COMPOSITIO MATHEMATICA

HENRI MILLOUX

Sur les valeurs asymptotiques des fonctions entières d'ordre infini

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 305-313
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__305_0>

Sur les valeurs asymptotiques des fonctions entières d'ordre infini

par

Henri Milloux

Bordeaux

---

1. On sait qu'une fonction entière d'ordre fini ϱ a au plus 2ϱ valeurs asymptotiques finies et différentes. Cette importante propriété, énoncée par M. Denjoy, a été déduite par M. Ahlfors, dans sa thèse, dc l'étude de la représentation conforme des bandes. M. Carleman avait, entre temps, établi que le nombre des valeurs asymptotiques d'une telle fonction est au plus égal à $k\varrho$, k étant une constante numérique.

Que devient cette proposition pour les fonctions entières d'ordre infini? Certaines de ces fonctions admettent une infinité de valeurs asymptotiques; et, dans ce cas, l'ensemble des valeurs asymptotiques a nécessairement un ensemble dérivé, qui peut d'ailleurs comprendre l'infini, ou même ne comprendre que l'infini.

On constate alors qu'il est illusoire de parler de *valeurs asymptotiques finies et différentes*. D'où la nécessité d'introduire les différences des valeurs asymptotiques, de même que les modules de ces valeurs.

Dans l'étude qui va suivre, on fera dépendre ces différences et ces modules, ou, d'une façon plus précise, une borne inférieure des premières et une borne supérieure des seconds, d'une part du domaine du plan z dans lequel on étudie la fonction entière $f(z)$ (en l'espèce, l'interieur du cercle $|z| = R$), d'autre part du maximum $M(r, f)$ du module de la fonction sur le cercle $|z| = r$. La première borne pourra tendre vers 0, la deuxième vers l'infini, lorsque r augmente indéfiniment; le rapport $\frac{r}{R}$ est choisi à l'avance.

Considérons maintenant les chemins intérieurs à la couronne circulaire $r < |z| < R$, sur chacun desquels la fonction $f(z)$ est, pour $|z|$ assez grand, *voisine* d'une valeur a_i, les différences

$|a_i - a_j|$ et les modules $|a_i|$ étant limités comme il vient d'être dit. Après avoir défini et précisé le *voisinage* en question, toujours en fonction de r et de $M(r, f)$, nous obtiendrons une limite supérieure du nombre n de ces chemins, en fonction de R et de $M(R, f)$.

2. *Précisions sur un théorème de M. Lindelöf.* — Il s'agit du théorème suivant: *Si une fonction $\varphi(\zeta)$ est holomorphe et bornée dans une bande rectangulaire indéfinie, et si elle tend vers une valeur finie a sur l'un des côtés, et vers b sur l'autre côté, lorsque ζ s'éloigne indéfiniment dans le même sens sur les deux côtès, alors $a = b$.*

Ce théorème a été utilisé par M. Ahlfors dans sa démonstration du théorème de Denjoy. Nous allons le préciser, et démonter le

Lemme. — *Soit, dans le plan ζ un rectangle $ABCD$ de largeur $AB = 2l$ et de hauteur $AC = 2h$. On suppose $l \geqq h$ et on pose:*

$$h = l \operatorname{tg} \varphi, \qquad 2h = l \operatorname{tg} \theta.$$

Soit $\varphi(\zeta)$ une fonction holomorphe dans le rectangle, continue sur les côtés, et telle que:

$$|\varphi(\zeta)| \leqq K \text{ dans le rectangle,}$$
$$|\varphi(\zeta) - a| \leqq \varepsilon \text{ sur } AB,$$
$$|\varphi(\zeta) - b| \leqq \varepsilon \text{ sur } CD.$$

(On peut supposer $|a|$ et $|b|$ inférieurs à K.)

Alors on a l'inégalité

$$|a - b| < 4\varepsilon \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{\frac{\varphi}{\theta}}. \tag{1}$$

Démonstration. Soit O le centre du rectangle. E le milieu de CD. L'arc de cercle AEB est tout entier intérieur au rectangle.

La fonction harmonique

$$\operatorname{Arg} \frac{\zeta - \zeta(A)}{\zeta - \zeta(B)}$$

prend les valeurs: π sur la corde AB, et $\pi - 2\theta$ sur l'arc de cercle AEB.

D'autre part, la fonction harmonique $\log|\varphi(\zeta) - a|$ prend des valeurs inférieures à $\log 2K$ dans tout le rectangle, et en particulier sur l'arc de cercle AEB, et à $\log \varepsilon$ sur la corde AB.

On a donc, à l'intérieur de $ABEA$, une inégalité de la forme

$$\log|\varphi(\zeta) - a| < m \operatorname{Arg} \frac{\zeta - \zeta(A)}{\zeta - \zeta(B)} + n,$$

les constantes m et n étant choisies de telle sorte que la fonction harmonique du second membre prenne les valeurs: $\log \varepsilon$ sur la corde AB, et $\log 2K$ sur l'arc de cercle AEB.

On a donc:

$$\log \varepsilon = m\pi + n$$
$$\log 2K = m(\pi - 2\theta) + n.$$

D'où:

$$m = \frac{1}{2\theta}(\log \varepsilon - \log 2K)$$

$$n = \left(1 - \frac{\pi}{2\theta}\right)\log \varepsilon + \frac{\pi}{2\theta}\log 2K.$$

En particulier, au point 0 on a:

$$\log |\varphi(0) - a| < m(\pi - 2\varphi) + n.$$

Ou:

$$|\varphi(0) - a| < \varepsilon^{1-\frac{\varphi}{\theta}}[2K]^{\frac{\varphi}{\theta}} < 2\varepsilon\left[\frac{K}{\varepsilon}\right]^{\frac{\varphi}{\theta}}.$$

Une inégalité analogue a lieu limitant par la même expression la quantité $|\varphi(0) - b|$.

Ces deux inégalités ne peuvent être compatibles que si $|a - b|$ est inférieure au double du second nombre commun à ces deux inégalités, d'où le lemme.

Remarque.

$\frac{\varphi}{\theta}$ est évidemment inférieur à 1. Pour le carré, cas limite, l'expression $\frac{\varphi}{\theta}$ est égale à $\frac{\pi}{4\,\mathrm{Arctg}\,2}$ quantité voisine de 0,71 et pour le rectangle de côté AB infini, autre cas limite, $\frac{\varphi}{\theta}$ est égal à 0,5. Dans tous les cas, $\frac{\varphi}{\theta}$ est inférieur à $\frac{3}{4}$ et l'on peut écrire à fortiori l'inégalité

$$(1') \qquad |a - b| < h\varepsilon^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}}.$$

Autre Remarque.

L'examen du cas où le rectangle $ABCD$ est plus haut que large ($BC > AB$), inutile dans cette étude, ne présenterait aucune difficulté.

Il suffirait d'appliquer l'inégalité de Carleman à l'angle rectiligne AEB, pour en déduire une limitation de $|\varphi(0) - a|$, d'opérer d'une façon analogue pour obtenir une limitation de $|\varphi(0) - b|$ et de comparer les deux limitations obtenues.

3. Montrons que le lemme entraîne le théorème de Lindelöf cité au début du no. 2: découpons dans la bande rectangulaire indéfinie une suite de rectangles $ABCD$ satisfaisant aux conditions du lemme, des carrés par exemple, de plus en plus éloignés, de façon que ε tende vers zéro, d'après les conditions de Lindelöf, K restant fixe.

On constate que $|a-b|$ tend vers zéro.

4. J'utiliserai également dans la suite le théorème suivant que j'ai démontré dans un mémoire récent [1]):

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le domaine simplement connexe D, limité, d'une part par des arcs des circonférences de centre O et de rayons r_1 et r_2, d'autre part par des courbes A et B, chacune de ces courbes pouvant être composée de plusieurs arcs continus. On désigne par $t\theta(t)$ la somme des arcs de la circonférence de centre O et de rayon t intérieurs au domaine D; soit m_2 et m_1 deux quantités majorant les valeurs de $|f(z)|$, la première sur les arcs situés à la distance r_2 de l'origine, la deuxième sur le reste du contour de D. On suppose m_2 supérieur à m_1. Soit enfin $re^{i\theta}$ un point intérieur à D. Dans le cas ou $|f(re^{i\theta})|$ est supérieur â m_1, on a l'inégalité

$$\int_r^{r_2} \frac{dt}{t\,\theta(t)} < O(1) + \frac{1}{\pi} \log \frac{\log \dfrac{m_2}{m_1}}{\log \dfrac{|f(re^{i\theta})|}{m_1}}. \tag{2}$$

5. Soit maintenant $f(z)$ une fonction holomorphe dans la couronne circulaire

$$r_1 \leqq |z| \leqq r_2,$$

le rapport $\dfrac{r_2}{r_1}$ étant suffisamment grand (nous indiquerons dans le cours du raisonnement une quantité que doit dépasser ce rapport).

Nous supposerons qu'il existe, traversant cette couronne circulaire, n chemins L_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que sur L_i on a:

$$|f(z) - a_i| \leqq \varepsilon.$$

Remarquons que ces chemins ne se coupent pas si les différences $|a_i - a_j|$ sont toutes supérieures à 2ε, ce que nous supposerons.

On désigne par $\theta_i(K)$ la somme des angles au centre découpés sur la circonférence $|z| = t$ par le domaine de la couronne circu-

---

[1]) Henri Milloux. Sur les domaines de détermination infinie des fonctions entières [Acta Math. 61 (1933), 105—134]. Voir p. 112 le théorème I.

laire considérée, compris entre les chemins L_i et L_{i+1} (pour $i=n$, entre L_n et L_1); on désigne encore par m_1 une quantité supérieure ou égale à tous les $|a_i|+\varepsilon$, ainsi qu'au maximum $M(r_1, f)$ de $|f(z)|$ sur le cercle $|z|=r_1$.

Considérons une valeur r intermédiaire entre r_1 et r_2, de façon que l'on ait l'inégalité

$$\int_{r_1}^{r} \frac{dt}{t\,\theta_i(t)} \leqq 5, \tag{3}$$

quel que soit l'indice i. $\theta_i(t)$ étant inférieur à 2, il est évident que l'inégalité (3) est vérifiée dès que $\frac{r}{r_1}$ *dépasse une constante numérique*, d'où résulte la nécessité pour le rapport $\frac{r_2}{r_1}$ de dépasser cette constante numérique.

Désignons par d_i le domaine de la couronne circulaire $r \leqq |z| \leqq r_2$ compris entre les chemins L_i et L_{i+1}. Du fait que la somme des $\theta_i(t)$ pour les n valeurs de l'indice i, t étant fixe, est égale à 2π, on en déduit l'inégalité:

$$\sum \int_{r}^{r_2} \frac{dt}{t\,\theta_i(t)} \geqq \frac{n^2}{2\pi} \log \frac{r_2}{r}.$$

Il existe donc au moins un domaine d_i pour lequel:

$$\int_{r}^{r_2} \frac{dt}{t\,\theta_i(t)} \geqq \frac{n}{2\pi} \log \frac{r_2}{r}. \tag{4}$$

Appliquons le théorème rappelé au no. 4 au domaine D_i déterminé par les chemins L_i et L_{i+1} dans la couronne $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$, en prenant pour point $re^{i\theta}$ un point quelconque intérieur au domaine D_i et situé à la distance r de l'origine. Nous en déduisons l'une des deux inégalités suivantes:

ou bien: $$|f(re^{i\theta})| \leqq m_1,$$

ou bien: $$\log \frac{|f(re^{i\theta})|}{m_1} < O(1) \left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log \frac{m_2}{m_1},$$

et a fortiori, *dans tous les cas*

$$\boxed{\log \frac{|f(re^{i\theta})|}{m_1} < O(1) \left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f).} \tag{5}$$

Remarquons que l'inégalité (5) est valable non seulement pour tout point intérieur au domaine D_i ayant pour module r, mais encore pour tout point du domaine δ_i dont l'addition au domaine d_i constitue le domaine D_i. Ceci résulte de ce que $|f(z)|$ est inférieur ou égal à m_1 sur la partie de la frontière de δ_i qui n'est pas à la distance r de l'origine, d'après les hypothèses.

Posons:

$$\log K = \log m_1 + O(1)\left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f).$$

Faisons la représentation conforme d'une bande indéfinie, de largeur 1, du plan ζ, de façon qu'aux portions des chemins L_1 et L_{i+1} limitant δ_i correspondent respectivement des segments rectilignes limitant la bande rectangulaire.

On sait, d'après le théorème fondamental de la thèse de M. Ahlfors [2]) à laquelle on pourra se reporter pour plus de détail sur la représentation en question, que le domaine Δ_i transformé de δ_i contient à son intérieur un rectangle dont la longueur est égale à

$$\int_{r_1}^{r} \frac{dt}{t\theta(t)} - 4,$$

quantité supérieure ou égale à 1 d'après l'inégalité (3). La hauteur du rectangle est la largeur de la bande, c'est-à-dire 1. *Donc le domaine Δ_i contient un carré $ABCD$* [3]) *auquel peut s'appliquer le lemme du no.* 2, la fonction $\varphi(\zeta)$ de l'énoncé de ce lemme correspondant, après représentation conforme, à la fonction $f(z)$.

D'où l'inégalité:

$$|a_i - a_{i+1}| < 4\varepsilon \left[\frac{K}{\varepsilon}\right]^{\frac{\varphi}{\theta}},$$

et d'après la première remarque faite à la fin du no. 2, on a, a fortiori:

$$|a_i - a_{i+1}| < 4\varepsilon^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}},$$

et d'après la valeur de K:

$$\boxed{\log |a_i - a_{i+1}| < O(1) + \tfrac{1}{4}\log\varepsilon + \tfrac{3}{4}\log m_1 + O(1)\left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f).} \tag{6}$$

---

[2]) Lars Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen [Acta Soc. Sc. Fennicae (nova series A) 1 (1930), no. 29].

[3]) Remarquons qu'on peut restreindre le domaine Δ_i au domaine Δ_i' portion de Δ_i située dans la couronne circulaire $r' \leqq |z| \leqq r$, r' étant déterminé par *l'égalité*:

$$\int_{r'}^{r} \frac{dt}{t\theta(t)} = 5.$$

Rappelons les hypothèses qui ont été faites au cours de ce raisonnement, qui aboutit à l'inégalité (6):

$\frac{r_2}{r_1}$ est supposé dépasser une constante numérique; $\frac{r}{r_1}$ dépasse aussi cette constante numérique. $|a_i - a_j|$ est supérieur à 2ε. $|f(z) - a_i|$ est inférieur à ε sur le chemin L_i [4]) et il y a n chemins L_i.

6. Indiquons brièvement que l'inégalité (6), que nous allons surtout appliquer aux fonctions entières d'ordre infini, entraîne le théorème de Denjoy: Si $f(z)$ est d'ordre fini ϱ, supposons le nombre de valeurs asymptotiques finies et différentes supérieur à 2ϱ, de sorte que

$$r_2^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f)$$

tend vers zéro lorsque r_2 augmente indéfiniment. A chaque valeur r_2, on peut donc associer une valeur r tendant vers l'infini avec r_2 de telle façon que le 3e terme du deuxième membre de l'inégalité (6) tende vers zéro; r_1 étant choisi d'une façon fixe, m_1 a une valeur déterminée. Utilisons les remarques faites en note au n° précédent et notons que si r augmente indéfiniment, r' augmente indéfiniment aussi et par suite ε tend vers zéro; nous aboutissons à une contradiction, le deuxième membre de l'inégalité (6) tendant vers $-\infty$, tandis que le premier reste borné.

7. *Application aux fonctions entières d'ordre infini.* Comme nous allons faire tendre n vers l'infini, remarquons tout d'abord, que s'il existe n quantités a_i dont les modules sont inférieurs à m_1, et dont les différences prises deux à deux sont supérieures à ε', les cercles de centres a_i et de rayon $\frac{\varepsilon'}{2}$ étant extérieurs les uns aux autres, et couvrant une superficie totale inférieure à $\pi\left(m_1+\frac{\varepsilon'}{2}\right)^2$, il en résulte que n est au plus égal à $\frac{4}{\varepsilon'^2}\left(m_1+\frac{\varepsilon'}{2}\right)^2$. Il est d'ailleurs possible, si les cercles de centre a_i et de rayon ε' sont tangents entre eux, que n soit de la forme $\frac{O(1)m_1^2}{\varepsilon'^2}$. Ceci posé, l'inégalité (6) donne ici:

$$\log \varepsilon' < O(1) + \tfrac{1}{4}\log \varepsilon + \tfrac{3}{4}\log m_1 + O(1)\left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f).$$

---

[4]) Il est inutile que ε majore les $|f(z) - a_i|$ sur tous les chemins L_i, mais seulement sur les portions de ces chemins compris dans la couronne $r' \leqq |z| \leqq r$.

Efforçons-nous de fixer entre les quantités $m_1 \varepsilon \varepsilon' r_2 r$ et n une dépendance telle que la contradiction apparaisse.

Prenons d'abord $\log \varepsilon' = \frac{1}{5} \log \varepsilon$. Ensuite choisissons n de façon que $(r_2)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f)$ tende vers 0 quand r_2 augmente indéfiniment.

Nous allons prendre par exemple

$$n = 2(1+\eta) \frac{\log_2 M(r_2, f)}{\log r_2},$$

η étant une quantité positive fixe.

L'expression $\left(\frac{r_2}{r}\right)^{-\frac{n}{2}} \log M(r_2, f)$ sera inférieure à une constante numérique si l'on a soin de ne pas prendre r trop grand. Pour fixer les idées, nous choisirons pour r la valeur définie par l'égalité:

$$\log r = \frac{\eta}{1+\eta} \log r_2.$$

On constate alors que l'expression étudiée est égale à 1.

L'inégalité (6) ainsi simplifiée nous donne:

$$O(1) + \tfrac{3}{4} \log m_1 + \tfrac{1}{20} \log \varepsilon > 0.$$

Ce qui n'a certainement pas lieu, lorsque m_1 est assez grand, quand on prend:

$$\log \varepsilon = -16 \log m_1.$$

Il nous reste à fixer la valeur de m_1 en fonction de r_2; d une part on sait que n ne peut dépasser $\frac{O(1) m_1^2}{\varepsilon'^2} = O(1) m_1^{\frac{42}{5}}$.

D'où l'inégalité:

$$m_1^{\frac{42}{5}} \geqq O(1) \frac{\log_2 M(r_2, f)}{\log r_2}. \tag{7}$$

D'autre part m_1 désigne une quantité supérieure ou égale à $\mathrm{M}(r_1, f)$ et r_1 doit être inférieur à $O(1) r$, d'ou l'inégalité supplémentaire:

$$m_1 \leqq M\left[\frac{O(1)\eta}{1+\eta} r_2, f\right]. \tag{8}$$

Les deux inégalités écrites pour m_1 ne sont en général pas incompatibles; pour les fonctions entières d'ordre fini le deuxième membre de l'inégalité (7) est borné, tandis que celui de l'inégalité (8) tend vers l'infini. Pour les fonctions d'ordre infini, le deuxième membre de (7) cesse d'être borné; mais sauf pour des fonctions qu'on peut considérer comme exceptionnelles (à croissance très irrégulière) le deuxième membre de (7) est considérablement inférieur au deuxième membre de (8); pour certaines fonctions, il peut en être autrement, mais alors pour des valeurs tout à fait exceptionnelles de r_2, pouvant être enfermées dans des intervalles dont la somme des longueurs est finie. Il est presque évident que si le deuxième membre de (7) était constamment supérieur au deuxième membre de (8), $M(r_2, f)$ tendrait vers l'infini pour une valeur finie de r_2.

Les résultats obtenus se résument dans le

THÉORÈME. — *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini. Il est en général impossible que dans la couronne circulaire*

$$r = \frac{O(1) R\eta}{1+\eta} \leqq |z| \leqq R \qquad (\eta \text{ quantité positive})$$

il y ait plus de $2(1+\eta)\dfrac{\log_2 M(R,f)}{\log R}$ chemins L_i sur chacun desquels $|f(z)|$ est inférieur à $M(r,f)$, et tels que sur L_i on a l'inégalité:

$$(9) \qquad \log|f(z) - a_i| < -\,O(1)\log M(r,f) = \log\frac{\varepsilon}{2}$$

avec

$$|a_i - a_j| > \varepsilon.$$

Il ne peut y avoir exception que lorsque $M(r,f)$ est inférieur à une certaine puissance de $\dfrac{\log_2 M(R,f)}{\log R}$ ce qui n'a lieu à la fois que pour des fonctions particulières, et quant à ces fonctions pour des valeurs de R exceptionnelles.

Remarque. Il est inutile que l'inégalité (9) soit vérifiée sur tout le chemin L_i; mais seulement sur la portion de ce chemin inférieure à une certaine couronne circulaire; se reporter pour la démonstration au no. 5 et plus particulièrement à la deuxième remarque faite en note à ce numéro. On pourra prendre pour r une valeur inférieure (ou égale) à $\dfrac{O(1)\eta R}{1+\eta}$ et la couronne circulaire ou l'inégalité (9) est vérifiée sur les chemins L_i est telle que ses rayons extrêmes sont de la forme $\dfrac{O(1)\eta R}{1+\eta}$.

(Reçu le 7 février 1934.)