COMPOSITIO MATHEMATICA

G. BOURION

Sur les zéros des polynomes-sections d'une série de Taylor

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 163-176

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__163_0>

Sur les zéros des polynomes-sections d'une série de Taylor

par

G. Bourion

Nancy

Les deux points essentiels de ce travail sont les suivants: d'une part, je rattache au „théorème fondamental" énoncé au début d'un autre Mémoire [1]) les théorèmes de MM. Jentzsch, Szegö et Ostrowski sur l'accumulation des zéros des polynomes-sections au voisinage du cercle de convergence; d'autre part, dans le cas où un point-frontière du cercle de convergence est un point singulier pour la fonction définie par la série sans être un point-limite des zéros de toutes les suites partielles de polynomes-sections, je cherche à obtenir des renseignements sur la *structure* de la série.

Notations. $\sum\limits_0^\infty a_\nu x^\nu$ désigne une série dont le rayon de convergence est *un*; $f(x)$ est la fonction définie par cette série. $s_n(x)$ est le polynome-section $\sum\limits_0^n a_\nu x^\nu$; je pose $r_n(x) = f(x) - s_n(x)$, $r_{n,m}(x) = s_m(x) - s_n(x)$ (pour $m > n$). $\varepsilon_n(x)$, ou $\varepsilon_{n_k}(x)$, désigne toute quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, ou $\frac{1}{n_k}$, *uniformément par rapport à x* dans la région considérée; ce symbole s'emploie comme le symbole classique $o(f)$.

J'aurai à utiliser l'inégalité

$$\frac{1}{n} \log |s_n(x)| < \log |x| + \varepsilon_n(x) \tag{1}$$

---

[1]) Recherches sur l'ultraconvergence [Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure 50 (1933), 245—318].

valable à l'extérieur du cercle-unité, et l'inégalité

$$\frac{1}{n} \log | r_n(x) | < \log | x | + \varepsilon_n(x) \tag{2}$$

qui s'applique aussi à $r_{n,m}$ et qui est valable dans le cercle-unité. Ces deux inégalités s'établissent facilement à partir de la formule de Cauchy-Hadamard; on en trouvera la démonstration aux §§ 2 et 3 du Mémoire cité.

Une série est dite à *structure lacunaire* si elle peut se décomposer en la somme de deux séries dont l'une présente des lacunes de largeur relative bornée inférieurement, l'autre ayant un rayon de convergence plus grand:

$$a_n = b_n + c_n \, ,$$

$$b_n = 0 \text{ pour } l_k < n < m_k \, , \quad \overline{\lim} \frac{m_k}{l_k} > 1, \; (k = 1, 2, 3, \dots) \, ,$$

$$\overline{\lim} | b_n |^{\frac{1}{n}} = 1 \, , \quad \overline{\lim} | c_n |^{\frac{1}{n}} < 1.$$

1. *Les théorèmes de Jentzsch-Szegö-Ostrowski* [2]). Supposons qu'un point frontière x_0 du cercle de convergence ne soit pas un point-limite des zéros des polynomes-sections s_{n_k}; si nous considérons un cercle suffisamment petit (γ) de centre x_0, il ne renferme donc pas de zéros des s_{n_k} (à partir d'un certain rang) et les fonctions analytiques $\frac{1}{n_k} \log s_{n_k}(x)$ y sont régulières et uniformes. Les parties réelles de ces fonctions sont bornées supérieurement dans (γ) d'après (1); prenons d'autre part dans (γ) un domaine δ intérieur au cercle-unité, et dans δ un point x_1; choisissons pour chaque $\frac{1}{n_k} \log s_{n_k}$ la détermination dont la partie imaginaire α en x_1 vérifie les inégalités $-\frac{\pi}{n_k} \leqq \alpha < \frac{\pi}{n_k}$; dans ces conditions, les parties réelles tendent vers zéro uniformément dans δ, et les parties imaginaires tendent vers zéro en x_1; on en déduit aussitôt que les $\frac{1}{n_k} \log s_{n_k}$ tendent uniformément

---

[2]) Voir: R. Jentzsch, Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen, Fortgesetzte Untersuchungen über die Abschnitte von Potenzreihen [Acta mathematica **41** (1918), 219—251, 253—270];

A. Ostrowski, Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen [Abhandlungen Hamburg **1** (1923), 327—350] vers zéro dans δ [3]), ce qui entraîne leur convergence uniforme vers zéro dans (γ), puisqu'elles y admettent une région exceptionnelle et y forment par suite une famille normale. Ce résultat, dû à Jentzsch, montre que les s_{n_k} vérifient les hypothèses du „théorème fondamental" (§ 7 du Mémoire cité). *La série considérée est donc à structure lacunaire*; c'est le théorème de M. Ostrowski.

De là résulte en particulier: *si* $n_{k+1} / n_k \to 1$, *tout point de la circonférence du cercle de convergence est point-limite des zéros des* s_{n_k}. Cet énoncé, dû à M. Szegö, contient le *théorème de Jentzsch:* tout point de la circonférence du cercle de convergence est un point-limite des zéros des polynomes-sections.

Voici une autre conséquence (qui fait appel au premier théorème de M. Ostrowski sur l'ultraconvergence: voir A. Ostrowski [Sitzungsberichte d. preuß. Akad. **1921**, 557—565]; le mémoire cité dans la note 1 renferme une démonstration plus rapide): *s'il existe un point de la circonférence du cercle de convergence qui n'est pas point-limite des zéros des* s_{n_k}, *tout point de cette circonférence où* $f(x)$ *est régulière et non nulle possède cette même propriété.*

Si s_{n_k} a dans un cercle (γ) entourant x_0 des zéros $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(\nu_k)}$, on considèrera au lieu de s_{n_k} le polynome $s_{n_k} / \prod\limits_{\nu} (x - x_k^{(\nu)})$ et le même raisonnement s'appliquera si la croissance de ν_k est suffisamment lente. Voir pour ces généralisations le Mémoire de M. Ostrowski.

2. *Etude du cas où* n_{k+1} / n_k *est borné.* Conservons les mêmes hypothèses, et supposons de plus $\overline{\lim}\, n_{k+1} / n_k$ finie, ou $n_{k+1} < \lambda n_k$; considérons $r_{n_k, n_{k+1}}$ que nous désignerons pour simplifier par $r_{(k)}$. Traçons une circonférence Γ, coupant le cercle-unité, et toute entière intérieure à la région où $\frac{1}{n_k} \log |s_{n_k}|$ tend uniformément vers zéro. Comme $r_{n_k, n_{k+1}} = s_{n_{k+1}} - s_{n_k}$,

$$| r_{(k)} | \leqq | s_{n_k} | + | s_{n_{k+1}} | \leqq 2 \operatorname{Max} \left(|s_{n_k}|, | s_{n_{k+1}} | \right),$$

---

[3]) Car

$$\frac{1}{n_k} \log s_{n_k}(x) - \frac{1}{n_k} \log s_{n_k}(x_1) = \frac{1}{n_k} \int_{x_1}^{x} \frac{d}{dx} \log s_{n_k}(x) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{n_k} \int_{x_1}^{x} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \log | s_{n_k}(x) | - i \frac{\partial}{\partial \eta} \log | s_{n_k}(x) | \right] (d\xi + i\, d\eta)$$

si l'on pose $x = \xi + i\eta$.

nous avons sur l'arc mqn extérieur au cercle-unité

$$\frac{1}{n_{k+1}} \log |r_{(k)}| < \varepsilon_{n_k}(x) \tag{3}$$

d'où, puisque $n_{k+1} < \lambda n_k$,

$$\frac{1}{n_k} \log |r_{(k)}| < \varepsilon_{n_k}(x). \tag{4}$$

Sur l'arc mpn intérieur au cercle-unité, nous utiliserons l'inégalité (2) qui donne $\frac{1}{n_k} \log |r_{(k)}| < \log |x| + \varepsilon_{n_k}(x)$. Considérons alors la fonction $h(x)$, harmonique et régulière dans Γ, qui prend les valeurs $\log |x|$ sur mpn et zéro sur mqn. La fonction harmonique $\frac{1}{n_k} \log |r_{(k)}|$ n'ayant dans Γ d'autres singularités que des infinis négatifs y est inférieure à $h(x) + \varepsilon_{n_k}(x)$. Soit Δ un domaine complètement intérieur à Γ, $h(x)$ a dans Δ un maximum négatif $-m$, et l'on a à partir d'une certaine valeur de k $\frac{1}{n_k} \log |r_{(k)}| < -\frac{m}{2}$ dans Δ. Les s_{n_k} convergent donc uniformément à l'intérieur de Γ (puisque dans tout domaine complètement intérieur, la série $\Sigma r_{(k)}$ est majorée par une série numérique convergente).

Par suite: *Si n_{k+1} / n_k est borné supérieurement, les points-frontières du cercle de convergence qui sont des points singuliers de $f(x)$ sont points-limites des zéros de la suite $\{s_{n_k}\}$.*

3. *Extension du résultat précédent.* L'hypothèse „n_{k+1} / n_k borné" n'a été utilisée que pour passer de l'inégalité (3) à l'inégalité (4); si nous pouvons remplacer, au second membre de (3), l'expression indéterminée $\varepsilon_{n_k}(x)$ par une quantité qui tende vers zéro avec $\frac{1}{n_k}$ *suivant une loi connue*, il suffira d'une hypothèse moins restrictive.

Or, nous avons sur un arc $m'p\,n'$ de Γ intérieur à mpn

$$\left|\frac{1}{n_k} \log s_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k} \cdot \text{const.},$$

et sur l'arc complémentaire $m'q\,n'$,

$$\frac{1}{n_k} \log \left|s_{n_k}\right| < \text{constante positive},$$

d'après (1); le point d'affixe $\frac{1}{n_k} \log s_{n_k}(x)$ se trouve par suite, quand x est dans Γ, dans un demi-plan contenant l'origine;

φ étant une fonction qui réalise la représentation conforme de ce demi-plan sur le cercle-unité avec la condition $\varphi(0)=0$, $\left|\varphi\left(\frac{1}{n_k}\log s_{n_k}\right)\right|$ est majorée sur l'arc $m'q\,n'$ par une constante, et sur l'arc $m'p\,n'$ par une expression de la forme $\frac{1}{n_k}$ const.

Désignons par u la fonction, harmonique et régulière dans Γ, qui prend les valeurs *un* sur $m'p\,n'$, *zéro* sur $m'q\,n'$; nous avons dans Γ

$$\log\left|\varphi\left(\frac{1}{n_k}\log s_{n_k}\right)\right| < -u\log n_k + \log h$$

où h désigne une constante; d'où

$$\left|\varphi\left(\frac{1}{n_k}\log s_{n_k}\right)\right| < h n_k^{-u},$$

puis

$$\frac{1}{n_k}\left|\log s_{n_k}\right| < H n_k^{-u}, \tag{5}$$

H étant une nouvelle constante. On en déduit pour $r_{(k)} = s_{n_{k+1}} - s_{n_k}$

$$\frac{1}{n_k}\log\left|r_{(k)}\right| < \frac{\log 2}{n_k} + H n_k^{-u} + H\frac{n_{k+1}^{1-u}}{n_k}\,; \tag{6}$$

le second membre tend vers zéro si $n_{k+1}^{1-u}/n_k \to 0$.

Etant donné sur la circonférence du cercle de convergence un point x_0 qui n'est pas limite de zéros des s_{n_k}, on voit facilement que l'on peut choisir le cercle Γ (contenant x_0), puis l'arc $m'p\,n'$, de telle sorte que la région $u > 1-\mu$, μ constante arbitrairement donnée entre 0 et 1, contienne x_0. Les résultats précédents restent donc valables s'il y a une constante positive μ telle que $\frac{n_{k+1}^{\mu}}{n_k} \to 0$ ou en d'autres termes si $\log n_{k+1}/\log n_k$ reste borné, ou encore si $\overline{\lim}\,[\log n_{k+1}/\log n_k]$ est finie. D'autre part, le raisonnement fait précédemment pour un point de la circonférence-unité s'étend sans difficulté à tout point-frontière du domaine d'ultraconvergence qui a la propriété suivante: il existe une circonférence passant par ce point et dont aucun point n'est extérieur au domaine d'ultraconvergence. Il y a de tels points-frontières dans un voisinage arbitraire d'un point-frontière donné [4]); dans

---

[4]) Il suffit de prendre une suite $\{x_n\}$ de points intérieurs au domaine d'ultraconvergence U et tendant vers le point considéré x_0, et de tracer la plus grande circonférence de centre x_n qui ne contienne aucun point extérieur à U; soit ξ_n le point (ou l'un des points) de cette circonférence situé sur la frontière de U, les ξ_n tendent vers x_0 et ont la propriété annoncée.

l'hypothèse faite, tout point singulier de $f(x)$ situé sur la frontière du domaine d'ultraconvergence de $\{s_{n_k}\}$ est donc un point-limite de zéros des s_{n_k}.

D'autre part, *quelle que soit la suite* $\{s_{n_k}\}$, tout point-frontière de son domaine d'ultraconvergence qui est un point régulier pour $f(x)$ est point-limite de zéros des s_{n_k}: dans l'hypothèse contraire, on aurait, dans un petit cercle (γ) entourant ce point x_0, $\frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}| < \varepsilon_{n_k}(x)$ (§ 1) d'où, puisque $r_{n_k} = f(x) - s_{n_k}$, $\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}| < \varepsilon_{n_k}(x)$; soit Λ une courbe fermée sans point double entourant x_0, ne sortant pas du domaine obtenu en adjoignant (γ) au domaine d'ultraconvergence, et dont un arc mn soit intérieur au cercle-unité; faisons appel sur mn à l'inégalité (2), et désignons par $v(x)$ la fonction harmonique dans Λ qui prend les valeurs $\log|x|$ sur mn et zéro sur le reste de Λ: on a dans Λ $\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}| < v(x) + \varepsilon_{n_k}(x)$, et, comme $v(x)$ est négative à l'intérieur de Λ, cette inégalité entraînerait, contrairement à l'hypothèse, la convergence uniforme de r_{n_k} vers zéro autour de x_0.

En rapprochant les deux résultats précédents, nous voyons que *si* $\overline{\lim}\,(\log n_{k+1} / \log n_k)$ *est finie, tout point singulier de* $f(x)$ *ou bien est point-limite de zéros des* s_{n_k}, *ou bien est séparé du cercle de convergence par ces points-limites*; j'entends par là qu'il n'est pas possible de tracer un arc de Jordan qui joigne le point considéré à un point intérieur au cercle de convergence, et qui ne renferme pas de points-limites de zéros des s_{n_k}.

M. Ostrowski (loc. cit. [2])) remplace l'hypothèse $\log n_{k+1} = O(\log n_k)$ par $\log n_{k+1} = o(n_k)$. J'ai cru néanmoins utile de donner la démonstration précédente plus simple, le cas $\log n_{k+1} = O(\log n_k)$ intervenant seul dans la suite. L'inégalité (5) joue un rôle essentiel dans les deux paragraphes suivants.

L'extension aux zéros des $s_n(x) - g(x)$, $g(x)$ désignant une fonction analytique régulière et uniforme au voisinage de la circonférence $|x| = 1$, est immédiate.

4. *Structure de la série dans le cas où les zéros d'une suite partielle ne s'accumulent pas sur le cercle de convergence.* R. Jentzsch (loc. cit. [2]), 260) a formé des séries à rayon de convergence fini pour lesquelles les zéros d'une certaine suite partielle de polynomes-sections n'ont aucun point-limite à distance finie. Nous allons étudier, plus généralement, les séries pour lesquelles

les zéros d'une suite partielle ne s'accumulent pas sur le cercle de convergence.

Supposons donc que les zéros des s_{n_k} n'aient dans $|x| < R_1$ ($R_1 > 1$) que des points-limites isolés; traçons une circonférence $|x| = R$, $1 < R < R_1$, qui ne passe par aucun de ces points-limites; $\frac{1}{n_k} \log s_{n_k}$ tend uniformément vers zéro sur cette circonférence; d'une manière plus précise, on a

$$\frac{1}{n_k} | \log s_{n_k} | < H n_k^{1-\lambda} \text{ sur } |x| = R ; \tag{7}$$

H et λ sont des constantes quand R est laissé fixe ($0 < \lambda < 1$). Pour établir cette formule, supposons d'abord qu'il n'y ait pas de points-limites des zéros des s_{n_k} dans une couronne $r < |x| < R'$, où $r < 1$, $R < R' < R_1$; le raisonnement qui a donné (5) s'applique sans modification, u désignant maintenant la fonction, harmonique dans la couronne, qui prend les valeurs *un* sur le contour intérieur et *zéro* sur le contour extérieur. Si l'on suppose maintenant qu'il y a des points-limites de zéros dans la couronne, ils sont en nombre fini d'après l'hypothèse, et chaque s_{n_k} (en en laissant de côté un nombre fini) a dans la couronne un nombre fixe de zéros, $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_p^{(k)}$; il suffit de considérer au lieu de s_{n_k} le polynome $s_{n_k} / \prod_{\nu=1}^{p} (x - x_\nu^{(k)})$, auquel le raisonnement précédent s'applique.

Nous avons pour $n \leqq n_k$

$$| a_n | \leqq \frac{1}{R^n} \operatorname*{Max}_{|x|=R} | s_{n_k}(x) |$$

d'où en utilisant (7)

$$\frac{1}{n} \log | a_n | < -\log R + H \frac{n_k^{1-\lambda}}{n} . \tag{8}$$

q étant un nombre quelconque supérieur à 1, nous aurons, pour

$$\frac{qH}{\log R} n_k^{1-\lambda} < n \leqq n_k , \tag{9}$$

l'inégalité

$$\frac{1}{n} \log | a_n | < -\frac{q-1}{q} \log R . \tag{10}$$

Etant donnée une lacune:

$$a_n = 0 \text{ pour } n' < n < n'',$$

appelons *largeur logarithmique relative* de cette lacune le quotient $\frac{\log n'' - \log n'}{\log n'}$. Les résultats exprimés par les formules (9) et (10) s'énoncent alors sous la forme suivante:

Si les zéros de la suite partielle $\{s_{n_k}\}$ n'ont sur $|x| = 1$ que des points-limites isolés, on peut, en retranchant de la série donnée une série dont le rayon de convergence surpasse 1, faire apparaître des lacunes de largeur logarithmique relative bornée inférieurement.

Le raisonnement précédent s'applique quel que soit R entre 1 et R_1 et quel que soit l'entier q. Nous pourrons par exemple prendre $R = R_1^{1/2}$ et $q = 2$, ou bien $R = R_1^{2/3}$ et $q = 3$, etc. Prenons alors dans la série donnée les termes $a_n x^n$ dont le rang n vérifie la condition $k \cdot \frac{H}{\log R} n_k^{1-\lambda} < n \leqq n_k$, ils satisfont à l'inégalité $\frac{1}{n} \log |a_n| < -\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \cdot \log R_1$; l'ensemble des termes ainsi obtenus pour $k = 2, 3, 4, \ldots$ forme une série dont le rayon de convergence est au moins R_1.

Nous pouvons donc préciser ainsi l'énoncé précédent: *Si les zéros des s_{n_k} n'ont dans $|x| < R_1$ que des points-limites isolés, on peut faire apparaître des lacunes de largeur logarithmique relative bornée inférieurement en retranchant une série dont le rayon de convergence n'est pas inférieur à R_1.*

On montre de même que les séries formées par Jentzsch, pour lesquelles les zéros d'une certaine suite partielle n'ont aucun point-limite à distance finie, ne diffèrent que par une fonction entière d'une série ayant des lacunes du type indiqué.

5. *Cas où un point singulier n'est pas limite des zéros des s_{n_k}.* Considérons une série pour laquelle un point du cercle de convergence, le point $x = 1$ par exemple, est un point singulier et n'est pas point-limite de zéros des polynomes-sections s_{n_k} ; ce cas se présente effectivement d'après les exemples de Jentzsch rappelés au début du paragraphe précédent. Nous avons alors au voisinage du point $x = 1$ l'inégalité (5)

$$\frac{1}{n_k} \cdot \log |s_{n_k}| < H n_k^{-u}.$$

Soit $x=\lambda$, $0<\lambda<1$, un point du rayon $(0, 1)$; nous pouvons développer $f(x)$ en série de Taylor autour de ce point:

$$f(x)=\sum_0^\infty \alpha_n(x-\lambda)^n, \tag{11}$$

le rayon de convergence est $1-\lambda$. D'autre part,

$$s_{n_k}(x)=\sum_0^{n_k} \alpha_n^{(k)}(x-\lambda)^n. \tag{12}$$

Comparons les deux développements précédents; nous avons

$$\alpha_n-\alpha_n^{(k)}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(x)-s_{n_k}(x)}{(x-\lambda)^{n+1}}dx=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{r_{n_k}(x)}{(x-\lambda)^{n+1}}dx,$$

l'intégrale étant prise par exemple sur la circonférence $|x-\lambda|=\mu$ $(\lambda+\mu<1)$ d'où, en tenant compte de (2),

$$\frac{1}{n}\log|\alpha_n-\alpha_n^{(k)}|<-\log\mu+\frac{n_k}{n}[\log(\lambda+\mu)+\varepsilon_{n_k}(x)]; \tag{13}$$

d'autre part, nous pouvons tracer une circonférence $(\gamma): |x-\lambda|=\mu'$, $\lambda+\mu'>1$, dont tout point est intérieur, soit au cercle-unité, soit à la région où (5) est valable; alors

$$\alpha_n^{(k)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma)}\frac{s_{n_k}(x)}{(x-\lambda)^{n+1}}dx$$

d'où

$$\frac{1}{n}\log|\alpha_n^{(k)}|<-\log\mu'+H\frac{n_k^{1-v}}{n} \tag{14}$$

où v est un nombre positif inférieur à 1.

La comparaison des inégalités (13) et (14), en tenant compte de $\lambda+\mu<1$, montre immédiatement que si nous faisons croître n et k de telle sorte que

$$\frac{n_k}{n}\to\infty, \quad \frac{n_k^{1-v}}{n}\to 0,$$

ce qui aura lieu en particulier si

$$n_k^l<n<n_k^L, \quad 1-v<l<L<1, \tag{15}$$

les α_n vérifieront l'inégalité

$$\overline{\lim}\frac{1}{n}\log|\alpha_n|\leqq-\log\mu'$$

où μ' est supérieur au rayon de convergence $1-\lambda$ de la série (11).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Si un point frontière du cercle de convergence est un point singulier de $f(x)$ sans être un point-limite des zéros des polynomes-sections s_{n_k}, le développement de $f(x)$ en série de Taylor autour de tout point du rayon qui aboutit à ce point singulier peut se partager en deux séries, dont l'une présente des lacunes de largeur logarithmique relative bornée inférieurement et dont la seconde a un rayon de convergence plus grand.

Reprenons l'hypothèse initiale et considérons un point $x=\xi$ du cercle-unité: $|\xi|<1$, tel que le point singulier le plus voisin de ξ soit le point $x=1$; nous obtenons sans difficulté l'inégalité (13) où λ désigne maintenant $|\xi|$ et μ une quantité positive inférieure à $1-\lambda$, puis l'inégalité (14) où $\mu' > |1-\xi|$ est tel que tout point de la circonférence $|x-\xi|=\mu'$ soit intérieur, ou bien au cercle-unité, ou bien à la région de validité de (5). Le raisonnement précédent reste applicable [5]).

Considérons enfin un point $x=\xi$ intérieur au domaine d'ultraconvergence U de la suite $\{s_{n_k}\}$ et tel que le plus grand cercle de centre ξ intérieur à U n'ait pas sur sa circonférence de point-limite de zéros des s_{n_k}; soit R le rayon de ce cercle. Dans le cercle $|x-\xi|<\mu$, $(\mu<R)$, nous aurons pour r_{n_k} une majoration de la forme

$$\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}| < \log\eta+\varepsilon_{n_k}(x),$$

η étant une quantité inférieure à *un*; (c'est une conséquence immédiate du théorème des deux constantes de MM. Nevanlinna et Ostrowski); en effet, traçons un contour Λ fermé sans point double, entourant le cercle considéré, qui ne sorte pas du domaine d'ultraconvergence et qui pénètre dans le cercle-unité; soit mpn un arc de Λ sur lequel on ait $|x|<q$, $q<1$; considérons la fonction $u(x)$, harmonique dans Λ, qui prend les valeurs $\log q$ sur l'arc mpn et zéro sur l'arc restant: en faisant appel sur mpn à l'inégalité (2) et en remarquant que $\log|r_{n_k}|$ est majoré par une constante sur le reste du contour, on voit que $\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}|$

[5]) On peut en effet prendre pour la circonférence Γ utilisée dans l'établissement de (5) une circonférence de centre ξ, entourant le point $x=1$, qui ne sorte pas de la région obtenue en adjoignant au domaine d'ultraconvergence un voisinage de $x=1$ ne renfermant pas de zéros des s_{n_k} ; dans le cas où cette circonférence contiendrait des points-limites de zéros des s_{n_k}, on tournerait la difficulté comme au début du paragraphe 4.

est majoré à l'intérieur de Λ par $\log \eta + \varepsilon_{n_k}(x)$, ce qui établit l'inégalité cherchée, $\log \eta$ $(\eta < 1)$ désignant le maximum de $u(x)$ dans le cercle $|x - \xi| < \mu$.

On en déduit une inégalité analogue à (13), $\lambda + \mu$ étant remplacé par η, et le raisonnement s'achève comme précédemment.

En résumé: *Pour tout point ξ intérieur soit au cercle-unité, soit au moins au domaine d'ultraconvergence U de la suite $\{s_{n_k}\}$ et tel que le plus grand cercle de centre ξ intérieur à U n'ait pas sur sa circonférence de point-limite de zéros des s_{n_k}, le développement de $f(x)$ en série de Taylor autour de $x = \xi$ présente la structure suivante: c'est la somme d'une série qui a des lacunes de largeur logarithmique relative bornée inférieurement et d'une série à rayon de convergence plus grand.*

Il est vraisemblable que le développement de $f(x)$ autour d'un point quelconque du domaine d'existence présente cette même structure.

6. *La répartition des* $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ *et les zéros des* s_{n_k}. Nous allons indiquer, moyennant certaines hypothèses sur les coefficients, des circonférences qui sont sûrement séparées [6]) du cercle-unité par les zéros des s_{n_k}.

Désignons encore par $r_{(k-1)}(x)$ le reste

$$s_{n_k} - s_{n_{k-1}} = a_{n_{k-1}+1}\, x^{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k} x^{n_k};$$

posons $\alpha_k = \underset{n_{k-1} < n \leqq n_k}{\operatorname{Max}} |a_n|^{\frac{1}{n}}$; nous pouvons écrire

$$r_{(k-1)}(x) = (\alpha_k x)^{n_k} \cdot \varphi_k(x)\,,$$

où

$$\varphi_k(x) = p_0^{(k)} + p_1^{(k)} \cdot \frac{1}{\alpha_k x} + p_2^{(k)} \cdot \frac{1}{(\alpha_k x)^2} + \ldots;$$

$$p_0^{(k)} = \frac{a_{n_k}}{\alpha_k^{n_k}}, \qquad p_1^{(k)} = \frac{a_{n_k-1}}{\alpha_k^{n_k-1}}, \ldots;$$

les $|p_n^{(k)}|$ sont au plus égaux à *un*, et l'égalité est réalisée pour l'un au moins d'entre eux: $|p_{l_k}^{(k)}| = 1$.

---

[6]) Au sens expliqué à la fin du § 3.

Supposons que l'on puisse extraire de la suite des α_k une suite partielle tendant vers une limite α $(0 < \alpha < 1)$; en remplaçant au besoin la suite $\{s_{n_k}\}$ par une suite partielle, nous pouvons supposer que la suite $\{\alpha_k\}$ elle-même a cette propriété. Considérons un domaine $\varDelta$ borné, situé dans la région $|x| > \frac{1}{\alpha}$; les $\varphi_k(x)$ admettent alors une même borne supérieure dans $\varDelta$; on peut en effet majorer leurs modules, à partir d'un certain rang, par les termes correspondants de la série $1+\delta+\delta^2+\ldots$, si l'on a dans $\varDelta$ $\alpha|x| > \eta > 1$ et si l'on prend δ entre 1 et $\frac{1}{\eta}$. Supposons d'autre part l'hypothèse suivante vérifiée:

Hypothèse (H): aucune suite partielle extraite de la suite $\{\varphi_k(x)\}$ ne converge uniformément vers zéro dans $\varDelta$.

Il existe alors un nombre ε et des points x_k de $\varDelta$ tels que $|\varphi_k(x_k)| > \varepsilon$; soit ξ un point-limite des x_k, nous aurons

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| r_{(k-1)}(x_k) \right|^{\frac{1}{n_k}} \geqq |\xi\alpha| > 1. \tag{16}$$

Supposons maintenant que l'on puisse joindre $\varDelta$ au cercle-unité par un chemin qui ne passe par aucun point-limite des zéros des s_{n_k}; on peut alors trouver un domaine D, contenant $\varDelta$ et pénétrant dans le cercle de convergence, qui ne renferme aucun de ces points-limites; par suite, $|s_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}$ tend vers *un* uniformément dans $\varDelta$. On en déduit aussitôt que, pour toute suite y_k de points de $\varDelta$, l'on a

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| r_{(k-1)}(y_k) \right|^{\frac{1}{n_k}} \leqq 1. \tag{17}$$

Les inégalités (16) et (17) sont incompatibles; l'hypothèse (H) jointe à celle-ci: α est limite d'une suite partielle de $\{\alpha_k\}$, entraîne donc la conséquence suivante: la circonférence $|x| = \frac{1}{\alpha}$ (et toute circonférence plus grande) est séparée par les zéros des s_{n_k} du cercle-unité, ainsi d'ailleurs que des autres domaines de convergence de la suite $\{s_{n_k}\}$, comme on le voit par le même raisonnement; ces domaines, s'il en existe, sont donc nécessairement intérieurs au cercle $|x| < \frac{1}{\alpha}$.

Il serait difficile de déduire de l'hypothèse (H) des résultats qui ne soient pas des conséquences particulières du second théorème de M. Ostrowski sur l'ultraconvergence dans les séries de Taylor [7]); mais l'inégalité (16) peut s'obtenir à partir d'hypothèses moins restrictives. Considérons une couronne (C): $R_1 \leqq |x| \leqq R_2$, $R_1 > \frac{1}{\alpha}$, qui contienne Δ; désignons par m_k et η_k les modules maximums de $\varphi_k(x)$ dans (C) et dans Δ; comme les $|\varphi_k|$ sont uniformément bornés dans (C), le théorème des deux constantes, ou un raisonnement déjà employé plusieurs fois dans ce travail, donne l'inégalité $m_k < h\eta_k^\lambda$; h et λ sont des constantes, $0 < \lambda < 1$. D'autre part, il y a un $p_n^{(k)}$ de module 1: $|p_{l_k}^{(k)}| = 1$; en appliquant l'inégalité de Cauchy au terme de degré $-l_k$ dans φ_k, nous obtenons (R quelconque entre R_1 et R_2)

$$m_k R^{l_k} > \frac{1}{(\alpha_k)^{l_k}}$$

ou

$$\eta_k^\lambda > \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{(\alpha_k R)^{l_k}}, \quad \eta_k^{\frac{1}{n_k}} > \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{\lambda n_k}} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_k R}\right)^{\frac{l_k}{\lambda n_k}}.$$

Par suite, *si* $\frac{l_k}{n_k} \to 0$, *l'inégalité* (16) *est encore vérifiée*; si $\frac{l_k}{n_k} < H' < \lambda$, cette inégalité est encore vérifiée après substitution à $|\alpha\xi|$ de la puissance positive $|\alpha\xi|^{1-\frac{H}{\lambda}}$, ce qui ne gêne nullement [8]). Le raisonnement reste donc valable s'il existe un

$$p_{\nu_k}^{(k)} \text{ tel que } |p_{\nu_k}^{(k)}|^{\frac{1}{n_k}} \to 1 \text{ et si } \frac{\nu_k}{n_k} \to 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\nu_k}{n_k} < H < \lambda.$$

Il est clair que les considérations précédentes contiennent en particulier une démonstration du théorème réciproque de M. Ostrowski auquel j'ai fait allusion plus haut.

On peut donner de nombreuses applications. Je me bornerai aux suivantes:

1. *Soit* $\underline{\lim}\, |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} = \beta$; la plus petite valeur que l'on puisse choisir pour α est nécessairement $\geqq \beta$; donc *la circonférence* $|x| = \frac{1}{\beta}$ *est séparée du cercle de convergence par les zéros des* s_{n_k}; *elle renferme les domaines de convergence de la suite* $\{s_{n_k}\}$.

---

[7]) A. Ostrowski, Über Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen [Sitzungsberichte Akad. Berlin **1923**, 185—194].

[8]) Prendre $R = |\xi|$.

2. En particulier, si $\underline{\lim} \mid a_n \mid^{\frac{1}{n}} = \gamma$, la circonférence $|x| = \frac{1}{\gamma}$ est séparée du cercle de convergence par les zéros de toute suite partielle de polynomes-sections, et elle contient tous les domaines de convergences de ces suites.

Ces résultats sont plus précis que ceux que l'on pourrait obtenir en appliquant le lemme énoncé au paragraphe 19 du travail cité [9]).

(Reçu le 5 septembre 1933).

[9]) Voir [1]).