

COMPOSITIO MATHEMATICA

STEFAN WARSCHAWSKI

Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 314-343

http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__314_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung

von

Stefan Warschawski

(New York)

Im folgenden soll unter einer geschlossenen Jordankurve in der (funktionentheoretischen) Ebene das Bild einer einfachen geschlossenen Kurve auf der Kugel mittels stereographischer Projektion auf die Ebene verstanden werden. Sie verläuft also in der Ebene entweder ganz im Endlichen, oder sie geht durch den unendlich fernen Punkt und kann dann durch eine lineare Abbildung der Ebene auf sich in eine im Endlichen liegende Kurve übergeführt werden. Wir wollen ferner sagen, eine solche Kurve C in einer w -Ebene durch $w = \infty$ hat die Gerade durch $w = 0$ mit der Richtung α , $0 \leq \alpha < \pi$, gegen die positive u -Achse zur „Tangente“ in $w = \infty$, wenn bei Durchlaufung von C von einem ihrer endlichen Punkte aus in dem einen Sinne $\lim_{w \rightarrow \infty} \arg w = \alpha$ und im entgegengesetzten $\lim_{w \rightarrow \infty} \arg w = \alpha - \pi$ ist. — Durchläuft man eine geschlossene Jordankurve C , die in $w = \infty$ eine Gerade durch O mit der Richtung $\alpha > 0$ zur Tangente hat, so, daß für $w = u + iv$ auf C v von negativen Werten beliebig großen Betrages zu beliebig großen positiven übergeht, so wollen wir dafür kurz sagen, man durchlaufe C „von $-\infty$ nach $+\infty$ “. Das Gebiet, das bei einer solchen Durchlaufung zur Rechten bleibt, soll kurz als das Gebiet „rechts von C “ bezeichnet werden.

Es sei nun C eine geschlossene Jordankurve in der w -Ebene durch $w = \infty$, die dort die v -Achse zur Tangente hat, und G das Gebiet rechts von C . $w(z)$ bilde $\Re z > 0$ so auf G ab, daß $z = \infty$ in $w = \infty$ übergeht; $z(w)$ sei die Umkehrfunktion. Wir geben nun zunächst einen wesentlich vereinfachten Beweis eines früher hergeleiteten Satzes ¹⁾, den wir gleichzeitig in einer etwas verschärften

¹⁾ Mathem. Ztschr. 35 (1932), Satz 1 und 2, S. 361 ff.

Fassung aussprechen (Satz I). Dieser Satz ermöglicht es, unter geeigneten Annahmen, das Verhalten des längs C -- und damit auch des allseitig gebildeten -- Differenzenquotienten $\frac{z(w)}{w}$ für $w \rightarrow \infty$ durch dasjenige des „im Winkelraum“ ($|\operatorname{arc} w| \leq \psi < \frac{\pi}{2}$) genommenen Quotienten zu charakterisieren. Sodann vergleichen wir diesen Satz mit einem kürzlich hergeleiteten Resultat von Herrn J. Wolff ²⁾ (§ 4, Satz II), das eine noch viel genauere Einsicht in die Art der Randverzerrung ermöglicht.

Das Hauptziel dieser Mitteilung ist nun die Behandlung der folgenden weitergehenden Frage: Nachdem die Existenz des limes des Quotienten $\frac{w(z)}{z}$ bei $z \rightarrow \infty$ festgestellt und dann $w(z)$ etwa durch $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = w'(\infty) = 1$ normiert ist, fragen wir nach dem Verhalten der Differenz $w(z) - z$ für $z \rightarrow \infty$. Insbesondere interessiert uns dabei die Frage, wann $\lim_{z \rightarrow \infty} (w(z) - z)$ bei allseitiger Annäherung existiert. Transformiert man $w = \infty$ vermittels $w^* = \frac{1}{w}$ in $w^* = 0$ und bildet man gleichzeitig $\Re z > 0$ so auf $|z^* + 1| < 1$ ab, daß $z = \infty$ $z^* = 0$ entspricht, so geht $w(z)$ über in die Abbildungsfunktion $w^*(z^*)$, $w^*(0) = 0$, $\left(\frac{dw^*}{dz^*}\right)_{z^*=0} = 1$, und unsere Frage wird die nach dem Verhalten des „zweiten Differenzenquotienten“

$$\frac{\frac{w^*(z^*)}{z^*} - 1}{z^*} \quad \text{bei } z^* \rightarrow 0.$$

Unter geeigneten Annahmen über C läßt sich nun für z aus $\Re z \geq 0$ und $r = |z|$ die Differenz

$$|w(z) - z - (w(r) - r)|$$

bei $|z| \rightarrow \infty$ abschätzen, und zwar auch so, daß sie mit $|z| \rightarrow \infty$ nach 0 strebt. Auf diese Weise läßt sich dann die Existenz des allseitig gebildeten $\lim_{z \rightarrow \infty} (w(z) - z)$ aus derjenigen des längs der reellen Achse genommenen erschließen. (Vgl. Satz III.) In Satz IV erhalten wir so eine hinreichende Bedingung für das Vorhandensein des allseitig gebildeten $\lim_{z \rightarrow \infty} (w(z) - z)$.

²⁾ Comp. Math. 1 (1934), 217-222.

I. Vorbereitungen.

§ 1. *Der Löwner-Montelsche Satz.*

Es sei G ein von einer geschlossenen Jordankurve C berandetes Gebiet, ω ein Punkt aus G . Wir bilden G so auf $|z| < 1$ ab, daß ω in $z=0$ übergeht, und bezeichnen die Länge des Bildes eines Bogens γ von C mit $m_{C, \omega} \gamma$; $m_{C, \omega} \gamma$ ist durch die Angabe von ω offenbar eindeutig bestimmt.

Satz von Löwner-Montel. G und G_1 seien zwei von den geschlossenen Jordankurven C, C_1 begrenzte Gebiete; G_1 sei ein Teilgebiet von G , und seine Randkurve C_1 möge einen Bogen γ mit C gemeinsam haben. Für jeden Punkt ω aus G_1 gilt dann

$$m_{C, \omega} \gamma \geq m_{C_1, \omega} \gamma. \quad ^3)$$

Hilfssatz 1. \mathfrak{B} und Γ seien zwei geschlossene Jordankurven, die einander im Punkte O durchsetzen (wobei O auch der unendlich ferne Punkt sein kann). \mathfrak{B} bezeichne eines der beiden Gebiete, in welche die Ebene durch \mathfrak{B} zerlegt wird, \mathfrak{G} eines der von Γ berandeten Gebiete. P resp. Q sei der erste Schnittpunkt von Γ und \mathfrak{B} , den man antrifft bei der Durchlaufung von Γ bzw. \mathfrak{B} von O aus in dem Sinne, daß man bei O \mathfrak{B} resp. \mathfrak{G} verläßt. Der dabei durchlaufene Bogen \widehat{OP} auf Γ sei γ , der hierbei erhaltene Bogen \widehat{OQ} von \mathfrak{B} sei β . Für jeden Punkt ω aus \mathfrak{B} und \mathfrak{G} gilt

$$m_{\Gamma, \omega} \gamma + m_{\mathfrak{B}, \omega} \beta \leq 2\pi.$$

Ist β' der Komplementärbogen von β auf \mathfrak{B} , so ist offenbar

$$m_{\Gamma, \omega} \gamma \leq m_{\mathfrak{B}, \omega} \beta'.$$

Beweis. Wie man leicht einsieht, können die Punkte P und Q für $P \neq Q$ durch einen Jordanbogen γ' miteinander verbunden werden, der außerhalb von \mathfrak{B} und außerhalb von \mathfrak{G} liegt und außer in P und Q weder \mathfrak{B} noch Γ trifft. Für $P = Q$ sei γ' der Punkt P . Die Bögen β, γ, γ' bilden dann eine geschlossene Jordankurve \mathfrak{B}_1 , welche ein Gebiet \mathfrak{B}_1 berandet, das sowohl \mathfrak{B} als auch \mathfrak{G} und somit auch ω enthält. Da ferner \mathfrak{B}_1 mit Γ den Bogen γ gemeinsam hat, ist nach dem Satz von Löwner-Montel

$$m_{\Gamma, \omega} \gamma \leq m_{\mathfrak{B}_1, \omega} \gamma,$$

³⁾ Für den Beweis s. etwa Math. Ztschr. 35 (1932), 339.

und weil B_1 mit B den Bogen β gemeinsam hat, ist

$$m_{B, \omega} \beta \leq m_{B_1, \omega} \beta,$$

also

$$m_{\Gamma, \omega} \gamma + m_{B, \omega} \beta \leq m_{B_1, \omega} (\gamma + \beta) \leq 2\pi, \quad \text{q. e. d.}$$

Hilfssatz 2. *Es sei g eine Gerade, H eine der von g berandeten Halbebenen, p ein Punkt auf g , ω ein Punkt im Innern von H , l diejenige Halbgerade von g , die von ω aus gesehen links von p liegt. Ist α der Winkel $p\omega q$, den das Lot $\overline{\omega q}$ von ω auf g mit ωp bildet, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, wobei $\alpha > 0$ zu zählen ist, wenn p von ω aus gesehen rechts von q liegt, so ist*

$$m_{g, \omega} l = \pi + 2\alpha.$$

Denn sind bei der konformen Abbildung von H auf den Einheitskreis, bei der ω in den Nullpunkt O übergeht, P und P_∞ die Bilder des Punktes p und des unendlich fernen Punktes, so hat man den Radius OP im positiven Sinne um O um $m_{g, \omega} l$ zudrehen, um ihm in OP_∞ überzuführen. Die Originale dieser Radien in der Halbebene sind: der in H liegende Bogen ωp des Orthogonalkreises zu g durch ω und p und der in H befindliche Teil $\omega \infty$ des Orthogonalkreises zu g durch ω und ∞ , d. h. der H angehörende Teil $\omega \infty$ der Geraden durch q und ω . Der eine der beiden

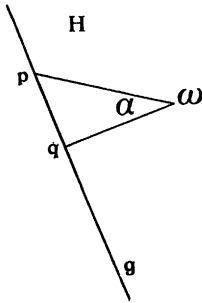


Fig. 1.

Winkel zwischen diesen Orthogonalkreisbögen ist $m_{g, \omega} l$. Da der erste Orthogonalkreisbogen mit $\overrightarrow{\omega q}$ offenbar den Winkel 2α bildet, so folgt leicht, daß $m_{g, \omega} l = \pi + 2\alpha$ ist.

§ 2. *Unbewalltheitsfunktion. Krümmungsbedingung*⁴⁾.

Unbewalltheitsfunktion. Wir verstehen unter der „Unbewalltheitsfunktion“ $\Delta(r)$ einer geschlossenen Jordankurve C durch $w = \infty$ bezüglich $w = \infty$ folgendes: Man beschreibe um $w = 0$ einen Kreis vom Radius r , der C schneidet, und durchlaufe C von einem innerhalb dieses Kreises gelegenen Punkt von C nach beiden Seiten bis zum jeweils letzten Schnittpunkt dieses Kreises mit C . Der durchlaufene Bogen heiße β . Dann ist $\Delta(r)$

⁴⁾ Dieser Paragraph wird bis auf die Definition der Unbewalltheitsfunktion erst für Abschnitt III benötigt.

der Radius der kleinsten abgeschlossenen Kreisscheibe um $w=0$, die β enthält.

Bildet man eines der von C berandeten Gebiete konform durch $w = w(z)$ auf $\Re z > 0$ ab, so daß $z = \infty$ und $w = \infty$ einander entsprechen, so ist für das Verhalten des Quotienten $\frac{w(z)}{z}$ auf dem Rande bei $z \rightarrow \infty$, die Bedingung $\Delta(r) = O(r)$ bei $r \rightarrow \infty$ wesentlich. Diese ist äquivalent mit der Existenz einer Parameterdarstellung von C

$$(1) \quad w = W(t) = U(t) + iV(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

für welche

$$0 < l = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \left| \frac{W(t)}{t} \right| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \pm \infty} \left| \frac{W(t)}{t} \right| = L < \infty \text{ mit } \frac{L}{l} \geq \varkappa = \overline{\lim}_{r \uparrow \infty} \frac{\Delta(r)}{r}$$

gilt ⁵⁾.

Für die Untersuchung der Differenz $w(z) - z$ ($w'(\infty) = 1$) ist die Bedingung $\Delta(r) - r \leq \text{const.}$ bei $r \rightarrow \infty$ von Bedeutung. Analog wie oben gilt

Die Bedingung $\overline{\lim}_{r \uparrow \infty} (\Delta(r) - r) \leq m$, $m \geq 0$, ist damit äquivalent, daß es eine Darstellung (1) von C gibt mit

$$(2) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \pm \infty} \left| |W(t)| - |t| \right| \leq \mu \quad (\mu \text{ Konstante, } \geq 0).$$

Dabei ist $m \leq 4\mu$, und es gibt Darstellungen, die (2) mit $\mu = m$ erfüllen.

Beweis. a) Es sei (2) erfüllt. Ist für ein $r > 0$ $\Delta(r) > r$, so gibt es einen im Endlichen verlaufenden Bogen β von C , dessen Endpunkte, etwa $W(t)$, $W(T)$, auf $|w| = r$ liegen, und der einen Punkt, etwa $W(\tau)$, mit $|w| = \Delta(r)$ gemeinsam hat. Man darf dann $0 < t < \tau < T$ annehmen. Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ist für $r \geq R(\varepsilon)$, $|W(t)| = \varrho(t)$ gesetzt,

$$|\varrho(t) - t| \leq \mu + \frac{\varepsilon}{4}, \quad |\varrho(\tau) - \tau| \leq \mu + \frac{\varepsilon}{4}, \quad |\varrho(T) - T| \leq \mu + \frac{\varepsilon}{4},$$

und somit wegen $\varrho(t) = \varrho(T) = r$

$$0 < T - t \leq 2\mu + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ also erst recht } 0 < \tau - t \leq 2\mu + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daher gilt

$$\Delta(r) - r = \varrho(\tau) - \varrho(t) \leq |\varrho(\tau) - \tau| + |\tau - t| + |t - \varrho(t)| \leq 4\mu + \varepsilon.$$

⁵⁾ Vgl. l.c. ³⁾, 355—359.

b). Sei umgekehrt $\overline{\lim}_{r \uparrow \infty} (\Delta(r) - r) \leq m$; $w = W(\bar{t})$ sei eine Parameterdarstellung von C , $-\infty < \bar{t} < \infty$. Wir beschreiben nun Kreise um $w = 0$ mit den Radien \sqrt{n} , $n = 1, 2, \dots$. Von einem n_0 ab enthalten diese $W(0)$ im Innern; sei \bar{t}_n ($n > n_0$) das kleinste $\bar{t} > 0$, so daß $|W(\bar{t}_n)| = \sqrt{n}$ ist. Jedes Intervall $\bar{t}_n \leq \bar{t} \leq \bar{t}_{n+1}$ bilden wir nun umkehrbar eindeutig und stetig, etwa linear, auf das Intervall $\sqrt{n} \leq t \leq \sqrt{n+1}$ ab, so daß $\bar{t}_n \sqrt{n}$ entspricht. So erhalten wir eine neue Parameterdarstellung $W_1(t)$ eines der beiden ins Unendliche laufenden Zweige von C . Es gilt nun für

$$\sqrt{n} \leq t \leq \sqrt{n+1}:$$

$$|W(\bar{t}_n)| - m - \varepsilon_n \leq |W_1(t)| \leq |W(\bar{t}_{n+1})|,$$

wo $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ist, also wegen $|W(\bar{t}_n)| = \sqrt{n}$

$$\begin{aligned} \sqrt{n} - \sqrt{n+1} - m - \varepsilon_n &\leq |W_1(t)| - t \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \\ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} ||W_1(t)| - t| &\leq m. \end{aligned}$$

Die Parameterdarstellung für den Rest von C gewinnt man ähnlich.

Wenn C im Streifen $-a \leq u \leq a$ ($a > 0$) verläuft, so ist bisweilen die folgende Form für die Unbewalltheitsfunktion anstelle von $\Delta(r)$ bequemer: Man ziehe durch $w = iv$ und $w = -iv$ die Parallelen zur u -Achse und durchlaufe von einem Punkte von C im Innern des Rechtecks ($a - iv, a + iv, -a + iv, -a - iv$) die Kurve nach beiden Seiten bis zum letzten Schnittpunkt mit den Parallelen zur u -Achse. Dann sei $H(v) = \text{Max} |v|$ für alle $w = u + iv$ auf dem so durchlaufenen Bogen β . Offenbar sind die Bedingungen $\overline{\lim}_{r \uparrow \infty} (\Delta(r) - r) \leq m$ und $\overline{\lim}_{t \rightarrow \pm \infty} (H(v) - |v|) \leq m$ gleichwertig.

Ist übrigens in (1) $\lim_{v \rightarrow \pm \infty} U(t) = 0$, $V(t) > 0$ für $t \geq A > 0$, $V(t) < 0$ für $t < -A$, so ist (2) äquivalent mit $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} |W(t) - it| \leq \mu$.

Die Krümmungsbedingung. C sei eine Jordankurve durch $w = \infty$, welche die v -Achse in $w = \infty$ zur Tangente hat. Es seien $\delta > 0$, a reell. Dann sagen wir, C genügt in $w = \infty$ der *Krümmungsbedingung* mit dem „*Krümmungsmaß*“ a resp. mit dem „*oberen Krümmungsmaß*“ $|a|$ für das gegebene δ , wenn folgendes erfüllt ist: Legt man durch irgend zwei Punkte $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2$ auf C mit $|w_1 - w_2| \geq \delta$ eine Gerade, so gilt für den Abschnitt ξ der Geraden auf der u -Achse

$$(3) \lim \xi = a \text{ bzw. } \overline{\lim} |\xi| = |a| \left(\xi = u_1 - v_1 \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} = u_2 - v_2 \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} \right),$$

wenn w_1 und w_2 längs desselben Kurvenastes von C ins Unendliche streben ⁶⁾.

Insbesondere werden für uns solche Kurven von Interesse sein, bei denen die Krümmungsbedingung für jedes $\delta > 0$ erfüllt ist.

Liegt eine Kurve C in der Parameterdarstellung (1) vor mit

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} (W(t) - it) = a \quad (a \text{ reell})$$

— C hat also $u = a$ zur Asymptote —, so genügt C dann und nur dann der Krümmungsbedingung mit dem „Krümmungsmaß“ a für ein $\delta > 0$, wenn für $t_2 - t_1 \geq \delta$

$$\frac{U(t_2) - U(t_1)}{t_2 - t_1} = o\left(\frac{1}{|t_1|}\right) \text{ oder } \frac{U(t_2) - U(t_1)}{t_2 - t_1} = o\left(\frac{1}{|t_2|}\right)$$

bei $t_1, t_2 \rightarrow +\infty$ und $t_1, t_2 \rightarrow -\infty$ gilt. Dies folgt unmittelbar aus (3).

II. Über das Verhalten von $\frac{w(z)}{z}$.

§ 3. Der Beweis von Satz I.

Wir geben hier einen vereinfachten Beweis eines früher hergeleiteten Satzes ⁷⁾.

Satz I. *C sei eine geschlossene Jordankurve in der w -Ebene durch $w = \infty$ mit den folgenden weiteren Eigenschaften:*

⁶⁾ Diese Definition verallgemeinert den gewöhnlichen Begriff des Krümmungskreises als Kreis durch drei „benachbarte“ Punkte der Kurve. Transformiert man nämlich $w = \infty$ durch $w^* = \frac{1}{w}$ in $w^* = 0$ und dadurch C in eine Kurve C^* , so besagt etwa die Bedingung mit $\lim \xi = a$: Legt man den Kreis durch $w^* = 0$ und zwei Punkte w_1^*, w_2^* von C^* auf „derselben Seite“ von $w^* = 0$ mit $|w_1^* - w_2^*| \geq \delta |w_1^* w_2^*|$, so möge dieser Kreis stets gegen einen und denselben Grenzkreis vom Radius $\varrho = \frac{1}{2|a|}$ (für $a = 0$, „ $\varrho = \infty$ “ gegen die imaginäre Achse) „konvergieren“, wenn w_1^*, w_2^* längs C^* gegen 0 streben. Diese Bedingung postuliert also die Existenz eines „gewöhnlichen“ Krümmungskreises für diese spezielle Annäherung.

⁷⁾ Siehe l.c. ¹⁾. Die hier gegebene Fassung ist allgemeiner, weil über den Quotienten $\left| \frac{w}{\omega} \right|$ mehr ausgesagt wird. Daß hier ω nur auf L angenommen wird — statt in einem Winkelraum — ist keine sachliche Einschränkung (man vgl. den Anhang am Schlusse dieser Arbeit).

1. C hat in $w = \infty$ die v -Achse zur Tangente.

2. Für ihre Unbewalltheitsfunktion bezüglich $w = \infty$ gilt

$$\overline{\lim}_{r \uparrow \infty} \frac{\Delta(r)}{r} \leq \kappa.$$

G sei das Gebiet rechts von C , L ein in $w = \infty$ mündender Jordanbogen in G mit $\lim_{w \rightarrow \infty} \text{arc } w = 0$ für w auf L . c_1, c_2 seien zwei beliebige positive Zahlen mit $c_1 \leq c_2$. $z(w)$ bilde G konform auf $\Re z > 0$ so ab, daß $z = \infty$ $w = \infty$ entspricht.

Ordnet man dann jedem w auf C außerhalb eines genügend großen Kreises ein ω auf L mit $c_1 \leq \left| \frac{w}{\omega} \right| \leq c_2$ zu, so gilt

$$\frac{1}{\kappa} \leq \lim_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{z(w)}{w} \frac{\omega}{z(\omega)} \right| \leq \overline{\lim}_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{z(w)}{w} \frac{\omega}{z(\omega)} \right| \leq \kappa^8).$$

Beweis. 1. Die Abschätzung nach oben. Wegen der Eigenschaft 1 liegt C außerhalb eines genügend großen Kreises um $w = 0$, etwa $|w| \geq A$, in

$$\Sigma: -h(|v|) \leq u \leq h(|v|), \quad |v| \geq A,$$

wo $h(v)$ eine passende positive nicht abnehmende stetige Funktion mit $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{h(v)}{v} = 0$ ist. Sei η eine beliebige, doch während des Beweises feste Zahl mit $0 < \eta < \frac{\pi}{8}$. Zieht man dann die Gerade $g: v = -u \cotg \eta + p$ mit genügend großem $p > 0$, so liegen alle Schnittpunkte von C und g innerhalb des in $v > 0$ befindlichen Teiles Σ_1 von Σ , und es gilt ferner für irgend zwei Punkte $w_1 = u_1 + i v_1, w_2 = u_2 + i v_2$ von g in Σ_1 , also auch für zwei Schnittpunkte von C und g

$$|w_1 - w_2| \leq \frac{1}{\sin \eta} [h(v_1) + h(v_2)].$$

Es ist also bei vorgegebenen ε , $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, für zwei solche Punkte w_1, w_2

$$(4) \quad |w_1 - w_2| \leq \varepsilon |w_1| \quad (|w_1| \leq |w_2|),$$

wenn nur $p \geq p_0(\varepsilon, \eta)$ gewählt wird.

Es sei nun w ein beliebiger Punkt des in $v > 0$ gelegenen Zweiges C^* von C in solcher „Höhe“, daß bereits gilt:

⁸⁾ Die Behauptung kann, wie leicht einzusehen ist, auch so formuliert werden: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $q(\varepsilon)$, sodaß für alle w auf C mit $|w| \geq q(\varepsilon)$ und alle ω auf L mit

$$c_1 \leq \left| \frac{w}{\omega} \right| \leq c_2 \text{ gilt: } \left| \frac{z(\omega)}{\omega} \right| \frac{1}{\kappa(1+\varepsilon)} \leq \left| \frac{z(w)}{w} \right| \leq \kappa(1+\varepsilon) \left| \frac{z(\omega)}{\omega} \right|.$$

1. Für die Gerade $g: v = -u \cotg \eta + p$ durch w ist $p \geq p_0$.
2. Ist s der kürzeste Abstand der Punkte von g in Σ_1 von O , so ist für $r \geq s: \Delta(r) \leq r\kappa(1+\varepsilon)$, unter ε die Zahl aus (4) verstanden.

Wir ziehen dann die Parallele $g': v = -u \cotg \eta + p'$ zu g mit $p' = p\kappa(1+7\varepsilon)$. Sind s und S resp. s' und S' die kleinste bzw. größte Entfernung eines Punktes von g resp. g' in Σ_1 von O , so gilt wegen (4)

$$(5a) \quad \kappa(1+7\varepsilon) \leq \frac{S'}{s} \leq \kappa \frac{(1+\varepsilon)(1+7\varepsilon)}{1-\varepsilon},$$

$$(5b) \quad \kappa \frac{(1+7\varepsilon)(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon} \leq \frac{s'}{S} \leq \kappa(1+7\varepsilon).$$

Aus (5b) folgt $S\kappa(1+\varepsilon) < s'$, wegen $\varepsilon < \frac{1}{2}$, und hieraus wegen $\Delta(r) \leq \kappa r(1+\varepsilon)$ für $r \geq s$: wenn es einen Bogen β von C gibt, dessen Endpunkte auf g liegen, und der sonst nicht „unterhalb“ g verläuft, so kann β die Gerade g' nicht mehr treffen. Dies hat wiederum die Konsequenz: *Durchläuft man C von $-\infty$ nach $+\infty$, so wird w vor allen Schnittpunkten von C und g' angetroffen.*

Sei nun H die rechts von g' gelegene Halbebene. Durchläuft man nun C von $-\infty$ nach $+\infty$, so sei w_1 der dabei zuerst angetroffene Schnittpunkt von g' mit C . Der hierbei bis w_1 zurückgelegte Bogen von C werde mit c , sein Teilbogen $-\infty \dots w$ mit b bezeichnet; c liegt *außerhalb* von H .

Durchläuft man andererseits g' von $+\infty$ nach $-\infty$, so möge der dabei zuerst erreichte Schnittpunkt mit C mit w_2 bezeichnet werden; die hier bis w_2 durchlaufene Halbgerade liegt *außerhalb* G . Die zu ihr komplementäre Halbgerade werde l genannt. Ist dann ω ein Punkt aus G und H , so liefert Hilfssatz 1 ($\Gamma \equiv C, B \equiv g', \gamma \equiv c, \beta' \equiv l$)

$$(6) \quad m_{C,\omega} b \leq m_{C,\omega} c \leq m_{g',\omega} l.$$

Wegen (5a) und (5b) gilt noch

$$(7) \quad |w| \leq |w_2| \leq |w| \kappa \frac{(1+7\varepsilon)^2}{1-\varepsilon} \leq |w| \kappa(1+7\varepsilon)^3.$$

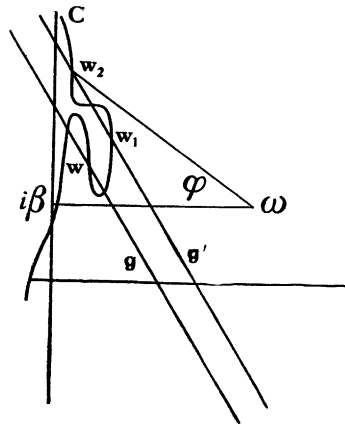


Fig. 2.

Wir wählen nun $\omega = \alpha + i\beta$ auf L mit $c_1 \leq \left| \frac{w}{\omega} \right| \leq c_2$; dies ist jedenfalls möglich, wenn nur $|w|$ groß genug angenommen ist. Jedem Punkte w auf C^* in hinreichender „Höhe“ ist so ein Punkt ω auf L zugeordnet. Wie leicht zu sehen ist, liegt für $\eta < \frac{1}{c_2}$ ω auch in H , wenn nur w genügend „hoch“ angenommen wird. Es sei φ der Winkel $(w_2, \omega, i\beta)$, $\varphi \geq 0$ für $v_2 \geq \beta$; fällt man von ω auf g' das Lot, so erkennt man nach Hilfssatz 2:

$$(8) \quad m_{g', \omega} l = \pi + 2(\varphi + \eta) \quad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}, |\varphi + \eta| < \frac{\pi}{2} \right).$$

Es sei $z = iy = z(w)$ der Bildpunkt von w , $\zeta = z(\omega) = \xi + i\tau$ der von ω . Wegen der Winkeltreue der Abbildung ist $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\xi} = 0$. Es bezeichne ψ den Winkel $(iy, \zeta, i\tau)$, $\psi \geq 0$ für $y \geq \tau$; dann ist wieder nach Hilfssatz 2

$$(9) \quad m_{C, \omega} b = \pi + 2\psi \quad \left(|\psi| < \frac{\pi}{2} \right).$$

Aus (6), (8) und (9) ergibt sich somit

$$\varphi + \eta \geq \psi \quad \text{oder} \quad \text{tg}(\varphi + \eta) \geq \text{tg} \psi.$$

Sowohl für $\psi \geq 0$ als auch $\psi < 0$ ist $\text{tg} \psi = \frac{y - \tau}{\xi}$, also

$$(10) \quad \frac{\text{tg} \varphi + \text{tg} \eta}{1 - \text{tg} \varphi \text{tg} \eta} \geq \frac{y - \tau}{\xi} = \left| \frac{z(w)}{z(\omega)} \right| \left| \frac{z(\omega)}{\xi} \right| - \frac{\tau}{\xi}.$$

Nun ist

$$\text{tg} \varphi = \frac{v_2 - \beta}{\alpha - u_2} = \frac{v_2}{\alpha} \frac{1 - \frac{\beta}{v_2}}{1 - \frac{u_2}{\alpha}} = \frac{|w_2|}{|\omega|} (1 + \delta),$$

wobei wegen $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{u_2}{w_2} = 0^9$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\omega} = 0$ und (7) auch $\lim_{w \rightarrow \infty} \delta = 0$ gilt. Somit ist wegen (7)

$$\left| \frac{w}{\omega} \right| (1 + \delta) \leq \text{tg} \varphi \leq \left| \frac{w}{\omega} \right| \kappa (1 + 7\varepsilon)^3 (1 + \delta),$$

also

$$c_1 \leq \liminf_{w \rightarrow \infty} \text{tg} \varphi \leq \overline{\lim}_{w \rightarrow \infty} \text{tg} \varphi \leq c_2 \kappa (1 + 7\varepsilon)^3,$$

und mithin nach (10) wegen $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\xi} = 0$ für $125c_2\kappa \text{tg} \eta < 1$

⁹⁾ Hier und im folgenden in diesem Beweis geht $w \rightarrow \infty$ nur längs C^* .

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{z(w)}{w} \frac{\omega}{z(\omega)} \right| &\leq \overline{\lim}_{w \rightarrow \infty} \frac{1 + \operatorname{tg} \eta (\operatorname{tg} \varphi)^{-1}}{1 - \operatorname{tg} \eta \operatorname{tg} \varphi} \kappa (1 + 7\varepsilon)^3 \\ &\leq \frac{1 + c_1^{-1} \operatorname{tg} \eta}{1 - c_2 \kappa (1 + 7\varepsilon)^3 \operatorname{tg} \eta} \kappa (1 + 7\varepsilon)^3. \end{aligned}$$

Dieses gilt bei festem η für jedes ε , $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, also kann man in dem letzten Ausdruck $\varepsilon \downarrow 0$ gehen lassen; da aber auch $\eta > 0$ beliebig ist, darf man hinterher den Grenzübergang $\eta \downarrow 0$ ausführen, und man erhält damit die zweite der behaupteten Ungleichungen für $w \rightarrow \infty$ längs C^* . Analoges gilt, wenn $w \rightarrow \infty$ längs des anderen Zweiges von C geht.

2. Die Abschätzung nach unten. Wie oben erkennt man zunächst: Alle Punkte w auf C^* in hinreichend großer „Höhe“ haben die Eigenschaft: Die Gerade $g: v = u \cdot \operatorname{cotg} \eta + p$ durch w sowie die Gerade $g': v = u \operatorname{cotg} \eta + p'$ mit $p' \kappa (1 + 7\varepsilon) = p$ treffen C nur in dem Teil Σ_1 von Σ ; ferner gilt auch für irgend zwei Punkte von g oder g' aus Σ_1 die Ungleichung (4). Hieraus leitet man wie oben weiter her: *Durchläuft man C von $+\infty$ nach $-\infty$, so wird w vor allen Schnittpunkten von g' mit C angetroffen.* Ferner gilt für irgend einen Schnittpunkt w' von g' mit C

$$(11) \quad |w'| \leq |w| \leq |w'| \kappa (1 + 7\varepsilon)^3.$$

Es sei nun H die Halbebene rechts von g' . Durchläuft man g' von $-\infty$ nach $+\infty$, so möge der dabei zuerst angetroffene Schnittpunkt mit C mit w_1 , die hierbei bis w_1 zurückgelegte Halbgerade mit l bezeichnet werden; l liegt außerhalb von G . Bei der Durchlaufung von C von $+\infty$ nach $-\infty$ möge man zuerst auf den Schnittpunkt w_2 mit g' stoßen. Der dabei bis w_2 durchlaufene Bogen liegt außerhalb H ; sein Komplementärbogen werde c , der c umfassende Bogen $-\infty \dots w$ werde b genannt. Wir ordnen w wieder $\omega = \alpha + i\beta$ auf L mit $c_1 \leq \left| \frac{w}{\omega} \right| \leq c_2$ zu. ω liegt dann für alle genügend großen $|w|$ auch in H . Daher ist nach Hilfssatz 1

$$(12) \quad m_{g', \omega} l \leq m_{C, \omega} c \leq m_{C, \omega} b.$$

Ferner gilt wegen (11)

$$(13) \quad |w_1| \leq |w| \leq |w_1| \kappa (1 + 7\varepsilon)^3.$$

Jetzt bezeichnen wir den Winkel $(w_1, \omega, i\beta)$ mit φ , $\varphi \geq 0$ für $v_1 \geq \beta$; fällt man von ω auf g' das Lot, so erkennt man

$$m_{g', \omega} l = \pi + 2(\varphi - \eta) \quad \left(\left| \varphi \right| < \frac{\pi}{2}, \quad \left| \varphi - \eta \right| < \frac{\pi}{2} \right).$$

Ebenso gilt wieder, unter ψ den Winkel $(z, \zeta, i\tau)$ verstanden ($z = z(w)$, $\zeta = \xi + i\tau = z(\omega)$),

$$m_{C, \omega} b = \pi + 2\psi \quad \left(|\psi| < \frac{\pi}{2} \right)$$

und somit wegen (12)

$$(14) \quad \begin{aligned} \psi &\geq \varphi - \eta, \quad \operatorname{tg} \psi \geq \operatorname{tg}(\varphi - \eta) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \eta}, \\ \left| \frac{z(w)}{z(\omega)} \right| \frac{|z(\omega)|}{\xi} - \frac{\tau}{\xi} &\geq \operatorname{tg} \varphi \frac{1 - \operatorname{tg} \eta (\operatorname{tg} \varphi)^{-1}}{1 + \operatorname{tg} \eta \operatorname{tg} \varphi}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_1 - \beta}{\alpha - u_1} = \left| \frac{w_1}{\omega} \right| (1 + \delta)$$

mit $\lim_{w \rightarrow \infty} \delta = 0$, also wegen (13)

$$c_2 \geq \overline{\lim}_{w \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \varphi \geq \lim_{w \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \varphi \geq \frac{c_1}{\kappa(1+7\varepsilon)^3}.$$

Hiermit ergibt sich aus (14)

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{z(w)}{w} \frac{\omega}{z(\omega)} \right| \geq \frac{1}{\kappa} \frac{1 - c_1^{-1} \kappa (1+7\varepsilon)^3 \operatorname{tg} \eta}{1 + c_2 \operatorname{tg} \eta} \cdot \frac{1}{(1+7\varepsilon)^3}.$$

Hier kann man nun zuerst $\varepsilon \downarrow 0$ und dann $\eta \downarrow 0$ gehen lassen und erhält damit die linke Ungleichung der Behauptung, zunächst für $w \rightarrow \infty$ längs C^* . Analoges gilt für den anderen Zweig. Damit ist Satz I bewiesen.

§ 4. Der Satz von Wolff.

Kürzlich bewies Herr J. Wolff den folgenden Satz I enthaltenden Satz, der aber auch umgekehrt, wie wir hier zeigen, aus diesem folgt¹⁰⁾.

¹⁰⁾ Dagegen ist ein schärferes Resultat aus der gleichen Arbeit von Herrn WOLFF nicht ohne weiteres in I enthalten; dieses lautet: Setzt man die Bedingung für die Unbewalltheitsfunktion nur für einen der beiden ins Unendliche gehenden Zweige von C voraus, etwa für den bei der konformen Abbildung der positiven y -Achse entsprechenden, so gilt für $|z| = |z'|$ und $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \operatorname{arc} z$, $\operatorname{arc} z' \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{\kappa} \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{w(z)}{w(z')} \right| \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{w(z)}{w(z')} \right| \leq \kappa.$$

Bei unserer Beweismethode würde dieses Resultat nur mit κ^2 anstelle von κ folgen. — Vgl. auch A. OSTROWSKI, die im Anhang genannte Arbeit, Satz VIII d.

Satz II. C sei eine geschlossene Jordankurve durch $w = \infty$ mit den Eigenschaften 1. und 2. wie in Satz I, G das rechts von C liegende Gebiet, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1 \leq \gamma_2$, seien zwei beliebige positive Zahlen.

Ist $w(z)$ die zu $z(w)$ aus Satz I inverse Funktion, so gilt für jedes $z = x + iy \neq 0$ aus $x \geq 0$ und jedes zugeordnete $r > 0$ mit

$$\gamma_1 \leq \frac{|z|}{r} \leq \gamma_2 : \quad \frac{1}{\kappa} \leq \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{w(z)}{z} \frac{r}{w(r)} \right| \leq \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{w(z)}{z} \frac{r}{w(r)} \right| \leq \kappa.$$

Beweis. Zunächst folgt aus Satz I leicht, daß die Behauptung für rein imaginäre $z = iy$ richtig ist. Sei nämlich ε mit $0 < \varepsilon < 1$ vorgegeben. Wir wählen für L das Bild der x -Achse vermittels $w(z)$. Dann gibt es ein $q(\varepsilon)$, so daß für alle w auf C mit $|w| \geq q(\varepsilon)$ und alle ω auf L mit

$$(15) \quad \frac{\gamma_1}{4\kappa} \leq \left| \frac{w}{\omega} \right| \leq 4\gamma_2\kappa : \quad \left| \frac{w}{\omega} \frac{1}{\kappa(1+\varepsilon)} \right| \leq \left| \frac{y}{\zeta} \right| \leq \kappa(1+\varepsilon) \left| \frac{w}{\omega} \right|,$$

($iy = z(w), \zeta = z(\omega)$) gilt. Sei nun γ eine Zahl mit $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$, w ein fester Punkt auf C mit $|w| \geq q(\varepsilon)$. Wir beschreiben mit $\varrho_1 = \frac{|w|}{\gamma\kappa(1+\varepsilon)^2}$ und $\varrho_2 = \frac{|w|}{\gamma} \kappa(1+\varepsilon)^2$ Kreise K_1 bzw. K_2 um O . Durchläuft man L von einem Punkt in K_1 ins Unendliche, so sei der letzte Schnittpunkt von L mit K_1 ω_1 und der erste darauf folgende mit K_2 ω_2 . Wegen (15) liegt der Bildpunkt von ω_1 auf der x -Achse links von $\zeta_1 = \frac{|y|}{\gamma(1+\varepsilon)}$, der von ω_2 rechts von $\zeta_2 = \frac{|y|}{\gamma} (1+\varepsilon)$. Ist dann $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$, so befindet sich der Bildpunkt $\omega = w(\zeta)$ auf dem Bogen $\omega_1 \dots \omega_2$ von L , also gilt

$$\frac{\gamma}{\kappa(1+\varepsilon)^2} \leq \left| \frac{w(iy)}{w(\zeta)} \right| \leq \gamma\kappa(1+\varepsilon)^2$$

und damit insbesondere für $\left| \frac{y}{\zeta} \right| = \gamma$ für alle γ mit $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$

$$\left| \frac{y}{\zeta} \frac{1}{\kappa(1+\varepsilon)^2} \right| \leq \left| \frac{w(iy)}{w(\zeta)} \right| \leq \left| \frac{y}{\zeta} \right| \kappa(1+\varepsilon)^2,$$

wenn nur $|y| \geq q_1(\varepsilon)$ bei passendem $q_1(\varepsilon)$ ist.

Um nun die Behauptung für beliebiges z zu beweisen, dürfen wir annehmen, daß $G + C$ den Nullpunkt nicht enthält. Dann ist die für jedes γ mit $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$ gebildete Funktion¹¹⁾

¹¹⁾ Den nun folgenden Teil des Beweises verdanke ich einer Mitteilung von Herrn Prof. WOLFF. Vgl. auch seine kürzlich erschienene C. R.-Note, Sur la fonction harmonique conjuguée d'une fonction harmonique bornée [197 (1933), 1182].

$f_\gamma(z) = \frac{w(\gamma z)}{w(-iz)}$ für $x > 0$, $y > 0$ regulär und $x \geq 0$, $y \geq 0$ stetig und $\neq 0$. Ferner gibt es nach dem eben bewiesenen Teil zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $q_2(\varepsilon)$, derart daß sowohl für $z = iy$ als auch $z = x$ mit $|z| \geq q_2(\varepsilon)$ gleichmäßig für alle γ mit $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$

$$(16) \quad \frac{\gamma}{\kappa(1+\varepsilon)} \leq |f_\gamma(z)| \leq \gamma\kappa(1+\varepsilon)$$

gilt. Jeder Zweig von $\log f_\gamma(z) = \log |f_\gamma(z)| + i \operatorname{arc} f_\gamma(z)$ ist in $x > 0$, $y > 0$ eindeutig regulär und für $x \geq 0$, $y \geq 0$ stetig; ferner liegt dort — nach Festlegung des Zweiges — $|\operatorname{arc} f_\gamma(z)|$ gleichmäßig für alle γ aus $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ unterhalb einer festen Schranke M . Bildet man nun den ersten Quadranten auf $|t| < 1$ vermittels $z = g(t)$ konform so ab, daß $t = 1$ $z = \infty$ entspricht, so läßt sich die in $|t| < 1$ harmonische Funktion $P_\gamma(t) = \log |f_\gamma(g(t))|$ wegen $|\operatorname{arc} f_\gamma(g(t))| \leq M$ durch das Poissonsche Integral mit den für $0 < \varphi < 2\pi$ stetigen Randwerten $P_\gamma(e^{i\varphi})$ darstellen. Daraus leitet man ¹²⁾ unter Benutzung von (16) und der *gleichmäßigen* Beschränktheit von $\operatorname{arc} f_\gamma(g(t))$ in t und γ die Existenz eines $q_3(\varepsilon)$ her mit der Eigenschaft, daß auch für alle z aus dem *Innern* des ersten Quadranten gleichmäßig für die genannten γ

$$(17) \quad \frac{\gamma}{\kappa(1+\varepsilon)^2} \leq |f_\gamma(z)| \leq \gamma\kappa(1+\varepsilon)^2 \quad \text{für } |z| \geq q_3(\varepsilon)$$

gilt.

¹²⁾ Etwa so: Ist für $0 < \varphi \leq \delta(\varepsilon) < \frac{\pi}{4}$, $2\pi - \delta(\varepsilon) \leq \varphi < 2\pi$: $|P_\gamma(e^{i\varphi}) - \log \gamma| \leq \log \kappa(1+\varepsilon)$, ($\delta(\varepsilon)$ entspricht $q_2(\varepsilon)$ im Text), so ist, $t = re^{i\alpha}$, $r < 1$, wegen

$$2\pi(P_\gamma(t) - \log \gamma) = \int_0^{2\pi} (P_\gamma(e^{i\varphi}) - \log \gamma) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\alpha)} d\varphi = \int_0^\delta + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} + \int_\delta^{2\pi-\delta},$$

$$\text{für } |t-1| \leq \frac{\delta}{4}$$

$$(*) \quad |P_\gamma(t) - \log \gamma| \leq \log \kappa(1+\varepsilon) + \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\frac{\delta}{2}} \left\{ |\log \gamma| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_\gamma(e^{i\varphi})| d\varphi \right\}.$$

Nun ist aber, zunächst für $0 \leq r < 1$

$$\int_0^{2\pi} P_\gamma(re^{i\varphi})^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} (\operatorname{arc} f_\gamma(g(re^{i\varphi})))^2 d\varphi \leq 2\pi M^2,$$

also

$$\int_0^{2\pi} |P_\gamma(re^{i\varphi})| d\varphi \leq \left\{ 2\pi \int_0^{2\pi} P_\gamma(re^{i\varphi})^2 d\varphi \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 2\pi M,$$

und da man hier $r \uparrow 1$ unter dem Integralzeichen gehen lassen kann, so folgt aus (*) die Behauptung des Textes.

Nun ist bei allseitiger Annäherung $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \frac{w(z)}{z} = 0$ und daher¹³⁾ gleichmäßig für alle z mit $|\operatorname{arc} z| \leq \frac{\pi}{4}$, $|z| = r$,

$$(18) \quad \lim_{r \uparrow \infty} \left| \frac{w(z)}{w(r)} \right| = 1.$$

Ist $\Re z \geq 0$, so liegt z oder $\pm iz$ im Winkelraum $|\operatorname{arc} z| \leq \frac{\pi}{4}$. Durch Kombination von (17) und (18) folgt daher die Existenz eines $q_4(\varepsilon)$ derart, daß für alle z aus $\Re z \geq 0$ mit $|z| \geq q_4(\varepsilon)$ und alle $r = \frac{1}{\gamma} |z|$ mit $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$

$$\left| \frac{z}{r} \frac{1}{\varkappa(1+\varepsilon)^3} \right| \leq \left| \frac{w(z)}{w(r)} \right| \leq \left| \frac{z}{r} \right| \varkappa(1+\varepsilon)^3.$$

gilt, w. z. b. w.

Aus Satz II ergibt sich noch eine interessante

Folgerung. Ist $\varkappa = 1$, so folgt unter Berücksichtigung, daß allseitig $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \frac{w(z)}{z} = 0$ gilt, für $\Re z_1 \geq 0$, $\Re z_2 \geq 0$

$$\frac{w(z_1)}{w(z_2)} \sim \frac{z_1}{z_2} \quad \text{bei } z_1 \rightarrow \infty, z_2 \rightarrow \infty \text{ mit } \gamma_1 \leq \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \leq \gamma_2.$$

Wir heben noch den folgenden Satz hervor †):

Satz II*. *C sei eine geschlossene Jordankurve durch $w = \infty$, die in $w = \infty$ die imaginäre Achse zur Tangente hat. Bildet $w = w(z)$ die Halbebene $\Re z > 0$ auf das Gebiet rechts von C ab, so sei für eine gegen $z = \infty$ konvergierende Punktfolge z_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) mit $\frac{1}{c} \leq \left| \frac{z_{\nu+1}}{z_\nu} \right| \leq c$ ($c > 1$, Konstante) $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{w(z_\nu)}{z_\nu} = \gamma$ vorhanden ($\gamma = 0$, $\gamma = \infty$ zugelassen). Dann ist hinreichend und, falls $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq \infty$ ist, auch notwendig, damit $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z}$ bei allseitiger Annäherung existiert, daß die Unbewalltheitsfunktion von C bezüglich $w = \infty$ der Bedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Delta(r)}{r} = 1$ genügt.*

Dieser Satz enthält Satz 3 (S. 376) unserer in 1) genannten Arbeit als Spezialfall.

Beweis von II*. a) Die Bedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Delta(r)}{r} = 1$ ist hinreichend: Zunächst gilt nämlich nach Satz II für jedes feste $\varepsilon > 0$

¹³⁾ Siehe C. VISSER [Mathem. Ann. 107 (1932), 32, Satz 4].

†) Der hier folgende Teil von § 4 wurde nachträglich (am 2. April 1934) eingeliefert.

und alle z und z' in $\Re z > 0$ von genügend großem Betrage mit

$$\frac{1}{c} \leq \left| \frac{z}{z'} \right| \leq c : \quad \left| \frac{w(z')}{z'} \right| \frac{1}{1+\varepsilon} \leq \left| \frac{w(z)}{z} \right| \leq \left| \frac{w(z')}{z'} \right| (1+\varepsilon).$$

Nun liegt in jedem Intervall $\left(\frac{|z|}{c}, |z|c\right)$ bei genügend großem $|z|$ mindestens ein $|z_\nu|$. Daher folgt hieraus für $z' = z_\nu$, daß bei allseitiger Annäherung $\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{w(z)}{z} \right| = |\gamma|$ ist. Aus der Tatsache, daß $\lim_{z \rightarrow \infty} \arccos \frac{w(z)}{z} = 0$ (für passende Normierung des arcus) bei allseitiger Annäherung gilt, ergibt sich dann weiter, daß sogar allseitig $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = \gamma$ und $\gamma \geq 0$ ist.

b) Umgekehrt besagt die Annahme, $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z}$ existiert allseitig und ist $\neq 0, \neq \infty$, insbesondere, daß für die durch die konforme Abbildung gelieferte Parameterdarstellung $w(iy)$ von C , $-\infty < y < \infty$: $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \left| \frac{w(iy)}{iy} \right|$ vorhanden und von 0 und ∞ verschieden ist. Daraus folgt aber (s. l. c. ¹⁾ S. 358), daß $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\Delta(r)}{r} = 1$ ist.

III. Über das Verhalten von $w(z) - z$.

§ 5. Die Schwankung von $w(z) - z$.

Satz III. C sei eine geschlossene Jordankurve in der w -Ebene durch $w = \infty$ mit den folgenden weiteren Eigenschaften:

1. Sie verläuft zwischen zwei Jordankurven Γ_1, Γ_2 , welche die Gerade $u = a$ resp. $u = -a$ beiderseitig zu Asymptoten haben, und hat selber in $w = \infty$ die v -Achse zur Tangente.

2. Für ihre Unbewalltheitsfunktion bezüglich $w = \infty$ gilt

$$\overline{\lim}_{v \rightarrow \pm \infty} (H(v) - |v|) \leq m \quad (m \geq 0).$$

3. Sie genügt in $w = \infty$ beiderseitig der Krümmungsbedingung mit dem „oberen Krümmungsmaß“ $\leq a$ für ein $\delta > 0$.

Bildet dann $w(z)$, $z = x + iy$, $x > 0$ auf das Gebiet G rechts von C ab, so daß $z = \infty$ $w = \infty$ entspricht und $w'(\infty) = 1$ ist ¹⁴⁾, so gilt für $|y| = r$

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} |w(iy) - iy - (w(r) - r)| \leq 8a + m + 4\delta.$$

¹⁴⁾ Daß $w'(\infty)$ vorhanden ist, folgt unter den Annahmen des Satzes z.B. aus Satz 7 der in ¹⁾ zitierten Arbeit.

Zusatz. *Unter denselben Voraussetzungen gilt für beliebige z mit $x \geq 0$, $|z| = r$,*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |w(z) - z - (w(r) - r)| \leq 9a + m + 4\delta.$$

Beweis. 1. Die Kurve C' . Sei $\varepsilon > 0$. Außerhalb eines genügend großen Kreises um $w = 0$ bleibt C zwischen den beiden Geraden $u = a + \varepsilon$ und $u = -a - \varepsilon$. Wir denken uns zunächst zwei endliche Punkte P_1, P_2 von C durch einen im Endlichen verlaufenden Jordanbogen verbunden und den (endlichen) Bogen $\widehat{P_1 P_2}$ von C durch diesen ersetzt, derart, daß die so entstehende neue Jordankurve $C' = C'_\varepsilon$ durchweg innerhalb des Streifens $-(a + \varepsilon) \leq u \leq a + \varepsilon$ liegt. Das Gebiet rechts von C' sei G' . Wir beweisen zunächst eine der Behauptung des Satzes analoge Tatsache für C' mit $a' = a + 2\varepsilon$ und leiten dann daraus die Behauptung her. Offenbar sind für C' dieselben Voraussetzungen über die Unbewalltheitsfunktion und die Krümmungsbedingung erfüllt.

2. Die Abschätzung nach unten bei C' . Aus der Krümmungsbedingung folgt nun: Es gibt ein $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon) > 0$, $\eta_0 < \frac{\pi}{8}$ mit der Eigenschaft: Legt man durch einen Punkt der u -Achse mit $u \geq a + 2\varepsilon$ eine Gerade g , welche die positive v -Achse unter dem Winkel η mit $0 < \eta \leq \eta_0$ trifft, so gilt für irgend zwei Schnittpunkte w_1, w_2 von g und C' .

$$(19) \quad |w_1 - w_2| < \delta.$$

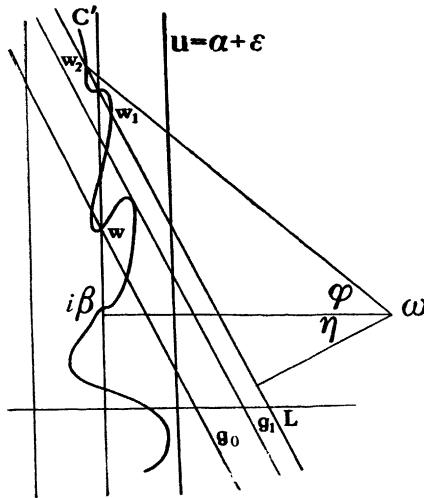


Fig. 3.

Sei nun ein $\vartheta > 0$ vorgegeben. Für jeden Punkt $w = u + iv$ von C' mit genügend großem v gilt:

1. die durch w und $(a + 2\varepsilon, 0)$ gelegte Gerade g_0 sowie jede Parallele zu dieser mit dem u -Achsenabschnitt $\geq a + 2\varepsilon$ genügt (19);

2. für alle nicht „unterhalb“ g_0 liegenden Punkte von C' mit der Ordinate v gilt

$$(20) \quad H(v) - v \leq m + \vartheta;$$

3. ist η der Winkel zwischen g_0 und der v -Achse, so ist

$$(21) \quad (m + \vartheta) \operatorname{tg} \eta < \varepsilon.$$

Wir wählen einen solchen Punkt w auf C' und behaupten:

Es gibt eine Gerade $L \parallel g_0$ durch einen Punkt der u -Achse mit $a + 2\varepsilon \leq u \leq 3(a + 2\varepsilon)$ derart, daß für einen beliebigen Schnittpunkt $w^ = u^* + iv^*$ von C' mit L*

$$(22) \quad |v^* - v| \leq m + \vartheta + 4\delta$$

ist, und daß ferner bei der Durchlaufung von C' von $-\infty$ nach $+\infty$ w vor allen Schnittpunkten von L mit C' angetroffen wird.

Für den Moment werde der v -Achsenabschnitt von g_0 auf der v -Achse mit p_0 bezeichnet; β bezeichne einen (endlichen) Bogen von C' , dessen Endpunkte auf g_0 liegen und der selbst nicht „unterhalb“ g_0 verläuft, falls es einen solchen Bogen gibt. Es gibt dann eine zu g_0 parallele Gerade g_1 mit dem v -Achsenabschnitt $p_1 \geq p_0$ mit der Eigenschaft, daß jede Gerade $g \parallel g_1$ mit $p > p_1$ keinen solchen Bogen β trifft, dagegen für p mit $p_0 \leq p \leq p_1$ wohl, wenn es solche Bögen gibt¹⁵). Falls keine Bögen β existieren, so sei $g_1 \equiv g_0$. In jedem Falle gibt es dann auf g_1 mindestens einen Punkt $w_1 = u_1 + iv_1$ von C' , so daß für einen passenden Punkt $w_0 = u_0 + iv_0$ von C' auf g_0 wegen (20)

$$(23) \quad |v_1 - v_0| \leq m + \vartheta$$

ist. Da für g_0 (19) gilt, ist weiter

$$(24) \quad |v - v_1| \leq m + \vartheta + \delta.$$

Wegen (23) ist $p_1 - p_0 \leq m + \vartheta + 2(a + \varepsilon) \cotg \eta$ und daher ist der u -Achsenabschnitt von g_1 , nämlich $a + 2\varepsilon + (p_1 - p_0) \operatorname{tg} \eta \leq a + 2\varepsilon + (m + \vartheta + 2(a + \varepsilon) \cotg \eta) \operatorname{tg} \eta < 3(a + 2\varepsilon)$ wegen (21).

Zeichnet man nun die Gerade $L \parallel g_1$ mit $p > p_1$ aber genügend nahe an p_1 , so ist der u -Achsenabschnitt von L noch $\leq 3(a + 2\varepsilon)$,

¹⁵) p_1 ist also die obere Grenze aller p , für welche die Gerade g mit dem Achsenabschnitt p noch Bögen β trifft. g_1 gehört selber noch zu der Menge dieser Geraden.

und es gibt ferner, wie leicht zu sehen, auf g_1 und auf L je einen Schnittpunkt $w'_1 = u'_1 + iv'_1$ bzw. $W^* = U^* + iV^*$ mit C' , so daß auch

$$|v'_1 - V^*| \leq \delta$$

gilt. Da für g_1 (19) gilt, folgt daraus weiter

$$|V^* - v_1| \leq |V^* - v'_1| + |v'_1 - v_1| \leq 2\delta$$

und wegen (24)

$$|v - V^*| \leq m + \vartheta + 3\delta.$$

Ist nun $w^* = u^* + iv^*$ ein beliebiger Schnittpunkt von C' und L , so gilt für w^* und W^* (19) (anstelle w_1, w_2), daher folgt hieraus (22). Ferner ist offenbar auch die zweite der obigen Behauptungen erfüllt. — Hiermit haben wir die Voraussetzungen über Unbewalltheits- und Krümmungseigenschaften völlig ausgenutzt; wir brauchen für das folgende nur noch die oben formulierte Behauptung über L .

Sei nun H die Halbebene rechts von L . Durchläuft man C' von $-\infty$ nach $+\infty$, so möge man zuerst auf den Schnittpunkt w_1 mit L stoßen; der hierbei bis w_1 durchlaufene Bogen c liegt *außerhalb* H . Der Teilbogen $-\infty \dots w$ von c werde mit b bezeichnet.

Durchläuft man andererseits L von $+\infty$ nach $-\infty$, so möge man zuerst auf den Schnittpunkt $w_2 = u_2 + iv_2$ mit C' stoßen; die dabei bis w_2 durchlaufene Halbgerade liegt *außerhalb* G' . Die komplementäre Halbgerade werde mit l bezeichnet. Dann gilt für ω aus G' und H nach Hilfssatz 1 ($\Gamma \equiv C'$, $B \equiv L$, $\gamma \equiv c$, $\beta' \equiv l$)

$$(25) \quad m_{C', \omega} b \leq m_{C', \omega} c \leq m_{L, \omega} l.$$

Ferner sei noch angemerkt, daß wegen (22) gilt:

$$(26) \quad |v - v_2| \leq m + \vartheta + 4\delta.$$

Es sei nun $z = iy$ der Originalpunkt von w bei der Abbildung $w(z)$ von $x > 0$ auf G' . Wir wählen $\omega = \alpha + i\beta$ so, daß sein Originalpunkt $z = \zeta$ reell und ferner $\zeta = y$ ist; der Winkel $(z, \zeta, 0)$ ist also $\frac{\pi}{4}$. Nach Hilfssatz 2 ist somit

$$m_{C', \omega} b = \pi + \frac{\pi}{2}.$$

ω liegt auch in H , wenn nur w genügend „hoch“ angenommen ist, was wir voraussetzen wollen. Denn da $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ist, befindet sich $\omega = \alpha + i\beta$ schließlich innerhalb eines beliebig schmalen

Winkelraumes mit O als Scheitelpunkt und der reellen Achse als Mittellinie beliebig weit entfernt von O , während L die u -Achse im Abstand $\leq 3(a+2\varepsilon)$ von O trifft und eine beliebig große Steigung hat, wenn nur $|w|$ groß genug ist.

Es sei φ der Winkel $(w_2, \omega, i\beta)$, $\varphi \geq 0$ für $v_2 \geq \beta$; man sieht übrigens leicht, daß hier auf die Dauer $v_2 > \beta$, also $\varphi > 0$ ist. Fällt man von ω auf L das Lot, so erkennt man nach Hilfssatz 2

$$m_{L,\omega} l = \pi + 2(\varphi + \eta) \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi + \eta < \frac{\pi}{2}\right).$$

Also ist nach (25)

$$\varphi + \eta \geq \frac{\pi}{4}, \quad \varphi \geq \frac{\pi}{4} - \eta, \quad \operatorname{tg} \varphi \geq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \eta\right)$$

oder

$$\frac{v_2 - \beta}{\alpha - u_2} \geq \frac{1 - \operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \eta} = 1 - \frac{2 \operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \eta},$$

$$v_2 - \beta \geq \alpha - u_2 - (\alpha - u_2) \frac{2 \operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \eta},$$

oder wegen $y = \zeta$

$$v_2 - y - \beta \geq \alpha - \zeta - u_2 - (\alpha - u_2) \frac{2 \operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \eta}.$$

Nun ist

$$(27) \quad |u_2| \leq a + \varepsilon, \quad 2|u_2| \frac{\operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \eta} \leq 2(a + \varepsilon) \operatorname{tg} \eta$$

und bei genügend großem $|w|$

$$(28) \quad \alpha \operatorname{tg} \eta = v \operatorname{tg} \eta \cdot \frac{\alpha}{\zeta} \frac{\zeta}{y} \frac{y}{v} \leq v \operatorname{tg} \eta (1 + \vartheta) \leq 2(a + 2\varepsilon)(1 + \vartheta)$$

wegen $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\zeta} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{y}{v} = 1$. ϑ ist die oben vorgegebene Zahl.

Daher ist wegen $\alpha = u(\zeta) = \Re w(\zeta)$, (26), (27), (28)

$$v - y - \beta \geq u(\zeta) - \zeta - (a + \varepsilon) - 4(a + 2\varepsilon)(1 + \vartheta) - 2(a + \varepsilon) \operatorname{tg} \eta - (m + \vartheta + 4\delta).$$

Beachtet man nun noch, daß sogar bei allseitiger Annäherung hier

$$(29) \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} |u(z) - x| \leq a$$

gilt — wir tragen den Beweis hierfür in Hilfssatz 3 unten nach — so folgt hieraus

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} (v - y - \beta) \geq - (6a + 9\varepsilon)(1 + \vartheta) - (m + \vartheta + 4\delta),$$

also, da die linke Seite von ϑ unabhängig ist, mit $\vartheta \downarrow 0$

$$(30) \quad \lim_{v \rightarrow +\infty} (v - y - \beta) \geq -6(a + 2\varepsilon) - (m + 4\delta).$$

3. Die Abschätzung nach oben bei C' . Zunächst bemerke man wieder, daß es wegen der Krümmungsbedingung ein $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon) > 0$ gibt mit der Eigenschaft: Legt man durch einen Punkt der u -Achse mit $u \leq -(a + 2\varepsilon)$ eine Gerade, welche die positive v -Achse unter einem Winkel η , $0 < \eta < \eta_0$ schneidet, so gilt für irgend zwei Schnittpunkte w_1, w_2 dieser Geraden mit C' (19).

Hieraus und aus der Voraussetzung 2 zeigt man wie oben: Zu jedem genügend „hoch“ gelegenen w auf C' gibt es eine Gerade L durch einen Punkt der u -Achse mit $-3(a + 2\varepsilon) \leq u \leq -(a + 2\varepsilon)$, welche die positive v -Achse unter einem Winkel η mit $0 < \eta < \eta_0$ schneidet, derart, daß für einen beliebigen Schnittpunkt $w^* = u^* + iv^*$ von L und C'

$$(31) \quad |v^* - v| \leq m + \vartheta + 4\delta$$

ist, und ferner bei der Durchlaufung von C' von $+\infty$ nach $-\infty$ vor allen Schnittpunkten von C' mit L angetroffen wird.

Sei nun H die Halbebene rechts von L . Durchläuft man L von $-\infty$ nach $+\infty$, so möge man zuerst auf den Schnittpunkt w_1 mit C' stoßen; die dabei bis w_1 durchlaufene Halbgerade l liegt außerhalb G' . Durchläuft man andererseits C' von $+\infty$ nach $-\infty$, so möge man zuerst den Schnittpunkt w_2 von L mit C' antreffen; der hierbei durchlaufene Bogen von C' liegt außerhalb H . Sein Komplementärbogen werde c , der c umfassende Bogen $-\infty \dots w$ werde b genannt. Für ω aus G' und H gilt nach Hilfssatz 1 ($\Gamma \equiv L$, $B \equiv C'$, $\gamma \equiv l$, $\beta' \equiv c$)

$$(32) \quad m_{L, \omega} l \leq m_{C', \omega} c \leq m_{C', \omega} b.$$

Ferner ist wegen (31)

$$(33) \quad |v - v_1| \leq m + \vartheta + 4\delta.$$

Bei der oben getroffenen Wahl von $\omega = \alpha + i\beta = w(\zeta)$, $\zeta = y$, ist

$$m_{C', \omega} b = \pi + \frac{\pi}{2}.$$

ω gehört auch der jetzt mit H bezeichneten Halbebene an, wenn nur $|w|$ genügend groß ist. Wir bezeichnen jetzt mit φ den Winkel $(w_1, \omega, i\beta)$, $\varphi \geq 0$ für $v_1 \geq \beta$. Man sieht wieder leicht, daß auf die Dauer $\varphi > 0$ ist. Fällt man von ω das Lot auf L , so sieht man

$$m_{L, \omega} l = \pi + 2(\varphi - \eta) \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Also folgt aus (32)

$$\varphi - \eta \leq \frac{\pi}{4}, \quad \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \eta, \quad \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{1 + \operatorname{tg} \eta}{1 - \operatorname{tg} \eta}, \quad \frac{v_1 - \beta}{\alpha - u_1} \leq 1 + \frac{2 \operatorname{tg} \eta}{1 - \operatorname{tg} \eta},$$

$$v_1 - \beta \leq \alpha - u_1 + (\alpha - u_1) \frac{2 \operatorname{tg} \eta}{1 - \operatorname{tg} \eta},$$

oder wegen $\zeta = y$, $\alpha = u(\zeta)$

$$v_1 - y - \beta \leq u(\zeta) - \zeta - u_1 + (\alpha - u_1) \frac{2 \operatorname{tg} \eta}{1 - \operatorname{tg} \eta},$$

und hieraus folgt ähnlich wie oben wegen (29) und (33)

$$(34) \quad \overline{\lim}_{v \rightarrow +\infty} (v - y - \beta) \leq 6(a + 2\varepsilon) + m + 4\delta.$$

Somit gilt nach (30), (34) und (29), $w(iy) = u + iv$,

$$(35) \quad \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} |w(iy) - iy - (w(\zeta) - \zeta)| \leq \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} |v - y - \beta|$$

$$+ \overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} |u(iy)| + \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow \infty} |u(\zeta) - \zeta| \leq 8(a + 2\varepsilon) + m + 4\delta,$$

und dasselbe Resultat gilt für $y \rightarrow -\infty$. Damit ist die Behauptung für die Kurve C' bewiesen.

4. Übergang von C' nach C . Nennen wir für den Moment die Abbildungsfunktion von $x > 0$ auf das von C berandete Gebiet G $W(z)$ ($W'(\infty) = 1$), so ist nach dem Hilfssatz 5, den wir unten (§ 6) nachtragen,

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} |W(iy) - iy - (W(r) - r)| = \overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} |w(iy) - iy - (w(r) - r)|,$$

also auch wegen (35)

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} |W(iy) - iy - (W(r) - r)| \leq 8(a + 2\varepsilon) + m + 4\delta.$$

Hier ist aber die linke Seite von ε unabhängig und daher folgt mit $\varepsilon \downarrow 0$ die Behauptung.

Beweis des Zusatzes ¹⁶⁾. Wir bilden die in $\left\{ |z| = r > 0, 0 < \operatorname{arc} z < \frac{\pi}{2} \right\}$ reguläre und in $\left\{ r \geq 0, 0 \leq \operatorname{arc} z \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ stetige Funktion $f(z) = w(z) - z - (w(-iz) + iz)$. Nach Satz III ist auf den Rändern des ersten Quadranten

$$(36) \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} |f(z)| \leq 8a + m + 4\delta.$$

Ferner hat $f(z)$ für $(x > 0, y > 0)$ beschränkten Realteil. Daraus folgt, daß (36) auch für beliebige Annäherung aus dem Innern

¹⁶⁾ Vgl. den Beweis von Satz II und ¹¹⁾.

des ersten Quadranten gilt, oder m. a. W.: Ist $z = iz'$ oder $z = -iz'$ und liegen z und z' in $x > 0$, so gilt bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$

$$|w(z) - z - (w(z') - z')| \leq 8a + m + 4\delta + \varepsilon$$

für alle $|z| = |z'| \geq R(\varepsilon)$. Nun liegt aber entweder z oder z' in $|\operatorname{arc} z| \leq \frac{\pi}{4}$, sagen wir z' . Dann ist, $|z| = r$ gesetzt,

$$\begin{aligned} |w(z) - z - (w(r) - r)| &\leq |w(z) - z - (w(z') - z')| \\ &\quad + |w(z') - z' - (w(r) - r)|, \end{aligned}$$

und da nach dem unten (§ 6) nachgetragenen Hilfssatz 4 der zweite Ausdruck rechts $\leq a + \varepsilon$ für $|z'| = r > R_1(\varepsilon) \geq R(\varepsilon)$ ist, so folgt hieraus für $|z| > R_1(\varepsilon)$

$$|w(z) - z - (w(r) - r)| \leq 9a + m + 4\delta + 2\varepsilon, \text{ q. e. d.}$$

§ 6. Hilfssätze zum Beweis von Satz III.

Hilfssatz 3. *Es sei $u(z) = u(x + iy)$ eine in $x > 0$ harmonische, in $x \geq 0$ stetige Funktion mit $u(z) \geq -c$ für $x > 0$ und $\overline{\lim}_{|y| \rightarrow \infty} |u(iy)| \leq a$ ($c \geq 0, a \geq 0$). Ist der dann stets vorhandene*

$\lim_{x \uparrow \infty} \frac{u(x)}{x} = \lambda$, so gilt allseitig

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} |u(z) - \lambda x| \leq a.$$

Beweis. Wegen $u(z) \geq -c$ gilt die Darstellung durch das Stieltjes-Poissonsche Integral für $x > 0$

$$u(z) = \lambda x + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x d\psi(t)}{x^2 + (y-t)^2} + k \quad (k \geq 0, \text{ Konstante}),$$

wobei wegen der Stetigkeit von $u(z)$ für $x \geq 0$ $\psi(t) = \int_0^t u(iy) dy$ gewählt werden kann¹⁷⁾. Daher gilt

$$(37) \quad u(z) - \lambda x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x u(it)}{x^2 + (y-t)^2} dt + k.$$

Hieraus folgt in bekannter Weise, daß wegen $\overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} |u(iy)| \leq a$ allseitig $\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} |u(z) - \lambda x - k| \leq a$ ist; also ist $u(z) - \lambda x$ in $x > 0$ beschränkt. Als beschränkte harmonische Funktion wird sie aber durch das Poissonsche Integral mit ihren Randwerten $u(iy)$ dargestellt, also ist in (37) $k = 0$ und $\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} |u(z) - \lambda x| \leq a$.

¹⁷⁾ Siehe z.B. J. WOLFF und F. DE KOK, Les fonctions holomorphes à partie réelle positive et l'intégrale de Stieltjes [Bull. Soc. Math. 56 (1932), 225].

Hilfssatz 4. Es sei $w(z) = u + iv$ für $x > 0$ regulär, $u(z)$ für $x \geq 0$ stetig und $\geq -c$ und $\overline{\lim}_{|y| \rightarrow \infty} |u(iy)| \leq a$. ($c \geq 0, a \geq 0$.) Ist der dann sicher vorhandene $\lim_{r \uparrow \infty} \frac{w(r)}{r} = \lambda$, so gilt für $|\operatorname{arc} z| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ und $r > 0$ mit $||z| - r| \leq b = \text{const}$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} |w(z) - \lambda z - (w(r) - \lambda r)| \leq a \operatorname{tg} \alpha.$$

Beweis. Für $h(z) = w(z) - \lambda z$ gilt die Darstellung ¹⁷⁾, $x > 0$,

$$h(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - it} + \frac{1}{1 + it} \right) u(it) dt + \text{const},$$

also ist

$$h(z) - h(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - it} - \frac{1}{r - it} \right) u(it) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(r - z)u(it)}{(z - it)(r - it)} dt,$$

daher, $z = \varrho e^{i\varphi}$ gesetzt, $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$,

$$|h(z) - h(r)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|r - \varrho| |u(it)|}{|z - it| |r - it|} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho |e^{i\varphi} - 1| |u(it)|}{|z - it| |r - it|} dt = I_1 + I_2.$$

Nun ist $\lim_{\varrho \uparrow \infty} I_1 = 0$. Denn zunächst ist bei passendem M $|u(iy)| \leq M$, und daher gilt

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{Mb}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{x^2 + (y-t)^2} \sqrt{r^2 + t^2}} = \frac{Mb}{\pi \sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + (y-t)^2} \sqrt{r^2 + t^2}} dt \\ &\leq \frac{Mb}{\pi \sqrt{x}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dt}{x^2 + (y-t)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^2 + t^2}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

Jetzt schätzen wir I_2 ab. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon)$ so bestimmt, daß $|u(it)| \leq a + \varepsilon$ für $|t| \geq \tau_0$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varrho \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| |u(it)|}{\sqrt{x^2 + (y-t)^2} \sqrt{r^2 + t^2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} + \frac{1}{\pi} \int_{\tau_0}^{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\tau_0} \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \frac{2\varrho r \left(1 + \frac{b}{r}\right)}{\sqrt{r^2 + t^2} \sqrt{x^2 + (y-t)^2}} dt + \frac{(a + \varepsilon)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varrho \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| dt}{\sqrt{x^2 + (y-t)^2} \sqrt{r^2 + t^2}}. \end{aligned}$$

Das erste dieser Integrale ist für genügend großes $\varrho = |z|$ bereits $\leq \frac{C_{\tau_0}}{\varrho}$. Zur Abschätzung des zweiten beachte man, daß für $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$2 \sin \frac{\varphi}{2} \leq \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\cos \varphi}$$

ist; diese Ungleichung ist nämlich äquivalent mit

$$\frac{2}{\cos \varphi} \leq 2 + \operatorname{tg}^2 \varphi \text{ oder } 2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \leq 1 + (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi).$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{C_{\tau_0}}{\varrho} + \frac{(a+\varepsilon) \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \frac{b}{r}}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r^2+t^2}} \frac{\sqrt{\varrho \cos \varphi}}{\sqrt{x^2+(y-t)^2}} dt \\ &\leq \frac{C_{\tau_0}}{\varrho} + \frac{(a+\varepsilon) \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 + \frac{b}{r}}}{\pi} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{r^2+t^2} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+(y-t)^2} dt} \\ &= \frac{C_{\tau_0}}{\varrho} + (a+\varepsilon) \operatorname{tg} \alpha \cdot \sqrt{1 + \frac{b}{r}}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Hilfssatz 5. Γ_1, Γ_2 seien geschlossene Jordankurven in der w -Ebene durch $w = \infty$, die außerhalb eines gewissen Kreises um O miteinander zusammenfallen und in $w = \infty$ die v -Achse zur Tangente haben. Darüber hinaus möge das gemeinsame Stück im Streifen $-\alpha \leq u \leq \alpha$ verlaufen. G_1, G_2 seien die rechts von Γ_1 bzw. Γ_2 gelegenen Gebiete.

Bilden dann $W_1(z)$ resp. $W_2(z)$ $z = x + iy, x > 0$ so auf G_1 bzw. G_2 ab, daß $z = \infty$ $w = \infty$ entspricht und $\lim_{x \uparrow \infty} \frac{W_1(x)}{x} = \lim_{x \uparrow \infty} \frac{W_2(x)}{x} = \lambda$ ist, so haben für $|y| = r \rightarrow \infty$

$W_1(iy) - \lambda iy - (W_1(r) - \lambda r)$ und $W_2(iy) - \lambda iy - (W_2(r) - \lambda r)$ dieselben Häufungswerte.

Zum **Beweis** darf man annehmen, daß G_1 Teilgebiet von G_2 ist, da man sonst G_1 und G_2 mit einem dritten in beiden gelegenen Gebiet vergleichen kann.

Die zu $W_2(z)$ inverse Funktion bildet G_1 auf ein Teilgebiet D_1 einer Halbebene $\Re \zeta > 0$ ab, dessen Randkurve außerhalb eines genügend großen Kreises um $\zeta = 0$ die imaginäre Achse ist. Bildet man nun $x > 0$ mittels $\zeta = g(z)$ so auf D_1 konform ab, daß $z = \infty$ $\zeta = \infty$ entspricht, so ist $g(z)$ in der Umgebung von

$z = \infty$ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip noch regulär und hat dort bei passender Normierung die Entwicklung

$$g(z) = z + ia + \frac{a_1}{z} + \dots, \quad a \text{ reell.}$$

Offenbar ist bei dieser Normierung $W_1(z) = W_2(g(z))$, also, $|y| = r$,

$$\begin{aligned} & W_1(iy) - \lambda iy - (W_1(r) - \lambda r) \\ (38) \quad & = \left[W_2(g(iy)) - \lambda g(iy) - \{W_2(g(r)) - \lambda g(r)\} \right] \\ & + \lambda \{g(iy) - iy\} - \lambda \{g(r) - r\}. \end{aligned}$$

Da allseitig $\lim_{z \rightarrow \infty} (g(z) - z) = ia$ gilt, so hat hier die linke Seite bei $y \rightarrow \pm \infty$ dieselben Häufungswerte wie der in den eckigen Klammern rechts stehende Ausdruck. Sei nun (bei genügend großem $|y| = r$) $i\eta = g(iy)$; y und η haben dasselbe Vorzeichen. Wir bilden

$$\Delta \equiv W_2(g(r)) - \lambda g(r) - (W_2(|\eta|) - \lambda |\eta|) \quad (i\eta = g(iy), |y| = r).$$

Aus $\lim_{r \uparrow \infty} (g(r) - r) = ia$ folgt $\lim_{r \uparrow \infty} (|g(r)| - r) = 0$ und daher für $|y| = r$

$$(39) \quad \overline{\lim}_{r \uparrow \infty} \left| |g(r)| - |\eta| \right| \leq \lim_{r \uparrow \infty} \left| |g(r)| - r \right| + \lim_{|y| \rightarrow \infty} |y - \eta| = |a|.$$

Wegen (39) und $\lim_{r \uparrow \infty} \text{arc } g(r) = 0$ ist somit nach Hilfsatz 4, angewandt auf $W_2(z)$, $\lim_{r \uparrow \infty} \Delta = 0$. Mit Rücksicht auf (38) haben daher

$$W_1(iy) - \lambda iy - (W_1(r) - \lambda r) \quad \text{und} \quad W_2(i\eta) - \lambda i\eta - (W_2(|\eta|) - \lambda |\eta|)$$

bei $y \rightarrow \pm \infty$ dieselben Häufungswerte.

§ 7. Existenz des $\lim_{z \rightarrow \infty} (w(z) - z)$.

Satz IV. *C sei eine geschlossene Jordankurve durch $w = \infty$ mit den folgenden weiteren Eigenschaften:*

1. *Es gibt eine Parameterdarstellung von C*
 $w = W(t) = U(t) + iV(t)$, $-\infty < t < \infty$, mit $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} (W(t) - it) = 0$.

2. *Ist für $t > 0$*

$$\varphi(t) = \text{Max}_{\tau \geq t} |U(\tau) - U(-\tau)|,$$

so konvergiert

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

3. C genügt in $w = \infty$ beiderseitig der Krümmungsbedingung mit dem „Krümmungsmaß“ 0 für jedes $\delta > 0$ ¹⁸⁾.

Bildet dann $w(z) = u + iv$, $z = x + iy$, $x > 0$ auf das Gebiet G rechts von C so ab, daß $z = \infty$ $w = \infty$ entspricht und $w'(\infty) = 1$ ist, so ist $\lim_{z \rightarrow \infty} (w(z) - z)$ bei allseitiger Annäherung vorhanden (und endlich). Ferner konvergiert

$$(40) \quad \int_1^{\infty} \frac{\psi(y)}{y} dy, \quad \psi(y) = \text{Max}_{\eta \geq y} |u(i\eta) - u(-i\eta)|. \quad 19)$$

Beweis. Da C die v -Achse zur Asymptote hat und ferner $\lim_{x \uparrow \infty} \frac{w(x)}{x} = 1$ ist, so folgt aus Hilfssatz 3, daß bei allseitiger Annäherung

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (u(z) - x) = 0$$

ist. In Verbindung mit der noch zu beweisenden Konvergenz von (40) folgt dann nach Fatou ²⁰⁾, daß $\lim_{x \uparrow \infty} (w(x) - x)$ existiert und endlich ist. Da nun unter unseren Voraussetzungen der Zusatz zum Satz III mit $a = m = 0$ und beliebigem $\delta > 0$ angewendet werden kann, so ergibt sich daraus weiter, daß auch bei beliebiger allseitiger Annäherung $\lim_{z \rightarrow \infty} (w(z) - z)$ vorhanden und endlich ist.

Für den Nachweis der Konvergenz von (40) schicken wir die folgende Bemerkung voraus. Da C für ein passendes $b > 0$ zwischen den Geraden $u = b$ und $u = -b$ verläuft, so folgt bekanntlich für jedes feste α mit $0 < \alpha < 1$

$$w(x) - x = o(x^\alpha) \quad \text{bei } x \uparrow \infty \quad 21).$$

Daraus ergibt sich nach Satz III wie eben, daß auch $w(iy) - iy = o(|y|^\alpha)$ bei $y \rightarrow \pm \infty$, also auch

$$(41) \quad v(iy) - iy = o(|y|^\alpha) \quad \text{bei } |y| \rightarrow \infty$$

gilt. Sei nun für $|y| \geq A$ für irgend ein $A \geq 1$

$$(42) \quad |y| + 1 \leq |y'| \leq |y| + \lambda |y|^\alpha, \quad \lambda \text{ Konstante, } \text{sign } y = \text{sign } y'.$$

¹⁸⁾ Diese Forderung läßt sich als eine Bedingung für die Parameterdarstellung formulieren (vgl. den Schluß von § 2).

¹⁹⁾ Aus dem Beweis ergibt sich gleichzeitig, daß die Tatsache der Konvergenz von $\int_1^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$ unabhängig von der Wahl des Parameters t in $W(t)$ ist,

wenn er nur den Bedingungen 1) und 3) genügt.

²⁰⁾ P. FATOU [Acta Math. 30 (1905), 360].

²¹⁾ Vgl. A. VAN HASELEN, Sur la représentation conforme [Proceedings Acad. Amsterdam 35 (1932), 867]. Es gilt sogar genauer $w(x) - x = O(\log x)$ bei $x \uparrow \infty$.

Dann gilt wegen der Voraussetzung 3 mit einem passenden k_1

$$|u(iy') - u(iy)| \leq k_1 \frac{|v(iy') - v(iy)|}{|v(y)|},$$

für genügend große $|y|$ und wegen $v(iy) \sim y$ und $v(iy') - v(iy) = y' - y + o(|y|^\alpha)$ folgt daraus für ein geeignetes k

$$(43) \quad |u(iy') - u(iy)| \leq k |y|^{-\alpha}, \quad y, y' \text{ aus (42)}.$$

Jetzt beweisen wir die Konvergenz von (40). Durch die beiden Darstellungen $w = W(t)$ und $w = w(iy)$ erhält man t und y als monotone und stetige Funktionen voneinander. Wegen $W(it) \sim ti$, $w(iy) \sim iy$ gilt auch $t \sim y$ bei $|y| \rightarrow \infty$. Es sei $t = t(y)$ der y entsprechende Wert t und $-\bar{y}$ derjenige Wert von y , der $-t(y)$ korrespondiert, also $t(-\bar{y}) = -t(y)$. Dann ist für $y \geq 1$, $\eta = y + y^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$)

$$(44) \quad |u(iy) - u(-iy)| \leq |u(iy) - u(i\eta)| + |u(i\eta) - u(-i\bar{\eta})| + |u(-i\bar{\eta}) - u(-iy)|.$$

Hier ist nun, $t(\eta) = \tau$ gesetzt (also $t(-\bar{\eta}) = -\tau$),

$$|u(i\eta) - u(-i\bar{\eta})| = |U(\tau) - U(-\tau)| \leq \varphi(\tau) \leq \varphi(\gamma y)$$

für ein passendes $\gamma > 0$ wegen $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\tau}{y} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\eta} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\eta}{y} = 1$ und der Monotonie von $\varphi(t)$.

Der erste Summand in (44) rechts ist wegen $\eta = y + y^\alpha$ nach (43) $\leq \text{konst. } y^{-\alpha}$. Dasselbe gilt auch für den dritten Summanden, wenn wir nur zeigen, daß auf die Dauer für ein passendes $\lambda \geq 1$ $y + 1 \leq \bar{\eta} \leq y + \lambda y^\alpha$ bleibt. Dies folgt nun so: Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} (V(t) - t) = 0$ und (41) ist bei $y \rightarrow \infty$

$$t(\eta) - \eta = (t(\eta) - v(i\eta)) + (v(i\eta) - \eta) = o(\eta^\alpha) = o(y^\alpha)$$

und analog

$$t(-\bar{\eta}) + \bar{\eta} = o(\bar{\eta}^\alpha) = o(\{t(\eta)\}^\alpha) = o(\eta^\alpha) = o(y^\alpha),$$

daher

$$\bar{\eta} - \eta = o(y^\alpha), \text{ also } \bar{\eta} - y = \eta - y + o(y^\alpha) = y^\alpha + o(y^\alpha),$$

wie behauptet.

Wir haben somit für alle y von einer Stelle ab

$$|u(iy) - u(-iy)| \leq \varphi(\gamma y) + \text{const} \cdot y^{-\alpha}$$

also auch

$$\psi(y) = \text{Max}_{\eta \geq y} |u(i\eta) - u(-i\eta)| \leq \varphi(\gamma y) + \text{const} \cdot y^{-\alpha},$$

woraus sich die Konvergenz von (40) ergibt.

ANHANG. ²²⁾

Die Behauptung des Satzes I bleibt unverändert, wenn ω in einem Winkel $|\operatorname{arc} w| \leq \Theta < \frac{\pi}{2}$ anstatt nur auf der Kurve L angenommen wird, und zwar läßt sich diese allgemeinere Behauptung aus der von Satz I folgern. Hierin liegt eine Verschärfung des früheren Resultats l.c. ¹⁾, in dem bei $\frac{1}{\varkappa}$ und \varkappa die Faktoren $\cos^2 \Theta$ und $\frac{1}{\cos^2 \Theta}$ auftreten. Diese Verschärfung verdanke ich einer Mitteilung von Herrn Ostrowski, der sie auch in seiner demnächst in den Acta Mathematica erscheinenden Abhandlung (Über den Habitus der konformen Abbildung am Rande des Abbildungsbereiches) aus der speziellen Fassung für $\Theta = 0$ herleitet. Eine andere Herleitung der obigen Behauptung aus Satz I ergibt sich auch aus Nr. 6 der Arbeit von Herrn Wolff l.c. ²⁾. Das allgemeinere Resultat kann jedoch auch durch eine Modifikation unseres Beweises von Satz I direkt gewonnen werden, wie wir hier noch kurz angeben möchten.

Der erste Teil des Beweises bleibt bis zu (10) einschließlich derselbe bis auf die selbstverständliche Änderung, daß ω in $|\operatorname{arc} w| \leq \Theta$ und G anstatt auf L gewählt wird und die Worte „auf L “ durch „in $|\operatorname{arc} w| \leq \Theta$ und G “ zu ersetzen sind. Von (10) ab werde der Beweis so fortgesetzt:

Es ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_2 - \beta}{\alpha - u_2} = \frac{v_2}{\alpha} \frac{1}{1 - \frac{u_2}{\alpha}} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{1 - \frac{u_2}{\alpha}}.$$

Nun ist wegen $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{u_2}{w_2} = 0$, $\left| \frac{\omega}{\alpha} \right| = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc} \omega)} \leq \frac{1}{\cos \Theta}$ und (7)

$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{u_2}{\alpha} = 0$. Daher gilt für genügend großes $|w|$ wegen (7) und $v_2 > 0$

$$(*) \quad 0 \leq \frac{v_2}{\alpha} \frac{1}{1 - \frac{u_2}{\alpha}} \leq \left| \frac{w}{\omega} \right| \frac{\varkappa(1 + 7\varepsilon)^3}{\left(1 - \frac{u_2}{\alpha}\right) \cos(\operatorname{arc} \omega)} \leq \left| \frac{w}{\omega} \right| \frac{\varkappa(1 + 8\varepsilon)^3}{\cos(\operatorname{arc} \omega)},$$

somit

$$|\operatorname{tg} \varphi| \leq \frac{1}{\cos \Theta} 125c_2\varkappa + 2 \operatorname{tg} \Theta \equiv K.$$

²²⁾ (Eingegangen den 10. September 1934).

Wir denken uns η so klein angenommen, daß $K \cdot \operatorname{tg} \eta < 1$ ist. Dann folgt aus (10) und (*)

$$\begin{aligned} \left[\left| \frac{w}{\omega} \right| \frac{\kappa(1+8\varepsilon)^3}{\cos(\operatorname{arc} \omega)} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{1 - \frac{u_2}{\alpha}} + \operatorname{tg} \eta \right] \frac{1}{1 - K \operatorname{tg} \eta} &\geq \\ &\geq \left| \frac{z(w)}{z(\omega)} \right| \frac{1}{\cos(\operatorname{arc} \zeta)} - \frac{\tau}{\xi} \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \left[\kappa(1+8\varepsilon)^3 + \left| \frac{\omega}{w} \right| \operatorname{tg} \eta \right] \frac{1}{1 - K \operatorname{tg} \eta} &\geq \left| \frac{z(w)}{z(\omega)} \frac{\omega}{w} \right| \frac{\cos(\operatorname{arc} \omega)}{\cos(\operatorname{arc} \zeta)} + \\ &+ \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\tau}{\xi} \right) \left| \frac{\omega}{w} \right| \cos(\operatorname{arc} \omega) + \\ &+ \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{u_2}{\alpha}\right)(1 - K \operatorname{tg} \eta)} - 1 \right] \left| \frac{\omega}{w} \right| \cos(\operatorname{arc} \omega). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\tau}{\xi} &= \operatorname{tg}(\operatorname{arc} \omega) - \operatorname{tg}(\operatorname{arc} \zeta) = \\ &= \operatorname{tg} \left(\operatorname{arc} \frac{\omega}{\zeta} \right) [1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arc} \omega) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arc} \zeta)], \end{aligned}$$

und da wegen der Winkeltreue der Abbildung $z = z(w)$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \frac{\omega}{\zeta} = 0$ ist und $|\operatorname{arc} \omega| \leq \Theta$ und daher auch $\overline{\lim}_{\omega \rightarrow \infty} |\operatorname{arc} \zeta| \leq \Theta$ bleibt, so folgt $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\tau}{\xi} \right) = 0$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\cos(\operatorname{arc} \omega)}{\cos(\operatorname{arc} \zeta)} = 1$, und somit

$$\overline{\lim}_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{z(w)}{w} \frac{\omega}{z(\omega)} \right| \leq \left[\kappa(1+8\varepsilon)^3 + \frac{1}{c_1} \operatorname{tg} \eta + \frac{1}{c_1} K \operatorname{tg} \eta \operatorname{tg} \Theta \right] \frac{1}{1 - K \operatorname{tg} \eta}.$$

Hier kann man nun zuerst den Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ bei festem η und dann $\eta \downarrow 0$ ausführen. — Die entsprechende Abänderung des zweiten Teiles des Beweises, die hinter (14) einzusetzen hätte, ist ganz analog.

(Eingegangen den 13. Januar 1934. Abgeändert eingegangen den 28. Dezember 1934.)