PAUL LÉVY

Sur la convergence absolue des séries de Fourier

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__1_0>

Sur la convergence absolue des séries de Fourier

par

Paul Lévy

Paris

Le présent mémoire contient l'exposé de remarques que j'ai faites en 1932, en lisant la profonde étude de M. Norbert Wiener sur les théorèmes tauberiens [1]). J'avais hésité jusqu'ici à développer un résumé de ces remarques déjà présenté à l'Académie des Sciences [2]). Mais il me semble qu'il y a intérêt à attirer l'attention sur l'importance de résultats que N. Wiener n'indique qu'incidemment, en les généralisant et les complétant sur certains points. Le désir de répondre à l'heureuse initiative de M. Brouwer en lui adressant un mémoire pour ce journal a achevé de me décider à cette publication.

1. *Notions générales.*

Nous appellerons série F toute série absolument convergente de la forme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{inx}. \tag{1}$$

Notre but est d'étudier les conditions pour qu'une fonction $f(x)$ soit représentable par une telle série. Comme il est évidemment nécessaire que cette fonction soit continue et de période 2π, il nous arrivera de sous-entendre ces conditions.

La série de Fourier de $f(x)$ étant mise sous la forme (1), sa convergence absolue est indépendante de la valeur de x con-

1) Norbert Wiener, Tauberian theorems [Annals of Mathematics **33** (1932), 1—100].

2) Paul Lévy, Sur la convergence absolue des séries de Fourier [Comptes Rendus **196** (1933), 463—466].

sidérée. Elle n'est pas, comme la convergence simple, une propriété locale. Mais nous verrons que, d'après un des résultats de N. Wiener, l'étude de la convergence de cette série peut se ramener aussi à une étude locale; il s'agit de vérifier l'existence d'une certain mode de continuité de $f(x)$ [1]); seulement il faut ici que cette condition soit vérifiée en tous les points de la période. Il suffit d'un point où cette condition ne soit pas vérifiée pour que la série de Fourier de $f(x)$ ne soit pas une série F, et inversement si cette série n'est pas une série F, c'est qu'il existe au moins un tel point. Ces points seront dits *points singuliers de Wiener.*

On sait que, si $f(x)$ admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre $p - 1$ et une dérivée d'ordre p à variation bornée, on a

$$(2) \qquad 2\pi a_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx = \frac{1}{(in)^{p+1}} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi+\varepsilon} e^{-inx}\, df^{(p)}(x),$$

de sorte que la série de Fourier de $f(x)$ admet une majorante de la forme $\sum \frac{k}{|n|^{p+1}}$, k étant une constante. En introduisant la notion de dérivée d'ordre non entier, au sens de Riemann, on obtient aisément une condition suffisante pour l'existence d'une majorante de la forme $\sum \frac{k}{|n|^{\alpha+1}}$, α étant un nombre positif arbitrairement petit, et il est même facile dans cet ordre d'idées d'obtenir des conditions assez peu restrictives et suffisantes pour l'existence d'une série majorante de convergence arbitrairement lente.

En remplaçant α par zéro, on est conduit à considérer le cas où la fonction continue $f(x)$ est à variation bornée. Cette condition n'est ni nécessaire, ni suffisante, pour que la série de Fourier de $f(x)$ soit une série F. Le premier point résulte aisément de l'étude des séries à lacunes, du type

$$(3) \qquad \Sigma\, c_\nu \cos n_\nu x\ ;$$

il suffit de prendre, par exemple, $c_\nu = \frac{1}{\nu!}$, $n_\nu = c_\nu^{-2}$, pour définir une fonction qui ne soit pas à variation bornée. Le second point

---

[1]) L'expression *mode de continuité* est prise ici dans son sens le plus large. Il s'agit d'une certaine condition, dont il s'agirait de préciser la nature exacte, imposée aux valeurs que prend $f(x) - f(x_0)$ pour $|x - x_0|$ assez petit.

résulte aisément de l'étude de la fonction impaire égale, pour $0 < x < \pi$, à $\dfrac{1}{\log \dfrac{\sin x}{2}}$, fonction sur laquelle nous reviendrons au No. 3.

L'étude des séries (3) met en évidence une circonstance importante. En prenant par exemple $c_\nu = \dfrac{1}{\nu^2}$, elles seront toujours des séries F. Mais en prenant pour les n_ν une suite de nombres assez rapidement croissants, on pourra toujours s'arranger pour qu'une telle série n'admette pas de série majorante d'un type donné d'avance. Cette remarque montre que les méthodes, que nous venons de rappeler, qui reposent sur l'emploi de majorantes d'un type déterminé et pour lesquelles notamment le terme général décroît régulièrement quand n augmente, ne peuvent conduire, pour l'étude de la convergence absolue de la série de Fourier de $f(x)$ qu'à des conditions suffisantes beaucoup trop restrictives.

On doit à M. S. Bernstein [1]) un résultat d'une plus grande portée: si la condition de Lipschitz

$$| f(x) - f(x_0) | < k \, | x - x_0 |^\alpha$$

est vérifiée pour un exposant $\alpha > \frac{1}{2}$, la série de FOURIER de $f(x)$ est une série F; ce résultat est très remarquable, car de cette condition on ne peut que déduire l'existence d'une majorante de la forme $\dfrac{k'}{|n|^\alpha}$, qui serait divergente.

Les résultats de N. Wiener, comme nous le verrons, sont d'une nature très différente, et leur généralité n'est possible que parce qu'ils ne reposent pas uniquement sur la considération de majorantes de formes déterminées. Dans les remarques que nous ajouterons pour les compléter, il nous arrivera au No. 4 d'utiliser des séries majorantes, mais dépendant d'un nombre illimité de paramètres, ce qui nous permettra d'échapper en partie à l'objection précédente. Toutefois les résultats que nous obtiendrons ainsi ne sont pas ceux qui ont le plus grand degré de généralité, et notamment ne s'appliqueront qu'à des fonctions à variation

---

[1]) S. BERNSTEIN, Sur la convergence absolue des séries trigonométriques [Comptes Rendus 158 (1914), 1661—1664]. V. aussi L. TONELLI, Serie trigonometriche, 255, 268.

bornée. Aussi est-ce surtout sur les résultats du No. **3**, inspirés plus directement par ceux de N. Wiener, que nous attitons l'attention du lecteur.

2. *Les séries de Fourier de deux fonctions auxiliaires simples.*

D'après la formule (2), les fonctions dont les courbes représentatives, dans une période, sont des lignes polygonales, sont représentables par des séries F. Cette remarque joue un grand rôle dans les recherches de N. Wiener. Nous aurons besoin dans la suite d'un résultat plus précis relatif aux fonctions triangulaires et trapézoïdales.

Nous appellerons *fonction trapézoïdale*, et désignerons par $\psi(x, \alpha, \beta, \beta')$, la fonction continue et périodique de x, de période 2π, égale à l'unité pour $|x| < \alpha$, à zéro dans l'intervalle $(\alpha + \beta, 2\pi - \alpha - \beta')$, et linéaire dans chacun des intervalles $(-\alpha - \beta', -\alpha)$ et $(\alpha, \alpha + \beta)$; $2\alpha, \beta, \beta'$ sont des nombres positifs dont la somme ne dépasse pas 2π; si $\beta' = \beta$ nous écrirons $\psi(x, \alpha, \beta)$.

Dans le cas limite $\alpha = 0$, on obtient la *fonction triangulaire*, que nous désignerons par $\psi_0(x, \beta, \beta')$ (ou simplement $\psi_0(x, \beta)$ si $\beta = \beta'$).

Lemme I. La somme des modules des coefficients de la série F représentant $\psi_0(x, \beta, \beta')$ admet une borne supérieure de la forme $A + B\left|\log\dfrac{\beta'}{\beta}\right|$, A et B désignant des constantes absolues. (On peut naturellement remplacer cette expression par $C \log \dfrac{\beta + \beta'}{\varepsilon}$, ε désignant le plus petit des nombres β et β', ou par $C \log \dfrac{\beta^2 + \beta'^2}{\beta\beta'}$).

Le terme constant a_0 est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. Pour les coefficients a_n des autres termes, on a, tous calculs faits

$$2\pi a_n = \frac{2}{n^2\beta}\sin^2\frac{n\beta}{2} + \frac{2}{n^2\beta'}\sin^2\frac{n\beta'}{2} + \frac{i}{n^2}\left(\frac{\sin n\beta}{\beta} - \frac{\sin n\beta'}{\beta'}\right).$$

Pour majorer le premier terme, remplaçons $\sin^2\dfrac{n\beta}{2}$, pour chaque valeur de n, par la plus petite des quantités 1 et $\dfrac{n^2\beta^2}{4}$; il vient ainsi, ν étant la partie entière de $\dfrac{2}{\beta}$,

$$\sum \frac{1}{n^2\beta}\sin^2\frac{n\beta}{2} \leqq \sum_{1}^{\nu}\frac{\beta}{4} + \sum_{\nu+1}^{\infty}\frac{1}{n^2\beta} < \frac{\nu\beta}{4} + \frac{1}{(\nu+1)^2\beta} + \frac{1}{(\nu+1)\beta} < \frac{5}{4}.$$

La même inégalité s'appliquant aux valeurs négatives de n, ainsi qu'aux termes dépendant de β', on obtient pour les parties réelles des a_n l'inégalité

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} | R(a_n) | < \frac{5}{\pi} + \frac{1}{2}, \tag{4}$$

dans laquelle la constante au second membre n'est d'ailleurs pas la plus petite possible.

Pour obtenir une borne supérieure de la partie imaginaire de a_n, si $n \leq \nu$ nous utiliserons l'inégalité

$$\left| \frac{\sin n\beta}{n^2\beta} - \frac{1}{n} \right| \leqq \frac{n\beta^2}{6} \leqq \frac{\beta}{3}$$

et si $n > \nu$ nous remplacerons $\sin n\beta$ par 1; nous procéderons de la même manière pour le terme en $\sin n\beta'$. En désignant par ν' la partie entière de $\frac{2}{\beta'}$, et supposant pour fixer les idées $\beta \geq \beta'$, donc $\nu' \leq \nu$, on est ainsi conduit, si $\nu' < \nu$, à introduire les termes

$$\sum_{\nu'+1}^{\nu} \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{\nu'+1} + \log\frac{\nu}{\nu'+1} < 1 + \left|\log\frac{\beta'}{\beta}\right|.$$

Il vient alors

$$\sum \frac{1}{n^2}\left|\frac{\sin n\beta}{\beta} - \frac{\sin n\beta'}{\beta'}\right| < \frac{\nu\beta + \nu'\beta'}{3} + $$
$$+ \sum_{\nu+1}^{\infty}\frac{1}{n^2\beta} + \sum_{\nu'+1}^{\infty}\frac{1}{n^2\beta'} + 1 + \left|\log\frac{\beta'}{\beta}\right|$$
$$< 3 + \frac{1}{(\nu+1)\beta} + \frac{1}{(\nu'+1)\beta'} + \left|\log\frac{\beta'}{\beta}\right| < 4 + \left|\log\frac{\beta'}{\beta}\right|.$$

Par suite, pour les parties imaginaires des a_n, on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} | I(a_n) | \leqq \frac{4}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left|\log\frac{\beta'}{\beta}\right| \tag{5}$$

d'où, compte tenu de (4), et de $\left(\frac{5}{\pi}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{4}{\pi}\right)^2<\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$$(6)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} |\, a_n \,| < \frac{5}{2} + \frac{1}{\pi}\left|\log\frac{\beta'}{\beta}\right|, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Lemme II. La somme des modules des coefficients de la série de Fourier *de $\psi(x, a, \beta, \beta')$ admet une borne supérieure de la forme $C \log k$, C désignant une constante absolue, et k étant défini par $\eta = 2\alpha + \beta + \beta' = k\varepsilon$, où ε est le plus petit des nombres β et β'.*

Ce lemme résulte immédiatement de la décomposition en deux triangles du trapèze qui représente cette fonction. Si α n'est pas petit par rapport à ε, il n'y a aucune difficulté. Dans le cas contraire l'application du théorème précédent à un des triangles introduit $\left|\log\frac{\alpha}{\varepsilon}\right|$, qui est grand; mais la flèche de ce triangle est $\frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}$, de sorte que l'application du lemme I à ce triangle introduit le produit $\frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}\left|\log\frac{\alpha}{\varepsilon}\right|$ qui est borné pour $\alpha < \varepsilon$.

Il serait facile, au lieu d'un trapèze, d'introduire un quadrilatère quelconque; de toute façon, on ne généralise pas d'une manière essentielle les résultats obtenus en ne considérant que des triangles; mais cela se trouve commode pour certaines applications.

Du lemme précédent résulte immédiatement que:

Théorème I. Toute fonction de la forme

$$f(x) = \Sigma\, c_p\, \psi(x - \xi_p\,,\, \alpha_p\,,\, \beta_p\,,\, \beta'_p), \qquad (p = 1,\ 2, \ldots),$$

telle que la série $\Sigma|c_p|\log k_p$, soit convergente, est représentable par une série F (k_p est défini comme k dans le lemme II). *Il suffit en particulier que les k_p soient bornés et que $\Sigma|c_p|$ converge.*

Si les α_p sont nuls, on obtient un théorème analogue pour les fonctions triangulaires.

3. *La réduction du problème à une étude locale et les résultats de N. Wiener.*

Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est, *au point x_0, localement représentable par une série F* s'il existe une telle série dont la somme soit égale à $f(x)$ dans un petit intervalle $(x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$ entourant ce point; nous dirons qu'elle l'est *à droite* (ou *à gauche*) du point

x_0 si cela est vrai pour un petit intervalle à droite (ou à gauche) de ce point.

Théorème II. Si une fonction $f(x)$, de période 2π est en chaque point localement représentable par une série F, elle peut être représentée par une même série F pour tout x réel.

Ce théorème n'est autre que le lemme II*b* de N. Wiener, énoncé avec le langage que nous venons d'adopter; on remarque aussi qu'il coïncide avec celui annoncé au No. **1**, les points singuliers de Wiener étant ceux où la fonction n'est pas localement représentable par une série F.

Rappelons brièvement la démonstration: d'après l'hypothèse et le théorème de Heine-Borel, on peut diviser la période en un nombre fini d'intervalles (x_{p-1}, x_p), tels qu'il existe pour chaque p une fonction $f_p(x)$ représentable par une série F et égale à $f(x)$ dans l'intervalle $(x_{p-1} - \frac{\varepsilon}{2}, x_p + \frac{\varepsilon}{2})$, ε étant une constante suffisamment petite. Le théorème résulte alors de la formule

$$f(x) = \sum_1^n f_p(x)\, \psi(x - \xi_p\,,\ \alpha_p\,,\ \varepsilon), \left(\xi_p = \frac{x_{p-1} + x_p}{2},\ \alpha_p = \frac{x_p - x_{p-1}}{2}\right),$$

et de ce qu'en ajoutant ou multipliant des séries F en nombre fini on obtient toujours des séries F.

Ce théorème montre bien que le problème étudié se ramène à une étude locale. Il peut être utile de le compléter par les suivants:

Théorème III. Une fonction peut être représentable par une série F à la fois à droite et à gauche d'un point singulier de Wiener

Considérons en effet la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\log \frac{\sin x}{2}}, \qquad (0 < x < \pi), \tag{7}$$

et développons d'abord cette fonction en série de cosinus; le coefficient α_n de $\cos nx$ est nul si n est impair; pour $n = 2p > 0$ on a

$$\alpha_n = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos nx}{\log \frac{\sin x}{2}}\, dx = -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\log^2 \frac{\sin x}{2}} \cot x\, dx = \alpha_n' + \alpha_n'',$$

α_n' désignant l'expression obtenue en ne calculant cette dernière intégrale que dans un intervalle $(0, x)$ dans lequel la fonction $\dfrac{\cot x}{\log^2 \frac{\sin x}{2}}$ soit décroissante. On a alors

$$|\alpha_n'| < \frac{4}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin nx}{\log^2 \frac{\sin x}{2}} \cot x \, dx < \frac{4}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{n dx}{\log^2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n}\right)} \sim \frac{4}{n \log^2 n},$$

tandis que α_n'' est pour n très grand de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n^2}$ (on le voit par une nouvelle intégration par parties). Donc

$$\alpha_n \sim \frac{4}{n \log^2 n}. \tag{8}$$

ce qui établit la convergence absolue de la série considérée.

Développons maintenant la même fonction en série de sinus. Le coefficient β_n de $\sin nx$ est nul si n est pair; pour n impair on a

$$\beta_n = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\log \frac{\sin x}{2}} dx = \beta_n' + \beta_n'',$$

β_n' étant obtenu en n'intégrant que de 0 à $\frac{\pi}{2n}$; le procédé utilisé pour l'évaluation asymptotique de α_n s'applique à β_n'' et conduit à un résultat analogue, tandis que

$$\beta_n' = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin nx}{\log \frac{\sin x}{2}} dx \sim \frac{4}{\pi \log n}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi n \log n} \text{ [1]}.$$

On a donc aussi

$$\beta_n \sim \frac{4}{\pi n \log n}, \tag{9}$$

ce qui montre que la série de sinus considérée n'est pas absolument convergente.

---

[1]) Nous avons utilisé le fait que, quelque petit que soit ε positif fixe, $\log \frac{\sin x}{2}$ est pour $\frac{\varepsilon}{n} < x < \frac{\pi}{2n}$ compris entre deux bornes équivalentes à $\log \frac{1}{n}$.

L'exemple de la fonction impaire égale à la fonction (7) de 0 à π établit à la fois le théorème III et le résultat énoncé au No. 1 à propos des fonctions à variation bornée.

Théorème IV. Si en un point la fonction $f(x)$ est localement représentable par une série F, elle l'est aussi par une série absolument convergente de la forme

$$\Sigma a_n e^{in\lambda x},$$

λ étant une constante positive quelconque, ainsi que par une intégrale de Fourier absolument convergente.

Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme IIf de N. Wiener. D'après ce lemme, si une fonction $f(x)$ est nulle au voisinage des valeurs $-\pi$ et $+\pi$, pour qu'elle soit représentable par une série F de $-\pi$ à $+\pi$, il faut et il suffit qu'elle le soit par une intégrale de Fourier absolument convergente qui représente zéro en dehors de cet intervalle.

Or, si $f(x)$ est en x_0 représentable par une série F, il suffit de multiplier cette fonction par une fonction trapézoïdale pour obtenir une fonction $f_1(x)$, égale à $f(x)$ dans l'intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ et nulle de $x_0 + 2\varepsilon$ à $x_0 + 2\pi - 2\varepsilon$. Cette fonction, d'après le lemme IIf de N. Wiener, est représentable par une intégrale de Fourier absolument convergente, et il suffit d'appliquer la seconde partie de ce lemme après avoir changé x en λx pour terminer la démonstration du théorème IV.

Ainsi, pour l'étude locale dont dépend la possibilité de répresenter une fonction par une série F, le changement de x en λx est sans importance: à l'origine, $f(x)$ et toutes les fonctions $f(\lambda x)$ sont localement représentables par des séries F, ou bien aucune de ces fonctions ne l'est.

Cette remarque conduit à poser la question suivante: les conditions de continuité dont dépend le problème local, et qui sont invariantes par le changement de x en λx, le sont-elles aussi par le changement de x en $\omega(x)$, $\omega(x)$ désignant une fonction croissante et vérifiant en outre certaines conditions de continuité dont il s'agirait de préciser la nature? Si la réponse est affirmative, on peut affirmer, en supposant de plus que

$$\omega(x + 2\pi) = \omega(x) + 2\pi,$$

que $f(x)$ et $f[\omega(x)]$ sont en même temps représentables par une série F. Cette question, que je n'ai pas pu résoudre, me paraît mériter de nouvelles recherches.

Dans le cas d'une substitution portant, non sur la variable, mais sur la fonction, on a le théorème suivant:

Théorème V. Si $y = f(x)$ est représentable par une série F, et si $z = F(y)$ est une fonction holomorphe pour toutes les valeurs de y prises par $f(x)$ pour les valeurs réelles de x, la fonction $F[f(x)]$ est représentable par une série F.

Ce théorème est encore la généralisation d'un résultat de N. Wiener, son lemme II*e*, relatif au cas où $F(y) = \frac{1}{y}$. L'extension ne présente aucune difficulté. Il suffit évidemment d'établir en chaque point la possibilité d'une représentation locale. Or la fonction

$$g(x) = \psi(x - x_0, \varepsilon, \varepsilon)[f(x) - f(x_0)]$$

est représentable par une série F pour laquelle la somme des modules des coefficients est, pour ε assez petit, inférieure à un nombre positif arbitrairement petit ϱ; N. Wiener n'établit ce résultat que pour la valeur particulière de ϱ qu'il se trouve avoir à utiliser, mais sa démonstration s'étend sans difficulté au cas où ϱ est arbitrairement petit, et il nous paraît inutile de la reproduire.

La démonstration du théorème V est alors immédiate. Il n'y a qu'à observer que, pour $|x - x_0|$ assez petit,

$$F[f(x)] = F[f(x_0) + g(x)] = c_0 + c_1 g(x) + \ldots + c_p g^p(x) + \ldots,$$

et il suffit de supposer ϱ inférieur au rayon de convergence de cette série entière en $g(x)$ pour obtenir, en remplaçant $g(x)$ par la série F qui représente cette fonction, l'expression de $F[f(x)]$ par une série F, ce qui démontre le théorème V.

On peut naturellement obtenir d'autres résultats sur la représentation par des séries F des fonctions $F[f(x)]$; plus les conditions imposées à la fonction $f(x)$ sont restrictives, plus celles imposées à, $F(y)$ peuvent être larges. Ce qu'il y a de remarquable dans les théorèmes IV et V est que pour chacun d'eux l'une ou l'autre des fonctions $f(x)$ et $F(y)$ a la plus grande généralité possible. Nous n'insisterons pas sur les théorèmes intermédiaires, aucun de ceux que nous avons obtenus ne nous paraissant présenter un intérêt suffisant.

4. *Esquisse d'une méthode basée sur l'approximation de $f(x)$ par une somme de fonctions triangulaires.*

Soit AB un segment d'une ligne brisée inscrite dans la courbe $y = f(x)$, limitée à une seule période. Cette ligne brisée étant une approximation de cette courbe, nous obtiendrons l'approximation suivante en remplaçant AB par $AA'BB'$, $A'B'$ étant deux points de l'arc AB tels que AB et $A'B'$ soient parallèles. La courbe $y = f(x)$ est ainsi obtenue après une infinité dénombrable d'opérations, et la fonction $f(x)$, sous la seule condition d'être périodique et continue, se trouve ainsi représentée par une série absolument et uniformément convergente de la forme

$$f(x) = f(0) + \Sigma\, c_p\, \psi(x - \xi_p\,,\ \alpha_p\,,\ \beta_p\,,\ \beta_p').$$

Dans cette série, chaque coefficient c_p, pris en valeur absolue, représente la distance des deux droites AB et $A'B'$, comptée sur une parallèle à Oy. C'est ce qu'on peut appeler la flèche du trapèze $AA'B'B$ correspondant à l'indice p. Nous désignerons par η_p, pour chaque trapèze, la projection de AB sur Ox, par ε_p la plus petite des projections de AA' et $B'B$, et poserons $\eta_p = k_p \varepsilon_p$. Alors:

Théorème VI. S'il est possible de réaliser l'approximation de la courbe $y = f(x)$ par une ligne brisée de manière que la série $\Sigma|c_p| \log k_p$ converge, la fonction $f(x)$ est représentable par une série F [1]).

Ce théorème n'est qu'un nouvel énoncé du théorème I. Nous allons voir qu'il a une portée bien différente suivant les applications que l'on a en vue.

Considérons d'abord le cas d'une fonction $f(x)$, ayant une dérivée continue $f'(x)$ telle que

$$\text{(10)} \qquad | f'(x) - f'(x_0) | < k\, | x - x_0 |^\alpha,$$

et supposons que l'on prenne, pour la'pplication du procédé qui vient d'être décrit, $\alpha_p = 0$, $\beta_p = \beta_p'$; en d'autres termes A' et B' sont confondus au point de la courbe située sur la parallèle à Oy passant par le milieu de AB. On aura alors pour toutes les valeurs de p

$$| c_p | < k\, \varepsilon_p^{1+\alpha},\ k_p = 2, \qquad (k = \text{const.}).$$

La somme des $| c_p |$ correspondant à une même valeur $\dfrac{\pi}{2^h}$ de ε_p est alors inférieure à

$$k\pi\, \varepsilon_p^\alpha = \frac{k\pi^{1+\alpha}}{2^{h\alpha}},$$

de sorte que la somme $\Sigma\, | c_p |$ est finie; comme $k_p = 2$, on est dans les conditions d'application du théorème VI.

---

[1]) Naturellement, si les k_p sont bornés (et l'on peut en général faire cette hypothèse), il suffit de vérifier la convergence de $\sum |c_p|$.

Si au contraire on suppose seulement que la fonction $f(x)$ elle-même vérifie une condition de Lipschitz d'exposant $\alpha > \frac{1}{2}$, condition qui, comme nous l'avons rappelé au No. I entraîne la convergence absolue de la série de Fourier de cette fonction, on constate aisément que le théorème VI ne permet pas de retrouver ce résultat. En effet cette condition peut être vérifiée par des fonctions à variation non bornée; or le théorème VI ne s'applique qu'aux fonctions à variation bornée. Il implique en effet la convergence de $\Sigma \mid c_p \mid$, et quand on remplace la corde AB par la ligne brisée $AA'B'B$, la variation totale de la ligne brisée considérée, inscrite dans la courbe $y = f(x)$, augmente d'une quantité qui ne peut pas dépasser le double de la flèche $\mid c_p \mid$, de sorte que la variation totale de cette ligne est au plus $2\Sigma|c_p|$.

Ces remarques montrent que le théorème VI, dans les cas de ce genre, a une portée tout à fait insuffisante. Il peut être au contraire utile à appliquer dans le cas d'une fonction $f(x)$ ayant une continuité très satisfaisante, ou même analytique, sauf en un point singulier.

Reprenons l'exemple de la fonction

$$f_0(x) = \frac{1}{\log \left|\frac{\sin x}{2}\right|}, \tag{11}$$

et désignons par $f_1(x)$ la fonction impaire égale à $f_0(x)$ de 0 à π; $f_0(x)$ est représentable par une série F, mais non $f_1(x)$. On ne peut pas espérer établir le premier de ces résultats à l'aide du théorème VI, si l'on prend les points 0 et π comme points de division, car une telle démonstration s'appliquerait aussi à $f_1(x)$. Mais il est facile d'y arriver en évitant, dans l'application du théorème VI, de prendre les points 0 et π comme points de division.

Prenons par exemple pour A et B les points $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; pour A' et B' les points $-\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{4}$; pour A'' et B'' les points $-\frac{\pi}{8}$ et $+\frac{\pi}{8}$; et ainsi de suite. La somme des flèches des trapèzes $AA'B'B$, $A'A''B''B'$, . . ., a la valeur finie

$$\left| f_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = \frac{1}{\log 2}.$$

D'autre part, pour chacun des intervalles AA', $A'A''$, . . ., il n'y a qu'à adopter le mode de subdivision indiqué ci-dessus à propos des fonction vérifiant la formule (10). Si dans un intervalle $(x\,,\,x+\Delta x)$, on a $|f''(x)| < M$, la flèche du triangle ayant pour sommet les points d'abscisses x, $x+\frac{\Delta x}{2}$, $x+\Delta x$, est inférieure à $\frac{M}{8}(\Delta x)^2$, et pour la somme des flèches des triangles conduisant à la limite à l'arc de courbe considéré, on a la borne supérieure

$$\frac{M}{8}(\Delta x)^2\left(1+\frac{2}{4}+\frac{4}{16}+\ldots\right)=\frac{M}{4}(\Delta x)^2.$$

Or, pour l'intervalle $(x\,,\,2x)$ on peut prendre

$$M = |\,f_0''(x)\,| \backsim \frac{1}{x^2} f_0{}^2(x),$$

$$\frac{M}{4}(\Delta x)^2 \backsim \frac{1}{4}\, f_0^2(x) \backsim \frac{1}{4\log^2|x|}\,, \qquad (x \to 0),$$

de sorte que pour l'ensemble des intervalles AA', $A'A''$, ..., et BB', $B'B''$, ..., on a une somme finie, c.q.f.d.

Il est facile d'étudier plus généralement la fonction $f_0^\alpha(x)$. Si $\alpha > 1$, cette fonction et la fonction impaire correspondante sont toutes deux représentables par une série F, et l'on peut pour l'application du théorème VI prendre un point de division à l'origine. Si $0 \leq \alpha \leq 1$, on est toujours dans les mêmes conditions que pour $\alpha = 1$: la fonction considérée est toujours représentable par une série F et on peut l'établir à l'aide du théorème VI, mais à condition de ne pas placer de point de division à l'origine. On peut généraliser plus encore, en introduisant des logarithmes itérés, ou des fonctions à croissance régulière choisies de manière à rendre les séries introduites dans les raisonnements précédents aussi lentement convergentes ou divergentes que l'on veut: les résultats subsisteront. La convergence absolue des séries de Fourier représentant les fonctions paires du type $f_0(x)$ peut toujours s'établir par application du théorème VI, et la possibilité de prendre l'origine comme point de division, et d'établir par là même le résultat analogue pour la fonction impaire correspondante, apparaît dès que ce résultat est vrai.

Le théorème VI a donc, dans ces cas, une portée bien plus grande que dans ceux considérés d'abord, et donne une explication très satisfaisante de la différence qui existe entre les fonctions paires et impaires au point de vue de la nature de leurs séries de Fourier. Le calcul asymptotique des coefficients, qui permet de constater cette différence [1]), ne l'explique pas d'une manière aussi satisfaisante.

Terminons par une remarque sur les points que nous appellerons *points semi-singuliers* des fonctions $f(x)$; ce sont ceux qui, tout en n'empêchant pas la fonction d'être représentable par une série F, ne peuvent pas être pris comme points de division pour l'application du théorème VI. D'après ce qui précède, on peut penser que cette définition équivaut à la suivante: un point x_0 est semi-singulier si, $f(x)$ y étant localement représentable par une série F, il n'en est pas de même de la fonction égale à $f(x)$ pour $x > x_0$ et à $f(x_0)$ pour $x < x_0$. Ce résultat est sûrement exact dans le cas où, comme dans l'exemple précédent, la semi-singularité provient de ce que $f'(x)$ augmente indéfiniment suivant une loi régulière. Il serait intéressant de le démontrer d'une manière générale.

En désignant toujours par $f_0(x)$ la fonction (11), les fonctions

$$f_0\left(\frac{x}{2}\right),\ f_0(x)\,\psi\left(x,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right),$$

n'ont qu'un point semi-singulier par période. Soit $f(x)$ une telle fonction. Si alors la somme $\Sigma \mid c_n \mid$ est bornée, la fonction

$$\Sigma\, c_n\, f(x - \xi_n)$$

est représentable par une série F, et on peut le démontrer par application du théorème VI. Ses points semi-singuliers sont les points ξ_n, et ceux-là seulement [2]). On peut donc définir une fonction pour laquelle l'ensemble des points semi-singuliers coïncide avec n'importe quel ensemble dénombrable donné, même s'il est partout dense.

(Reçu le 22 juillet 1933.)

---

[1]) Cf. R. Salem, Détermination de l'ordre de grandeur à l'origine de certaines séries trigonométriques (Comptes Rendus **186** (1928), 1804—1806). Il est facile, à l'inverse de ce que fait M. Salem, de déduire l'ordre de grandeur des coefficients d'hypothèses relatives à l'allure de la fonction à l'origine; c'est ce que nous avons fait dans un cas particulier pour démontrer le Th. III.

[2]) La démonstration impliquerait quelques remarques préalables, qu'il nous paraît inutile de développer, sur l'indétermination qui existe toujours dans le choix des points de division et la possibilité d'en profiter pour obtenir un mode de division s'appliquant à la fois à tous les $f(x - \xi_n)$.