I. PETROWSKY

Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 383-419
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__383_0>

Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung

von

I. Petrowsky

(Moskau)

Herr Sternberg hat gezeigt [1]), daß die von Herrn Perron herrührende Methode zur Lösung der ersten Randwertaufgabe der Laplaceschen Gleichung [2]) fast ohne jede Änderung auch zur Lösung der ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

verwendet werden kann. Dabei hat Herr Sternberg den Existenzbeweis für die Lösung dieser Aufgabe nur für solche Gebiete G der xt-Ebene geführt, die oben und unten von gewissen zur horizontal gedachten x-Achse parallelen Geraden, rechts und links aber von zwei Kurven

$$x = \varphi_1(t) \quad \text{und} \quad x = \varphi_2(t) \tag{2}$$

begrenzt sind, wo $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ beschränkte Derivierte [3]) besitzen.

Herr Gevrey hat aber schon 1913 gezeigt [4]), daß für die Existenz einer Lösung die allgemeinere Annahme genügt, daß die Funktionen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ den Hölderschen Bedingungen mit einem Exponenten $\alpha > \frac{1}{2}$ genügen; das soll bedeuten, daß für genügend kleines $|h|$

$$|\varphi_i(x+h) - \varphi_i(t)| < C\,|h|^\alpha \qquad (i = 1, 2)$$

gilt, wo C eine Konstante bedeutet.

---

[1]) Math. Annalen **101** (1929), 394—398.

[2]) Math. Zeitschrift **18** (1923), 42—54.

[3]) Hier und im folgenden bedeutet das Wort „Derivierte" stets die „vier Derivierten". [Vgl. Enzyklopädie II C 9*b*, 1086, Fußnote 717.]

[4]) Journal de Math. (6) **9** (1913), 305—471 (309).

Das Grundziel der vorliegenden Abhandlung bildet der Beweis folgender Behauptung:

Es existiert eine Lösung der ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung (1) *für eine beliebige auf der Begrenzung des Gebietes G*[5]) *definierte stetige Funktion f, wenn sich für jedes t eine stetige positive, für* $h \to -0$ *monoton gegen Null abnehmende und für* $h < 0$ *definierte Funktion* $\varrho(h)$ *derart angeben läßt, daß für alle negativen und absolut genügend kleinen Werte von h*

$$\varphi_1(t+h) - \varphi_1(t) \geqq -2\sqrt{h \log \varrho(h)}$$

und

$$\varphi_2(t+h) - \varphi_2(t) \leqq 2\sqrt{h \log \varrho(h)}$$

gilt, und außerdem

$$\int_c^\varepsilon \frac{\varrho(h)\sqrt{|\log \varrho(h)|}\,dh}{h} \to -\infty$$

für $\varepsilon \to -0$, *wobei c eine passende negative Konstante bedeutet.*

Umgekehrt kann auf der Begrenzung von G eine stetige Funktion f derart gewählt werden, daß die entsprechende Randwertaufgabe keine Lösung zuläßt, falls sich für mindestens einen t-Wert eine solche stetige, positive und für $h \to -0$ *monoton gegen* 0 *abnehmende Funktion* $\varrho(h)$ *angeben läßt, daß für alle negativen und absolut hinreichend kleinen Werte von h wenigstens eine der Ungleichungen*

$$\varphi_1(t+h) - \varphi_1(t) \leqq -2\sqrt{h \log \varrho(h)}$$

$$\varphi_2(t+h) - \varphi_2(t) \geqq 2\sqrt{h \log \varrho(h)}$$

erfüllt wird, wobei das Integral

$$\int_c^\varepsilon \frac{\varrho(h)\sqrt{|\log \varrho(h)|}\,dh}{h}$$

für $\varepsilon \to -0$ *konvergiert*[6]).

Insbesondere folgt hieraus, daß für eine beliebige stetige Funktion, die auf dem Rande des von der Kurve

$$x^2 = -4t \log |\log |t||$$

---

[5]) Unter der „Begrenzung des Gebietes G" soll hier und im folgenden die Gesamtheit der beiden Kurvenäste (2) und der das Gebiet nach unten begrenzenden geradlinigen Strecke verstanden werden (die t-Achse ist nach oben gerichtet, der Bestimmtheit halber ist $\varphi_1(t) \leqq \varphi_2(t)$ angenommen).

[6]) Man könnte im Wortlaut dieses Satzes die Existenz zweier verschiedenen Funktionen $\varrho(t)$ für $\varphi_1(t)$ bzw. $\varphi_2(t)$ verlangen; das würde aber offenbar keine Verallgemeinerung erzielen.

und der Geraden $t = -c$ begrenzten Gebietes G_1 definiert ist (wobei c irgend eine positive Konstante bedeutet), eine Lösung der ersten Randwertaufgabe existiert, derart daß sie in allen Punkten der Begrenzung die vorgegebenen Werte annimmt, darunter auch im Punkt $(0, 0)$.

Für ein Gebiet G_2, das von der Kurve $x^2 = -4(1+\varepsilon)t \log |\log |t||$ und der Geraden $t = -c$ begrenzt ist, existiert hingegen im allgemeinen keine Lösung der ersten Randwertaufgabe, die im Punkt $x = t = 0$ den gegebenen Wert annähme. Man kann z.B. zeigen, daß die Funktion $u(x, t)$, die im Innern des Gebietes G_2 die Gleichung (1) befriedigt und auf der seitlichen Begrenzung dieses Gebietes den Wert 0, auf der Grundlinie aber positive Werte annimmt, im Punkte $x = t = 0$ nicht gleich 0 werden kann. Die letztgenannten Ergebnisse können übrigens leicht aus einem kürzlich von Herrn A. Khintchine entdeckten wahrscheinlichkeitstheoretischen Satze gefolgert werden [7]).

In der vorliegenden Arbeit werden entsprechende Resultate auch für die allgemeinere Wärmeleitungsgleichung von der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

erhalten.

Für den Beweis aller dieser Behauptungen genügt es, die „den Bedingungen A genügenden Funktionen" (nach der Terminologie von Perron und Sternberg) oder die „Barriere" (nach der Terminologie von Poincaré) feiner zu konstruieren, als dies Herr Sternberg getan hat.

In § 1 werden einige Hilfssätze angeführt, die es erlauben, die Perronsche Methode unter allgemeineren Voraussetzungen anzuwenden, als dies bei Herrn Sternberg geschieht. In den §§ 2 und 3 werden Barrieren für den Beweis partieller Resultate, die dem „Satz vom iterierten Logarithmus" von Herrn A. Khintchine entsprechen, konstruiert. Weiter werden in den §§ 5 und 6 unabhängig davon schärfere Kriterien der Regularität und Irregularität entwickelt, aus welchen die Ergebnisse der §§ 2 und 3 als Spezialfälle folgen. Wenn wir trotzdem die zu diesen Ergebnissen führenden Konstruktionen gesondert angeben, so geschieht das aus dem Grunde, daß sie bedeutend einfacher sind, als der Beweis des allgemeinen Satzes. Außerdem lassen sie sich leicht, wie das in

---

[7]) A. Khintchine, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, V. Kap. § 3 [Ergebnisse 1933].

§ 4 gezeigt wird, auf parabolische Gleichungen mit einer größeren Anzahl von Variablen verallgemeinern.

§ **1.** Es sei $u(x, t)$ irgend eine in G stetige Funktion. Herr Sternberg bezeichnet mit $\mathfrak{M}_T u$ die Funktion, welche

1. außerhalb eines Trapezes T mit u zusammenfällt,
2. im Innern von T die Gleichung (1) befriedigt und auf dem Rande von T mit u zusammen fällt.

T bedeutet hier ein geradliniges Trapez, das sich im Innern von G befindet und dessen obere Grundlinie vollständig der Strecke angehört, die das Gebiet G von oben her begrenzt.

An Stelle dieses Trapezes T, das Herr Sternberg benutzt, kann aber zur Definition der Operation $\mathfrak{M}$ auch ein gleichseitiges Dreieck D genommen werden, dessen Grundlinie der x-Achse parallel ist, und das vollständig in G eingeschlossen ist. Alle Überlegungen von Herrn Sternberg bleiben unverändert in Kraft. Dabei können aber die oberen und unteren Funktionen auch für Gebiete definiert werden, die seitwärts von solchen Kurven $x = \varphi_1(t)$ und $x = \varphi_2(t)$ begrenzt sind, bei denen $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ keine beschränkten Derivierten besitzen.

Als *superparabolisch* (bzw. *subparabolisch*) werden wir jede in G stetige Funktion u bezeichnen, welche für jedes D die Bedingung

$$\mathfrak{M}_D u \leqq u \quad (\text{bzw. } \mathfrak{M}_D u \geqq u)$$

erfüllt. Funktionen, welche die Gleichung (1) befriedigen, werden wir als *parabolische* bezeichnen. Für sie gilt offensichtlich

$$\mathfrak{M}_D u = u$$

für jedes D.

Wir werden beweisen, daß *insbesondere alle Funktionen superparabolisch (subparabolisch) sind, welche innerhalb G einer Differentialgleichung der Form*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r(x, t) \tag{3}$$

genügen, wo $r(x, t) \geqq 0$ $(r(x, t) \leqq 0)$ ist.

Beweis. Um unsere Behauptung zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen, daß die Funktion $v(x, t)$, welche die Gleichung (3) befriedigt und auf dem Rand von D den Wert 0 annimmt im Innern von D keine negativen Werte annehmen kann.

Wir nehmen also an, es existiere eine Funktion, welche

1. auf dem Rande von D verschwindet,

2. im Innern von D der Gleichung (3) genügt, wo $r(x,t) \geqq 0$ ist,

3. im Innern von D Werte annimmt, deren untere Grenze $m < 0$ ist.

Es sei (a, b) ein Punkt von D, für welchen $v(a, b) = m$ ist. Wir betrachten die Funktion

$$v^*(x,t) = v(x,t) + \frac{m}{2d^2}(x-a)^2,$$

wo d die Seitenlänge von D bedeutet. Es ist $v^*(a,b) = m$, während auf dem Rande von D sicher Punkte mit $v^*(x,t) > \frac{m}{2}$ vorhanden sind; daher muß v^* innerhalb D ein Minimum haben, und es ist daselbst

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \geqq 0,$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} \leqq 0. \tag{4}$$

Andererseits gilt aber im Inneren von D

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{m}{d^2} = r(x,t) - \frac{m}{d^2} \geqq -\frac{m}{d^2} > 0,$$

was den gewünschten Widerspruch liefert.

Wir nennen einen Randpunkt P eines Gebietes G regulär, wenn für eine beliebige, auf dem Rande dieses Gebietes definierte beschränkte Funktion f die nach der Perronsche Methode konstruierte Lösung u [8]) der ersten Randwertaufgabe in P die Bedingungen

$$\underline{\underline{f}} \leqq \underline{\underline{u}} \leqq \overline{\overline{u}} \leqq \overline{\overline{f}} \tag{5}$$

erfüllt. Hier werden mit $\underline{\underline{f}}$ bzw. $\underline{\underline{u}}$ die unteren und mit $\overline{\overline{f}}$ bzw. $\overline{\overline{u}}$ die oberen Limesfunktionen von f bzw. u bezeichnet [9]). Diese Bedingungen erfordern insbesondere, daß die Funktion u den Wert $f(P)$ im Punkte P annimmt, falls f in P stetig ist.

Ebenso, wie Herr Perron bewiesen hat, daß seine „Bedingung

---

[8]) D.h. die untere Grenze aller superparabolischen Funktionen, die auf der Begrenzung von G nicht kleinere Werte als $\overline{\overline{f}}$ annehmen.

[9]) Wir sind genötigt, die oberen und unteren Limesfunktionen mit zwei Strichen zu versehen und nicht, wie gebräuchlich, mit einem, um sie von den superparabolischen, bzw. subparabolischen Funktionen zu unterscheiden, die mit einem Strich gekennzeichnet sind.

B" für die Existenz einer Lösung des Dirichletschen Problems ausreicht, erweist sich hier als hinreichende Bedingung für die *Regularität des Punktes P* die Existenz einer Funktion $\overline{u}(x, t)$, welche wir im weiteren als „Regularitätsbarriere" bezeichnen werden und welche die folgenden Bedingungen befriedigt:

1. Sie ist definiert im Durchschnitt U des Gebietes G mit einer gewissen Umgebung des Punktes P.

2. Sie ist superparabolisch, was z.B. sicher stattfindet, wenn

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} \geqq 0$$

ist.

3. Auf dem Rande von U ist sie stetig und positiv, mit alleiniger Ausnahme des Punktes P, in welchem sie verschwindet.

Umgekehrt ist leicht einzusehen, daß der Punkt P irregulär wird, wenn eine Funktion $\underline{u}(x, t)$ existiert, die wir künftighin als eine Irregularitätsbarriere bezeichnen und die folgende Bedingungen befriedigt:

1. Sie ist definiert im Durchschnitt U des Gebietes G mit einer gewissen Umgebung des Punktes P.

2. Sie ist subparabolisch, was z.B. sicher stattfindet, wenn sie die Gleichung (3) befriedigt, wo $r(x, t) \leqq 0$ ist.

3. Sie ist stetig auf dem Rande von U mit alleiniger Ausnahme des Punktes P, wo sie eine hebbare Unstetigkeitsstelle besitzt.

4. Die obere Grenze ihrer Werte innerhalb U bei Annäherung an P übertrifft die obere Grenze ihrer Werte auf dem Rande von G bei Annäherung an P.

Um diese Behauptung zu beweisen, definieren wir auf dem Rande von G eine Funktion f folgenderweise:

1. Genügend nahe an P setzen wir $f = \underline{u}$, im Punkte P selbst definieren wir f derart, daß sie daselbst stetig wird; dies ist möglich, da die Unstetigkeitsstelle P für $\underline{u}$ nach Voraussetzung hebbar ist.

2. Auf dem übrigen Teil des Randes von G nehmen wir f gleich einer positiven Konstante c an.

Dann ist klar, daß bei genügend großem c jede obere Funktion $z(x, t)$, die im Innern von G superparabolisch ist und auf dem Rande die Bedingung

$$\overline{\overline{z}} \geqq \overline{\overline{f}}$$

erfüllt, in U nicht kleiner als die Funktion $\underline{u}$ werden kann. Daher wird auch die untere Schranke $u(x, t)$ solcher Funktionen im Punkte (x, t) nicht kleiner als $\underline{u}$ sein und wird infolgedessen im Punkte P die Bedingung

$$\overline{\overline{f}} \geqq \overline{\overline{u}}$$

nicht befriedigen [10]).

Indem wir zur Konstruktion der Barriere übergehen, beweisen wir zunächst folgenden

Satz I. *Alle Punkte der horizontalen Basis von G sind regulär.*

Um uns von der Gültigkeit dieses Satzes zu überzeugen, brauchen wir nur zu beachten, daß für den Punkt (x_0, t_0) (wir nehmen an, daß als untere Basis die Gerade $t = t_0$ dient) dieser Basis die Funktion

$$(x - x_0)^2 + 2(t - t_0)$$

eine Regularitätsbarriere ist. Aus Satz I folgt

Satz II. *Für die Regularität oder Irregularität des Punktes $P[\varphi_i(t_1), t_1]$ ist nur das Verhalten der Funktion $\varphi_i(t)$ für $t < t_1$ von Belang.*

In der Tat, nehmen wir an, daß die nach der Perronschen Methode zu einer beliebigen beschränkten, auf dem Rande definierten Funktion f konstruierte Funktion $u(x, t)$ die Bedingungen (5) im Punkte $P[\varphi_i(t_1), t_1]$ befriedigt, wenn wir nur ihre Werte für $t \leqq t_1$ betrachten. Dann muß sie dieselben Bedingungen auch in dem Falle befriedigen, wo wir auch ihre Werte für $t > t_1$ in Betracht ziehen. Dies folgt unmittelbar aus dem soeben bewiesenen Satze, wenn wir ihn auf das krummlinige Trapez mit der unteren Basis $t = t_1$ anwenden.

Satz III. *Es sei $\varphi(t)$ eine für $t < 0$ stetige positive Funktion, $\varphi(-0) = 0$. Dann sind, gleichzeitig regulär oder irregulär:*

1. *Der Punkt $O(0, 0)$ des Gebietes G_1, das von den Kurven $x = \varphi(t)$, $x = -\varphi(t)$ und der Geraden $t = a < 0$ begrenzt wird, und*

2. *Die Punkte $P_2(c, 0)$ und $P_1(-c, 0)$ des Gebietes G_2, das von den Kurven $x = \varphi(t) + c$, $x = -\varphi(t) - c$ und den Geraden $t = 0$ und $t = a$ begrenzt wird.*

---

[10]) Diese Überlegungen können auch auf Gebiete G angewandt werden, die zwischen den Geraden $t = t_0$, $t = t_1$ eingeschlossen sind und nur einerseits von einer Kurve $x = \varphi(t)$ begrenzt werden, in der anderen Richtung sich hingegen unendlich erstrecken. Man muß nur die Randwerte sowie die oberen und unteren Funktionen beschränkt voraussetzen. Die Regularität bzw. Irregularität eines Punktes von $x = \varphi(t)$ ist, wie man leicht einsieht, ganz davon unabhängig, ob das Gebiet von der anderen Seite begrenzt oder unendlich ist.

Beweis.

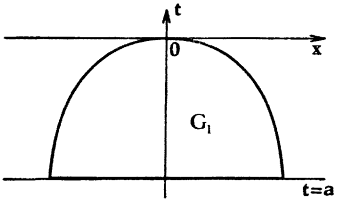

Fig. 1.

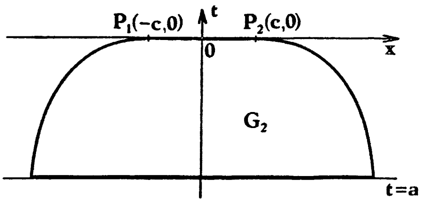

Fig. 2.

Wir nehmen zunächst an, daß der Punkt P_1 (statt P_1 könnte auch der Punkt P_2 genommen werden) des Gebietes G_2 regulär sei. Wir beweisen alsdann, daß der Punkt O des Gebietes G_1 ebenfalls ein regulärer Punkt ist. Zu diesem Zwecke setzen wir auf dem Rande des Gebietes G_2

$$f(x, t) = -t.$$

Die nach der Perronschen Methode für diese Randfunktion konstruierte Funktion $u(x, t)$ wird zufolge der Regularität des Punktes P_1 in diesem Punkte den Wert 0 annehmen. Andererseits ist evident, daß überall unterhalb der Geraden $t = t_1$ diese Funktion Werte annimmt, die größer als $-t_1$ sind. Dies folgt daraus, daß jede superparabolische Funktion ihren kleinsten Wert auf dem Rande annimmt. Also nehmen alle oberen Funktionen unterhalb der Geraden $t = t_1$ nur Werte an, die größer als $-t_1$ sind. Daher nimmt auch die untere Schranke $u(x, t)$ dieser Funktionen unterhalb dieser Geraden Werte an, die nicht kleiner als $-t_1$ sind. Außerdem sieht man leicht ein, daß $u(x, t)$ im Intervall $P_1 P_2$ positiv ist. Hieraus folgt, daß die Funktion $u(x, t)$ eine Regularitätsbarriere für den Punkt P_1 des Gebietes G_2 ist. Es ist aber evident, daß diese Funktion auch eine Regularitätsbarriere für den Punkt O des Gebietes G_1 sein muß, wenn dieses Gebiet so in das Gebiet G_2 hineingelegt wird, daß ihre linksbegrenzenden Kurven zusammenfallen.

Umgekehrt, nehmen wir an, daß der Punkt O des Gebietes G_1 regulär, und daß z.B. der Punkt P_1 irregulär sei. Dies führt sofort zu einem Widerspruch. In der Tat darf dann die soeben konstruierte Funktion $u(x, t)$ in P_1 nicht verschwinden, sonst würde diese Funktion eine Regularitätsbarriere für den Punkt P_1 sein. Wir bezeichnen mit L den lim sup der Werte von $u(x, t)$ bei Annäherung an den Punkt P_1 längs der Kurve $x = -c + \varphi(t)$, die zur Kurve $x = -c - \varphi(t)$ bezüglich der Geraden $x = -c$ symmetrisch ist. Infolge der vorausgesetzten Regularität des Punktes O des Gebietes G_1 muß $L > 0$ sein. Im entgegengesetzten Falle würde die Funktion $u(x, t)$ gegen 0 streben beim Heranrücken an den Punkt P_1 längs aller Linien, die zwischen $x = -c + \varphi(t)$ und $x = -c - \varphi(t)$ gelegen sind. Insbesondere müßte $u(-c, t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ sein. Folglich müßte infolge der Regularität des Punktes P_1, den wir als Randpunkt des von der Kurve $x = c + \varphi(t)$ und den Geraden $x = -c$ und $t = a$ begrenzten Gebietes G_3 betrachten, die Funktion $u(x, t)$ beim Heranrücken an den Punkt P_1 auf beliebigem Wege gegen 0 streben, was mit unseren Voraussetzungen in Widerspruch steht.

Andererseits können wir aber beweisen, daß $L = 0$ ist. In der Tat, definieren wir auf dem Rande des Gebietes G_1 eine Funktion f derart, daß sie sich dem Wert $\frac{L}{2}$ nähert beim Heranrücken an den Punkt O von rechts, und daß

$$f(x, t) = f(-x, t)$$

ist. Dann schließen wir aus Symmetriegründen, daß die nach der Perronschen Methode für die Randfunktion f konstruierte Funktion $u(x, t)$ auf der t-Achse verschwindet. Würden wir zur soeben definierten Funktion f eine beliebige Funktion f_1 hinzuaddieren, die im Punkte O stetig ist und den Wert $\frac{L}{2}$ annimmt, so würde zufolge der Regularität des Punktes O die der Randfunktion $f + f_1$ entsprechende Funktion u_1 bei Annäherung an O längs der t-Achse gegen $\frac{L}{2}$ streben. Wählen wir statt f_1 eine andere Funktion f_2, so daß $\lim\,(f + f_2) = 0$ bzw. $\limsup\,(f + f_2) = L$ ist bei Annäherung an O längs der Kurve $x = -\varphi(t)$ bzw. $x = \varphi(t)$, so wird

$$\limsup_{t \to 0} u_2(0, t) \leqq \tfrac{1}{2} L,$$

wenn $u_2(x, t)$ die nach der Perronschen Methode konstruierte Funktion für die Randfunktion $f + f_2$ darstellt. Insbesondere können wir f_2 so wählen, daß $f + f_2 = 0$ für $x = -\varphi(t)$, $f + f_2 = u(x - c, t)$ auf dem übrigen Teil des Randes von G_1 wird. Hieraus folgt aber, daß

$$\limsup_{t \to 0} u(-c, t) \leqq \tfrac{1}{2} L$$

ist. Deshalb muß infolge der Regularität des Punktes P_1, der als Grenzpunkt des Gebietes G_3 betrachtet wird, beim Heranrücken an den Punkt P_1 längs eines beliebigen im Innern von G_3 verlaufenden Weges $\limsup u \leqq \frac{L}{2}$ sein. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, daß $\limsup u(x,t) = L$ ist, wenn der Punkt (x,t) sich dem Punkte P_1 längs der Kurve $x = -c + \varphi(t)$ nähert, wenn nur $L > 0$ ist.

Nachdem dies bewiesen ist, können wir uns im folgenden auf ein Gebiet von der Form G_1 beschränken.

Satz IV. *$P(x_0, t_0)$ sei ein gemeinsamer Punkt der seitlichen Begrenzungen zweier Gebiete G und G_1; U sei ein achsenparalleles Rechteck, auf dessen oberer Seite P liegt, ohne einen Eckpunkt von U zu bilden; endlich sei $UG_1 \subset UG$. Ist dann P ein regulärer Randpunkt des Gebietes G, so gilt dasselbe auch von G_1.*

Beweis. Nehmen wir an, daß der Punkt $P(x_0, t_0)$ ein regulärer Randpunkt der Grenze des Gebietes G sei. Wir setzen auf dem Rande von G

$$f(x,t) = -t + t_0;$$

innerhalb G soll $f(x,t)$ parabolisch sein.

Genau so, wie beim Beweise des Satzes 3, kann man sich leicht überzeugen, daß $f(x,t)$ eine Regularitätsbarriere für den Punkt $P(x_0, t_0)$ ist, wenn derselbe als Randpunkt des unterhalb der Geraden $t = t_0$ liegenden Teiles des Gebietes G betrachtet wird. Hieraus folgt aber, daß dieselbe Funktion auch als Regularitätsbarriere für den Punkt $P(x_0, t_0)$ erscheint, wenn er als Randpunkt des unterhalb von $t = t_0$ liegenden Teils des Gebietes G_1 betrachtet wird. Infolge von Satz 1 erweist sich hiermit der Punkt $P(x_0, t_0)$ als regulärer Randpunkt des Gebietes G_1.

Im weiteren werden wir, der Bequemlichkeit wegen, meistens annehmen, daß der zu untersuchende Punkt P mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt.

§ 2. *Es sei G das durch $x^2 < 4t \log \varrho(t)$ definierte Gebiet der xt-Ebene, wobei die Funktion $\varrho(t)$ folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *für $t \to -0$ ist monoton abnehmend $\varrho(t) \to +0$;*
2. $t \log \varrho(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$;
3. *$\varrho(t)$ ist differenzierbar;*
4. $\displaystyle\int_{t_0}^{\varepsilon} \frac{\varrho(\eta)\, d\eta}{\eta} \underset{\varepsilon \to -0}{\longrightarrow} -\infty.$

Unter diesen Bedingungen hat das Gebiet G die Form des Gebietes G_1 (Fig. 1). Alle aufgezählten Bedingungen werden z.B. von folgenden Funktionen befriedigt:

$$\varrho(t)=\frac{1}{|\log|t||},$$

$$\varrho(t)=\frac{1}{|\log|t||\cdot\log|\log|t||},$$

$$\varrho(t)=\frac{1}{|\log|t||\cdot\log|\log|t||\cdot\log\log|\log|t||}\quad\text{usw.}$$

Wir wollen beweisen, daß *der Koordinatenursprung ein regulärer Punkt des Gebietes G ist.*

Der Beweis beruht darauf, daß wir eine superparabolische Funktion $\bar{u}(x,t)$ konstruieren, welche den Wert 0 im Koordinatenursprung und positive Werte im Gebiete G annimmt. Zu diesem Ziele definieren wir zunächst eine Funktion $\varphi(t)$ mittels der Gleichung

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\varrho(\eta)\,d\eta}{\eta}=6\log\varphi(t), \tag{6}$$

wo t_0 eine gewisse negative Konstante bedeutet und $t>t_0$ vorausgesetzt ist. Aus 4 und 1 folgt, daß $\varphi(t)$ für $t\to 0$ monoton gegen Null abnimmt.

Wir setzen ferner:

$$f(t)=-\tfrac{1}{2}\varrho(t)\varphi(t). \tag{7}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß monoton $f(t)\underset{t\to -0}{\longrightarrow}0$; wegen $f(t)<0$ ist somit $f'(t)\geqq 0$. Aus (6) und (7) folgt

$$-\tfrac{1}{3}\frac{f(t)}{t}=\varphi'(t). \tag{8}$$

Nun können wir $\bar{u}(x,t)$ folgenderweise wählen:

$$\bar{u}(x,t)=f(t)e^{-\frac{x^2}{4t}}+\varphi(t).$$

In der Tat gilt

$$L(\bar{u})\equiv\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}=e^{-\frac{x^2}{4t}}\left[f'(t)+\frac{f(t)}{2t}+\varphi'(t)e^{\frac{x^2}{4t}}\right].$$

Aus (7) und (8) folgt, daß $L(\bar{u})>0$ ist.

Die Gleichung der Niveaulinie $\bar{u}(x,t)=0$ lautet

$$-\tfrac{1}{2}\varrho(t)e^{-\frac{x^2}{4t}}+1=0\qquad\text{oder}\quad x^2=4t[\log\varrho(t)-\log 2].$$

Diese Kurve umfaßt aber die Kurve $x^2=4t\log\varrho(t)$.

Bemerkung. Die Forderung der Differenzierbarkeit von $\varrho(t)$ ist unwesentlich. Man kann mit der Forderung der Stetigkeit von $\varrho(t)$ auskommen, da man immer eine solche monoton abnehmende differenzierbare Funktion $\varrho_1(t)$ finden kann, daß

$$\tfrac{1}{2}\varrho(t) < \varrho_1(t) < \varrho(t)$$

ist.

§ **3.** *Es sei das Gebiet G von der Kurve* $x^2 = -4(1+\varepsilon)t \log \left|\log |t|\right|$ *und der Geraden* $t = t_0 < 0$ *begrenzt, wo* ε *eine beliebig kleine positive Zahl und* $|t_0|$ *genügend klein ist.*

Wir wollen beweisen, daß der Koordinatenursprung ein irregulärer Punkt des Gebietes G ist.

Der Beweis wird darauf beruhen, daß wir eine Irregularitätsbarriere für den Koordinatenursprung konstruieren, den wir als Randpunkt eines gewissen in G eingeschlossenen Gebietes G_1 betrachten.

Wir betrachten die Funktion

$$\underline{u}(x, t) = \frac{-1}{\left|\log |t|\right|^{1+\varepsilon_1}} e^{-\frac{x^2}{4t}k} + \frac{1}{\log \left|\log |t|\right|},$$

wo ε_1 und k gewisse positive Konstanten sind, dabei soll $\frac{1}{2} < k < 1$ und $t < 0$ sein. Wir zeigen, daß wenn $|t|$ genügend klein ist, die Funktion $\underline{u}(x, t)$ eine subparabolische Funktion ist, d.h. daß $L(\underline{u}) < 0$ wird.

In der Tat haben wir

$$L(\underline{u}) = e^{-\frac{x^2}{4t}k}\left[-\frac{x^2(k-k^2)}{4t^2\left|\log |t|\right|^{1+\varepsilon_1}} - \frac{1+\varepsilon_1}{t\left|\log |t|\right|^{2+\varepsilon_1}} - \frac{k}{2t\left|\log |t|\right|^{1+\varepsilon_1}}\right]$$
$$-\frac{1}{\log^2\left|\log |t|\right| \cdot \log |t| \cdot t}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß *das Vorzeichen von $L(\underline{u})$ mit dem Vorzeichen des Ausdrucks*

$$\frac{x^2(k-k^2)}{4t} - \frac{1+\varepsilon_1}{\log t} + \frac{k}{2} - e^{\frac{x^2}{4t}k} \frac{\left|\log |t|\right|^{\varepsilon_1}}{\log^2\left|\log |t|\right|} \tag{9}$$

zusammenfällt. Das zweite und dritte Glied dieses Ausdrucks sind positiv, die beiden anderen negativ. Setzen wir voraus, daß $|t|$ genügend klein ist, so können wir

$$\left|\frac{1+\varepsilon_1}{\log t}\right| < \frac{k}{2}$$

annehmen. Dann muß der ganze Ausdruck (9) negativ werden, wenn $|x|$ so klein ist, daß

$$k < e^{\frac{x^2}{4t}k} \frac{|\log|t||^{\varepsilon_1}}{\log^2|\log|t||},$$

oder

$$\log k < \frac{x^2}{4t}k + \varepsilon_1 \log|\log|t|| - 2\log\log|\log|t||$$

oder

(10)
$$\frac{x^2}{4|t|} < \frac{\varepsilon_1}{2k}\log|\log|t||$$

ist. Andererseits wird der Ausdruck (9) ebenfalls negativ, wenn $|x|$ so groß wird, daß

$$\left|\frac{x^2}{4t}(k-k^2)\right| > k$$

oder

(11)
$$\frac{x^2}{4|t|} > \frac{1}{1-k} > 2.$$

Ist aber $|t|$ so klein, daß

$$\frac{\varepsilon_1}{2k}\log|\log|t|| > 2$$

ausfällt, so wird bei beliebigem x mindestens eine der Ungleichungen (10) und (11) erfüllt. Somit gilt für ein solches t immer $L(u) < 0$, w. z. b. w.

Wir betrachten nun die Niveaulinie

$$u(x,t) = c < 0.$$

Diese Gleichung läßt sich folgenderweise schreiben:

(12)
$$x^2 = -4t\left[\frac{1+\varepsilon_1}{k}\log|\log|t|| + \frac{1}{k}\log\left(-c + \frac{1}{\log|\log|t||}\right)\right].$$

Wir wollen mit G_1 das Gebiet bezeichnen, das von der Kurve (12) und der Geraden $t = t_0 < 0$ begrenzt ist. Die Funktion $u(x,t)$ nimmt auf dem gekrümmten Teile des Randes dieses Gebietes überall, mit Ausnahme des Koordinatenursprungs, den Wert $c < 0$ an und nähert sich bei Annäherung an den Koordinatenursprung längs der Achse Ot dem Werte 0. Sie ist folglich eine Irregularitätsbarriere für den Koordinatenursprung, wenn dieser als Randpunkt dieses Gebietes G_1 betrachtet wird.

Nun ist aber $G_1 \subset G$, wenn ε_1 und $|t_0|$ genügend klein sind und k genügend nahe an 1 liegt. Daher ist der Koordinatenursprung auch dann ein irregulärer Punkt, wenn er als Randpunkt des Gebietes G betrachtet wird.

In den Paragraphen 5 und 6 werden sich schärfere Kriterien für die Regularität ergeben. In § 4 übertragen wir zunächst die Resultate der beiden letzten Paragraphen auf parabolische Gleichungen mit einer größeren Anzahl von Variablen.

§ **4.** Wir werden hier nur die Gleichung

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

betrachten; die Ergebnisse können aber ganz leicht auf parabolische Gleichungen mit noch mehr Variablen verallgemeinert werden.

Im xyt-Raum betrachten wir ein Gebiet, das unten von einer gewissen Ebene $t = a$ und seitwärts von einer Fläche S begrenzt wird.

Vor allem ist zu bemerken, daß *folgende Bedingung für die Regularität eines Punktes* $P(x_0, y_0, t_0)$ *von* S *hinreichend ist. Man betrachte die Zylinderfläche* S_1, *deren Erzeugende der* y-*Achse parallel sind, und deren Grundlinie die in* § 2 *betrachtete Kurve*

$$x = +2\sqrt{t \log \varrho(t)}$$

ist; es soll möglich sein, die Fläche S_1 *mittels einer passenden der* xy-*Ebene parallelen Bewegung und einer nachfolgenden Translation parallel zu* t-*Achse in eine Lage zu bringen, in welcher sie den Punkt* P *auf ihrer Begrenzung enthält und dabei in der Nähe von* P *außerhalb des Gebietes* G *verläuft.*

Für das Folgende sei bemerkt, daß in diesem Paragraphen unter einer „Verschiebung" stets eine Verschiebung der soeben geschilderten Art verstanden wird.

Um unsere Behauptung zu beweisen, konstruieren wir zunächst eine Regularitätsbarriere $\bar{u}(x, t)$ für den Randpunkt $P^*(-c, 0)$ des Gebietes G^* der xt-Ebene, das unten von der Geraden $t = a < 0$ und seitwärts von den Kurven

$$x = -c - 2\sqrt{t \log \varrho(t)} \qquad \text{und} \qquad x = +c + 2\sqrt{t \log \varrho(t)}$$

begrenzt wird; $\varrho(t)$ ist hier dasselbe wie in § 2, und die Möglichkeit der Konstruktion erhellt aus Satz 3, § 1.

Wir drehen nun die Achsen Ox und Oy im xyt-Raume so, daß Oy den Erzeugenden der an den Punkt P herangebrachten Zylinderfläche S_1 parallel wird; der Bestimmtheit halber sei dabei das gegebene Gebiet G rechts von dieser Fläche gelegen, und die neuen Koordinaten von P seien $-c, 0, t_0$. Dann ist $\bar{u}(x, t-t_0)$ eine Regularitätsbarriere für P.

Andererseits ist leicht einzusehen, daß *der Koordinatenursprung ein irregulärer Randpunkt des Gebietes G ist, welches unten von der Ebene $t=a<0$ und seitwärts von der Rotationsfläche S_2*

$$x^2+y^2=-4(1+\varepsilon)t\log|\log|t||$$

begrenzt wird, wo $\varepsilon>0$ beliebig klein ist. Das folgt aus dem Grunde, daß in diesem Falle die subparabolische Funktion

$$\bar{u}(x, y, t)=\frac{-1}{|\log|t||^{1+\varepsilon_1}}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}k}+\frac{1}{\log|\log|t||},$$

wo ε_1 und k zwischen 0 und 1 liegen und $\frac{1+\varepsilon_1}{k}$ nur wenig von 1 abweicht, eine Irregularitätsbarriere liefert. Der Beweis wird ganz wie im § 3 geführt und kann deshalb erspart bleiben.

Daraus folgt, daß ein Randpunkt $P(x_0, y_0, t_0)$ von G irregulär sein muß, wenn die Fläche S_2 so an ihn herangebracht werden kann, daß sie dabei in der Nähe von P innerhalb G verläuft; denn anderenfalls könnte man für die Randfunktion

$$f(x, y, t)=-(t-t_0)$$

eine Lösung der ersten Randwertaufgabe nach der Perronschen Methode konstruieren und damit eine Regularitätsbarriere für den Koordinatenursprung erhalten, der als Randpunkt des von der Fläche S_2 begrenzten Gebietes betrachtet wird.

§ 5. *Es sei G_H das durch*

$$H<t<0, \qquad x^2<4t\log\varrho(t)$$

definierte Gebiet der xt-Ebene, wobei $\varrho(t)$ folgende Bedingungen erfüllt:

1. *Für $t\to 0$ ist monoton abnehmend $\varrho(t)\to 0$;*
2. $\displaystyle\int_H^{\varepsilon}\frac{\varrho(t)\sqrt{|\log\varrho(t)|}}{t}\,dt$ *konvergiert für $\varepsilon\to 0$;*
3. $t\log\varrho(t)\to 0$ *für $t\to 0$;*
4. $\varrho(t)$ *ist differenzierbar;*
5. *es ist* $\left|\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\right|\leq\frac{1}{8|t|}$.

Dann ist der Koordinatenursprung ein irregulärer Randpunkt von G_H.

Allen erwähnten Bedingungen genügen z.B. die Funktionen:

$$\varrho(t)=\frac{1}{|\log|t||^{1+\varepsilon}},\quad \varrho(t)=\frac{1}{|\log|t||\cdot\log^{\frac{3}{2}+\varepsilon}|\log|t||},$$

$$\varrho(t)=\frac{1}{|\log|t||\cdot\log^{\frac{3}{2}}|\log|t||\cdot\log^{1+\varepsilon}\log|\log|t||},$$

$$\varrho(t)=\frac{1}{|\log|t||\cdot\log^{\frac{3}{2}}|\log|t||\cdot\log\log|\log|t||\cdot\log^{1+\varepsilon}\log\log|\log|t||}\ \text{usw.},$$

wo $\varepsilon > 0$ beliebig klein ist.

Es wird weiter gezeigt werden, daß die Voraussetzungen 4 und 5 unwesentlich sind.

Beim Beweise der obigen Behauptung werden wir annehmen, daß $|H|$ genügend klein ist; diese Voraussetzung ist für die Allgemeinheit des Resultates belanglos, da die Regularität eines Randpunktes eine lokale Eigenschaft ist.

Wir beweisen nun unsere Behauptung, indem wir eine Irregularitätsbarriere konstruieren, d.h. eine subparabolische Funktion $\underline{u}(x, t)$, die folgende Eigenschaften aufweist:

1. Sie ist stetig auf dem Rande von G_H mit Ausschluß des Koordinatenursprungs.

2. Der lim sup ihrer Werte bei Annäherung an den Koordinatenursprung *längs des Randes* von G_H ist kleiner als der lim sup bei Annäherung *aus dem Inneren* von G_H.

Zu diesem Ziele betrachten wir zunächst die Funktion

$$v(x,t)=-\varrho(t)e^{-\frac{x^2}{4t}}+1.$$

Diese Funktion verschwindet für $x^2=4t\log\varrho(t)$ und ist positiv im Inneren von G_H. Es ist lim sup $v(x,t)=1$ bei Annäherung an den Koordinatenursprung aus dem Inneren von G_H; namentlich ist $v(0,t)\to 1$ für $t\to 0$. Die Funktion $v(x,t)$ besitzt somit alle Eigenschaften der gesuchten Funktion $\underline{u}(x,t)$ mit der alleinigen Ausnahme, daß sie nicht subparabolisch, sondern superparabolisch ist. In der Tat ist

$$L(v)\equiv\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=e^{-\frac{x^2}{4t}}\left[-\varrho'(t)-\frac{\varrho(t)}{2t}\right],$$

und dieser Ausdruck ist positiv, wenn $\varrho(t)$ für $t\to 0$ monoton gegen Null abnimmt.

Wir wollen nun zu $v(x,t)$ eine in G_H subparabolische Funktion $w(x,t)$ von solcher Art addieren, daß

1. $L(w)=-L(v)$ und

2. $w(x, t) < 0$, $|w(0, t)| \leqq \frac{1}{2}$ ist.

Offenbar erfüllt dann

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

alle aufgestellten Forderungen.

Wir gehen zur Definition von $w(x, t)$ über. Aus der Theorie der Gleichungen vom parabolischen Typus ist bekannt [11]), daß die Funktion

$$w(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{G_H - G_t} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}} \cdot - L[v(\xi, \eta)]\, d\xi\, d\eta$$

die Bedingung $L(w) = -L(v)$ erfüllt; wie bereits bemerkt war, ist hier der Integrand unter unseren Voraussetzungen über $\varrho(t)$ immer negativ. Wir wollen nun zeigen, daß für genügend großes $|H|$ und $H < t < 0$ $|w(0, t)| < \frac{1}{2}$ ist.

Wegen der Voraussetzung 5 ist

$$L(v) < \left|\frac{\varrho(t)}{t}\right| e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Folglich ist

$$|w(x, t)| < \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint\limits_{G_H - G_t} \frac{\varrho(\eta)}{|\eta|} \cdot \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)} - \frac{\xi^2}{4\eta}}}{\sqrt{t-\eta}} d\xi\, d\eta$$

und

$$|w(0, t)| < \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_H^t \frac{\varrho(\eta)\, d\eta}{|\eta| \sqrt{t-\eta}} \cdot \int_{-\sqrt{4\eta \log \varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4\eta \log \varrho(\eta)}} e^{-\frac{\xi^2 t}{4(t-\eta)\eta}}\, d\xi$$

Die Variablentransformation

$$\bar{\xi} = \xi \sqrt{\frac{t}{\eta}}$$

liefert

$$|w(0, t)| < \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_H^t \frac{\varrho(\eta)\, d\eta}{|\eta|} \sqrt{\frac{\eta}{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-\eta}} \int_{-\sqrt{4t \log \varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4t \log \varrho(\eta)}} e^{-\frac{\bar{\xi}^2}{4(t-\eta)}}\, d\bar{\xi}.$$

Es ist aber

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t-\eta}} \int_{-\sqrt{4t \log \varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4t \log \varrho(\eta)}} e^{-\frac{\bar{\xi}^2}{4(t-\eta)}}\, d\bar{\xi} < \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t-\eta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\bar{\xi}^2}{4(t-\eta)}}\, d\bar{\xi} = 1,$$

---

[11]) Gevrey [loc. cit., 308].

und folglich

$$\left| \int_{2t}^{t} \frac{\varrho(\eta) d\eta}{\eta} \sqrt{\frac{\eta}{t}} \frac{1}{\sqrt{t-\eta}} \int_{-\sqrt{4t \log \varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4t \log \varrho(\eta)}} e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}} d\xi \right| <$$

$$< 2\sqrt{\pi} \int_{2t}^{t} \sqrt{\frac{\eta}{t}} \frac{\varrho(\eta)}{|\eta|} d\eta < 2\sqrt{2\pi} \int_{2t}^{t} \frac{\varrho(\eta)}{|\eta|} d\eta.$$

Dieses letzte Integral wird aber wegen der Voraussetzung 2 für $t \longrightarrow 0$ unendlich klein.

Ferner ist

$$\int_{H}^{2t} \sqrt{\frac{\eta}{t}} \frac{\varrho(\eta)}{|\eta|} d\eta \frac{1}{\sqrt{t-\eta}} \int_{-\sqrt{4t \log \varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4t \log \varrho(\eta)}} e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}} d\xi <$$

$$< \int_{H}^{2t} \sqrt{\frac{\eta}{t}} \frac{\varrho(\eta)}{|\eta|} d\eta \frac{1}{\sqrt{\frac{-\eta}{2}}} \int_{-\sqrt{4t \log \varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4t \log \varrho(\eta)}} 1 \, d\xi \leqq 4\sqrt{2} \int_{H}^{0} \frac{\varrho(\eta)\sqrt{|\log \varrho(\eta)|}}{|\eta|} d\eta.$$

Für genügend kleines $|H|$ und $0 > t > H$ ist folglich

$$|w(0, t)| < \tfrac{1}{2},$$

w. z. b. w.

Wir haben noch zu zeigen, daß die Voraussetzungen 4 und 5 für die Gültigkeit des soeben bewiesenen Satzes entbehrlich sind [12]). Für 4 wird das ganz wie die analoge Behauptung in § 2 bewiesen. Um auch für 5 den Beweis zu führen, betrachten wir zunächst die Menge M aller t-Werte $(0 > t > H)$, die folgende Eigenschaft besitzen (im weiteren wird diese Eigenschaft die „Bedingung C" genannt); deutet man $\varrho = \varrho(t)$ und t als cartesische Koordinaten eines Punktes, so soll die durch diesen Punkt gehende Kurve der von Parameter C abhängende Familie

$$\varrho = \frac{1}{|\log (Ct)|^3} \tag{13}$$

für keinen kleineren Wert von $t > H$ die Kurve $\varrho = \varrho(t)$ schneiden. Mit $\overline{M}$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle von M.

Jedem Punkt $[\varrho(t), t]$ entspricht ein ganz bestimmter Wert von $C = C(t)$, so daß die betreffende Kurve (13) durch diesen Punkt

---

[12]) Ein Leser, der zunächst nur die Hauptergebnisse der Abhandlung kennen lernen will, kann den Rest dieses Paragraphen überschlagen.

geht. Man sieht leicht ein, daß $C(t)$ für $t \to -0$ monoton abnimmt, wenn t die Zahlen der Menge $\overline{M}$ durchläuft (für M ist das unmittelbar klar, für $\overline{M}$ folgt es aus der Stetigkeit von $C(t)$); außerdem hat $C(t)$ gleiche Werte in den beiden Enden jedes komplementären Intervalls von $\overline{M}$.

Wir definieren nun eine Funktion $\varrho_1(t)$ mittels folgender Festsetzungen:

1. $\varrho_1(t) = \varrho(t)$ für $t \subset \overline{M}$.
2. Im n-ten komplementären Intervall der Menge $\overline{M}$ ist

$$\varrho_1(t) = \frac{1}{|\log (C_n t)|^3},$$

wo die negative Konstante C_n den Wert von $C(t)$ in den Enden des betreffenden komplementären Intervalls bedeutet. Offenbar ist $\varrho_1(t)$ stetig und $C_n t \to 0$ für $t \to 0$.

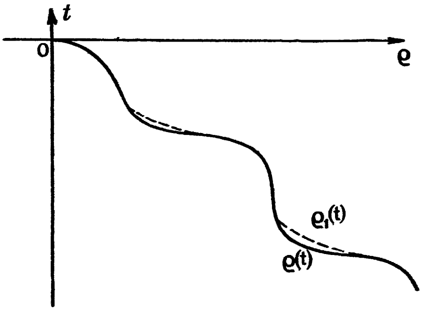

Fig. 3.

Der Verlauf der Funktionen $\varrho(t)$ und $\varrho_1(t)$ wird durch die Fig. 3 schematisch wiedergegeben; die punktierte Kurve stellt diejenigen Strecken der Kurve $\varrho = \varrho_1(t)$ dar, welche von den entsprechenden Strecken der Kurve $\varrho = \varrho(t)$ abweichen.

Die Funktion $\varrho_1(t)$ ist nicht überall differenzierbar, was für unsere Zwecke einen Mangel bedeutet. Wir betrachten deshalb eine andere Funktion $\varrho_2(t)$, die folgende Bedingungen erfüllen soll:

1. $\varrho_2(t)$ ist überall differenzierbar;
2. $\varrho_2(t) \geqq \varrho_1(t)$;
3. $\varrho_2(t)$ hat überall die Eigenschaft C;
4. Für jedes ε $(H < \varepsilon < 0)$ ist

$$\left| \int_H^\varepsilon \frac{\varrho_1(t)\sqrt{|\log \varrho_1(t)|} - \varrho_2(t)\sqrt{|\log \varrho_2(t)|}}{t}\, dt \right| < 1.$$

Man sieht leicht ein, daß sich solche Funktionen tatsächlich konstruieren lassen.

Setzt man

$$r(t) = \frac{1}{|\log (Ct)|^3}$$

wo C eine Konstante bedeutet, so ist

$$\left|\frac{tr'(t)}{r(t)}\right| = \left|\frac{3}{\log (Ct)}\right|$$

für genügend kleines Ct beliebig klein. Wegen 3 ist aber

$$|\varrho_2'(t)| \leqq \left|\frac{3}{t \log^4 (Ct)}\right|$$

wenn C durch die Gleichung

$$\varrho_2(t) = \frac{1}{|\log (Ct)|^3}$$

definiert wird. Da für kleine $|t|$ auch $|Ct|$ beliebig klein wird, gilt dasselbe auch von $\dfrac{t\varrho_2'(t)}{\varrho_2(t)}$.

Andererseits wird aber die Kurve

$$x^2 = 4t \log \varrho_2(t) \tag{14}$$

von der Kurve

$$x^2 = 4t \log \varrho(t) \tag{15}$$

umfaßt. Ist demnach der Koordinatenursprung für (14) ein irregulärer Randpunkt, so ist er a fortiori ein solcher für (15).

Es bleibt somit nur zu zeigen, daß aus der Konvergenz des Integrals

$$\int_H^{\varepsilon} \frac{\varrho(t)\sqrt{|\log \varrho(t)|}}{t}\, dt$$

für $\varepsilon \longrightarrow 0$ diejenige von

$$\int_H^{\varepsilon} \frac{\varrho_2(t)\sqrt{|\log \varrho_2(t)|}}{t}\, dt$$

erschlossen werden kann. Um dies einzusehen, genügt es offenbar, die Konvergenz von $\displaystyle\int_H^{\varepsilon} \frac{\varrho_1(t)\sqrt{|\log \varrho_1(t)|}}{t}\, dt$ aus derjenigen von $\displaystyle\int_H^{\varepsilon} \frac{\varrho(t)\sqrt{\log \varrho(t)}}{t}\, dt$ abzuleiten.

Ist (t_{2n-1}, t_{2n}) ein komplementäres Intervall der Menge $\overline{M}$, so ist

$$\left|\int\limits_{t_{2n-1}}^{t_{2n}} \frac{\varrho_1(t)\sqrt{|\log \varrho_1(t)|}}{t}\,dt\right| = \left|\int\limits_{t_{2n-1}}^{t_{2n}} \frac{\sqrt{3\log|\log(C_n t)|}}{t\,|\log(C_n t)|^3}\,dt\right| \leqq$$

$$\leqq \left|\int\limits_{t_{2n-1}}^{t_{2n}} \frac{dt}{t\log^2(C_n t)}\right| = \frac{1}{\log(C_n t_{2n})} - \frac{1}{\log(C_n t_{2n-1})},$$

denn es wird

$$\left|\frac{\sqrt{3\log|\log(C_n t)|}}{\log(C_n t)}\right| < 1,$$

wenn $|t|$ und folglich auch $|C_n t|$ genügend klein ist.

Der auf den Bereich $\varrho_1(t) \neq \varrho(t)$ erstreckte Teil des Integrals $\int\limits_H^0 \frac{\varrho_1(t)\sqrt{|\log \varrho_1(t)|}}{t}\,dt$ ist folglich kleiner als

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|\log(C_n t_{2n-1})|} - \frac{1}{|\log(C_n t_{2n})|}\right).$$

Die Konvergenz dieser Reihe läßt sich aber nach der Leibnizschen Regel feststellen. In der Tat, da einerseits

$$\varrho(t_{2n-1}) = \frac{1}{|\log(C_n t_{2n-1})|^3}, \quad \varrho(t_{2n}) = \frac{1}{|\log(C_n t_{2n})|^3}$$

ist und andererseits die Funktionen $\varrho(t)$ und $\frac{1}{|\log|t||^3}$ mit $|t|$ zunehmen, ist

$$C_1 t_1 \geqq C_1 t_2 \geqq C_2 t_3 \geqq C_2 t_4 \geqq \ldots;$$

da endlich $\frac{1}{|\log|t||}$ auch mit $|t|$ zunimmt, ist endgültig

$$\frac{1}{|\log(C_1 t_1)|} \geqq \frac{1}{|\log(C_1 t_2)|} \geqq \frac{1}{|\log(C_2 t_3)|} \geqq \frac{1}{|\log(C_2 t_4)|} \geqq \ldots,$$

was unsere Behauptung beweist.

Bemerkung 1: Ein für das folgende wesentliches Ergebnis dieser Beweisführung ist, daß mit $\int\limits_H^0 \frac{\varrho(t)\sqrt{|\log \varrho(t)|}}{t}\,dt$ auch $\int\limits_M \frac{\varrho(t)\sqrt{|\log \varrho(t)|}}{t}\,dt$ unendlich werden muß.

Bemerkung 2: Da die Zahlen $|C_n|$ eine positive untere Schranke haben, gibt es ein $C \neq 0$ derart, daß

$$\varrho_2(t) \geqq \varrho_1(t) \geqq \frac{1}{|\log(Ct)|^3} \quad (H < t < 0)$$

ist.

§ 6. In diesem Paragraphen wollen wir alle Bezeichnungen von § 5 sowie alle daselbst über die Funktion $\varrho(t)$ getroffenen Voraussetzungen beibehalten, mit alleiniger Ausnahme der Voraussetzung 2. Vielmehr wollen wir jetzt voraussetzen, daß das Integral $\int\limits_H^{\varepsilon} \frac{\varrho(t)\sqrt{|\log \varrho(t)|}}{t} dt$ für $\varepsilon \to 0$ *divergiert.* Ferner setzen wir noch die beiden folgenden Eigenschaften von $\varrho(t)$ voraus:

6. Es ist $\varrho(t) \geqq \frac{1}{|\log(Ct)|^3}$, wo C eine passende negative Konstante bedeutet;

7. Es ist $\varrho(t) = O\left(\frac{1}{\log|t|}\right)$ für $t \to 0$.

Wir wollen beweisen, daß *der Koordinatenursprung unter diesen Voraussetzungen ein regulärer Randpunkt von G ist.*

Vorbemerkungen: 1. Weiter werden wir zeigen, daß die Voraussetzungen 4—7 für die Gültigkeit unserer Behauptung entbehrlich ist.

2. Allen aufgestellten Voraussetzungen genügen z.B. die Funktionen:

$$\varrho(t) = \frac{1}{|\log|t||}, \quad \varrho(t) = \frac{1}{|\log|t|| \cdot \log^{\frac{3}{2}}|\log|t||},$$

$$\varrho(t) = \frac{1}{|\log|t|| \cdot \log^{\frac{3}{2}}|\log|t|| \cdot \log\log|\log|t||},$$

$$\varrho(t) = \frac{1}{|\log|t|| \cdot \log^{\frac{3}{2}}|\log|t|| \cdot \log\log|\log|t|| \cdot \log\log\log|\log|t||} \quad \text{usw.}$$

Beweis: Um unsere Behauptung zu beweisen, werden wir für jedes $h\,(H < h < 0)$ eine superparabolische Funktion $\bar{u}_h(x,t)$ konstruieren, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. $|1 - \bar{u}_h(x, H)| < \frac{1}{2}$ und $|1 - \bar{u}_h(x, H)| \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in bezug auf x.

2. $\overline{u}_h(x, h) \to 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in bezug auf x.
3. $\overline{u}_h(x, t) \geqq 0$ in $G_H - G_h$.

Aus der Existenz einer diesen Forderungen genügenden Funktionenfamilie $\overline{u}_h(x, t)$ folgt leicht die Existenz einer Regularitätsbarriere für den Koordinatenursprung als Randpunkt eines beliebigen Gebietes $G_H^* \subset G_H$. In der Tat, setze man auf dem Rande von G_H

$$f(x, t) = \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad t = H$$
$$= 0 \quad \text{für} \quad t > H.$$

$u(x, t)$ sei die nach der Perronschen Methode für diese Randfunktion konstruierte Lösung der ersten Randwertaufgabe. Aus der Existenz von $\overline{u}_h(x, t)$ folgt dann, daß $u(x, t) \underset{\substack{x \to 0 \\ t \to 0}}{\longrightarrow} 0$ sein muß, und daß folglich $u(x, t)$ für den Koordinatenursprung als Randpunkt von G_H^* eine Regularitätsbarriere liefert.

Genügt nun $\varrho(t)$ allen aufgestellten Forderungen, so läßt sich immer für $t < 0$ eine Funktion $\varrho^{**}(t) < \varrho(t)$ angeben, die ebenfalls alle diese Forderungen erfüllt. Für das dieser Funktion entsprechende Gebiet G_H^{**} gibt es somit auch eine Funktionsfamilie $\overline{u}_h^{**}(x, t)$, die alle nötigen Eigenschaften von $\overline{u}_h(x, t)$ besitzt. Wegen $G_H \subset G_H^{**}$ gibt es folglich nach dem soeben festgestellten eine Regularitätsbarriere für den Koordinatenursprung als Randpunkt von G_H.

Konstruktion von $\overline{u}_h(x, t)$. Als Ausgangspunkt dient uns wieder die Funktion

$$v(x, t) = -\varrho(t) e^{-\frac{x^2}{4t}} + 1,$$

wobei nur selbstverständlich $\varrho(t)$ den zu Beginn dieses Paragraphen aufgestellten Forderungen genügt. Es ist, wie wir schon gesehen haben,

$$L(v) \equiv \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{-\frac{x^2}{4t}} \left[-\varrho'(t) - \frac{\varrho(t)}{2t} \right].$$

Wir wollen nun eine Funktion $w(x, t)$ mit

$$L(w) = \frac{\varrho(t)}{2t} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

angeben; wegen $\varrho'(t) \leqq 0$ ist dann $v(x, t) + w(x, t)$ immer noch eine superparabolische Funktion.

Wir definieren

$$w(x,t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\iint\limits_{G_H-G_t}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}}{\sqrt{t-\eta}}\,\frac{\varrho(\eta)}{\eta}\,e^{-\frac{\xi^2}{4\eta}}\,d\xi\,d\eta.$$

Offenbar ist überall $w(x,t)\leqq 0$.

Zunächst wollen wir $w(0,t)$ für kleine $|t|$ abschätzen. Es ist

$$w(0,t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_H^t\left(\frac{\varrho(\eta)}{\eta\sqrt{t-\eta}}\int\limits_{-\sqrt{4\eta\log\varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4\eta\log\varrho(\eta)}}e^{-\frac{\xi^2 t}{4(t-\eta)\eta}}\,d\xi\right)d\eta.$$

Dieselbe Variablentransformation wie auf S. [17] 399 ergibt

$$w(0,t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_H^t\left(\frac{\varrho(\eta)}{\eta\sqrt{t-\eta}}\sqrt{\frac{\eta}{t}}\int\limits_{-\sqrt{4t\log\varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4t\log\varrho(\eta)}}e^{-\frac{\bar{\xi}^2}{4(t-\eta)}}\,d\bar{\xi}\right)d\eta.$$

Die Integrationsstrecke (H,t) zerlegen wir nun in die beiden Teile $(H,kt\log^2\varrho(t))$ und $(kt\log^2\varrho(t),t)$, wo k eine (große) positive Zahl bedeutet; es wird weiter gezeigt werden[13]), daß

$$\int\limits_{kt\log^2\varrho(t)}^t\left(\frac{\varrho(\eta)}{\eta}\sqrt{\frac{\eta}{t}}\,\frac{1}{\sqrt{t-\eta}}\int\limits_{-\sqrt{4t\log\varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4t\log\varrho(\eta)}}e^{-\frac{\bar{\xi}^2}{4(t-\eta)}}\,d\bar{\xi}\right)d\eta$$

für $t\to 0$ beschränkt bleibt.

Wir betrachten nun das Integral

$$I=\int\limits_H^{kt\log^2\varrho(t)}\left(\frac{\varrho(\eta)}{\eta}\sqrt{\frac{\eta}{t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-\eta}}\int\limits_{-\sqrt{4t\log\varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4t\log\varrho(\eta)}}e^{-\frac{\bar{\xi}^2}{4(t-\eta)}}\,d\bar{\xi}\right)d\eta.$$

Für $H\leqq\eta\leqq kt\log^2\varrho(t)$ ist $|t-\eta|>\frac{1}{2}|\eta|$ und

$$\left|-\frac{\bar{\xi}^2}{4(t-\eta)}\right|<\left|\frac{4t\log\varrho(\eta)}{2\eta}\right|<\left|\frac{2t\log\varrho(\eta)}{kt\log^2\varrho(t)}\right|<\frac{2}{k}.$$

Folglich wird für beliebiges $\varepsilon>0$ bei genügend großem k

$$e^{-\frac{\bar{\xi}^2}{4(t-\eta)}}>1-\varepsilon,$$

und demnach

---

[13]) Vgl. S. [26–28] 408—410.

$$\int_H^{kt\log^2\varrho(t)} \frac{\varrho(\eta)}{|\eta|}\sqrt{\frac{\eta}{t}}\,\frac{2\sqrt{4t\log\varrho(\eta)}}{\sqrt{t-\eta}}\,d\eta > |I| >$$

$$> \int_H^{kt\log^2\varrho(t)} \frac{\varrho(\eta)}{|\eta|}\sqrt{\frac{\eta}{t}}\cdot\frac{2\sqrt{4t\log\varrho(\eta)}}{\sqrt{t-\eta}}\,(1-\varepsilon)d\eta,$$

oder

$$4\int_H^{kt\log^2\varrho(t)} \frac{\varrho(\eta)\sqrt{|\log\varrho(\eta)|}}{|\eta|}\sqrt{\frac{|\eta|}{t-\eta}}\,d\eta > |I| >$$

$$> 4(1-\varepsilon)\int_H^{kt\log^2\varrho(t)} \frac{\varrho(\eta)\sqrt{|\log\varrho(\eta)|}}{|\eta|}\sqrt{\frac{|\eta|}{t-\eta}}\,d\eta\,.$$

Wegen $|\eta| > k\,|t|\,\log^2\varrho(t)$ ist für $t \to 0$ gleichmäßig auf der Integrationsstrecke

$$\left|\frac{\eta}{t-\eta}\right| \to 1\,.$$

Das ergibt die asymptotische Beziehung

$$\frac{w(0,t)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_H^t \frac{\varrho(\eta)\sqrt{|\log\varrho(\eta)|}}{\eta}\,d\eta} \to 1 \qquad \text{für } t \to 0,$$

wenn man noch beachtet, daß $\int_{kt\log^2\varrho(t)}^t \frac{\varrho(\eta)\sqrt{|\log\varrho(\eta)|}\,d\eta}{\eta}$ beschränkt bleibt; in der Tat ist für genügend kleines $|t|$

$$\left|\int_{65t}^t \frac{\varrho(\eta)\sqrt{|\log\varrho(\eta)|}\,d\eta}{\eta}\right| < \int_{65t}^t \frac{d\eta}{|\eta|} = \log 65\,;$$

ferner

$$\left|\int_{kt\log^2\varrho(t)}^{65t} \frac{\varrho(\eta)\sqrt{|\log\varrho(\eta)|}\,d\eta}{\eta}\right| < \int_{kt\log^2\varrho(t)}^{65t} \frac{\sqrt{\varrho(\eta)}}{|\eta|}\,d\eta,$$

und dieses letzte Integral bleibt beschränkt, wie wir weiter unten bei der Abschätzung von I_2 sehen werden.

Nun wollen wir $w(x,t)$ innerhalb G für $t \to 0$ auch im Fall $x \neq 0$ abschätzen. Es ist

$$w(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \iint\limits_{G_H - G_t} \frac{\varrho(\eta)}{\eta\sqrt{t-\eta}} e^{-\frac{\xi^2}{4\eta} - \frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}} d\xi\, d\eta\,.$$

Das Integrationsgebiet zerlegen wir in die drei Teile

$$G_{65t} - G_t, \quad G_{kt\log^2 \varrho(t)} - G_{65t}, \quad G_H - G_{kt \log^2 \varrho(t)}\,,$$

wo k eine (große) positive Zahl bedeutet. Wegen

$$\frac{\xi^2}{4\eta} + \frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)} = \frac{(\xi t - \eta x)^2}{4t\eta(t-\eta)} + \frac{x^2}{4t}$$

ist

$$I_1 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \iint\limits_{G_{65t} - G_t} \frac{\varrho(\eta)}{\eta\sqrt{t-\eta}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot e^{-\frac{(\xi t - \eta x)^2}{4t\eta(t-\eta)}} d\xi\, d\eta =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{4\sqrt{\pi}} \int\limits_{65t}^{t} \left(\frac{\varrho(\eta)}{4\sqrt{t-\eta}} \int\limits_{-\sqrt{4\eta\log\varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4\eta\log\varrho(\eta)}} e^{-\frac{\left(\xi\sqrt{\frac{t}{\eta}} - x\sqrt{\frac{\eta}{t}}\right)^2}{4(t-\eta)}} d\xi \right) d\eta\,.$$

Die Variablentransformation

$$\xi\sqrt{\frac{t}{\eta}} = \bar{\xi}$$

ergibt

$$I_1 = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{4\sqrt{\pi}} \int\limits_{65t}^{t} \left(\frac{\varrho(\eta)}{\eta\sqrt{t-\eta}} \sqrt{\frac{\eta}{t}} \int\limits_{-\sqrt{4t\log\varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4t\log\varrho(\eta)}} e^{-\frac{\left(\bar{\xi} - x\sqrt{\frac{\eta}{t}}\right)^2}{4(t-\eta)}} d\bar{\xi} \right) d\eta\,.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t-\eta}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(\bar{\xi} - x\sqrt{\frac{\eta}{t}}\right)^2}{4(t-\xi)}} d\bar{\xi} = 1\,.$$

Folglich wird

$$|I_1| < \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2} \int\limits_{65t}^{t} \frac{\varrho(\eta)}{|\eta|} \sqrt{\frac{\eta}{t}}\, d\eta \overset{14)}{<} \frac{\sqrt{65}}{2\varrho(t)} \int\limits_{65t}^{t} \frac{\varrho(\eta)}{|\eta|} d\eta <$$

$$\overset{15)}{<} \frac{10 \cdot \varrho(65t)}{\varrho(t)} \int\limits_{65t}^{t} \frac{d\eta}{|\eta|} \leqq 10 \cdot 65^{\frac{1}{8}} \cdot \log 65\,.$$

---

[14]) wegen $(x,t) \subset G$.

[15]) wegen der monotonen Abnahme von $\varrho(t)$ bei $t \to 0$.

Die letzte Ungleichung wird dabei folgenderweise bewiesen: aus

$$\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)} \geqq \frac{1}{8t}$$

folgt

$$\int_{65t}^{t} \frac{\varrho'(\eta)}{\varrho(\eta)}\, d\eta \geqq \frac{1}{8}\int_{65t}^{t} \frac{d\eta}{\eta}, \quad \log\frac{\varrho(65t)}{\varrho(t)} \leqq \frac{\log 65}{8} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\varrho(65t)}{\varrho(t)} \leqq 65^{\frac{1}{8}}.$$

Wir wenden uns nun zur Abschätzung von

$$I_2 = \iint\limits_{G_{kt\log^2\varrho(t)} - G_{65t}} \frac{\varrho(\eta)}{\eta\sqrt{t-\eta}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4\eta} - \frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_{kt\log^2\varrho(t)}^{65t} \left(\frac{\varrho(\eta)}{\eta\sqrt{t-\eta}} \int_{-\sqrt{4\eta\log\varrho(\eta)}}^{+\sqrt{4\eta\log\varrho(\eta)}} e^{-\frac{\xi^2 t + x^2\eta - 2x\xi\eta}{4\eta(t-\eta)}}\, d\xi\right) d\eta.$$

Für $|\eta| > 65\,|t|$ ist $t - \eta > \dfrac{|\eta|}{2}$.

Folglich ist

$$(16)\qquad \begin{aligned} -\frac{\xi^2 t + x^2\eta - 2x\xi\eta}{4\eta(t-\eta)} < \frac{x\xi}{2(t-\eta)} < \frac{4\sqrt{t\eta\log\varrho(t)\cdot\log\varrho(\eta)}}{|\eta|} \leqq \\ \leqq 4\sqrt{\frac{t\log\varrho(t)}{\eta\log\varrho(\eta)}}\cdot\left|\log\varrho(\eta)\right|. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß für genügend kleines $|t|$ und $\eta < 65t$

$$\sqrt{\frac{t\log\varrho(t)}{\eta\log\varrho(\eta)}} < \frac{1}{8} - \varepsilon$$

ist, wo ε eine passend kleine positive Zahl ist.

In der Tat wissen wir schon, daß

$$\frac{\varrho(65t)}{\varrho(t)} \leqq 65^{\frac{1}{8}}$$

ist; das ergibt

$$1 \geqq \frac{\log\varrho(65t)}{\log\varrho(t)} \geqq \frac{\frac{1}{8}\log 65 + \log\varrho(t)}{\log\varrho(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Folglich ist

$$\frac{t \log \varrho(t)}{65t \log \varrho(65t)} \to \frac{1}{65} \quad \text{für} \quad t \to 0 .$$

Andererseits ist aber

$$\frac{d(\eta \log \varrho(\eta))}{d\eta} = \log \varrho(\eta) + \frac{\eta \varrho'(\eta)}{\varrho(\eta)},$$

und hier ist wegen 5 die rechte Seite negativ. Folglich ist $\eta \log \varrho(\eta)$ in bezug auf η abnehmend, und demnach gilt für $\eta < 65t$

$$\frac{t \log \varrho(t)}{\eta \log \varrho(\eta)} < \frac{t \log \varrho(t)}{65t \log \varrho(65t)} < \frac{1}{64},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Indem wir nun zur Abschätzung des Ausdrucks (16) zurückkehren, erhalten wir endgültig für $kt \log^2 \varrho(t) < \eta < 65t$

$$-\frac{\xi^2 t + x^2 \eta - 2x\xi\eta}{4\eta(t-\eta)} < -\left(\tfrac{1}{2} - \varepsilon\right) \log \varrho(\eta),$$

wo ε eine positive Konstante bedeutet. Daraus folgt nun

$$|I_2| \leqq \sqrt{2} \int\limits_{kt \log^2 \varrho(t)}^{65t} \frac{\varrho(\eta)}{|\eta| \sqrt{|\eta|}} \cdot 2\sqrt{4\eta \log \varrho(\eta)} \cdot \varrho^{-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}(\eta) d\eta <$$

$$< \int\limits_{kt \log^2 \varrho(t)}^{65t} \frac{\sqrt{\varrho(\eta)}}{|\eta|} d\eta .$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich aus

$$4\sqrt{2}\sqrt{|\log \varrho(\eta)|} \cdot \varrho^{\varepsilon}(\eta) \to 0 \quad \text{für} \quad \eta \to 0 .$$

Wegen der Voraussetzungen 7 und 6 ist aber

$$\int\limits_{kt \log^2 \varrho(t)}^{65t} \frac{\sqrt{\varrho(\eta)}}{|\eta|} d\eta < C \int\limits_{kt \log^2 \varrho(t)}^{65t} \frac{d\eta}{|\eta| \sqrt{|\log |\eta||}} =$$

$$= 2C\left[\sqrt{|\log |65t||} - \sqrt{|\log |kt \log^2 \varrho(t)||}\right] =$$

$$= 2C \frac{-\log 65 + \log k + 2\log|\log \varrho(t)|}{\sqrt{|\log |kt \log^2 \varrho(t)||} + \sqrt{|\log |65t||}} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Somit ist

$$I_2 \to 0 .$$

Endlich wollen wir auch

$$I_3 = \iint\limits_{G_H - G_{kt\log^2\varrho(t)}} \frac{\varrho(\eta)}{\eta\sqrt{t-\eta}} e^{-\frac{\xi^2}{4\eta} - \frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}} d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint\limits_{G_H - G_{kt\log^2\varrho(t)}} \frac{\varrho(\eta)}{\eta\sqrt{t-\eta}} e^{-\frac{\xi^2 t}{4\eta(t-\eta)}} \cdot e^{-\frac{x(x-2\xi)}{4(t-\eta)}} d\xi\, d\eta$$

abschätzen. Wir wollen dieses Integral mit dem der Funktion $w(0, t)$ entsprechenden Integral

$$\iint\limits_{G_H - G_{kt\log^2\varrho(t)}} \frac{\varrho(\eta)}{\eta\sqrt{t-\eta}} e^{-\frac{\xi^2 t}{4(t-\eta)}} d\xi\, d\eta$$

vergleichen, und zu diesem Zweck beweisen, daß der Faktor

$$e^{-\frac{x(x-2\xi)}{4(t-\eta)}}$$

für kleine $|t|$ nahe an 1 liegt.

In der Tat ist

$$\left|\frac{x(x-2\xi)}{4(t-\eta)}\right| < \left|\frac{\sqrt{4t\log\varrho(t)} \cdot 3 \cdot \sqrt{4\eta\log\varrho(\eta)}}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \eta}\right| \leqq$$

$$\leqq 6\sqrt{\frac{t\log\varrho(t) \cdot \log\varrho(\eta)}{kt\log^2\varrho(t)}} \leqq \frac{6}{\sqrt{k}},$$

wenn $|x| \leqq |\xi|$, und

$$\left|\frac{x(x-2\xi)}{4(t-\eta)}\right| < \left|\frac{\sqrt{4t\log\varrho(t)} \cdot 3\sqrt{4t\log\varrho(t)}}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \eta}\right| \leqq$$

$$\leqq 6\left|\frac{t\log\varrho(t)}{kt\log^2\varrho(t)}\right| = \frac{6}{k\,|\log\varrho(t)|},$$

wenn $|x| \geqq |\xi|$ ist. In beiden Fällen wird $\left|\frac{x(x-2\xi)}{4(t-\eta)}\right|$ für genügend großes k beliebig klein.

Daraus folgt nun

$$\frac{w(x, t)}{w(0, t)} \to 0 \qquad \text{für } t \to 0,$$

sofern nur $x \subset G$ verbleibt.

Nun können wir den Ausdruck der Funktion $\overline{u}_h(x, t)$ angeben, nämlich

$$\overline{u}_h(x, t) = \frac{v(x, t) + w(x, t)}{\text{obere Schranke von } |w(x, t)| \text{ in } (G_H - G_h)} + 1.$$

Diese Funktion genügt allen Forderungen, die wir an $\overline{u}_h(x, t)$ gestellt hatten. In der Tat ist

1. für genügend kleines $|H|$ $\overline{u}_h(x, H)$ nahe an 1; denn es ist

$$\begin{array}{lll} a_1) & |v(x, t)| < 1 & \text{in } G, \\ b_1) & w(0, t) \longrightarrow -\infty & \text{für } t \longrightarrow 0, \\ c_1) & w(0, H) = 0. & \end{array}$$

Ferner ist

2. $\overline{u}_h(x, h) \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$, wenn der Punkt (x, h) nicht das Gebiet G verläßt; denn es ist

$$a_2)\quad \frac{w(0, t)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_H^t \frac{\varrho(\eta)\sqrt{|\log \varrho(\eta)|}}{\eta}\, d\eta} \longrightarrow 1 \qquad \text{für } t \longrightarrow 0$$

$$b_2)\quad \frac{w(x, t)}{w(0, t)} \longrightarrow 1 \qquad \text{für } t \longrightarrow 0$$

gleichmäßig in bezug auf x in G.

Endlich ist

3. $\overline{u}_h(x, t)$ nicht negativ, denn $v(x, t)$ und $w(x, t)$ haben entgegengesetzte Vorzeichen, und zwar ist $v(x, t) \geqq 0$ innerhalb G_H.

Nun haben wir uns noch von einigen für die Gültigkeit des Satzes unwesentlichen Voraussetzungen zu befreien, die wir der Funktion $\varrho(t)$ auferlegt haben.

Vor allem ist die Forderung der Differenzierbarkeit von $\varrho(t)$ unwesentlich, was man ganz wie im § 2 ersehen kann.

Ferner wollen wir uns von der Voraussetzung 7 befreien [12]. Um dies zu tun, genügt es, folgende Behauptung zu beweisen: *gibt es beliebig kleine Werte von* $|t|$, *für die* $\varrho(t) \geqq \frac{1}{|\log |t||}$ *wird, so ist das Integral* $\int\limits_H^\varepsilon \frac{\varrho_1(t)\, dt}{t}$, *und folglich auch das Integral* $\int\limits_H^\varepsilon \frac{\varrho_1(t)\sqrt{|\log \varrho_1(t)|}}{t}\, dt$, *wo*

$$\varrho_1(t) = \operatorname{Min}\left\{\varrho(t), \frac{1}{|\log |t||}\right\}$$

gesetzt ist, für $\varepsilon \longrightarrow 0$ *divergent.* In der Tat erfüllt $\varrho_1(t)$ die Voraussetzung 7, und folglich ist der Koordinatenursprung nach dem soeben Bewiesenen ein regulärer Randpunkt des seitwärts von der Kurve

$$x^2 = 4t \log \varrho_1(t)$$

begrenzten Gebietes G_1. A fortiori ist er zugleich ein regulärer Randpunkt von $G \subset G_1$.

Um unsere Behauptung zu beweisen, wählen wir eine unendliche Folge von negativen t-Werten

$$t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots,$$

so daß $\varrho(t_k) = \dfrac{1}{|\log|t_k||}$ $(k = 1, 2 \ldots)$ gilt [16]) und außerdem folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) $|t_{k+1}| < |t_k|$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$,

3) $\dfrac{\log|t_k|}{\log|t_{k+1}|} < \frac{1}{2}$.

Wir setzen ferner

$$\varrho_2(t) = \frac{1}{|\log|t_{k+1}||} \text{ für } t_k < t \leqq t_{k+1}.$$

Offenbar ist

$$\varrho_2(t) \leqq \varrho_1(t);$$

es ist aber

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varrho_2(t)\,dt}{t} = -\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{t \log|t_{k+1}|} = -1 + \frac{\log|t_k|}{\log|t_{k+1}|} < -\tfrac{1}{2},$$

und a fortiori

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varrho_1(t)\,dt}{t} < -\tfrac{1}{2};$$

folglich ist

$$\int_H^{\varepsilon} \frac{\varrho_1(t)\,dt}{t} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\infty,$$

w. z. b. w.

---

16) Wäre für alle genügend kleinen $|t|$ $\varrho(t) > \dfrac{1}{|\log|t||}$, so würde der Hauptsatz dieses Paragraphen unmittelbar aus dem Satz 4 des § 1 folgen, denn die Funktion $\varrho(t) = \dfrac{1}{|\log|t||}$ genügt allen am Beginn dieses Paragraphen aufgestellten Forderungen.

Endlich wollen wir uns noch von den Voraussetzungen 5 und 6 befreien. Sollten diese Voraussetzungen nicht erfüllt sein, so wählen wir statt der Funktion $w(x, t)$ die andere

$$w^*(x, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \iint\limits_{G_H - G_t} \frac{\varrho^*(\eta)}{\eta\sqrt{t-\eta}} e^{-\frac{\xi^2}{4t} - \frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}} d\xi\, d\eta$$

wo $\varrho^*(t)$ folgendermaßen definiert ist:

1) $\varrho^*(t) = \varrho(t)$ auf $\overline{M}$ (vgl. § 5, S. [18] 400); auf $\overline{M}$ gelten demnach für $\varrho^*(t)$ alle Abschätzungen, die wir für $\varrho(t)$ auf Grund der Voraussetzungen 5 und 6 gewonnen haben.

2) In den komplementären Intervallen von $\overline{M}$ sei $\varrho^*(t)$ stetig, nicht negativ und so klein, daß alle beim Beweise erzielten Integralabschätzungen erhalten bleiben, wenn $\varrho(t)$ im Integranden durch $\varrho^*(t)$ ersetzt wird;

3) endlich sei überall $\varrho^*(t) \leqq \varrho(t)$.

Infolge der am Schluß des vorstehenden Paragraphen gemachten Bemerkung wird dann für $\varepsilon \to 0$

$$\int_H^\varepsilon \frac{\varrho^*(\eta)\sqrt{|\log \varrho^*(\eta)|}}{\eta} d\eta \to -\infty .$$

Anhang [17]).

G_H sei wie zuvor das durch

$$x^2 < 4t \log \varrho(t), \quad h < t < H$$

definierte Gebiet der xt-Ebene; die stetige Funktion $\varrho(t)$ sei für $t < h \leqq 0$ definiert und erfülle die folgenden Voraussetzungen:

1) $\varrho(t) \to 0$ monoton $t \to -\infty$;

2) $0 < \varrho(t) < 1 \quad (-\infty < t < h)$.

Man setze auf dem Rande von G_H

$$\begin{aligned} f(x, t) &= 1 \quad (t = H) \\ &= 0 \quad (t > H); \end{aligned}$$

$u_k(x, t)$ bedeute die Funktion, die innerhalb G_H der Gleichung (1) und auf dem Rande von G_H den Ungleichungen

$$\underline{\underline{f}} < \underline{\underline{u}} \leqq \overline{\overline{u}} \leqq \overline{\overline{f}}$$

[17]) Das in diesem Anhang behandelte Problem hat Herr A. Kolmogoroff (gelegentlich einer Diskussion im wahrscheinlichkeits-theoretischen Seminar der Universität Moskau) aufgeworfen.

genügt. Wir behaupten, daß *bei festen* $t<0$ *und* x ($|x|<\sqrt{4t\log\varrho(t)}$)

$$u_H(x,t) \text{ für } H \to -\infty$$

oberhalb einer positiven Konstanten verbleibt oder unendlich klein wird, je nachdem das Integral

$$\int_H^t \frac{\varrho(\eta)\sqrt{|\log\varrho(\eta)|}}{\eta}\,d\eta$$

dabei konvergiert oder divergiert.

Beweis: 1. Wir konstruieren zunächst eine subparabolische Funktion $u_H(x,t)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $u_H(x,H)\leqq 1$;

2. Für $H<t<T$ (T von H unabhängig) und $x^2=4t\log\varrho(t)$ ist

$$u_H(x,t)<0;$$

3. $u_H(0,T)>\frac{1}{4}$.

Die Konstruktion von $u_H(x,t)$ geschieht im Allgemeinen derjenigen der analogen Funktion in § 5 ganz ähnlich. Die Abweichungen betreffen nur folgendes:

1. Gegenwärtig ist $\varrho'(t)\geqq 0$; wenn wir zu $v(x,t)=-\varrho(t)e^{-\frac{x^2}{4t}}+1$ eine Funktion $w(x,t)$ mit $L(w)=\frac{\varrho(t)}{2t}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ addieren, wird die Summe folglich subparabolisch, so daß für das folgende die Voraussetzung der Beschränktheit von $\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}$ nicht erforderlich ist, was die Überlegungen wesentlich vereinfacht.

2. Die Rolle der t-Werte mit kleinem $|t|$ übernehmen hier solche mit großem $|t|$. Bei der Abschätzung von $w(x,t)$ muß $t\leqq T$ ($|T|$ groß) fest angenommen werden, während $H\to-\infty$.

Offenbar ist bei jedem H in G_H-G_T

$$u_H(x,t)>\underline{u}_H(x,t)$$

und folglich

$$u_H(0,T)>\tfrac{1}{4}.$$

Daher übertrifft $u_H(x,t)$ in G_T, wie groß auch $|H|$ sei, die parabolische Funktion, welche auf einer Strecke $-\varepsilon\leqq x\leqq\varepsilon$, $t=T$ den Wert $\frac{1}{8}$ annimmt, sonst aber auf dem Rande von G_T verschwindet. Für jeden Punkt (x,t) von G_T gibt es demnach eine positive Zahl (nämlich den betreffenden Wert der soeben erwähnten parabolischen Funktion), die von $u_H(x,t)$ bei genügend großem H übertroffen wird. Damit ist unsere erste Behauptung bewiesen.

II. Wir konstruieren nun eine superparabolische Funktion $\bar{u}_H(x, t)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $|\bar{u}_H(x, H) - 1| < \varepsilon$.

2) Für ein festes aber absolut genügend großes $t_0 > H$ ist $|\bar{u}_H(x, t_0)| < \varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Konstante bedeutet.

3) $\bar{u}_H(x, t) \geqq 0$ in G.

Aus der Existenz einer solchen Funktion wird folgen, daß $u_H(x, t_0) < \varepsilon$, und daß folglich auch für $t > t_0$ $u(x, t) < \varepsilon$ ist.

Die Konstruktion erfolgt derjenigen für die analoge Funktion in § 6 ganz ähnlich. Die Abweichungen betreffen nur folgende Punkte.

I. Gegenwärtig ist $\varrho'(t) > 0$. Wenn man zu der Funktion $v(x, t)$ von § 6 eine Funktion w mit $L(w) = \frac{\varrho(t)}{2t} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ addiert, wird demnach die Summe subparabolisch und nicht superparabolisch wie zuvor. Infolgedessen *müssen wir* $\varrho(t)$ *die einschränkende Forderung*

$$\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)} \leqq \frac{m}{|t|} \tag{17}$$

auferlegen, wo m eine positive Konstante $< \frac{1}{2}$ *bedeutet.* Statt $w(x, t)$ kann dann die Funktion $w^*(x, t) = \frac{1 - 2m}{4} w(x, t)$ verwendet werden, wobei $v(x, t) + w^*(x, t)$ immer noch superparabolisch ist. Die neue Forderung bedeutet eine gewisse „Glattheitsvoraussetzung", welcher insbesondere alle auf S. [22] 404 angeführten Funktionen Genüge leisten.

2. Die Rolle der t-Werte mit kleinem $|t|$ übernehmen hier solche mit großem $|t|$. Bei der Abschätzung der die Funktion $w(x, t)$ bestimmenden Integrale muß hier t absolut groß, aber fest gedacht werden, während $H \rightarrow -\infty$.

Die asymptotische Auswertung von $w(0, t)$ führen wir ganz wie im vorstehenden Paragraphen durch, nur wird der Ausdruck

$$\left| \frac{\xi^2}{4(t - \eta)} \right|$$

jetzt folgenderweise abgeschätzt: wie früher ist

$$\left| \frac{\xi^2}{4(t - \eta)} \right| < \frac{2\,|t|\log \varrho(\eta)}{\eta}.$$

Die Größe $\frac{\log \varrho(\eta)}{\eta}$ nimmt für $\eta \rightarrow -\infty$ ab; denn es ist für genügend großes $|\eta|$

$$\left[\frac{\log \varrho(\eta)}{\eta}\right]' = \frac{\frac{\varrho'(\eta)}{\varrho(\eta)}\eta - \log \varrho(\eta)}{\eta^2} > \frac{-m - \log \varrho(\eta)}{\eta^2} > 0$$

(die vorletzte Ungleichung folgt aus (17)). Folglich ist

$$\left|\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}\right| < \frac{2\,|t|\cdot \log \varrho[kt \log^2 \varrho(t)]}{kt \log^2 \varrho(t)} = \frac{-2 \log \varrho\,[kt \log^2 \varrho(t)]}{k \log^2 \varrho(t)}.$$

Indem wir nun (17) von $kt \log^2 \varrho(t)$ bis t integrieren und elementare Transformationen ausführen, erhalten wir

$$(18) \quad 0 > 1 - \frac{\log \varrho[kt \log^2 \varrho(t)]}{\log \varrho(t)} \geqq m \frac{\log k + 2 \log |\log \varrho(t)|}{\log \varrho(t)}.$$

Der letzterhaltene Ausdruck wird bei genügend großem $|t|$ absolut beliebig klein. Folglich ist die Größe $\left|\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}\right|$ bei genügend großem $|t|$ jedenfalls kleiner als $\frac{2}{k}$.

Für die asymptotische Auswertung von $w(x, t)$ zerlegen wir wie im vorigen Paragraphen G_H in die drei Teile

$$G_{65t} - G_t, \quad G_{kt \log^2 \varrho(t)} - G_{65t}, \quad G_H - G_{kt \log^2 \varrho(t)},$$

wo k eine (große) positive Zahl bedeutet. Indem wir die Bezeichnungen des vorstehenden Paragraphen beibehalten, erhalten wir wie zuvor

$$|I_1| < \frac{\sqrt{65}}{2\varrho(t)} \int\limits_{65t}^{t} \frac{\varrho(\eta)}{|\eta|}\, d\eta < \frac{\sqrt{65}}{2} \int\limits_{65t}^{t} \frac{d\eta}{|\eta|} = \frac{\sqrt{65}}{2} \log 65.$$

(Die vorletzte Ungleichung folgt daraus, daß $\varrho(t)$ für $t \to -\infty$ monoton abnimmt.) Die Abschätzung von $|I_2|$ erfolgt auch wie im vorstehenden Paragraphen. Nur folgt jetzt die Gültigkeit der Ungleichung

$$\sqrt{\frac{t \log \varrho\,(t)}{\eta \log \varrho(\eta)}} < \tfrac{1}{8} - \varepsilon$$

bei genügend großem $|t|$ unmittelbar daraus, daß monoton $\varrho(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} +0$.

Bei der Abschätzung von

$$\int\limits_{kt \log^2 \varrho(t)}^{65t} \frac{\sqrt{\varrho(\eta)}}{|\eta|}\, d\eta$$

ist man wieder genötigt, vorauszusetzen, daß $\varrho(t)$ für $t \to -\infty$ der Bedingung 7 des § 6 genügt; wir können uns aber später wie im vorstehenden Paragraphen von dieser Einschränkung befreien. An Stelle der Forderung 6 genügt es, die Bedingung (17) auszunutzen.

Die Untersuchung von I_3 unterscheidet sich von der früheren dadurch, daß die Abschätzung des Ausdrucks

$$\left|\frac{x(x-2\xi)}{4(t-\eta)}\right|$$

für $|x| \leqq |\xi|$ folgenderweise geschieht:

$$\left|\frac{x(x-2\xi)}{4(t-\eta)}\right| \leqq 6\sqrt{\frac{t \log \varrho(t) \cdot \log \varrho(\eta)}{\eta}}\,.$$

Wie wir schon gesehen haben, nimmt die Größe $\frac{\log \varrho(\eta)}{\eta}$ für $\eta \to -\infty$ ab. Folglich ist

$$\left|\frac{x(x-2\xi)}{4(t-\eta)}\right| \leqq 6\sqrt{\frac{t \log \varrho(t) \cdot \log \varrho\,[kt \log^2 \varrho(t)]}{kt \log^2 \varrho(t)}}\,.$$

Aus (18) folgt, daß der Radikand bei genügend großem $|t|$ nahe an $\frac{1}{k}$ liegt. Deswegen ist

$$\left|\frac{x(x-2\xi)}{4(t-\eta)}\right| < \frac{6}{\sqrt{k}}(1+\varepsilon).$$

Die weitere Konstruktion von $\overline{u}_H(x,t)$ erfolgt nun derjenigen des vorstehenden Paragraphen vollständig analog.

Bemerkung: Die Funktion $u_H(x,t)$ nimmt ab bei $H \to -\infty$. Nach dem Harnackschen Satz ist folglich $\lim\limits_{H \to -\infty} u_H(x,t) = u(x,t)$ vorhanden und eine parabolische Funktion. Wir wollen beweisen, daß *entweder $u(x,t)$ identisch verschwindet oder*

$$\lim_{t \to -\infty} u(0,t) = 1$$

ist.

Für feste H und t erreicht offenbar $u_H(x,t)$ ihren größten Wert bei $x=0$; bei festen H nimmt hingegen $u_H(0,t)$ mit $|t|$ ständig ab. Folglich kommt diese Eigenschaft auch der Funktion $u(x,t)$ zu; insbesondere ist $\lim\limits_{t \to -\infty} u(0,t) = l$ vorhanden; wir haben somit zu beweisen, daß entweder $l=0$ oder $l=1$ ist.

Nehmen wir also an, es sei $0 < l < 1$. Dann wird für jedes $H < h$

$$u(x, t) < v_H^{(l)}(x, t) = l u_H(x, t)$$

wo $v_H^{(l)}(x, t)$ die parabolische Funktion bedeutet, die auf dem Rande von G_H durch

$$\begin{aligned} v_H^{(l)}(x, H) &= l \\ v_H^{(l)}(x, t) &= 0 \qquad (t > H) \end{aligned}$$

definiert ist. Folglich wird

$$u(x, t) \leqq \lim_{H \to -\infty} v_H^{(l)}(x, t) = l \cdot u(x, t),$$

was wegen $0 < l < 1$ unmöglich überall zutreffen kann.

Herrn A. Khintchine sei an dieser Stelle für mannigfache wertvolle Ratschläge mein herzlicher Dank ausgeprochen.

(Eingegangen den 27. November 1933.)