

COMPOSITIO MATHEMATICA

HENRI CARTAN

Sur l'itération des transformations conformes ou pseudo-conformes

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 223-227

http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__223_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur l'itération des transformations conformes ou pseudo-conformes

par

Henri Cartan

Strasbourg

Dans un Mémoire ¹⁾ consacré à l'étude des groupes de transformations *pseudo-conformes* (c'est-à-dire définies par n fonctions *analytiques* de n variables *complexes*), j'ai eu l'occasion d'établir qu'un groupe de transformations pseudo-conformes ne peut pas contenir de sous-groupes arbitrairement petits, et, à ce sujet, j'ai annoncé sans démonstration le théorème suivant ²⁾:

THÉORÈME 1. *Soit, dans l'espace de n variables complexes, un polycylindre Σ de centre O et de rayon R , et soit ϱ un nombre positif quelconque inférieur à R . Si une transformation T est pseudo-conforme dans Σ , ainsi que toutes ses puissances T^2, \dots, T^k, \dots , et si l'écart de T et de chacune de ses puissances est, dans Σ , au plus égal à ϱ , alors T est nécessairement la transformation identique.*

Cet énoncé demande quelques explications et précisions. Par *distance* de deux points, de coordonnées complexes z_1, \dots, z_n et z'_1, \dots, z'_n , nous entendons la plus grande des n quantités

$$|z'_i - z_i| \quad (i = 1, \dots, n).$$

Par *polycylindre de centre P et de rayon r* , nous entendons l'ensemble des points de l'espace dont la *distance* au point P est inférieure à r . En particulier, pour $n = 1$ (transformations *conformes*), les polycylindres ne sont autres que les *cercles* du plan.

Par *écart* d'une transformation T dans un polycylindre Σ , nous entendons la borne supérieure de la *distance* d'un point M à son transformé $T(M)$ lorsque M décrit Σ .

Pour achever de donner un sens précis à l'énoncé du théorème 1, il nous reste à expliquer ce que signifie la phrase: „ T et toutes

¹⁾ Sur les groupes de transformations analytiques [doit paraître dans la Collection d'Exposés mathématiques publiés à la mémoire de J. Herbrand; Paris, Hermann].

²⁾ Paragraphe 8 du mémoire cité.

ses puissances sont pseudo-conformes et d'écart au plus égal à ϱ dans Σ' . Par définition, cela signifie: 1^o que T est pseudo-conforme et d'écart au plus égal à ϱ dans Σ ; 2^o qu'il existe une transformation pseudo-conforme dans Σ , d'écart au plus égal à ϱ dans Σ , transformation que nous désignerons par T^2 et qui satisfait à la condition suivante: pour tout point M de Σ dont le transformé $T(M)$ est intérieur à Σ , le point $T^2(M)$ doit coïncider avec le transformé, par T , du point $T(M)$; 3^o d'une façon générale, supposons définies de proche en proche les transformations T^2, T^3, \dots, T^{k-1} ; alors il doit exister une transformation T^k , pseudo-conforme et d'écart au plus égal à ϱ dans Σ , telle que les points $T^k(M)$ et $T(T^{k-1}(M))$ coïncident chaque fois que $T^{k-1}(M)$ est intérieur à Σ ; — et cela, pour toutes les valeurs positives de l'entier k .

Si l'on désigne par Σ' le polycylindre de centre O et de rayon $R - \varrho$, il est clair que le point $T^k(M)$ est intérieur à Σ' quel que soit M intérieur à Σ' et quel que soit l'entier k . En outre, on vérifie facilement la relation

$$T^k(T^j(M)) = T^{k+j}(M)$$

pour tout M intérieur à Σ' .

Cela posé, il suffit, pour établir le théorème 1, de démontrer le théorème plus général suivant:

THÉORÈME 2. Soient toujours Σ un polycylindre de centre O et de rayon R , et ϱ un nombre positif quelconque inférieur à R . Soit Σ' le polycylindre de centre O et de rayon $R - \varrho$. Soit T une transformation pseudo-conforme et d'écart au plus égal à ϱ dans Σ ; supposons que la transformation

$$T(T(M)),$$

qui est pseudo-conforme dans Σ' , se laisse prolonger analytiquement dans Σ , et désignons par T^2 cette nouvelle transformation; supposons que l'écart de T^2 dans Σ soit au plus égal à ϱ , et que la transformation

$$T^2(T^2(M)),$$

qui est pseudo-conforme dans Σ' , se laisse prolonger analytiquement dans Σ , et désignons par T^4 cette nouvelle transformation; d'une façon générale, supposons définies de proche en proche les transformations $T^2, T^4, \dots, T^{2^{k-1}}$, d'écarts au plus égaux à ϱ dans Σ , et supposons que la transformation

$$T^{2^{k-1}}(T^{2^{k-1}}(M)),$$

qui est pseudo-conforme dans Σ' , se laisse prolonger analytiquement dans Σ ; désignons par T^{2^k} cette nouvelle transformation, et supposons son écart au plus égal à ϱ dans Σ . Dans ces conditions, si l'on peut continuer si grand que soit l'entier k , T est nécessairement la transformation identique.

Pour établir ce théorème, il suffit de démontrer que la transformation T laisse fixe le centre O du polycylindre Σ . En effet, si nous admettons ce résultat, nous pouvons démontrer le théorème 2 de la façon suivante: soit P un point de Σ dont la distance à O soit inférieure à $\frac{R-\varrho}{2}$; P est centre d'un polycylindre Σ_P de rayon $\frac{R+\varrho}{2}$, intérieur à Σ ; en appliquant à ce polycylindre et à la transformation T le résultat qui vient d'être admis, on trouve que T laisse fixe le centre P du polycylindre Σ . On a donc

$$T(P) = P,$$

et cela quel que soit le point P dont la distance à O est inférieure à $\frac{R-\varrho}{2}$, d'où il suit (T étant analytique) que T est la transformation identique.

Il nous reste donc seulement à démontrer que si T satisfait aux conditions du théorème 2, T laisse fixe le centre O du polycylindre Σ . Or cela résulte du théorème suivant:

THÉORÈME 3. Soit toujours Σ un polycylindre de centre O et de rayon R . Soit S une transformation pseudo-conforme dans Σ , et d'écart au plus égal à ϱ ($\varrho < R$) dans Σ . On a l'inégalité

$$(1) \quad |S(S(O)) - O| \geq \left(2 - \frac{\varrho}{R}\right) \cdot |S(O) - O|. \text{ } ^3$$

Il suffira d'appliquer cette inégalité successivement aux transformations $T, T^2, \dots, T^{2^k}, \dots$ pour obtenir

$$|T^{2^k}(O) - O| \geq \left(2 - \frac{\varrho}{R}\right)^k \cdot |T(O) - O|;$$

le premier membre devant rester borné, et la quantité $\left(2 - \frac{\varrho}{R}\right)^k$ augmentant indéfiniment avec k , il faut que

$$T(O) = O,$$

ce qui démontre le théorème 2.

En définitive, il nous reste seulement à démontrer le théorème 3.

³) La notation $|M_1 - M_2|$ désigne la distance des points M_1 et M_2 .

Nous pouvons d'ailleurs supposer, pour simplifier, $R = 1$. Posons

$$S(M) - M = \varrho \cdot U(M)^4);$$

on aura, lorsque M est intérieur à Σ ,

$$|U(M)| \leq 1.$$

L'inégalité (1) à établir s'écrit alors

$$(2) \quad |U(S(O)) + U(O)| \geq (2 - \varrho) \cdot |U(O)|.$$

Or, soit $f_i(M)$ celle des n fonctions composantes de $U(M)$ dont le module, au point O , est égal à $|U(O)|$. On peut supposer $f_i(O)$ réel et positif (ou nul), car on peut toujours se ramener à ce cas en multipliant la i -ème coordonnée de l'espace par un nombre convenable ayant pour module l'unité.

Cela étant, soit

$$f_i(O) = u \quad (0 \leq u \leq 1).$$

Si $u = 1$, alors $f_i(M) \equiv 1$, d'où il suit que la i -ème composante de

$$U(S(O)) + U(O)$$

est égale à 2, c'est-à-dire à $2|U(O)|$; on a donc, dans ce cas,

$$|U(S(O)) + U(O)| = 2|U(O)|,$$

et l'inégalité (2) est vraie *a fortiori*.

Supposons donc $0 \leq u < 1$. Alors, d'après le lemme de Schwarz, on a

$$\left| \frac{f_i(M) - u}{1 - uf_i(M)} \right| \leq |M - O|,$$

ce qui donne, pour $M = S(O)$,

$$\left| \frac{f_i(S(O)) - u}{1 - uf_i(S(O))} \right| \leq \varrho u;$$

on en déduit facilement

$$|f_i(S(O)) + f_i(O)| \geq u + \frac{u(1 - \varrho)}{1 - \varrho u^2} \geq u(2 - \varrho),$$

et, *a fortiori*,

4) Notation abrégée pour désigner n égalités; $U(M)$ désigne n fonctions holomorphes des coordonnées du point M , respectivement égales aux quotients, par ϱ , des différences des coordonnées (de même nom) de $S(M)$ et de M . Par $|U(M)|$, nous entendons le module de la plus grande des n fonctions désignées par la notation $U(M)$.

$$|U(S(O)) + U(O)| \geq u(2 - \varrho),$$

ce qui n'est autre chose que l'inégalité (2).

C. Q. F. D.

Pour terminer, signalons que tout ce qui précède reste valable si l'on remplace les polycylindres par des *hypersphères*, à condition d'appeler *distance* de deux points (z_1, \dots, z_n) et (z'_1, \dots, z'_n) la quantité

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n |z'_i - z_i|^2}.$$

(Reçu le 10 novembre 1933.)
