daß unter den Punktepaaren  $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{k-2}P_{k-1}$  wenigstens eines durch  $B$  getrennt wird. Es sei dies etwa  $P_{\nu-1}P_\nu$ ,  $1 \leq \nu < k$ .

Wir betrachten nun den Bogen  $P_nP_{n+1}$ , d.h.  $P_nB$  von  $C$ . Dieser Bogen bildet zusammen mit der geradlinigen Strecke  $P_nB$  eine Jordankurve, die vom übrigen Stück  $AP_n$  von  $C$  nur längs der geradlinigen Strecke  $P_nB$  getroffen werden kann. Dies ist aber unmöglich, denn, wenn dieses Stück die Strecke  $P_nB$  zum ersten Male durchsetzt und ins Innere der Jordankurve  $P_nBP_n$  eindringt, muß es dann dieses Innere in seinem nächsten Schnittpunkt mit  $g$  (der eventuell mit  $P_n$  identisch sein kann) verlassen, so daß zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte von  $C$  mit  $g$  zwischen  $P_n$  und  $B$  liegen würden, daher weder durch  $A$  noch durch  $B$  getrennt wären, entgegen der Voraussetzung. Auf der geradlinigen Fortsetzung des Bogens  $P_nB$  über  $P_n$  hinaus läßt sich daher ein Punkt  $Q$  so nah bei  $P$  finden, daß, wenn die Strecke  $P_nB$  sich um  $B$  dreht, während ihr Endpunkt längs  $P_nQ$  gleitet, dabei keine Punkte des zwischen  $A$  und  $Q$  liegenden Stücks von  $C$  angetroffen werden, bis auf  $Q$  selbst. (Vgl. Fig. 2.)

Ersetzt man das zwischen  $Q$  und  $P$  enthaltene Stück von  $C$  durch die geradlinige Strecke  $QP$ , so genügt auch der entstehende Weg den Voraussetzungen des Satzes 2. Es ändert sich ferner für ihn weder  $k$  noch der Bogen  $P_{\nu-1}P_\nu$ , während die Anzahl

der Schnittpunkte mit  $g$  um eine Einheit verkleinert wird. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens können wir schließlich erreichen, daß  $k = n + 1$  wird.

### 5. Beweis des Satzes 2. Zuendeführung des Beweises.

Wir können daher von nun an voraussetzen, daß  $k = n + 1 \geq 2$  ist, d.h. daß das Punktepaar  $P_n B$  durch  $A$  getrennt wird. Es sei die Behauptung des Satzes falsch. Dann gibt es ein Punktepaar  $P_{\nu-1} P_\nu$ ,  $1 \leq \nu \leq n$ , das durch  $B$  getrennt wird, und wir wollen hier unter  $\nu$  die kleinste in Betracht kommende Zahl verstehen. Ist  $\nu = 1$ , so werden bereits die Punkte  $A, P_1$  durch  $B$  getrennt. Wir werden nun zeigen, daß aus der Annahme  $\nu \geq 1$

ein Widerspruch folgt.

Da wir die ganze Figur sowohl an der Geraden  $g$  als auch an einem Lot zu  $g$  spiegeln können, dürfen wir annehmen, daß, wenn  $g$  mit der  $X$ -Achse zusammenfällt,  $B$  rechts,  $P_n$  links von  $A$  liegt und der Bogen  $P_n B$  von  $C$  in der

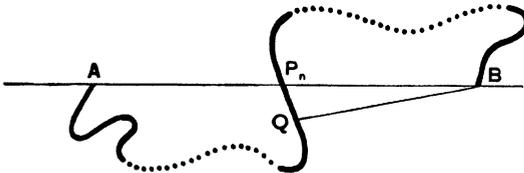


Fig. 2.

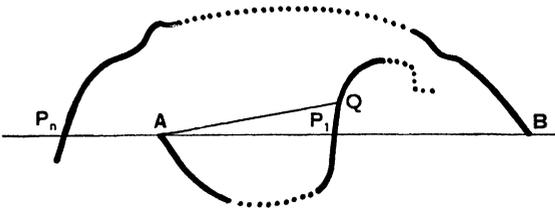


Fig. 3.

oberen Halbebene verläuft, wodurch die folgenden Figg. 3, 4, 5 in ihrer schematischen Anordnung gerechtfertigt sind.

Wir fassen nunmehr den Bogen  $AP_1$  ins Auge und betrachten zunächst den Fall, wo  $P_1$  zwischen  $P_n$  und  $B$  liegt, also insbesondere links von  $B$ , so daß  $\nu \geq 2$  sein muß. Je nachdem ob  $P_1$  nach rechts oder nach links von  $A$  liegt und ob der Bogen  $AP_1$  in der oberen oder unteren Halbebene verläuft, sind vier Fälle möglich, von denen in der Fig. 3 einer wiedergegeben ist. In allen diesen Fällen sind wir nun sicher, daß zwischen  $A$  und  $P_1$  kein weiterer Punkt  $P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$  liegen kann, denn, wenn ein Bogen des Kurvenstücks  $P_2 P_n$  in einem Punkte  $P_\mu$  ins Innere des zwischen dem Bogen  $AP_1$  und der geradlinigen Strecke  $AP_1$  enthaltenen Gebietes eindringt, muß er dann aus diesem Gebiet auch in einem Punkte der geradlinigen Strecke  $AP_1$  heraustreten,

und man hätte dann zwei aufeinanderfolgende Punkte  $P_\mu, P_{\mu+1}$ , die weder durch  $A$  noch durch  $B$  getrennt wären.

Wir suchen nun wiederum auf der geradlinigen Fortsetzung des Bogens  $AP_1$  über  $P_1$  hinaus einen Punkt  $Q$ , der so nahe bei  $P_1$  liegt, daß, wenn die Strecke  $AP_1$  sich um  $A$  dreht, während ihr Endpunkt längs  $C$  von  $P_1$  bis  $Q$  gleitet, diese Strecke keinen Punkt des zwischen  $Q$  und  $B$  enthaltenen Stücks von  $C$  trifft, bis auf den Punkt  $Q$ . Ersetzt man nun den Bogen  $AP_1Q$  durch die geradlinige Strecke  $AQ$ , so genügt auch der neu entstehende Weg den Voraussetzungen des Satzes 2. Da aber jetzt der Schnittpunkt  $P_1$  mit  $g$  verschwunden ist, verkleinern sich nunmehr die Zahlen  $k = n + 1$  und  $\nu$  um 1. Dieses Verfahren kann wiederholt werden, solange  $P_1$  zwischen  $P_n$  und  $B$  bleibt (und damit  $\nu \geq 2$  ist). So gelangen wir schließlich zu einem Weg  $C$ , für den  $P_1$  nicht mehr zwischen  $P_n$  und  $B$  liegt und  $\nu \geq 1$  ist.

Wir brauchen uns daher nur noch mit dem Fall zu befassen, wo  $P_1$  *außerhalb* der Strecke  $P_nB$  liegt. Hier sind, je nachdem  $P_1$  rechts oder links von  $A$  liegt, zwei Unterfälle möglich, die in den Figg. 4, 5 dargestellt sind.

Der weiteren Diskussion schicken wir die Bemerkung voraus, daß, wenn zwei verschiedene Bögen  $P_{\kappa-1}P_\kappa, P_{\mu-1}P_\mu$  von  $C$  auf der *gleichen* Seite der Geraden  $g$  verlaufen, die entsprechenden Punktepaare  $P_{\kappa-1}P_\kappa, P_{\mu-1}P_\mu$  einander nicht trennen können. Denn sonst müßte z.B. der Bogen  $P_{\kappa-1}P_\kappa$  sowohl innere als auch äußere Punkte des Gebiets enthalten, das vom Bogen  $P_{\mu-1}P_\mu$  und der geradlinigen Strecke  $P_{\mu-1}P_\mu$  eingeschlossen wird. Dann muß der Bogen  $P_{\kappa-1}P_\kappa$  den Rand dieses Gebietes schneiden, und da er die geradlinige Strecke  $P_{\mu-1}P_\mu$  nicht durchsetzen kann, müßte die Kurve  $C$  einen Doppelpunkt haben, entgegen der Voraussetzung.

Daher muß, wenn  $P_1$  *links* von  $P_n$  liegt, der Bogen  $AP_1$  in

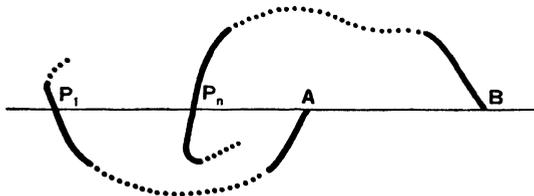


Fig. 4.

der unteren Halbebene liegen, da  $AP_1$  und  $P_nB$  einander trennen. (Vgl. Fig. 4.) Es ist sofort einzusehen, daß dieser Fall unmöglich ist. Denn geht man längs  $C$  von  $B$  aus über  $P_n$  hinaus, so dringt

man dabei ins Innere des zwischen dem Bogen  $AP_1$  und der geradlinigen Strecke  $AP_1$  eingeschlossenen Gebietes ein und muß dann aus diesem Gebiet heraustreten, was nur längs der geradlinigen Strecke  $AP_1$  möglich ist; dann müßte aber der Punkt  $P_{n-1}$  auf jeden Fall *links* von  $A$  liegen und die beiden Punkte  $P_{n-1}, P_n$  wären weder durch  $A$  noch durch  $B$  getrennt, entgegen der Voraussetzung. Es bleibt daher nur noch die Unmöglichkeit des in der Fig. 5 schematisch dargestellten Falles zu beweisen, wo  $P_1$  *rechts* von  $B$  liegt.

Da in diesem Falle die Punktepaare  $P_nB$  und  $AP_1$  einander trennen (vgl. Fig. 5), muß der Bogen  $AP_1$  in der unteren Halb-

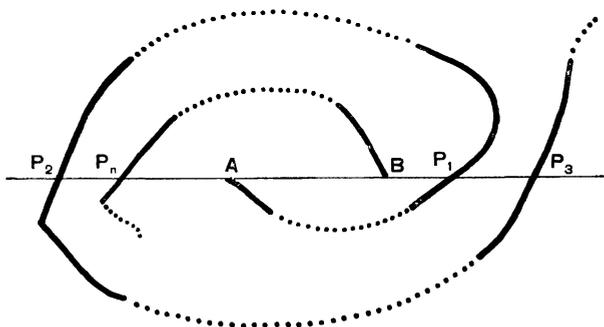


Fig. 5.

ebene verlaufen und daher der Bogen  $P_1P_2$  in der *oberen* Halbebene. Da aber  $P_1$  außerhalb der Strecke  $P_nB$  liegt, muß auch  $P_2$  außerhalb dieser Strecke liegen und zwar links von  $P_1$  (und damit auch von  $P_n$ ), da sonst  $P_1$  und  $P_2$  weder durch  $A$  noch durch  $B$  getrennt wären. Daher muß nunmehr der Bogen  $P_2P_3$  in der *unteren* Halbebene verlaufen.  $P_3$  muß nun sicher rechts von  $A$  liegen, da sonst  $P_2, P_3$  weder durch  $A$  noch durch  $B$  getrennt wären. Da aber die Punktepaare  $P_2P_3$  und  $AP_1$  einander nicht trennen können — die entsprechenden Bögen verlaufen ja beide in der unteren Halbebene — muß der Punkt  $P_3$  *rechts* von  $P_1$  liegen. Nunmehr verläuft der Bogen  $P_3P_4$  in der *oberen* Halbebene, ebenso wie  $P_1P_2$ , und da die dazugehörigen Punktepaare einander nicht trennen können, muß  $P_4$  *links* von  $P_2$  liegen. Ebenso sehen wir, daß  $P_5$  rechts von  $P_3$  liegt,  $P_7$  rechts von  $P_5$  usw., während die Punkte  $P_\mu$  mit geraden Indices alle links von  $A$  liegen und sich immer weiter und weiter von  $A$  entfernen. Daher könnte keiner der Punkte  $P_\mu$  in den Punkt  $B$  hineinfallen, während ja  $B$  der Punkt  $P_{n+1}$  ist. Daher ist auch der in der Fig. 5 dargestellte Fall unmöglich. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

### 6. Zweiter Beweis des Satzes 1. Vorbereitungen.

Mit Hülfe des Satzes 2 läßt sich nun ein zweiter Beweis des Satzes 1 führen.

Wir bezeichnen im Folgenden die Gerade  $AB$  mit  $g$ .

Wir zeigen zunächst, daß es genügt, den Spezialfall zu beweisen, wo der Kurvenbogen  $W$  in seine beiden Endpunkte *geradlinig* einmündet. Denn es sei der Satz 1 für diesen Spezialfall bewiesen. Es seien dann im allgemeinen Falle auf  $W$  von  $A$  nach  $B$  folgend sechs weitere Punkte  $A', A'', A''', B''', B'', B'$  angenommen. Und zwar seien für ein  $\varepsilon > 0$   $A''', B'''$  so nah an  $A$  bzw.  $B$  gewählt, daß die Tangentendrehung für  $AA''', BB'''$  und für jeden Teilbogen dieser Bögen  $< \frac{\varepsilon}{10}$  bleibt. Sodann schränke man  $A', B'$  auf solche Umgebungen von  $A, B$  ein, daß die Ordnungen des Bogens  $A'''B'''$  in bezug auf  $A', B'$  sich von seinen Ordnungen in Bezug auf  $A$  bzw.  $B$  um weniger als  $\frac{\varepsilon}{10}$  unterscheiden. Ersetzt man

nun die hinreichend klein angenommenen Bögen  $A'A'', B'B''$  durch ihre Sehnen, so ist auf die entstehende Kurve  $A'A''A'''B'''B''B'$  nach Voraussetzung der Satz 1 anwendbar, daraus folgt aber leicht, daß der Satz 1 für die ursprüngliche Kurve  $W$  „bis auf  $\varepsilon$ “ richtig und daher allgemein richtig ist.

Mündet aber  $W$  in seine beiden Endpunkte geradlinig ein und sind die Punkte  $A', B'$  auf den in  $A$  bzw.  $B$  einmündenden geradlinigen Teilstrecken von  $W$  gelegen, so kann man nach dem Lemma 2 von L. I (Nr. 8) das Gesamtstück von  $W$  zwischen  $A'$  und  $B'$  durch ein geeignetes Sehnenpolygon ersetzen, ohne daß sich die gesamte Tangentendrehung längs  $W$  und die Ordnungen von  $W$  in Bezug auf die Punkte  $A, B$  ändern. *Daher darf  $W$  beim Beweise des Satzes 1 als ein polygonaler Streckenzug vorausgesetzt werden.*

Liegt nun ferner auf  $g$  ein von  $A, B$  verschiedener Eckpunkt von  $W$ , so kann nach den Betrachtungen in Nrr. 12, 13 von L. I das Stück von  $W$  in der Nähe dieses Eckpunktes durch eine kurze Sehne ersetzt werden, die entweder  $g$  gar nicht schneidet oder diese Gerade durchsetzt. *Daher kann weiter vorausgesetzt werden, daß auf  $g$  kein von  $A, B$  verschiedener Eckpunkt von  $W$  liegt.*

Es mögen nun zwei auf  $W$  unmittelbar aufeinander folgende, von  $A, B$  verschiedene Schnittpunkte  $P, Q$  mit  $g$  weder durch  $A$  noch durch  $B$  getrennt werden. Man betrachte dann das Gebiet  $G$ , das vom Bogen  $PQ$  von  $W$  und der Strecke  $PQ$  von  $g$  begrenzt wird. Es mögen zunächst auf  $g$  zwischen  $P$  und  $Q$  und daher auch

innerhalb  $G$  keine weiteren Punkte von  $W$  liegen. Liegt dann etwa  $G$  oberhalb der Geraden  $g$ , so kann man auf  $W$  in der Nähe der Punkte  $P, Q$  unterhalb von  $g$  zwei solche Punkte  $P', Q'$  finden, daß auch das vom Bogen  $P'Q'$  von  $W$  und der geradlinigen Strecke  $P'Q'$  begrenzte Gebiet  $G'$  keine Punkte von  $W$  im Innern enthält. Ersetzt man daher das Stück  $P'Q'$  von  $W$  durch die geradlinige Strecke  $P'Q'$ , so ändern sich dabei weder die gesamte Tangendrehung längs  $W$ , noch die Ordnungen von  $W$  in Bezug auf  $A, B$  — nach dem Lemma 4 von L. I. Und ganz analog kann man vorgehen, wenn  $G$  unterhalb der Geraden  $g$  verläuft.

Indem wir nun diese Reduktion so oft wie möglich ausführen, können wir erreichen, daß, wenn zwei auf  $W$  aufeinander folgende Schnittpunkte  $P, Q$  mit  $g$  weder durch  $A$  noch durch  $B$  getrennt werden, zwischen  $P$  und  $Q$  sicher noch weitere Schnittpunkte von  $W$  mit  $g$  liegen. In diesem Falle aber muß der Weg  $W$  in einem Punkte  $P_1$  ins Innere des zwischen der Strecke  $PQ$  und dem Bogen  $PQ$  eingeschlossenen Gebietes  $G$  eindringen und daher in dem auf  $P_1$  unmittelbar folgenden Schnittpunkt  $Q_1$  mit  $g$  aus  $G$  heraustreten. Daher sind dann auch  $P_1, Q_1$  wiederum unmittelbar aufeinander folgende Schnittpunkte von  $W$  mit  $g$ , die weder durch  $A$  noch durch  $B$  getrennt werden. Dann müßte aber auch zwischen diesen beiden Punkten ein weiteres Punktepaar  $P_2, Q_2$  von derselben Beschaffenheit liegen, und diese Überlegung kann offenbar ins Unendliche fortgesetzt werden, während die Anzahl der Schnittpunkte von  $W$  mit  $g$  ja endlich sein muß. Daher ist dieser Fall nach vollständiger Durchführung unserer Reduktion überhaupt unmöglich. Wir dürfen daher annehmen, daß je zwei auf  $W$  aufeinander folgende, von  $A$  und  $B$  verschiedene Schnittpunkte mit  $g$  stets entweder durch  $A$  oder durch  $B$  getrennt werden.

Nunmehr läßt sich aber auf  $W$  der Satz 2 anwenden. Die Paare aufeinander folgender Schnittpunkte mit  $g$  werden zuerst durch  $A$  und dann durch  $B$  getrennt, wobei nur ein „Übergangs“-Punktepaar eventuell sowohl durch  $A$  als auch durch  $B$  getrennt werden kann.

Wir können offenbar  $g$  als die  $X$ -Achse voraussetzen, wobei  $B$  rechts von  $A$  liegt, und zugleich nach eventueller Spiegelung der ganzen Figur an  $g$  erreichen, daß der Punkt  $A$  von  $W$  in positivem Sinne umkreist wird. Dies bedeutet insbesondere, daß, wenn der Bogen von  $W$  zwischen  $A$  und dem ersten auf  $A$  längs  $W$  folgenden Schnittpunkt  $Q_1$  mit  $g$  in der unteren Halbebene



$A$  die Ordnung  $\pi$ , so daß das Gesamtstück  $AC$  von  $W$  die Ordnung  $m\pi - \Theta_0$  in Bezug auf  $A$  hat. Da aber jeder der Bögen zwischen je zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten von  $CB$  mit  $g$  die Ordnung 0 in Bezug auf  $A$  hat — ein solcher Bogen bildet ja mit der Verbindungsstrecke seiner Endpunkte eine einfache geschlossene Kurve, *außerhalb* deren  $A$  liegt —, so erhalten wir schließlich für die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $A$  den Wert  $m\pi - \Theta_0$ .

Andererseits ergibt sich für die Ordnung des Stücks  $Q_1B$  von  $W$  in Bezug auf  $Q_1$  der Wert  $m\pi - \Theta(Q_1)$ . In der Tat hat der Bogen  $Q_1Q_2$  in Bezug auf  $Q_1$  die Ordnung  $2\pi - \Theta(Q_1)$ , da ja  $\Theta(Q_1)$ , wie aus Fig. 6 hervorgeht, zwischen  $\pi$  und  $2\pi$  liegt. Jeder der Bögen aber  $Q_2Q_3, \dots, Q_{m-1}Q_m$ , falls überhaupt  $m > 2$  ist, hat in Bezug auf  $Q_1$  die Ordnung  $\pi$ . Daher ist die Ordnung von  $Q_1B$  in Bezug auf  $Q_1$  um den Betrag (6) kleiner als die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $A$ .

Die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $B$  aber ist gleich der Ordnung von  $Q_1B$  in Bezug auf  $B$ , da ja der Bogen  $AQ_1$  die Ordnung 0 in Bezug auf  $B$  hat. Daher ist im Falle der Fig. 6 der Satz 1 in der Tat für  $W$  richtig, wenn er für  $Q_1B$  richtig ist.

Im zweiten Falle (vgl. Fig. 7) verkleinert sich beim Übergang von  $W$  zu  $Q_1B$  die Gesamtdrehung der Tangente wiederum um

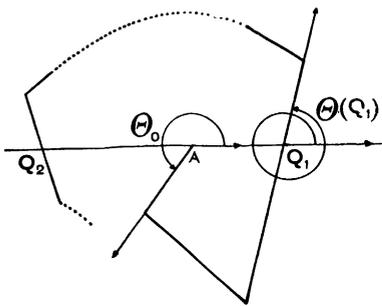


Fig. 7.

den Betrag (6). Die Ordnung des Bogens  $AQ_1$  in Bezug auf  $A$  ist in diesem Falle gleich  $2\pi - \Theta_0$ . Die weiteren Bögen  $Q_1Q_2, \dots, Q_{m-1}Q_m$  haben wiederum die gleiche Ordnung  $\pi$  in Bezug auf  $A$ , während die auf  $Q_m = C$  folgenden Teilbögen von  $W$  zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Schnittpunkten mit  $g$  die Ordnung 0 in Bezug auf  $A$  haben. Daher ergibt sich als die

Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $A$  der Betrag  $(m+1)\pi - \Theta_0$ . Für den Bogen  $Q_1Q_2$  entnehmen wir der Fig. 7 die Ordnung  $3\pi - \Theta(Q_1)$  in bezug auf  $Q_1$  — offenbar muß  $Q_2$  wegen  $m > 1$  in diesem Falle links von  $A$  liegen. Für die auf  $Q_1Q_2$  folgenden Teilbögen bis  $Q_{m-1}Q_m$  erhalten wir wieder jedesmal die Ordnung  $\pi$  in Bezug auf  $Q_1$ , während die darauffolgenden Bögen die Ordnung 0 in Bezug auf  $Q_1$  liefern. Daher ergibt sich insgesamt die Ordnung

$$3\pi - \Theta(Q_1) + (m-2)\pi = (m+1)\pi - \Theta(Q_1),$$

so daß die Ordnung von  $Q_1 B$  in Bezug auf  $Q_1$  wiederum um den Betrag (6) kleiner ist als die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $A$ . Und da auch in diesem Falle die Ordnung von  $AQ_1$  in Bezug auf  $B$  gleich 0 ist, ergibt sich die oben ausgesprochene Behauptung auch für den Fall der Fig. 7.

Durch wiederholte Anwendung der damit begründeten Reduktion können wir daher erreichen, daß  $m = 1$  wird und  $C = Q_1$  unmittelbar auf  $A$  folgt.

### 8. Zuendeführung des zweiten Beweises des Satzes 1.

Es sei nun  $m = 1$ . Wenn  $C$  von  $B$  verschieden und zwischen  $A$  und  $B$  gelegen ist, so behaupten wir, daß es genügt, den Satz 1 für den Bogen  $CB$  von  $W$  zu beweisen, wobei dann der auf  $C$  unmittelbar folgende Schnittpunkt  $C'$  von  $W$  mit  $g$  die Rolle des Punktes  $C$  übernimmt. In der Tat liegt in diesem Falle offenbar

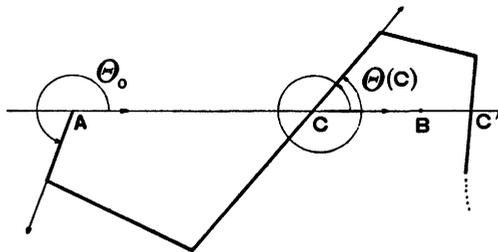


Fig. 8.

die in der Fig. 8 schematisch wiedergegebene Konfiguration vor. Beim Übergang von  $A$  zu  $C$  geht hier der Beitrag

$$(7) \quad \Theta(C) - \Theta_0$$

zur Gesamtdrehung der Tangente verloren. Die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $A$  ist in diesem Falle gleich der Ordnung  $2\pi - \Theta_0$  des Bogens  $AC$  von  $W$  in Bezug auf  $A$ . Die Ordnung des Stückes  $CB$  aber in Bezug auf  $C$  ist gleich der Ordnung des Bogens  $CC'$  in Bezug auf  $C$ , und für diese entnimmt man der Fig. 8 den (negativen) Betrag  $2\pi - \Theta(C)$ , da ja  $\Theta(C)$  zwischen  $2\pi$  und  $3\pi$  liegt. Auch in diesem Falle ist also die Ordnung von  $CB$  in Bezug auf  $C$  um (7) kleiner als die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $A$ , womit, da die Ordnung von  $AC$  in Bezug auf  $B$  verschwindet, unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir können daher beim Beweis des Satzes 1 von vornherein annehmen, daß  $C$  unmittelbar auf  $A$  folgt und von  $A$  durch  $B$  getrennt wird, wenn  $C$  nicht mit  $B$  identisch ist. Dabei könnte

der Bogen  $AC$ , wie er sich bei unserer Reduktion zunächst ergibt, sehr wohl auch *oberhalb* von  $g$  verlaufen. In diesem Falle aber genügt eine Spiegelung an  $g$ , um zu erreichen, daß dieser Bogen *unterhalb*  $g$  liegt.

Es möge nun  $n$  die Anzahl der auf  $W$  zwischen  $A$  und  $B$  liegen-

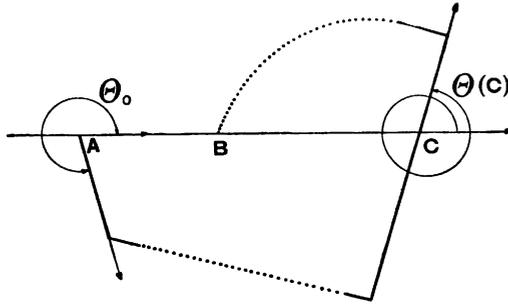


Fig. 9.

den, von  $A$  und  $B$  verschiedenen Schnittpunkte von  $W$  mit  $g$  bedeuten. Wir wollen den Beweis des Satzes 1 auf den Beweis des Falles  $n = 0$  reduzieren. Denn es sei  $n > 0$ . Wir haben dann schematisch die Konfiguration der Fig. 9 vor uns, und es genügt zu zeigen, daß aus der Richtigkeit des Satzes für das Stück  $CB$

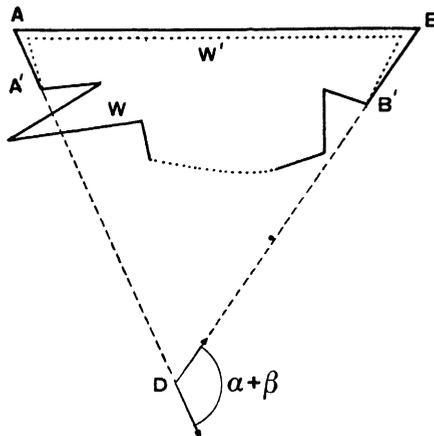


Fig. 10.

von  $W$  seine Richtigkeit für den ganzen Kurvenbogen  $W$  folgt. Lassen wir aber den Bogen  $AC$  von  $W$  weg, so verkleinert sich dabei die gesamte Tangentendrehung wiederum um  $(7)$ . Die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $A$  ist offenbar gleich  $2\pi - \theta_0$ . Die Ordnung des Stückes  $CB$  in Bezug auf  $C$  ist  $3\pi - \theta(C)$ .

Ferner ist in diesem Falle die Ordnung von  $CB$  in Bezug auf  $B$  um die Ordnung  $\pi$  von  $AC$  in Bezug auf  $B$  kleiner als die Ordnung von  $W$  in Bezug auf  $B$ . Daher ist die Summe der Ordnungen von  $CB$  in Bezug auf die Punkte  $B$  und  $C$  genau um den Betrag (7) kleiner als die Summe der Ordnungen von  $W$  in Bezug auf  $A$  und  $B$ .

Es genügt daher in der Tat, den Fall  $n = 0$  zu betrachten. In diesem Falle kann aber, wie ein Blick auf die Fig. 10 zeigt, nach dem Lemma 4 von L. I die Betrachtung des Weges  $W$  durch die Betrachtung des Weges  $W'$  ersetzt werden, der aus den beiden Strecken  $AA'$ ,  $B'B$  und den drei punktiert gezeichneten Strecken besteht<sup>1)</sup>. Die Betrachtung von  $W'$  kann aber wiederum durch die Betrachtung des aus den beiden Strecken  $AD$ ,  $DB$  bestehenden Streckenzuges ersetzt werden. Für diesen Streckenzug ergibt sich nun der Satz 1 unmittelbar. Denn sind  $\alpha$ ,  $\beta$  die inneren Winkel des Dreiecks  $ABD$  an  $A$  bzw.  $B$ , so ist  $\alpha$  die Ordnung von  $ADB$  in Bezug auf  $A$  und  $\beta$  die Ordnung dieses Streckenzuges in Bezug auf  $B$ . Die gesamte „Tangentendrehung“ längs  $ADB$  ist aber offenbar gleich dem Außenwinkel an  $D$ , d.h.  $\alpha + \beta$ , womit der Beweis des Satzes 1 von neuem erbracht ist.

---

<sup>1)</sup> Dabei hat man das Lemma 4 von L. I auf jedes der Teilstücke einzeln anzuwenden, in die die Strecke  $A'B'$  durch das Stück  $A'B'$  von  $W$  zerschnitten wird.

(Eingegangen den 2. Dezember 1933.)