COMPOSITIO MATHEMATICA

T. LEVI-CIVITA

Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 115-162

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__115_0>

Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria

di

T. Levi-Civita
Roma

Si chiama notoriamente *congruenza di linee* (da alcuni autori anche *fascio*) un sistema di curve tali che per ogni punto (di una certa regione) ne passa una e una soltanto. Lo studio generale delle congruenze di linee, tracciate sopra una superficie, risale manifestamente a Gausz che, introducendo coordinate generali, fissò i principali elementi geometrici delle corrispondenti linee coordinate, le quali costituiscono altrettante congruenze. Attraverso una lunga elaborazione si arriva all'assetto sistematico dato dal Ricci alle *coppie* di congruenze ortogonali [1]).

Terne di congruenze, *tessuti*, secondo la terminologia del Blaschke, furono recentemente considerate da questo autore nelle sue geniali ricerche di topologia differenziale, le quali hanno portato lui e la sua scuola a risultati cospicui, schiudendo un nuovo campo di indagine [2]).

Fra le caratteristiche topologiche sono naturalmente incluse le proprietà di appartenenza; non invece le proprietà metriche. Non mi consta che sia mai stata impostata sotto questo punto di vista la geometria differenziale delle terne di congruenze [3]),

---

[1]) Cfr. le sue „Lezioni sulla teoria generale delle superficie" (litografate), Padova (1898). Un cenno si può trovare anche nel Cap. X delle mie „Lezioni di calcolo differenziale assoluto", Roma (1925) (rilevate dalla Casa Editrice Zanichelli di Bologna), quale caso particolare delle ennuple di congruenze ortogonali in una varietà riemanniana ad n dimensioni.

[2]) Veggansi le Abh. math. Seminar Hamburg **6** e seguenti (1928—. . .).

[3]) Fa eccezione il caso particolare di *terne geodetiche*, topologicamente riducibili a tre fasci di rette parallele nel piano. Il Finsterwalder ne indicò fin dal 1899 [Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. **6** (1899), *45—90*] una ingegnosa realizzazione cinematica, mentre altri, in particolare il Volk [Sitzungsberichte Heidelberger Ak. d. Wiss. **1929**] ne determinarono nuove soluzioni, approfondendo la questione sotto l'aspetto matematico. A questo punto la determinazione dell'integrale generale non sarebbe apparsa affrontabile con speranza di successo. Riuscì tuttavia al Drach di conseguirla mercè i penetranti suoi metodi [Comptes Rendus **193** (1931), 897—902].

e quindi dei triangoli costituiti dalle rispettive linee. Nella presente memoria mi propongo di stabilirne i fondamenti con applicazione alla trigonometria dei triangoli curvilinei tracciati sopra una superficie.

INDICE.

CAPITOLO I.

Premesse qualitative e formali — Tessuti esagonali del Blaschke.

CAPITOLO II.

Formule di commutazione intrinseca (ortogonale ed obliqua) — Determinazione metrica dei coefficienti — Applicazione alle terne h.

CAPITOLO III.

Identità di monodromia e sue applicazioni trigonometriche.

CAPITOLO IV.

Identità fornita dal parallelismo e sue applicazioni.

CAPITOLO I

Premesse qualitative e formali — Tessuti esagonali del Blaschke

1. *Generalità — Ordine ciclico — Verso naturale — Angoli ψ_h — Regolarità topologica.*

Sia σ una regione di una ordinaria superficie, in cui siano definite tre distinte congruenze di linee, cui attribuiremo gli indici 1, 2, 3; o, comprensivamente, h, con la solita convenzione

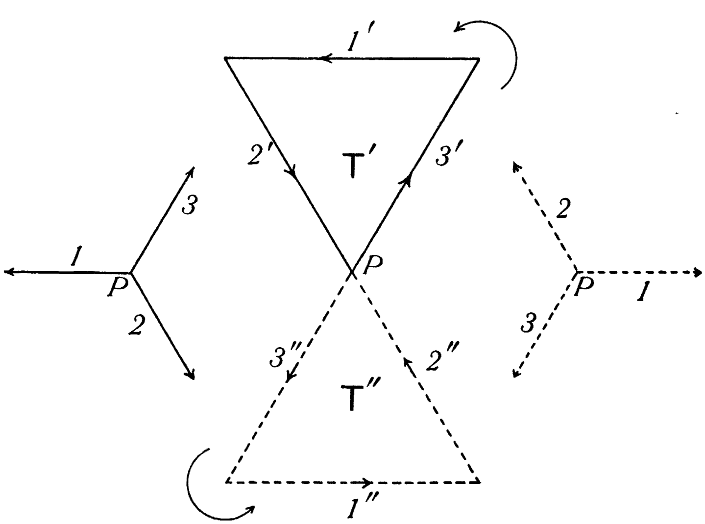

Fig. 1.

di risguardare identici due indici che differiscono per multipli di tre. La congruenza h-esima si designerà semplicemente con $[h]$, e al solito indicheremo per brevità con la stessa lettera h

anche la linea della congruenza $[h]$ passante per un generico punto P di σ.

Intenderemo naturalmente che si tratti di tre congruenze *distinte*, ossia che tali siano le tangenti alle tre linee 1, 2, 3, passanti per un medesimo punto.

Immaginiamo fissato un ordine ciclico per la nostra terna di congruenze: per es. quello crescente (degli indici), caratterizzato da h, $h + 1$, $h + 2$.

Per rendere intuitivo il comportamento *locale*, giova naturalmente pensare al caso elementare in cui le congruenze si riducono a tre (distinti) fasci di rette parallele nel piano. In tal caso, scelto a piacimento un punto P e condotte per esso le rette $h + 1$ e $h + 2$ (cfr. la Fig. 1 in cui è $h = 1$), si determinino due triangoli T' e T'' opposti al vertice in P mediante due rette (parallele) di $[h]$, una da una parte, l'altra dall'altra di P, tali cioè che P risulti interno alla striscia da esse costituita.

È manifesto che l'ordine ciclico 1, 2, 3 (più generalmente h, $h+1$, $h+2$, per h generico) induce, sia su T' che su T'', un ben determinato verso di circolazione, e che tale verso è *lo stesso* per i due triangoli (destro, cioè antiorario nella figura); potremo chiamarlo *verso naturale*, in quanto è caratterizzato, per le tre assegnate congruenze 1, 2, 3, dall'ordine ciclico dei numeri naturali 1, 2, 3. Naturalmente, assieme al verso di circolazione, rimane fissato un corrispondente verso di rotazione (attorno ad un punto generico della regione considerata), il quale *verso* (o senso) *di rotazione* si chiamerà esso pure *naturale*.

Importa ancora rilevare, riferendoci per es. al triangolo T', che il verso naturale suddetto subordina su ciascun lato (e quindi anche su tutte le rette dei tre fasci) una ben determinata direzione positiva. Lo stesso, se ci si serve invece di T''. Però le direzioni positive individuate nei due casi sulle rette di ciascun fascio sono *opposte*. Giova perciò fissare l'attenzione sopra una (a priori qualunque) delle due classi di triangoli T' o T'', tenendo presente che si può, quando si voglia, passare all'altra, invertendo *simultaneamente* le direzioni positive su tutti i tre fasci.

Detti T i triangoli della categoria prescelta, va osservato in primo luogo che essi costituiscono una varietà ∞^3 caratterizzata da una specificazione qualitativa entro la varietà totale, pure ∞^3, che comprende insieme i T' ed i T''.

In un generico triangolo T i tre vertici saranno opportunamente designati con P_h, P_{h+1}, P_{h+2}, convenendo che sia P_h l'intersezione dei lati $h + 1$ e $h + 2$ (che appartengono cioè a congruenze di tali indici). Il verso di percorrenza $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ del perimetro di T è manifestamente quello che abbiamo poc'anzi chiamato *naturale*.

Indicheremo con ψ_h l'angolo (minimo) di cui si deve ruotare, nel verso naturale, dalla retta *orientata* $h+1$ alla retta *orientata* $h+2$, l'orientazione essendo fornita, come si è detto, dal verso naturale dei triangoli T. Siccome, rotando di 2π, si torna al raggio di partenza, così tale somma vale un multiplo intero di 2π. Ma è facile riconoscere che si ha precisamente

$$\sum_1^3{}_h \psi_h = 2\pi\,, \tag{1}$$

in quanto i tre ψ_h, specificati come sopra, si possono anche risguardare come angoli *esterni* di un generico triangolo T; essi risultano in particolare necessariamente compresi fra 0 e π (estremi esclusi).

Le precedenti considerazioni qualitative e la nomenclatura che ne deriva si possono senz'altro trasportare *localmente*, cioè per un intorno abbastanza piccolo σ di un generico punto O, a congruenze non più rettilinee, ma formate da curve qualisivogliono, sopra una superficie generica; basta naturalmente che le curve in questione si suppongano variabili con continuità (debitamente precisata).

Pensando assegnata la metrica della superficie, si potranno definire gli angoli ψ_h, i quali, pur non essendo in generale costanti (come per i fasci di rette parallele), risulteranno pur sempre funzioni continue del posto; le loro determinazioni, *in un medesimo punto P dell'intorno*, seguiteranno a verificare la (1). Viceversa, per i triangoli T dell'intorno, non sarà più vero in generale che la somma degli angoli esterni sia esattamente uguale a 2π.

Vedremo nel n. seguente, passando alla rappresentazione analitica, come ovvie disuguaglianze locali assicurino il detto comportamento (intuitivo per ragione di continuità) in un intorno sufficientemente piccolo di ogni punto O, prefissato sulla superficie di cui si tratta. Volendo evitare ogni ulteriore discussione, basterà assumere per campo σ precisamente un tale intorno.

Rimarrebbe da esaminare — ciò che noi non faremo — se e cosa bisogna aggiungere alle condizioni locali, supposte verificate in ogni punto di un campo σ assegnato a priori, perchè sussista *in tutto il campo* il comportamento qualitativo suaccennato, cioè la *regolarità topologica* della rete triangolare, generata dalle tre congruenze 1, 2, 3.

2. *Rappresentazione analitica in base alla metrica vigente su σ.*

Supponiamo la σ riferita a generiche coordinate curvilinee x^1, x^2, e sia corrispondentemente

$$ds^2 = \sum_{1}^{2}{}_{\mu\nu}\, a_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2}$$

l'espressione del quadrato del suo elemento lineare, che è, ben s'intende, un dato della questione, ogniqualvolta σ sia, come si è supposto, un pezzo di ordinaria superficie, la metrica rimanendo allora necessariamente subordinata dallo spazio euclideo ambiente.

Sia in conformità ds_h l'elemento d'arco di una linea h, a partire da un punto generico P. Attribuiamo alla linea il verso positivo *naturale*, cioè quello risultante, per i triangoli T, dall'ordine ciclico h, $h+1$, $h+2$, nel modo specificato al n. prec.; e immaginiamo di spostarci di ds_h in questo verso, a partire da P. Siano dx^1, dx^2 i corrispondenti incrementi delle coordinate. I *parametri*

$$\lambda_h^\mu \qquad (\mu = 1\,,\, 2)$$

della linea h in P, o, se si vuole, le componenti contravarianti del relativo versore, sono, per definizione,

$$\lambda_h^1 = \frac{dx^1}{ds_h}\,, \qquad \lambda_h^2 = \frac{dx^2}{ds_h}\,, \tag{3}$$

mentre i relativi *momenti* (componenti covarianti del vettore predetto) hanno le espressioni

$$\lambda_{h/\mu} = \sum_{1}^{2}{}_{\nu}\, a_{\mu\nu}\, \lambda_h^\nu \qquad (\mu=1,\, 2;\ h=1,\, 2,\, 3). \tag{4}$$

L'ipotesi che le tre linee h siano distinte in ciascun punto P della regione considerata si specifica metricamente considerando gli angoli (convessi) formati in P dalle direzioni positive delle due linee $h+1$, $h+2$ $(h = 1\,,\, 2\,,\, 3)$. In base alle convenzioni adottate, tali angoli, *necessariamente compresi fra* 0 *e* π, *estremi esclusi*, si presentano altresì (cfr. il n. prec.) come ampiezze delle rotazioni attorno a P, necessarie per passare, sempre nel verso naturale, dalla direzione positiva di $h+1$ a quella di $h+2$; e verificano la relazione

$$\sum_{1}^{3}{}_{h}\, \psi_h = 2\pi\,. \tag{1}$$

Supporremo, per fissare le idee, che le coordinate curvilinee di riferimento siano state scelte in modo che il verso del sistema coordinato coincida con quello naturale; intendendosi con ciò che, per passare, in un punto generico di σ, dalla direzione positiva della linea x^1 ($x^2 = \text{cost.}$) a quella della linea x^2, attraverso l'angolo convesso, si debba appunto ruotare nel verso naturale. Si ha allora, da una formula ben nota [4]), in valore ed in segno,

$$\sin \psi_h = |\sqrt{a}| \begin{vmatrix} \lambda^1_{h+1} & \lambda^2_{h+1} \\ \lambda^1_{h+2} & \lambda^2_{h+2} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

essendo $a > 0$ il discriminante della forma quadratica (2). Per le convenzioni testè richiamate, i $\sin \psi_h$ risultano necessariamente tutti tre positivi. Va altresì rilevato che si può dare al secondo membro un'altra forma, facendo intervenire il tensore ε del Ricci, le cui componenti covarianti $\varepsilon_{\mu\nu}$ sono

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = |\sqrt{a}|\,.$$

Si ha infatti identicamente

$$\sin \psi_h = \sum_{\mu\nu}{}_1^2\, \varepsilon_{\mu\nu}\, \lambda^\mu_{h+1} \lambda^\nu_{h+2}\,. \tag{5'}$$

Ricordiamo ancora che per mezzo del tensore ε si deducono dai parametri λ^ν di un versore generico i momenti

$$\bar{\lambda}_\mu = \sum_\nu{}_1^2\, \varepsilon_{\mu\nu}\, \lambda^\nu \tag{6}$$

del versore ortogonale, e precisamente rotato di 90° nel verso del sistema coordinato (naturale, nel caso presente).

Dalle (5) segue poi

$$\sum_h{}_1^3\, \lambda^\mu_h \sin \psi_h = 0 \qquad (\mu = 1, 2)\,, \tag{7}$$

in quanto sono identicamente nulli i determinanti

$$\begin{vmatrix} \lambda^\mu_1 & \lambda^\mu_2 & \lambda^\mu_3 \\ \lambda^1_1 & \lambda^1_2 & \lambda^1_3 \\ \lambda^2_1 & \lambda^2_2 & \lambda^2_3 \end{vmatrix}.$$

Reciprocamente, supponiamo che, avendo introdotto sopra σ coordinate curvilinee generiche, siano ivi, in un modo qualunque, analiticamente definite tre congruenze di curve. Per ritrovare le formule precedenti con le rilevate specificazioni di segno, si può procedere come segue. Anzitutto (riferendosi all'intorno di un

---

[4]) Cfr. per es. le „Lezioni di calcolo differenziale assoluto" (già citate nella prefazione), Cap. V, formula (9').

ben determinato punto P) si fisserà con criterio provvisoriamente arbitrario la direzione positiva per le linee di ciascuna congruenza. Rimarranno così univocamente determinati come funzioni del posto i parametri λ_h^ν, e la traduzione formale dell'ipotesi che le tre assegnate congruenze siano distinte consisterà nel non annullarsi dei determinanti che figurano al secondo membro delle (5).

Quanto ai segni dei secondi (e quindi anche dei primi) membri, ove nelle (5) stesse, si faccia successivamente $h = 1$, $h = 2$, $h = 3$, sono possibili a priori le tre eventualità seguenti: I tre determinanti sono

a) tutti positivi;

b) tutti negativi;

c) due negativi e uno, sia $\sin \psi_h$, positivo;

d) due positivi e uno, diciamo ancora $\sin \psi_h$, negativo.

Si può sempre ricondursi al caso *a*), disponendo opportunamente della scelta ancora facoltativa del verso del sistema di riferimento, da un lato, e delle direzioni positive delle linee 1, 2, 3, dall'altro. Infatti, nel caso *b*), basta invertire il verso del sistema coordinato (senza toccare le direzioni positive delle linee delle congruenze) perchè tutti tre i determinanti

$$\begin{vmatrix} \lambda_{h+1}^1 & \lambda_{h+1}^2 \\ \lambda_{h+2}^1 & \lambda_{h+2}^2 \end{vmatrix}$$

mutino segno.

Nel caso *c*) basta invertire la direzione positiva della linea h.

Infine, nel caso *d*), questa inversione rende i tre seni negativi riportandoci a *b*); dopo di che, come s'è detto, il cambiamento di verso del sistema coordinato fa ripassare ad *a*).

Possiamo dunque in definitiva limitarci al caso *a*), non senza notare che, invertendo simultameamente le direzioni positive per le linee di ciascuna congruenza, i parametri λ_h^μ cambiano tutti di segno, ciò che non altera i segni dei determinanti e fa perciò restare nello schema *a*).

Ridotti comunque a tale schema *a*), fissiamo un punto generico P di σ e immaginiamo spiccati da P tre raggi r_1, r_2, r_3, nelle direzioni positive delle linee 1, 2, 3. Siamo allora sicuri che, nel verso di rotazione adottato come positivo su σ, questi tre raggi si succedono nell'ordine ciclico 1, 2, 3, sicchè si tratta precisamente di verso *naturale*, mentre

$$\psi_1 = \widehat{23}\,, \quad \psi_2 = \widehat{31}\,, \quad \psi_3 = \widehat{12}$$

risultano tutti tre convessi e quindi di somma 2π.

Ne consegue che (almeno in un intorno abbastanza piccolo del punto P) per entrambe le specie (n. prec.) di triangoli T' e T'', formati dalle linee 1, 2, 3, il verso naturale 1, 2, 3 di circolazione coincide, nello schema a), con quello del sistema coordinato. E a posteriori risulta che, in una delle due specie, da designarsi con T, il verso naturale suddetto subordina proprio le direzioni positive definite dai parametri λ_h^μ.

3. *Derivate rapporto agli archi delle linee h — Normalizzazione triangolare — Invarianza ciclica degli operatori alternati.*

Per una generica funzione del posto $f(x^1, x^2)$ l'operatore differenziale

$$\frac{df}{ds_h} = \sum_{1}^{2}{}_\mu \, \lambda_h^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{8}$$

si interpreta evidentemente come derivata secondo l'arco della linea h. Tali derivate intrinseche hanno, come ben si capisce ed è d'altronde ben noto, particolare importanza per lo studio delle proprietà differenziali delle *singole* congruenze di linee. Quando si voglia, come noi ci proponiamo di fare, trattare in modo simmetrico tre congruenze ad un tempo, giova operare una *normalizzazione triangolare*, sostituendo alle derivazioni intrinseche tre operatori ad esse proporzionali, e precisamente

$$X_h f = \sin \psi_h \frac{df}{ds_h} \qquad (h=1, 2, 3), \tag{9}$$

i quali, in virtu delle (7), sono legati dalla identità

$$\sum_{1}^{3}{}_h \, X_h \equiv 0 \,. \tag{10}$$

Invece due qualunque X sono fra loro indipendenti per l'ipotesi preliminare che le tre congruenze sono distinte, o, se si vuole, per la corrispondente circostanza formale che i determinanti

$$\begin{vmatrix} \lambda_{h+2}^1 & \lambda_{h+1}^2 \\ \lambda_{h+2}^1 & \lambda_{h+2}^2 \end{vmatrix}$$

sono tutti tre diversi da 0.

Comunque dalla (10) scende che l'operatore alternato

$$Y = (X_{h+1}, X_{h+2}) = X_{h+1}X_{h+2} - X_{h+2}X_{h+1} \tag{11}$$

è indipendente da h. Infatti la (10) stessa può essere scritta indifferentemente

$$X_h + X_{h+1} + X_{h+2} \equiv 0 \qquad (h = 1\,,\ 2\,,\ 3)\,,$$

donde, formando l'operatore alternato del primo membro con X_h e tenendo presente che (X_h, X_h) si annulla identicamente, risulta

$$(X_{h+1}\,, X_h) + (X_{h+2}\,, X_h) \equiv 0\,,$$

ossia (cambiando nella prima parentesi l'ordine degli operatori e il segno)

$$(X_{h+2}\,, X_h) \equiv (X_h\,, X_{h+1})\,.$$

Questa identità esprime appunto *l'invarianza ciclica degli operatori alternati,* cioè il fatto che questi non si alterano procedendo (o retrocedendo) nell'ordine ciclico 1, 2, 3.

Rimane così acquisito che dai nostri tre operatori normalizzati del primo ordine X_h, per derivazione ed eliminazione delle derivate seconde, risulta essenzialmente un unico nuovo operatore lineare del primo ordine Y. Data l'indipendenza di due qualisivogliono X, l'operatore Y è certo esprimibile quale loro combinazione lineare. Ma è piu simmetrico risguardare Y quale combinazione lineare di tutti tre gli X_h, ponendo

$$(11') \qquad Y = \sum_{1}^{3}{}_h\, b_h X_h$$

il che è possibile in infiniti modi, lasciando sussistere nelle b l'indeterminazione di un comune termine additivo η (*funzione del posto*) *che rimane a priori arbitrario.*

L'indeterminazione si può naturalmente far scomparire, normalizzando le b con qualche condizione supplementare: richiedendo per es. che la loro somma sia nulla. Ma si ha forse maggiore agilità di calcolo non vincolandosi sistematicamente alla determinazione normalizzata; e noi ci atterremo a questo criterio, con l'intesa di contrassegnarla, quando giovi, con una sopralineatura. Così in particolare $\bar{b}_h$ designerà la determinazione normalizzata delle b, cioè quella determinazione che soddisfa alla condizione

$$(12) \qquad \sum_{1}^{3}{}_h\, \bar{b}_h = 0\,.$$

Tutto ciò si giustifica ovviamente in base alla (10). Infatti si può in primo luogo immaginare Y espresso per *due* degli operatori X, diciamo X_1 ed X_2 sotto la forma

$$Y = b_1' X_1 + b_2' X_2$$

b_1' e b_2' essendo ben determinate funzioni del posto. Ma, in causa della (10), è pur lecito aggiungere al secondo membro

$$b_3 \sum_1^3 {}_h X_h ,$$

essendo b_3 una funzione del posto a priori arbitraria. Si ha allora

$$Y = (b_1' + b_3) X_1 + (b_2' + b_3) X_2 + b_3 X_3 ,$$

e basta assumere in particolare

$$b_3 = -\tfrac{1}{3}(b_1' + b_2')$$

perchè la somma dei coefficienti di X_1, X_2, X_3 verifichi la (12). Dunque la voluta rappresentazione simmetrica di Y è certo conseguibile, e a priori in infiniti modi, l'espressione dei coefficienti contenendo l'addendo indeterminato b_3. Questo in sostanza già mostra che due possibili determinazioni b_h e b_h^* delle b debbono necessariamente presentare differenza costante, nel senso che

$$b_h^* - b_h = \eta$$

con η *indipendente* da h (non in generale dal posto).

Infatti, se è ad un tempo

$$Y = \sum_1^3 {}_h b_h X_h \qquad \text{e} \qquad Y = \sum_1^3 {}_h b_h^* X_h ,$$

per sottrazione, si ha

$$\sum_1^3 {}_h (b_h^* - b_h) X_h = 0 .$$

Le X_h non sono indipendenti, ma legate dalla (10) (e da questa soltanto). Perciò, introducendo un moltiplicatore η a priori arbitrario, la precedente implica

$$\sum_1^3 {}_h (b_h^* - b_h - \eta) X_h \equiv 0 ,$$

c.d.d.

4. *Digressione concernente i tessuti esagonali del Blaschke (reti triangolari del Drach).*

Secondo Blaschke una terna di congruenze costituisce un *tessuto esagonale* quando essa è topologicamente identica, nel nostro campo σ, a tre fasci di rette parallele nel piano. Abbiamo già osservato al n. 1 che ciò ha luogo per una terna qualsiasi nell'intorno *infinitesimo* di un punto generico, cioè a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo. La restrizione topologica di cui si tratta (e di cui il Blaschke ha dato una elegante caratterizzazione geometrica mediante gli esagoni che hanno per lati coppie di linee delle tre congruenze) concerne invece *intorni* (comunque piccoli, ma) *finiti.*

Ciò posto, facciamo un'applicazione delle nostre formule, discriminando in base ad esse le terne esagonali. Gioverà prendere le mosse dall'osservazione che, adottando coordinate cartesiane ortogonali nel piano, i parametri λ_h^{μ} $(\mu = 1, 2)$ si identificano coi coseni direttori delle linee h, e sono quindi costanti, quando si tratta di fasci di rette parallele. Ciascuno di questi ha per equazione cartesiana

$$\overset{1}{\lambda}_h y - \overset{2}{\lambda}_h x = \text{cost.}\,,$$

scrivendo x, y in luogo di x^1, x^2. Naturalmente si può anche moltiplicare per il fattore costante $\sin\psi_h$ e scrivere

$$u_h \equiv \sin\psi_h\,(\overset{1}{\lambda}_h y - \overset{2}{\lambda}_h x) = \text{cost.}\,,$$

con che, in causa delle (6), rimane accertato (come si potrebbe del resto riconoscere anche con altre ovvie riflessioni di geometria analitica elementare) che i parametri u_h di tre fasci di rette parallele possono sempre essere scelti in modo da verificare l'identità

$$\sum_{1}^{3}{}_h\, u_h = 0\,. \tag{13}$$

È questa in sostanza l'unica loro caratteristica topologica. Per trasportarla al caso generale, basta pensare che il parametro di una generica $[h]$, cioè ogni funzione $f(x^1, x^2)$, che, eguagliata a costante, definisce le linee della congruenza, altro non è che una particolare soluzione della equazione a derivate parziali $\dfrac{df}{ds_h} = 0$, ossia di

$$X_h f = 0\,. \tag{14}$$

Saranno dunque *esagonali* tutte e sole le terne di congruenze per cui si possono trovare tre effettive [5]) funzioni u, ognuna soluzione della rispettiva (14), per le quali sussiste la (13).

---

[5]) Cioè non riducentisi a costante, per modo che $u_h = \text{cost.}$ definisca una congruenza di linee.

Siamo così ricondotti a cercare quale sia, per i dati della questione, cioè per gli operatori X_h, la condizione all'uopo necessaria e sufficiente.

Condizione necessaria.

Supponendo che sussista effettivamente la (13), scriviamola sotto la forma

$$u_h + u_{h+1} + u_{h+2} = 0\ ,$$

e applichiamo ai due membri l'operatore X_h. Tenendo conto che, per definizione, $X_h u_h = 0$, si ricava

$$X_h u_{h+1} + X_h u_{h+2} = 0\ .$$

All'operatore X_h si può sostituire $-(X_{h+1} + X_{h+2})$. Operiamo questa sostituzione, una prima volta nel secondo termine soltanto, una seconda volta in tutti due. Tenendo conto di $X_{h+2}u_{h+2} = 0$, nonchè di $X_{h+1}u_{h+1} = 0$, si ricava

$$X_h u_{h+1} = X_{h+1} u_{h+2}\ , \tag{15}$$

$$X_{h+2} u_{h+1} + X_{h+1} u_{h+2} = 0\ . \tag{16}$$

Dalla (15) apparisce che $X_h u_{h+1}$ (per $h = 1, 2, 3$) non si altera, aumentando gli indici di una unità. In altri termini si può porre

$$X_{h+1} u_{h+2} = p\ , \tag{15'}$$

essendo p indipendente da h. Con ciò la (16) diviene

$$X_{h+2} u_{h+1} = -p\ . \tag{16'}$$

Ne desumiamo, con ovvia rotazione degli indici in questi due gruppi (15') e (16'), che le tre funzioni u_h (di cui abbiamo supposto l'esistenza) devono verificare, ciascuna, il seguente sistema di equazioni a derivate parziali:

$$\begin{cases} X_h u_h = 0\ , \\ X_{h+1} u_h = -p\ , \\ X_{h+2} u_h = p\ , \end{cases} \tag{17}$$

in cui p designa una funzione a priori indeterminata.

Formandone le condizioni di integrabilità, ci verrà fatto, in base alle (11) e (12), di eliminare la p, pervenendo ad un'unica equazione nelle b. Le condizioni di integrabilità delle (17) sono fornite dall'eguagliare le espressioni dei tre operatori alternati

$$(X_{h+1}\, , X_{h+2})\, u_h\, ,\ (X_{h+2}\, , X_h)\, u_h\, ,\ (X_h\, , X_{h+1})\, u_h\, ,$$

che si ottengono dalle (17) stesse, al loro valore comune Yu_h, il quale, per le (11′) e (17), si esplicita come segue

$$Yu_h = (b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3)u_h = -\beta_h p\,,$$

avendo posto per brevità di scrittura

$$\beta_h = b_{h+1} - b_{h+2} \qquad (h = 1\,,\ 2\,,\ 3)\,. \tag{18}$$

Le tre conseguenze differenziali di ciascun sistema (17) si riducono così, tenendo conto dell'identità fondamentale (10), ad una soltanto, e precisamente a

$$X_h p = \beta_h p\,. \tag{19}$$

Non può essere $p = 0$, perchè altrimenti le (17) implicherebbero, attesa l'indipendenza di due generici operatori X, $u_h = \text{cost.}$, mentre noi supponiamo che le u siano effettive funzioni. Possiamo perciò porre

$$p = e^q\,, \tag{20}$$

con che le equazioni (19) in p divengono

$$X_h q = \beta_h \qquad (h = 1\,,\ 2\,,\ 3). \tag{19′}$$

Queste tre equazioni differenziali nella ausiliaria q si riducono ovviamente a due, in causa della (10) e dell'identità

$$\sum_1^3{}_h\, \beta_h = 0\,,$$

che è una necessaria conseguenza delle posizioni (18). Comunque esse danno luogo ad una condizione di integrabilità (e ad una soltanto) la quale, per le solite (11) e (11′), si scrive

$$Yq = \sum_1^3{}_h\, b_h X_h q\,.$$

Il secondo membro si annulla in virtù di (19′) e (18), e il primo, ove si assuma Yq sotto la forma

$$X_{h+1}X_{h+2}q - X_{h+2}X_{h+1}q$$

e si introducano per $X_{h+1}q$, $X_{h+2}q$ le loro espressioni (19′), dà

$$X_{h+1}\beta_{h+2} - X_{h+2}\beta_{h+1}\,,$$

ossia, per le (18) e (10),

$$X_{h+1}(b_h - b_{h+1}) - X_{h+2}(b_{h+2} - b_h) = -X_h b_h - X_{h+1}b_{h+1} - X_{h+2}b_{h+2}\,.$$

Dunque

$$\sum_{1}^{3}{}_h X_h b_h = 0 \tag{21}$$

è condizione necessaria per l'esagonalità di una terna di congruenze.

Reciprocamente si verifica subito che la (21) è anche

Condizione sufficiente.

Infatti la (21) costituisce, per quanto s'è visto or ora, l'unica condizione di integrabilità del sistema (19'). Se essa è soddisfatta, esiste una funzione q, determinata a meno di una costante additiva, la quale verifica le (19'), quindi una p *non nulla*, e determinata a meno di una costante moltiplicativa, la quale verifica le (19). Ma queste non sono altro che le condizioni di integrabilità delle (17), o più precisamente di ciascuno dei tre sistemi (17) corrispondenti ad $h = 1$, $h = 2$, $h = 3$. Ciascuno di questi ammette pertanto una soluzione u_h, determinata a meno di una costante additiva. Essendo $p \neq 0$, nessuna u_h è costante, quindi le equazioni u_h=cost. definiscono effettivamente tre congruenze di curve. Resta da riconoscere che, con opportuna scelta delle costanti additive, ancora a nostra disposizione nelle u_h, si soddisfa alla (13). All'uopo basta osservare che, in virtù delle (17),

$$X_h (u_1 + u_2 + u_3) = 0 \quad (h = 1, 2, 3).$$

Siccome gli operatori X_h sono due a due indipendenti, la somma $u_1 + u_2 + u_3$ si riduce necessariamente a una costante, arbitraria; ed è quindi lecito assumerla nulla. Va infine osservato che *si tratta certo di congruenze distinte*, ossia di funzioni u_h, due a due indipendenti. Infatti consideriamo per es. u_{h+1} e u_{h+2}, e notiamo che la prima e seconda delle (17), in cui si cambi h in $h + 1$, danno

$$X_{h+1} u_{h+1} = 0 \,, \qquad X_{h+2} u_{h+1} = -\, p \,,$$

mentre la terza e prima delle stesse (17), con lo scambio di h in $h+2$, danno

$$X_{h+1} u_{h+2} = p \,, \qquad X_{h+2} u_{h+2} = 0 \,.$$

I due operatori X_{h+1} e X_{h+2} essendo indipendenti, saranno tali due funzioni u_{h+1} e u_{h+2} allora e soltanto allora che sia diverso da 0 il determinante

$$\begin{vmatrix} X_{h+1} u_{h+1} & X_{h+2} u_{h+1} \\ X_{h+1} u_{h+2} & X_{h+2} u_{h+2} \end{vmatrix}$$

Ora questo, per le (17), ha appunto il valore $p^2 \neq 0$,

c.d.d.

CAPITOLO II

Formule di commutazione intrinseca (ortogonale ed obliqua) — Interpretazione metrica dei coefficienti — Applicazione alle terne $[h]$.

1. *Richiami concernenti le coppie di congruenze ortogonali.*

È ben noto [6]) che, se sono date sopra una superficie due congruenze *ortogonali*, e $\frac{d}{ds}$ e $\frac{d}{d\bar{s}}$ denotano le derivate rispetto agli archi delle corrispondenti curve C, $\bar{C}$, vale, per questi due operatori, la formula di commutazione

$$\left(\frac{d}{ds}, \frac{d}{d\bar{s}}\right) = \frac{d}{ds}\frac{d}{d\bar{s}} - \frac{d}{d\bar{s}}\frac{d}{ds} = -\gamma\frac{d}{ds} - \bar{\gamma}\frac{d}{d\bar{s}}, \tag{1}$$

dove γ, $\bar{\gamma}$ rappresentano le rispettive curvature geodetiche *con segno.* Il segno va specificato come segue: Si intende assunto come verso positivo sulla superficie quello che fa passare (attraverso l'angolo convesso) dalla direzione positiva di C a quella di $\bar{C}$. Rotando di 90^0 in tale verso positivo, si trasporta l'orientazione positiva delle tangenti alle rispettive normali; γ e $\bar{\gamma}$ rappresentano allora le curvature di C e di $\bar{C}$, prese ciascuna con segno $+$ o con segno $-$, secondo che il verso suddetto sulla normale è o non è rivolto verso la concavità della curva rispettiva.

Si può anche dire, introducendo i vettori di curvatura $\boldsymbol{p}$, $\bar{\boldsymbol{p}}$, cioè i vettori che hanno per lunghezze i valori assoluti delle curvature e sono diretti secondo le normali (superficiali) a C, $\bar{C}$, verso le rispettive concavità, che γ e $\bar{\gamma}$ sono le componenti di $\boldsymbol{p}$ e di $\bar{\boldsymbol{p}}$ secondo le direzioni che provengono dalle direzioni positive di C e di $\bar{C}$, rotando di 90^0 nel verso positivo.

Se λ^μ, $\bar{\lambda}^\mu$ designano i parametri delle due congruenze ortogonali di cui si tratta, e λ_μ, $\bar{\lambda}_\mu$ i rispettivi momenti, le espressioni di γ, $\bar{\gamma}$ sono fornite dalle formule del Ricci. Per trascriverle occorre ricordare che esiste un vettore superficiale $\boldsymbol{\varphi}$, introdotto appunto dal Ricci, di componenti covarianti φ_ν, tale che si ha, per le derivate covarianti dei momenti delle due congruenze ortogonali,

$$\lambda_{\mu\nu} = \bar{\lambda}_\mu \varphi_\nu, \qquad \bar{\lambda}_{\mu\nu} = -\lambda_\mu \varphi_\nu. \tag{2}$$

Il vettore $\boldsymbol{\varphi}$ si chiama *vettore di fascio,* perchè spetta a *tutto il fascio di congruenze isogonali* alle C.

---

[6]) ed esposto sistematicamente nell' opera del Ricci, nonchè riassunto nelle mie „Lezioni . . ." [1]).

Per le curvature di C e di $\bar{C}$ si hanno le espressioni

$$(3) \qquad \gamma = \sum_1^2{}_\mu \varphi_\mu \lambda^\mu, \quad \bar{\gamma} = \sum_1^2{}_\mu \varphi_\mu \bar{\lambda}^\mu,$$

le quali corrispondono alle componenti del vettore $\boldsymbol{\varphi}$ secondo le rispettive tangenti.

Si può anche aggiungere che la teoria generale delle ennuple ortogonali darebbe, per $n=2$, le formule

$$\gamma = \sum_1^2{}_{\mu\nu} \lambda_{\mu\nu} \bar{\lambda}^\mu \lambda^\nu = -\sum_1^2{}_{\mu\nu} \bar{\lambda}_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu, \qquad \bar{\gamma} = -\sum_1^2{}_{\mu\nu} \bar{\lambda}_{\mu\nu} \lambda^\mu \bar{\lambda}^\nu = \sum_1^2{}_{\mu\nu} \lambda_{\mu\nu} \bar{\lambda}^\mu \bar{\lambda}^\nu$$

le quali si identificano effettivamente con le (3) in virtù delle (2).

Per lo scopo che abbiamo in vista, ci occorre ancora qualche elemento derivante dall'associare alle curve C e loro traiettorie ortogonali, un'altra coppia ortogonale di congruenze di curve C' e $\bar{C}'$. Si adotteranno naturalmente, per questa seconda coppia ortogonale, analoghe notazioni accentate, designandosi con λ'^μ, $\bar{\lambda}'^\mu$ i parametri, con λ_μ, $\bar{\lambda}'_\mu$ i momenti; e con φ'_μ le componenti covarianti del vettore di fascio $\boldsymbol{\varphi}'$. E si intenderà che le due coppie ortogonali siano congruenti, cioè che le direzioni positive di C', $\bar{C}'$ possano ottenersi facendo ruotare di un medesimo angolo ψ (nel verso diretto) la coppia corrispondente alle direzioni positive di C, $\bar{C}$.

Come già si è osservato, nel caso particolare di congruenze *isogonali*, caratterizzate dall'essere ψ costante, il vettore $\boldsymbol{\varphi}'$ coincide con $\boldsymbol{\varphi}$. In generale quando cioè ψ può variare comunque col posto, sussistono le relazioni del Ricci

$$(4) \qquad \psi_\mu = \varphi'_\mu - \varphi_\mu \qquad (\mu = 1,\ 2),$$

dove ψ_μ sta manifestamente per $\dfrac{\partial \psi}{\partial x^\mu}$.

Quanto alle curvature γ', $\bar{\gamma}'$ della nuova coppia ortogonale di curve C' e $\bar{C}'$, si hanno naturalmente espressioni analoghe alle (3), cioè

$$(5) \qquad \gamma' = \sum_1^2{}_\mu \varphi'_\mu \lambda'^\mu, \quad \bar{\gamma}' = \sum_1^2{}_\mu \varphi'_\mu \bar{\lambda}'^\mu.$$

Vanno pur rilevate, perchè dovremo usarle tra un momento, nonchè nel n. seg., le relazioni (di trasformazione ortogonale) fra i parametri λ^μ, $\bar{\lambda}^\mu$; λ'^μ, $\bar{\lambda}'^\mu$ delle due coppie, che sono

$$
\begin{aligned}
&(6) \qquad \lambda^\mu = \lambda'^\mu \cos\psi - \bar\lambda'^\mu \sin\psi\,, \\
&(7) \qquad \lambda'^\mu = \lambda^\mu \cos\psi + \bar\lambda^\mu \sin\psi
\end{aligned}
\qquad (\mu = 1,\ 2)\,.
$$

Mercè queste formule si possono esprimere le *curvature miste*

$$(8) \qquad m = \sum_1^2{}_\mu\, \varphi_\mu \lambda'^\mu, \quad m' = \sum_1^2{}_\mu\, \varphi'_\mu \lambda^\mu\,,$$

cioè le componenti dei vettori $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\varphi}'$ secondo C' e C, mediante le quattro curvature geodetiche γ, $\bar\gamma$, γ', $\bar\gamma'$ delle due coppie di congruenze ortogonali e la loro inclinazione ψ. Basta introdurre nei secondi membri delle (8), al posto di λ^μ, λ'^μ, le loro espressioni (6) e (7) e aver riguardo alle (3) e (5) rispettivamente. Risulta così

$$(9) \qquad m = \gamma \cos\psi + \bar\gamma \sin\psi\,, \quad m' = \gamma' \cos\psi - \bar\gamma' \sin\psi\,,$$

le quali si sarebbero anche potute scrivere senz'altro, cioè senza risalire alle (6), (7), badando, per la prima di esse, unicamente alla circostanza che γ, $\bar\gamma$, m sono componenti (ortogonali) di uno stesso vettore $\boldsymbol{\varphi}$ secondo le due direzioni ortogonali C, $\bar C$ e secondo C', che ha, rispetto ad esse, i coseni direttori $\cos\psi$, $\sin\psi$; analogamente per la seconda.

Un'altra notevole espressione delle stesse curvature miste si ha liberandole dalle curvature $\bar\gamma$, $\bar\gamma'$ delle traiettorie ortogonali e facendovi apparire in loro vece le derivate dell'angolo ψ, nonchè, come sopra, le rispettive curvature geodetiche γ, γ'. Vi si perviene agevolmente moltiplicando le (4), una prima volta per λ^μ, una seconda per λ'^μ, e sommando ciascuna volta rispetto a μ. Ove si tenga presente che, per una generica funzione f del posto, le derivate intrinseche, secondo gli archi delle curve C e C', sono definite da

$$(10) \qquad \frac{df}{ds} = \sum_1^2{}_\mu\, f_\mu \lambda^\mu\,, \quad \frac{df}{ds'} = \sum_1^2{}_\mu f_\mu \lambda'^\mu \quad \left(f_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right),$$

si ha immediatamente, badando alle (8) nonchè alle definizioni (3) e (5) di γ e di γ',

$$\frac{d\psi}{ds} = m' - \gamma\,, \quad \frac{d\psi}{d\bar s} = \gamma' - m\,,$$

ossia

$$(11) \qquad m = \gamma' - \frac{d\psi}{d\bar s}\,, \quad m' = \gamma + \frac{d\psi}{ds}\,.$$

2. *Commutazione obliqua.*

Ci proponiamo ora di estendere la formula di commutazione (1) dal caso ortogonale a quello generico di due operatori (10), corrispondenti a congruenze di curve C, C', *oblique*, formanti cioè un angolo ψ, funzione generica del posto.

Si ha per definizione

$$\left(\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds'}\right) f = \frac{d}{ds}\frac{df}{ds'} - \frac{d}{ds'}\frac{df}{ds} =$$

$$= \frac{d}{ds}\sum_{1}^{2}{}_{\mu}\, f_\mu \lambda'^{\mu} - \frac{d}{ds'}\sum_{1}^{2}{}_{\mu}\, f_\mu \lambda^{\mu},$$

dopo di che, esplicitando gli operatori $\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds'}$, applicando ai sommatori la regola di derivazione covariante, e tenendo conto che (per la simmetria delle derivate seconde covarianti) i termini contenenti derivate seconde $f_{\mu\nu}$ si elidono, risulta

$$\left(\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds'}\right) f = \sum_{1}^{2}{}_{\mu\nu} f_\mu \{\lambda^\nu (\lambda'^{\mu})_\nu - \lambda'^{\nu}(\lambda^{\mu})_\nu\},$$

ossia, per una ben nota regola di calcolo assoluto (ovvio corollario del lemma di Ricci)

$$\left(\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds'}\right) f = \sum_{1}^{2}{}_{\mu\nu}\, f^{\mu}\{\lambda^\nu \lambda'_{\mu\nu} - \lambda'^{\nu}\lambda_{\mu\nu}\}.$$

Introducendo le componenti covarianti dei vettori di fascio $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\varphi}'$, si ha dalle formule (2)

$$\lambda_{\mu\nu} = \bar{\lambda}_\mu \varphi_\nu, \quad \lambda'_{\mu\nu} = \bar{\lambda}'_\mu \varphi'_\nu,$$

con che, in base alle definizioni (8) delle curvature miste $\left(\text{e alla identità } \sum_{1}^{2}{}_{\mu}\, \bar{\lambda}_\mu f^{\mu} = \sum_{1}^{2}{}_{\mu}\, \bar{\lambda}^{\mu} f_\mu\right)$, risulta

$$\left(\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds'}\right) f = m' \sum_{1}^{2}{}_{\mu}\, \bar{\lambda}'^{\mu} f_\mu - m \sum_{1}^{2}{}_{\mu}\, \bar{\lambda}^{\mu} f_\mu.$$

Per far apparire l'operatore alternato del primo membro quale combinazione lineare dei due operatori $\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds'}$, basta sostituire ai parametri $\bar{\lambda}'^{\mu}$, $\bar{\lambda}^{\mu}$ delle direzioni ortogonali (a C e C' rispettivamente) le loro espressioni mediante λ^{μ}, λ'^{μ}, fornite rispettivamente dalle (6) e (7). Si ha così, moltiplicando anche per $\sin\psi$,

$$\sin\psi \left(\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds'}\right) f = m' \sum_{1}^{2}{}_{\mu}\, f_\mu(-\lambda^{\mu} + \lambda'^{\mu}\cos\psi) + m \sum_{1}^{2}{}_{\mu}\, f_\mu(-\lambda'^{\mu} + \lambda^{\mu}\cos\psi),$$

quindi, in base alle (10),

$$\sin\psi\left(\frac{d}{ds},\frac{d}{ds'}\right)f=\Gamma\frac{df}{ds}+\Gamma'\frac{df}{ds'},\tag{12}$$

avendo posto

$$\Gamma=-m'+m\cos\psi,\qquad \Gamma'=-m+m'\cos\psi,\tag{13}$$

ossia, in quanto si sostituiscano alle curvature miste i loro valori espliciti (9),

$$\left\{\begin{aligned}\Gamma&=-(\gamma'\cos\psi-\bar\gamma'\sin\psi)+\cos\psi\cdot(\gamma\cos\psi+\bar\gamma\sin\psi)\,,\\ \Gamma'&=-(\gamma\cos\psi+\bar\gamma\sin\psi)+\cos\psi\cdot(\gamma'\cos\psi-\bar\gamma'\sin\psi)\,,\end{aligned}\right.\tag{13'}$$

mentre, usando delle (11), risulta

$$\left\{\begin{aligned}\Gamma&=-\gamma+\gamma'\cos\psi-\frac{d\psi}{ds}-\cos\psi\cdot\frac{d\psi}{ds'},\\ \Gamma'&=-\gamma'+\gamma\cos\psi+\frac{d\psi}{ds'}+\cos\psi\,.\,\frac{d\psi}{ds}.\end{aligned}\right.\tag{13''}$$

Nel caso particolare di due operatori ortogonali $\left(\psi=\frac{\pi}{2}\right)$, si ha dalle (11) $m=\gamma'$, $m'=\gamma$ [7]), mentre le (13') o (13") si riducono a

$$\Gamma=-\gamma,\quad \Gamma'=-\gamma',$$

e quindi la (12) alla consueta forma (1).

Gioverà da ultimo osservare che l'operatore alternato $\left(\frac{d}{ds},\frac{d}{ds'}\right)$ cambia necessariamente di segno quando si scambiano i due operatori $\frac{d}{ds}$ e $\frac{d}{ds'}$. Siccome tale scambio implica inversione di senso e quindi di segno per l'angolo ψ, il primo membro della (12) non si altera quando si permutano le due coppie ortogonali. Lo stesso deve quindi accadere anche per il secondo membro, il che in definitiva richiede che si scambino tra loro i due coefficienti Γ e Γ'. Per verificarlo formalmente sulle (9) e (13), ovvero sulle (13'), basta tener presente che lo scambio delle due coppie di congruenze implica quello delle rispettive curvature geodetiche γ e γ', nonche di $\bar\gamma$, $\bar\gamma'$, e che inoltre muta segno a ψ.

---

[7]) Naturalmente gli stessi valori si ricavano anche dalle (9). Basta osservare che per $\psi=\frac{\pi}{2}$ esse si riducono a $m=\bar\gamma$ e $m'=-\bar\gamma$. Ora $\bar\gamma$ coincide appunto con γ', perchè, quando $\psi=\frac{\pi}{2}$, si tratta in entrambi i casi di curvatura di linee rotate di 90° a partire da C in senso diretto; mentre $\bar\gamma'$ differisce da γ per il segno, poichè tale curvatura si riferisce a linee inclinate (sempre nel senso diretto) di 90° su C' e quindi di 180° su C.

3. *Notazioni appropriate per due operatori* $\frac{d}{ds_{h+1}}$ *e* $\frac{d}{ds_{h+2}}$.

Immaginando che $h+1$ corresponda a C e $h+2$ a C', conviene naturalmente designare con γ_{h+1} e γ_{h+2} (anzichè con γ, γ') le curvature geodetiche di queste due linee; con $\bar{\gamma}_{h+1}$, $\bar{\gamma}_{h+2}$ (anzichè con $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}'$) le curvature geodetiche delle loro traiettorie ortogonali. I due coefficienti Γ e Γ' della formula di commutazione, i quali dipendono dalla coppia di operatori e si scambiano fra loro quando si inverte l'ordine degli operatori stessi, appariscono opportunamente rappresentati da una stessa lettera, che sarà ancora Γ, munita dei due indici $h+1$, $h+2$ nei due possibili ordini di successione. Avremo in conformità, la ψ del n. prec. essendo ora la ψ_h del Cap. I,

$$\sin\psi_h\left(\frac{d}{ds_{h+1}}, \frac{d}{ds_{h+2}}\right)f = \Gamma_{h+1,\,h+2}\frac{df}{ds_{h+1}} + \Gamma_{h+2\,,\,h+1}\frac{df}{ds_{h+2}}, \tag{14}$$

i coefficienti Γ avendo, in base alle (13′), le espressioni

$$\begin{cases} \Gamma_{h+1,\,h+2} = -(\gamma_{h+2}\cos\psi_h - \bar{\gamma}_{h+2}\sin\psi_h) + \cos\psi_h(\gamma_{h+1}\cos\psi_h + \bar{\gamma}_{h+1}\sin\psi_h), \\ \Gamma_{h+2\,,\,h+1} = -(\gamma_{h+1}\cos\psi_h + \bar{\gamma}_{h+1}\sin\psi_h) + \cos\psi_h(\gamma_{h+2}\cos\psi_h - \bar{\gamma}_{h+2}\sin\psi_h), \end{cases} \tag{15}$$

e, in base alle (13″), le espressioni

$$\begin{cases} \Gamma_{h+1\,,\,h+2} = -\gamma_{h+1} + \gamma_{h+2}\cos\psi_h - \frac{d\psi_h}{ds_{h+1}} - \cos\psi_h\cdot\frac{d\psi_h}{ds_{h+2}}, \\ \Gamma_{h+2\,,\,h+1} = -\gamma_{h+2} + \gamma_{h+1}\cos\psi_h + \frac{d\psi_h}{ds_{h+2}} + \cos\psi_h\cdot\frac{d\psi_h}{ds_{h+1}}, \end{cases} \tag{16}$$

involgenti le sole curvature geodetiche delle due linee $h+1$, $h+2$ e l'angolo ψ_h (colle sue due derivate).

Naturalmente in tutte queste formule h può assumere i valori 1, 2, 3, con la solita convenzione riguardo agli indici che differiscono di 3 o di multipli di 3.

4. *Curvatura triangolare.*

Premettiamo l'osservazione che le tre differenze

$$X_{h+1}\psi_{h+2} - X_{h+2}\psi_{h+1}$$

sono uguali tra loro. Si ha infatti, sostituendo, in quella testè scritta, $-(X_{h+2}+X_h)$ al posto di X_{h+1} e $2\pi-(\psi_{h+2}+\psi_h)$ al posto di ψ_{h+1}

$$-(X_{h+2}+X_h)\psi_{h+2} + X_{h+2}(\psi_{h+2}+\psi_h) = X_{h+2}\psi_h - X_h\psi_{h+2},$$

che ne mostra l'invarianza rispetto alla solita sostituzione circolare sui tre indici 1, 2, 3.

Si può quindi porre

$$X_{h+1}\psi_{h+2} - X_{h+2}\psi_{h+1} = 3\tau\,, \tag{17}$$

con τ indipendente da h. Manifestamente si tratta (in generale) di una funzione del posto, avente le dimensioni di una curvatura, in quanto combinazione lineare di derivate di angoli rispetto ad archi. Il fatto che τ dipende in modo simmetrico dai tre angoli ψ_h e loro derivate giustifica la denominazione di *curvatura triangolare*. Essa si può anche esprimere come combinazione lineare delle tre curvature geodetiche γ_h (per $h = 1\,,\,2\,,\,3$) : ed ecco come.

Si applichi la relazione (4) del Ricci (fra i vettori $\boldsymbol{\varphi}$ di due congruenze e l'angolo ψ da esse formato in un punto generico) alle nostre congruenze $h+1\,,\ h+2$. L'angolo ψ è allora ψ_h, e i due vettori di fascio $\boldsymbol{\varphi}_{h+1}$, $\boldsymbol{\varphi}_{h+2}$ hanno le componenti covarianti $\varphi_{h+1/\mu}$, $\varphi_{h+2/\mu}$; sicchè la (4) si scrive

$$\varphi_{h+2/\mu} - \varphi_{h+1/\mu} = \psi_{h/\mu}\,.$$

Ricaviamone successivamente $X_{h+1}\psi_{h+2}$, $X_{h+2}\psi_{h+1}$. Per la prima espressione si dovrà far apparire ψ_{h+2}, e quindi cambiare, nella relazione testè ricavata, h in $h+2$, il che dà

$$\varphi_{h+1/\mu} - \varphi_{h/\mu} = \psi_{h+2/\mu}\,.$$

Siccome per definizione

$$X_{h+1}f = \sin\psi_{h+1}\frac{df}{ds_{h+1}} = \sin\psi_{h+1}\sum_1^2{}_\mu\, \lambda^\mu_{h+1} f_\mu\,,$$

si otterrà, dal secondo membro della relazione precedente, X_{h+1} applicato a ψ_{h+2} moltiplicando per $\sin\psi_{h+1}\cdot\lambda^\mu_{h+1}$ e sommando rispetto a μ. Avuto riguardo alla prima delle formule (3), applicata alla congruenza $h+1$, si ottiene

$$\gamma_{h+1}\sin\psi_{h+1} - \sum_1^2{}_\mu\, \varphi_{h/\mu}\sin\psi_{h+1}\cdot\lambda^\mu_{h+1} = X_{h+1}\psi_{h+2}\,.$$

In modo analogo si stabilisce la

$$\sum_1^\mu{}_h\, \varphi_{h/\mu}\sin\psi_{h+2}\cdot\lambda^\mu_{h+2} - \gamma_{h+2}\sin\psi_{h+2} = X_{h+2}\psi_{h+1}\,,$$

donde, per sottrazione, attesa la identità (7) del Cap. I e ancora una volta la (3) (riferita alla congruenza $[h]$), discende

$$\sum_1^3{}_h\, \gamma_h\sin\psi_h = X_{h+1}\psi_{h+2} - X_{h+2}\psi_{h+1} = 3\tau\,.$$

La curvatura triangolare τ definita dalla (17) *può dunque anche esprimersi sotto la forma*

$$(17') \qquad \tau = \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{3} \gamma_h \sin\psi_h .$$

5. *Alternatore triangolare.*

L'operatore

$$(18) \qquad Af = \sum_{h=1}^{3} \sin\psi_{h+1} \sin\psi_{h+2} \left(\frac{d}{ds_{h+1}}, \frac{d}{ds_{h+2}}\right) f$$

che, in quanto combinazione lineare degli operatori alternati $\left(\frac{d}{ds_{h+1}}, \frac{d}{ds_{h+2}}\right)$, è esso pure del primo ordine, ed ha d'altra parte carattere invariantivo rispetto alle sostituzioni circolari sugli indici 1, 2, 3, si dirà *alternatore triangolare.*

Qualsiasi operatore lineare può, come già si osservò a proposito di Yf (Cap. I, n. 3), essere espresso come combinazione lineare degli operatori normalizzati $X_h f$. Sarà così in particolare

$$(19) \qquad Af = \sum_{h=1}^{3} a_h X_h f ,$$

i tre coefficienti a_h essendo determinati a meno di un addendo comune ξ. Indichiamo una delle loro possibili espressioni esplicite. Si ha in primo luogo dalla (14) e dalla definizione degli operatori normalizzati X_h come prodotti di $\sin\psi_h$ per $\frac{d}{ds_h}$:

$$Af = \sum_{h=1}^{3} \left\{ \frac{\sin\psi_{h+2}}{\sin\psi_h} \Gamma_{h+1,h+2} X_{h+1} f + \frac{\sin\psi_{h+1}}{\sin\psi_h} \Gamma_{h+2,h+1} X_{h+2} f \right\},$$

ossia, cambiando nel primo addendo del termine generale h in $h+2$, e nel secondo h in $h+1$,

$$(19') \qquad Af = \sum_{h=1}^{3} \left\{ \frac{\sin\psi_{h+1}}{\sin\psi_{h+2}} \Gamma_{h,h+1} + \frac{\sin\psi_{h+2}}{\sin\psi_{h+1}} \Gamma_{h,h+2} \right\} X_h f .$$

Se ne desume

$$(20) \qquad a_h = \frac{\sin\psi_{h+1}}{\sin\psi_{h+2}} \Gamma_{h,h+1} + \frac{\sin\psi_{h+2}}{\sin\psi_{h+1}} \Gamma_{h,h+2} ,$$

essendo, in virtù delle (16),

$$(16') \qquad \begin{cases} \Gamma_{h,h+1} = -\gamma_h + \gamma_{h+1}\cos\psi_{h+2} - \left(\frac{d}{ds_h} + \cos\psi_{h+2}\frac{d}{ds_{h+1}}\right)\psi_{h+2} , \\ \Gamma_{h,h+2} = -\gamma_h + \gamma_{h+2}\cos\psi_{h+1} + \left(\frac{d}{ds_h} + \cos\psi_{h+1}\frac{d}{ds_{h+2}}\right)\psi_{h+1} . \end{cases}$$

6. *Conseguente espressione dei coefficienti b_h di Yf.*

Attesa l'invarianza ciclica di

$$Yf = (X_{h+1}, X_{h+2})f,$$

si può scrivere

$$3Yf = \sum_1^3{}_h (X_{h+1}, X_{h+2})f,$$

ossia, essendo per definizione $X_h = \sin\psi_h \frac{d}{ds_h}$,

$$(21) \qquad Yf = \frac{1}{3}\sum_1^3{}_h \left(\sin\psi_{h+1}\frac{d}{ds_{h+1}}, \sin\psi_{h+2}\frac{d}{ds_{h+2}}\right)f.$$

Ora si ha identicamente

$$\left(\sin\psi_{h+1}\frac{d}{ds_{h+1}}, \sin\psi_{h+2}\frac{d}{ds_{h+2}}\right)f =$$

$$\sin\psi_{h+1}\sin\psi_{h+2}\left(\frac{d}{ds_{h+1}}, \frac{d}{ds_{h+2}}\right)f + \sin\psi_{h+1}\frac{d\sin\psi_{h+2}}{ds_{h+1}}\frac{df}{ds_{h+2}} - \sin\psi_{h+2}\frac{d\sin\psi_{h+1}}{ds_{h+2}}\frac{df}{ds_{h+1}}.$$

Perciò, badando alla definizione (18) di Af, la (21) può essere scritta

$$Yf = \frac{1}{3}Af + \frac{1}{3}\sum_1^3{}_h X_{h+1}(\log\sin\psi_{h+2})\cdot X_{h+2}f - \frac{1}{3}\sum_1^3{}_h X_{h+2}(\log\sin\psi_{h+1})\cdot X_{h+1}f.$$

od anche, cambiando nel primo sommatorio h in $h+1$, e nel secondo h in $h+2$;

$$(22) \qquad Yf = \frac{1}{3}Af + \frac{1}{3}\sum_1^3{}_h (X_{h+2} - X_{h+1})\log\sin\psi_h\cdot X_h f.$$

Se ne desume che, posto

$$(23) \qquad \chi_h = (X_{h+2} - X_{h+1})\log\sin\psi_h,$$

una determinazione dei coefficienti b è data da

$$b_h = \frac{1}{3}(a_h + \chi_h),$$

la loro espressione più generale essendo (Cap. I, n. 3)

$$(24) \qquad b_h = \frac{1}{3}(a_h + \chi_h) + \eta$$

con η arbitraria (funzione del posto).

A proposito delle χ_h va rilevato che esse dipendono dagli angoli ψ e loro derivate prime. Se si pensa che, in causa della identità $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 2\pi$, le ψ indipendenti sono al più due, e le loro derivate quattro, si puo affermare a priori la possibilità di rappresentare le χ_h come combinazioni lineari di quattro ausiliarie (dipendenti linearmente dalle derivate delle ψ) a coefficienti funzioni delle ψ stesse. Per effettuare tale rappresentazione in modo simmetrico facendo intervenire i nostri operatori X_h, cominceremo col ricordare l'egualianza delle tre differenze

$$X_{h+1}\psi_{h+2} - X_{h+2}\psi_{h+1}$$

e più precisamente la formula

$$X_{h+1}\psi_{h+2} - X_{h+2}\psi_{h+1} = 3\tau . \tag{17}$$

Introdurremo poi, accanto alle differenze, le tre somme

$$X_{h+1}\psi_{h+2} + X_{h+2}\psi_{h+1} ,$$

le quali non saranno però, almeno in generale, indipendenti da h. Comunque, ponendo

$$X_{h+1}\psi_{h+2} + X_{h+2}\psi_{h+1} = 2c_h \qquad (h = 1,\ 2,\ 3), \tag{25}$$

le c_h e la τ forniscono complessivamente le quattro ausiliarie mercè cui (attesa l'identità $X_1 + X_2 + X_3 \equiv 0$) si possono esprimere le nove quantità $X_h\psi_k$ ($h, k = 1, 2, 3$), e quindi le χ_h. Per procurarci queste ultime ci basterà combinare le (17) e (25), con che si ha

$$X_{h+1}\psi_{h+2} = c_h + 3\tau/2 , \qquad X_{h+2}\psi_{h+1} = c_h - 3\tau/2 , \tag{26}$$

e quindi, dalla (23),

$$\begin{aligned} \chi_h &= \cot\psi_h \cdot (X_{h+2} - X_{h+1})\,\psi_h \\ &= \{(c_{h+1} + 3\tau/2) - (c_{h+2} - 3\tau/2)\}\cot\psi_h \\ &= (c_{h+1} - c_{h+2} + 3\tau)\cot\psi_h \qquad (h=1\,,\,2\,,\,3). \end{aligned} \tag{27}$$

Per introdurre utilmente nella (24) queste espressioni delle χ_h giova far apparire le c e la τ anche nelle a_h. Queste sono definite dalle (20), in cui $\Gamma_{h\,,\,h+1}$, $\Gamma_{h\,,\,h+2}$ hanno i valori (16'). Sostituendo in queste ultime formule le derivate intrinseche $\frac{d}{ds_h}$ con $\frac{1}{\sin\psi_h} X_h$, badando alle (26) e ponendo per brevità

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma'_{h,\,h+1} &= -\gamma_h + \gamma_{h+1}\cos\psi_{h+2} , \\ \Gamma'_{h,\,h+2} &= -\gamma_h + \gamma_{h+2}\cos\psi_{h+1} , \end{aligned}\right. \tag{28}$$

$$a'_h = \frac{\sin\psi_{h+1}}{\sin\psi_{h+2}}\,\Gamma'_{h,\,h+1} + \frac{\sin\psi_{h+2}}{\sin\psi_{h+1}}\,\Gamma'_{h,\,h+2} , \tag{29}$$

le (20) stesse assumono l'aspetto

$$a_h = a'_h - (c_{h+1} - 3\tau/2)\frac{\sin\psi_{h+1}}{\sin\psi_{h+2}\sin\psi_h} + (c_{h+2} + 3\tau/2)\frac{\sin\psi_{h+2}}{\sin\psi_h \sin\psi_{h+1}}$$
$$+ c_h(\cot\psi_{h+1} - \cot\psi_{h+2}) - \frac{3}{2}\tau(\cot\psi_{h+1} + \cot\psi_{h+2})\,.$$

Giova sfruttare l'identità $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 2\pi$, sostituendo, nel secondo e terzo termine del secondo membro, i fattori esterni $-\sin\psi_{h+1}$ e $\sin\psi_{h+2}$ con $\sin\psi_{h+2}\cos\psi_h + \sin\psi_h\cos\psi_{h+2}$ e $-(\sin\psi_h\cos\psi_{h+1} + \sin\psi_{h+1}\cos\psi_h)$ rispettivamente.

D'altra parte, posto

$$\mathfrak{Z} = \sum_1^3{}_h\, c_h(\cot\psi_{h+1} - \cot\psi_{h+2}) - 3\tau\sum_1^3{}_h \cot\psi_h\,, \tag{30}$$

si può scrivere

$$\mathfrak{Z} - c_{h+1}(\cot\psi_{h+2} - \cot\psi_h) - c_{h+2}(\cot\psi_h - \cot\psi_{h+1}) + 3\tau\sum_1^3{}_h \cot\psi_h$$

in luogo di

$$c_h(\cot\psi_{h+1} - \cot\psi_{h+2})\,.$$

Risulta così, con sola riduzione dei termini simili,

$$a_h = a'_h + 2\,(c_{h+1} - c_{h+2})\cot\psi_h + \mathfrak{Z}\,. \tag{31}$$

Possiamo adesso riprendere le (24), portandovi per a_h le espressioni testè scritte e per χ_h le (27). Si ottiene, conglobando $\frac{1}{3}\mathfrak{Z}$ nella indeterminata η,

$$b_h = \frac{1}{3}a'_h + \tau\cos\psi_h + (c_{h+1} - c_{h+2})\cot\psi_h + \eta\,, \tag{32}$$

e quindi, scrivendo ancora semplicemente η in luogo di $\eta - \frac{1}{2}\mathfrak{Z}$,

$$b_h - \frac{1}{2}a_h = -\frac{1}{6}a'_h + \tau\cot\psi_h + \eta\,, \tag{33}$$

dove, giova ricordarlo, le a'_h sono definite dalle (29) coi valori (28) delle Γ', τ è la curvatura triangolare, da risguardarsi definita dalla (17') quale combinazione lineare, simmetrica delle tre curvature geodetiche γ, e finalmente η rappresenta l'addendo indeterminato.

A proposito delle a'_h, è opportuno indicarne una espressione semplificata che si ottiene mettendovi in evidenza un certo addendo simmetrico (cioè indipendente da h). Si ha in primo luogo direttamente dalle (28) e (29)

$$a'_h = -\gamma_h\left(\frac{\sin\psi_{h+1}}{\sin\psi_{h+2}} + \frac{\sin\psi_{h+2}}{\sin\psi_{h+1}}\right) + \gamma_{h+1}\sin\psi_{h+1}\cot\psi_{h+2} + \gamma_{h+2}\sin\psi_{h+2}\cot\psi_{h+1}\,,$$

ossia, sostituendo nei numeratori (del coefficiente di $-\gamma_h$) $-\sin(\psi_{h+2}+\psi_h)$ e $-\sin(\psi_h+\psi_{h+1})$ al posto di $\sin\psi_{h+1}$, $\sin\psi_{h+2}$,

$$\begin{aligned} a'_h = {} & 2\gamma_h \cos\psi_h + \gamma_h \sin\psi_h (\cot\psi_{h+1} + \cot\psi_{h+2}) \\ & + \gamma_{h+1} \sin\psi_{h+1}(\cot\psi_{h+2} + \cot\psi_h) + \gamma_{h+2} \sin\psi_{h+2}(\cot\psi_h + \cot\psi_{h+1}) \\ & - \cot\psi_h(\gamma_{h+1} \sin\psi_{h+1} + \gamma_{h+2} \sin\psi_{h+2})\,. \end{aligned}$$

Di qua, ponendo

$$\alpha = \sum_{1}^{3}{}_h\, \gamma_h \sin\psi_h\, (\cot\psi_{h+1} + \cot\psi_{h+2})$$

e rammentando la espressione (17′) di τ, si ricava sùbito

$$a'_h = 3\gamma_h \cos\psi_h - 3\tau \cot\psi_h + \alpha\,.$$

Se, come è appunto il caso nostro, interessa l'espressione di a' soltanto per introdurla nelle (31) *e* (32), *dove già figura un addendo indeterminato, si può sopprimere il termine α, che rimane conglobato nel suddetto addendo indeterminato, e ritenere più semplicemente*

$$a'_h = 3(\gamma_h \cos\psi_h - \tau \cot\psi_h) \qquad (h=1\,,2\,,3)\,. \tag{34}$$

Risulta in conformità

$$b_h = \gamma_h \cos\psi_h + (c_{h+1} - c_{h+2}) \cot\psi_h + \eta\,, \tag{32′}$$

$$b_h - \frac{1}{2}a_h = -\frac{1}{2}\gamma_h \cos\psi_h + \frac{3}{2}\tau \cot\psi_h + \eta\,. \tag{33′}$$

CAPITOLO III

Identità di monodromia e sue applicazioni trigonometriche.

1. *Funzioni uniformi — Cicli triangolari.*

Se f è una generica funzione *uniforme* dei punti di σ (finita e continua assieme alle sue derivate prime), si ha, per un qualsivoglia *ciclo* (linea *chiusa* tutta appartenente a σ) s di σ,

$$\int_s \frac{df}{ds}\,ds = 0\,. \tag{1}$$

Se come ciclo s si considera uno dei nostri triangoli T (fig. 2), formati da tre archi di linee $h+1$, $h+2$, h, che si intersecano nei vertici P_h, P_{h+1}, P_{h+2}, e si indica con $(f)_h$, o più semplicemente (quando non vi sia pericolo di equivoco) con f_h il valore di f in P_h, si ha l'identità elementare

$$\sum_{1}^{3}{}_h \, (f_{h+2} - f_{h+1}) = 0 \,, \tag{2}$$

la quale si può anche ricavare quale caso particolare della (1),

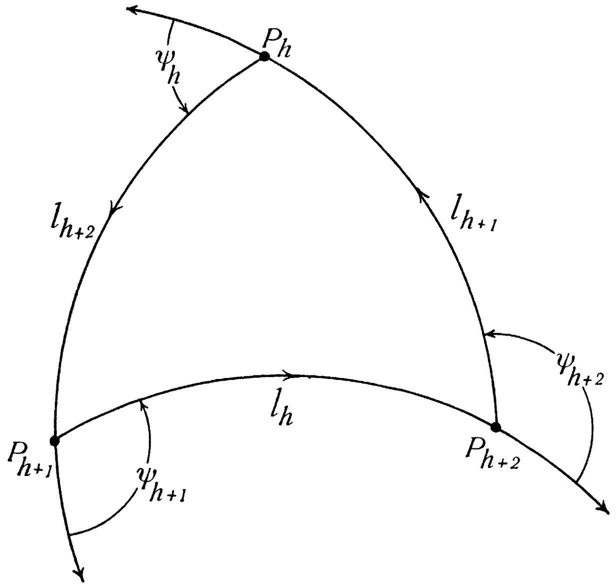

Fig. 2.

spezzando l'integrazione in tre parti corrispondenti ai lati $P_{h+1}P_{h+2}$, $P_{h+2}P_h$, P_hP_{h+1}.

2. *Conseguenze di prima approssimazione — Formula dei seni.*

Se l_h designa la lunghezza del lato (in generale curvilineo) $P_{h+1}P_{h+2}$, si ha dalla formula dell'incremento finito

$$f_{h+2} - f_{h+1} = l_h \left(\frac{df}{ds_h}\right)_{h+1} + ②\,, \tag{3}$$

dove il resto è indicato semplicemente con ②, perchè quadratico in l_h.

Adotteremo più generalmente la notazione ⓝ per designare una quantità di grado n almeno rispetto all'insieme dei tre lati, cioè rispetto ai tre argomenti l_1, l_2, l_3. Tale grado corrisponde all'ordine di infinitesimo, quando il triangolo, e per esso ciascuno dei suoi lati, si risguardi infinitesimo. Naturalmente può trattarsi di infinitesimo, sia nel senso potenziale del calcolo, sia nel senso correntemente usato in matematica applicata. In quest'ultimo caso si deve intendere che le lunghezze l_1, l_2, l_3 hanno misure del *primo ordine* (cioè misure che non superano una certa frazione propria, la quale si assume come ordine di piccolezza), *rispetto ad un' unità di lunghezza che per il momento si lascia indeterminata,* e si riconoscerà a posteriori (Cap. IV, n. 5) subordinata ai valori minimi (in σ) delle curvature geodetiche dei lati, cioè delle linee 1, 2, 3, nonchè della curvatura gaussiana della superficie. Intanto possiamo procedere formalmente con le solite regole del calcolo differenziale.

Sommando le (3) per tre valori consecutivi di h e avendo riguardo alla identità (2), si ottiene

$$\sum_1^3{}_h\, l_h \left(\frac{df}{ds_h}\right)_{h+1} + ② = 0\,. \tag{4}$$

Se poi si sceglie a piacimento un punto O interno al triangolo $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ e si osserva che la determinazione in O di una generica funzione (continua) del posto differisce dalla sua determinazione in un altro punto qualsiasi del triangolo, in particolare in P_{h+1}, per quantità infinitesime, e certo di primo ordine almeno, se la funzione (oltre che continua) è derivabile, si riconosce che la (4) può anche scriversi

$$\sum_1^3{}_h\, l_h \frac{df}{ds_h} + ② = 0\,, \tag{4'}$$

dove le derivate $\frac{df}{ds_h}$, senza ulteriore specificazione, si intendono riferite tutte tre allo stesso punto O.

La (4'), ravvicinata all'identità (10) del Cap. I, cioè a

$$\sum_1^3{}_h\, X_h f = 0\,,$$

fornisce immediatamente il *teorema dei seni in prima approssimazione.* Infatti l'identità suddetta si scrive, in base alle (9) dello stesso Cap. I,

$$\sum_1^3{}_h \sin\psi_h \frac{df}{ds_h} = 0\,.$$

La (4') implica quindi, designando con l un moltiplicatore lagrangiano a priori arbitrario,

$$\sum_{1}^{3}{}_h (l_h - l \sin \psi_h) \frac{df}{ds_h} + ② = 0 \; ,$$

donde, con opportuna scelta di l (per l'arbitrarietà della f, da cui segue quella di due fra le sue tre derivate $\left.\frac{df}{ds_h}\right)$

(5) $$l_h - l \sin \psi_h + ② = 0 \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Di qua risulta in particolare che *in prima approssimazione*, trascurando cioè i termini del secondo ordine,

$$l_h \,/\, \sin \psi_h = l.$$

È questa la regola elementare dei seni (proporzionalità fra i lati di un triangolo e i seni degli angoli opposti), che rimane così acquisita quale ovvia conseguenza di una impostazione, atta, come vedremo, a fornire ben di più. La proprietà in sè stessa, cioè il fatto che il teorema dei seni seguita a valere *in prima approssimazione* anche per un triangolo curvilineo e appartenente ad una superficie qualsivoglia era stata classicamente rilevata fin dai primordi del calcolo infinitesimale.

Osservazione. — Il moltiplicatore l, che figura nelle formule (5) e dà luogo al teorema dei seni per il solo fatto di essere indipendente da h, è anzitutto, come risulta da una qualunque delle (5), una lunghezza di primo ordine, cioè dello stesso ordine dei lati del triangolo. *Esso è determinato a meno di quantità del secondo ordine*, in quanto, se si considera in luogo di l un'altra qualsiasi lunghezza l', la quale differisca da l per termini di secondo ordine, sia tale cioè che $l' - l = ②$, questa l' può essere sostituita nelle (5) al posto di l, appunto perchè le differenze, nei primi membri, risultano del secondo ordine e sono quindi conglobabili in ②.

Per analoga ragione le (5) possono essere scritte

(5') $$l_h = l(\sin \psi_h)_h + ② .$$

3. *Il trinomio trinacrio* $F = \sum_{1}^{3}{}_h l_h \left(\frac{df}{ds_h}\right)_h$ — *Sua valutazione locale di seconda approssimazione.*

Protraendo lo sviluppo del Taylor fino al secondo ordine, una prima volta a partire da P_{h+1} e una seconda volta a partire da P_{h+2}, si può notoriamente attribuire alla differenza $f_{h+2} - f_{h+1}$ la forma

$$(6) \qquad f_{h+2} - f_{h+1} = \frac{1}{2} l_h \left\{ \left(\frac{df}{ds_h}\right)_{h+1} + \left(\frac{df}{ds_h}\right)_{h+2} \right\} + ③,$$

in cui, a differenza della (3), è tenuto *esplicito* conto anche del secondo ordine.

Fissiamo la nostra attenzione su funzioni f che ammettono non solo derivate prime e seconde, ma anche terze finite. Si può allora nella (3) sostituire alla f una sua derivata generica, e si ha in particolare, cambiando una prima volta h in $h+1$, una seconda h in $h+2$, e sostituendo poi ciascuna volta $\frac{df}{ds_h}$ in luogo di f:

$$\left(\frac{df}{ds_h}\right)_h - \left(\frac{df}{ds_h}\right)_{h+2} = l_{h+1} \left(\frac{d}{ds_{h+1}} \frac{d}{ds_h} f\right)_{h+2} + ②,$$

$$\left(\frac{df}{ds_h}\right)_{h+1} - \left(\frac{df}{ds_h}\right)_h = l_{h+2} \left(\frac{d}{ds_{h+2}} \frac{d}{ds_h} f\right)_h + ②.$$

Siccome le derivate seconde si trovano qui moltiplicate per un lato, così, a meno di termini del secondo ordine, è indifferente il punto del triangolo cui sono riferite le loro determinazioni. Scriveremo perciò semplicemente

$$\frac{d}{ds_{h+1}} \frac{d}{ds_h} f \quad \text{e} \quad \frac{d}{ds_{h+2}} \frac{d}{ds_h} f$$

in luogo di

$$\left(\frac{d}{ds_{h+1}} \frac{d}{ds_h} f\right)_{h+2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{d}{ds_{h+2}} \frac{d}{ds_h} f\right)_h,$$

risguardando le dette derivate seconde riferite ad un medesimo punto O (del resto qualsivoglia) del triangolo.

Dopo ciò, riportando nella (6) le determinazioni della derivata $\frac{df}{ds_h}$ al punto P_h, il che vuol dire ricavando $\left(\frac{df}{ds_h}\right)_{h+2}$, $\left(\frac{df}{ds_h}\right)_{h+1}$ dalle formule testè scritte, si ottiene

$$f_{h+2} - f_{h+1} = l_h \left(\frac{df}{ds_h}\right)_h + \frac{1}{2} l_h l_{h+2} \frac{d}{ds_{h+2}} \frac{d}{ds_h} f - \frac{1}{2} l_h l_{h+1} \frac{d}{ds_{h+1}} \frac{d}{ds_h} f + ③.$$

Introduciamo ora il *trinomio funzionale invariante*

$$(7) \qquad F = \sum_1^3{}_h \, l_h \left(\frac{df}{ds_h}\right)_h,$$

che chiamiamo *trinacrio* (dal greco ἄκρον) perchè implica valori di derivate della f relativi ai tre vertici P_h, P_{h+1}, P_{h+2}.

Ove si sommino rispetto ad h le differenze $f_{h+2} - f_{h+1}$, e si badi alla identità (2) nonchè alla posizione (7), risulta (con ovvio scambio di h in $h+2$ nella penultima e di h in $h+1$ nell'ultima sommatoria)

$$0 = F + \frac{1}{2}\sum_1^3{}_h\, l_{h+1} l_{h+2} \frac{d}{ds_{h+1}} \frac{d}{ds_{h+2}} f - \frac{1}{2}\sum_1^3{}_h\, l_{h+1} l_{h+2} \frac{d}{ds_{h+2}} \frac{d}{ds_{h+1}} f + ③,$$

da cui, ulteriormente, in quanto si sostituiscano l_{h+1}, l_{h+2} con le loro espressioni (5′) e si ricordi dal Cap. prec. la definizione (19) dell'alternatore triangolare Af,

$$F = -\frac{1}{2} Af + ③ . \tag{8}$$

4. *Diametro di un generico triangolo curvilineo — Specificazione del moltiplicatore* l — *Le correzioni di curvatura* g_h.

Si sa dalla trigonometria elementare che, per un triangolo rettilineo, il valore comune dei tre rapporti

$$l_h \,/\, (\sin \psi_h)_h$$

esprime il diametro l della circonferenza circoscritta al triangolo. Si può pertanto, nel caso elementare, attribuire a questo diametro l'espressione simmetrica

$$l = \frac{1}{3}\sum_1^3{}_h\, l_h \,/\, (\sin \psi_h)_h , \tag{9}$$

e *convenire, per un triangolo curvilineo qualsivoglia* (sia piano che tracciato sopra una superficie generica), *di assumere la* (9) *come definizione di diametro.*

Si tratta manifestamente di una lunghezza l collegata in ogni caso con le dimensioni lineari del triangolo. Se queste si risguardano del primo ordine lo stesso accade per l in base a tale definizione. Ma si può dire qualche cosa di piu, cioè che *è lecito identificare tale diametro col moltiplicatore* l *delle formule* (5) o (5′). Infatti, riferendoci alle (5′) e designando per un momento, onde evitare equivoci, con l' il moltiplicatore suddetto (il quale per l'osservazione finale del n. 2, è determinato a meno di termini del second'ordine), si può sostituire nella (9), al posto di ciascun l_h, $l' (\sin \psi_h)_h + ②$, donde

$$l = l' + ②,$$

c.d.d.

Notiamo ora da un lato che, in virtù delle (5), ogni espressione di dato ordine rispetto alla terna l_1, l_2, l_3 è senz'altro dello stesso ordine rispetto all'unico argomento l. Inoltre, in base alle premesse (Cap. I), i tre $\sin \psi_h$ non si annullano mai nel campo considerato. Si può quindi ritenere tale campo limitato in tal guisa che il massimo di $\frac{1}{\sin\psi_h}$ $(h = 1, 2, 3)$ sia una ben determinata costante. Allora una generica quantità ②, eventualmente dipendente dall'indice h, può, se ci fa comodo, essere rappresentata sotto la forma

$$\frac{l^2}{(\sin\psi_h)_h}\, g_h$$

le g_h essendo quantità che rimangono finite, anche quando l (cioè la dimensione del triangolo) converge a zero. Con ciò possiamo sostituire alle (5′), in cui soltanto la parte di primo ordine è resa esplicita, posizioni del tipo

$$l_h = l(\sin\psi_h)_h(1 + l g_h)\,. \tag{10}$$

Tali g, per ragione di omogeneità, hanno necessariamente le dimensioni di inverse di lunghezze, cioè il carattere di *curvature*. Rigorosamente nulle, in virtu del teorema dei seni, per un triangolo rettilineo, esse forniscono in generale un'opportuna misura del divario da questo teorema per un triangolo curvilineo qualsivoglia. Il nostro compito sarà ora appunto quello di calcolare le g in funzione dei dati della questione (natura dei lati del triangolo).

Espliciteremo il calcolo al n. **6**, con speciale riguardo alla parte principale (d'ordine zero rispetto ad l). Intanto vogliamo rilevare che, in virtù della speciale scelta della lunghezza l quale diametro del triangolo, le g_h verificano rigorosamente la relazione

$$\sum_{1}^{3}{}_h\, g_h = 0\,, \tag{11}$$

come segue subito dalla (9), introducendovi per le l_h le loro espressioni (10).

5. *Nuova espressione (locale, di seconda approssimazione) del trinomio trinacrio F.*

Nel trinomio F, definito dalla (7), sostituiamo al posto delle l_h le loro espressioni (10), scrivendo a parte i termini di primo ordine. Si ha

$$F = l\Phi + l^2 \sum_{1}^{3}{}_h\, (\sin\psi_h)_h\, g_h \left(\frac{df}{ds_h}\right)_h,$$

dove

$$\Phi = \sum_{1}^{3}{}_h\, (\sin\psi_h)_h \left(\frac{df}{ds_h}\right)_h = \sum_{1}^{3}{}_h\, (X_h f)_h\,. \tag{12}$$

Anche nel secondo termine di F figurano determinazioni relative ai tre vertici P_1, P_2, P_3. Ma, trovandovisi già il moltiplicatore l^2, esse possono essere sostituite, *a meno di termini del terz'ordine*, con determinazioni relative ad uno stesso punto (il solito O) del triangolo. Mantenendo qui ancora l'intesa che determinazioni di una generica funzione del posto, senza speciale indicazione, si riferiscano a tale punto O, potremo attribuire a F l'espressione

$$(13) \qquad F = l\Phi + l^2 \sum_1^3{}_h \, g_h X_h f + ③ .$$

Con ovvia trasformazione della Φ si riconoscerà che la parte di primo ordine si annulla identicamente. Scriviamo infatti Φ per disteso:

$$(12') \qquad \Phi = (X_h f)_h + (X_{h+1} f)_{h+1} + (X_{h+2} f)_{h+2} ,$$

e riportiamo, come già al n. 3, mediante lo sviluppo di Taylor, al vertice P_h le determinazioni del secondo e terzo termine. Dalla formula (3) dell'incremento finito, cambiando h in $h+2$ e sostituendo poi $X_{h+1} f$ ad f, si ha

$$(X_{h+1} f)_{h+1} - (X_{h+1} f)_h = l_{h+2} \left(\frac{d}{ds_{h+2}} X_{h+1} f \right)_h + ② ,$$

dove, a meno di termini del second'ordine, si può scrivere semplicemente $l \sin \psi_{h+2}$ in luogo di l_{h+2}, e ritenere che le determinazioni di $\sin \psi_{h+2}$, nonchè di $\frac{d}{ds_{h+2}} X_{h+1} f$ si riferiscano qui ancora al punto O. Sicchè si ha più semplicemente

$$(X_{h+1} f)_{h+1} = (X_{h+1} f)_h + l X_{h+2} X_{h+1} f + ② .$$

In modo analogo si trova

$$(X_{h+2} f)_{h+2} = (X_{h+2} f)_h - l X_{h+1} X_{h+2} f + ② ,$$

con che la (12′), annullandosi identicamente il trinomio

$$(X_h f_h) + (X_{h+1} f)_h + (X_{h+2} f)_h$$

ed essendo d'altra parte per definizione

$$(X_{h+1} X_{h+2} - X_{h+2} X_{h+1}) f = Y f ,$$

si riduce a

$$(12'') \qquad \Phi = - l Y f + ② .$$

La (13) diviene in conformità

$$(13') \qquad F = l^2 \left\{ \sum_1^3{}_h \, g_h X_h f - Y f \right\} + ③ .$$

6. *Calcolo delle* g_h.

Dal confronto delle due espressioni (8) e (13′) di F segue

$$l^2 \left\{ \sum_1^3{}_h\, g_h X_h f - Yf + \frac{1}{2} Af \right\} + ③ = 0 ,$$

donde, notando che il coefficiente di l^2 dipende unicamente dal punto O (e non da l), dividendo per l^2 e facendo convergere l a zero, l' equazione locale (relativa al punto O)

$$\sum_1^3{}_h\, g_h X_h f = Yf - \frac{1}{2} Af ,$$

in cui (Cap. I, n. 3)

$$Yf = \sum_1^3{}_h\, b_h X_h f$$

e (Cap. III, n. 5)

$$Af = \sum_1^3{}_h\, a_h X_h f .$$

L'equazione suddetta non implica identità dei coefficienti delle stesse $X_h f$ nei due membri, ma, in causa della relazione $\sum_1^3{}_h X_h f = 0$, soltanto eguaglianza a meno di un comune addendo η', a priori indeterminato. Si ha quindi

$$g_h = b_h - \frac{1}{2} a_h + \eta'$$

ossia, per la (33′) del Cap. prec.,

$$g_h = -\frac{1}{2} \gamma_h \cos \psi_h + \frac{3}{2} \tau \cot \psi_h + \varrho \tag{14}$$

dove è designato con ϱ l'addendo a priori indeterminato $\eta + \eta'$. Va rilevato tuttavia che, per essere le g_h legate dalla

$$\sum_1^3{}_h\, g_h = 0 , \tag{11}$$

la indeterminazione di ϱ scompare, dovendosi appunto ricavare ϱ dalla (11), il che dà

$$3\varrho = \frac{1}{2} v - \frac{3}{2} \tau \sum_1^3{}_h \cot \psi_h , \tag{15}$$

dove, accanto alla curvatura triangolare

$$\tau = \frac{1}{3} \sum_1^3{}_h\, \gamma_h \sin \psi_h , \tag{16}$$

figura l'analoga

$$v = \frac{1}{3} \sum_{1}^{3}{}_h \gamma_h \cos\psi_h , \tag{17}$$

che differisce dalla prima per la sostituzione dei coseni ai seni.

7. *Le relazioni fondamentali della trigonometria generale in seconda approssimazione — Noto corollario concernente i triangoli geodetici.*

Come già si rilevò al n. 4, le formule (10), che si possono scrivere sotto la forma

$$l_h \,/\, (\sin \psi_h)_h = l\,(1 + l g_h) \qquad (h = 1\,,2\,,3)\,, \tag{10'}$$

forniscono l'estensione del teorema dei seni a triangoli qualisivogliano, sopra superficie pure qualisivogliano, in seconda approssimazione. I rapporti fra i lati l_h ed i seni degli angoli opposti, eguali fra loro e al diametro del triangolo in prima approssimazione (cioè trascurando l^2), sono in generale disuguali ed espressi dai secondi membri delle (10′). Il divario è caratterizzato dalla presenza dei fattori $1 + l g_h$. Le espressioni (14), cui siamo infine pervenuti per le g_h (più precisamente per la loro parte principale), dipendono, oltre che dagli angoli ψ, esclusivamente e linearmente dalle tre curvature geodetiche γ_h dei lati, riferite ad un punto O del triangolo, che, nell'adottata seconda approssimazione, può essere scelto a piacimento.

Se tutte le γ si annullano, cioè se si tratta di *triangoli geodetici*, le g pure vanno a zero, cioè seguita a valere il teorema dei seni anche in seconda approssimazione: risultato questo ben noto, e in particolare ripetutamente rilevato dai primi cultori della geometria non euclidea.

Tornando al caso generale, si può aggiungere che le (10′) stesse, coi suddetti valori delle g, in quanto forniscono tre relazioni indipendenti fra angoli e lati, racchiudono sostanzialmente tutta la trigonometria in seconda approssimazione. Rimarrebbe da esaminare se e come può conseguirsi una ragionevole estensione di quel complesso di formule utili ed eleganti, che costituisce il patrimonio della trigonometria elementare.

CAPITOLO IV

Identità fornita dal parallelismo e sue applicazioni.

1. *Richiami vettoriali — Equazione angolare del parallelismo superficiale.*

Sia C una curva prefissata nel solito campo superficiale σ, $\boldsymbol{P}$ un suo punto generico, $\boldsymbol{t}$ il versore tangente in $\boldsymbol{P}$; $\boldsymbol{n}$ il versore della normale principale (verso la concavità); $\boldsymbol{N}$ il versore della normale alla superficie, orientato in modo che, rispetto ad esso, appaia destro il verso di circolazione da adottarsi su σ; infine $\boldsymbol{\nu}$ il versore proveniente da $\boldsymbol{t}$ per una rotazione (superficiale, cioè attorno ad $\boldsymbol{N}$) di 90° gradi nel verso positivo. Con ciò risulta destra la terna $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{N}$. D'altra parte $\boldsymbol{n}$ giace nel piano $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{N}$. Indichiamo con α l'angolo di cui si deve ruotare nel senso diretto, cioè destro, attorno a $\boldsymbol{t}$ per passare da $\boldsymbol{\nu}$ ad $\boldsymbol{n}$. Sarà allora

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\nu} \cos \alpha + \boldsymbol{N} \sin \alpha .$$

Detta poi c la curvatura di C (in valore assoluto), si ha la prima formula di Frenet

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = c\boldsymbol{n} ,$$

la quale, introducendovi per $\boldsymbol{n}$ la sua espressione in termini di $\boldsymbol{N}$ e di $\boldsymbol{\nu}$, e ricordando che la curvatura geodetica (con segno) γ di C altro non è che $c \cos \alpha$ (cfr. Cap. II, n. 1), mentre $c \sin \alpha$ (proiezione su $\boldsymbol{N}$) si interpreta come *curvatura normale*, diviene

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \gamma \boldsymbol{\nu} + c \cos \alpha \cdot \boldsymbol{N}. \tag{1}$$

Dopo questo ovvio richiamo è assai facile stabilire, senza uscire dai primi elementi del calcolo vettoriale, la legge angolare del trasporto per parallelismo lungo C di un vettore $\boldsymbol{v}$ tangente a σ, di cui si prefissi arbitrariamente la determinazione in un punto iniziale. La definizione è che la variazione elementare di $\boldsymbol{v}$ deve essere normale a σ, ossia $d\boldsymbol{v}$ proporzionale a $\boldsymbol{N}$, o ancora, passando dal differenziale alla derivata,

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{ds} = \lambda \boldsymbol{N} \tag{2}$$

con λ scalare (funzione dei punti di C) a priori indeterminato. La (2) implica, come è ben noto, la conservazione della lunghezza v di $\boldsymbol{v}$. Infatti, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{v}$ e tenendo conto che $\boldsymbol{v}$ è tangenziale con che $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{v}=0$, risulta

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\boldsymbol{v}^2=0\,.$$

Vediamo di riconoscere quale condizione subordina la (2) nell'angolo θ che $\boldsymbol{v}$ forma con $\boldsymbol{t}$; più precisamente angolo θ, di cui si deve ruotare, nel senso positivo, a partire da $\boldsymbol{t}$, per raggiungere $\boldsymbol{v}$. Si ha dalla definizione di θ

$$\cos\theta=\frac{1}{v}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{t}\,, \tag{3}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{v}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\nu}\,. \tag{4}$$

Derivando la prima e tenendo conto di (1), (2), segue

$$-\sin\theta\,\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{v}\lambda(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{t})+\frac{1}{v}\boldsymbol{v}\times(\gamma\boldsymbol{\nu}+c\cos\alpha\cdot\boldsymbol{N})\,,$$

ossia, per essere $\boldsymbol{N}$ ortogonale sia a $\boldsymbol{t}$ che a $\boldsymbol{v}$, e d'altra parte $\frac{1}{v}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\nu}=\sin\theta$,

$$\sin\theta\,\frac{d\theta}{ds}=-\gamma\sin\theta\,.$$

Se, lungo un arco di C, $\sin\theta$ non si annulla, si può dividere per $\sin\theta$, e si ha

$$\frac{d\theta}{ds}=-\gamma\,, \tag{5}$$

la quale seguita a sussistere anche se $\sin\theta$ si annulla in punti isolati, come si riconosce passando al limite, purchè γ presenti solo eventuali discontinuità di prima specie. Se poi $\sin\theta$ si annulla lungo un arco finito, ivi $\boldsymbol{v}$ è parallelo a $\boldsymbol{t}$, e il confronto di (1) e (2) mostra che deve essere in ogni punto dell'arco suddetto $\gamma=0$, sicchè vale ancora la (5), annullandosi entrambi i membri.

La condizione angolare di trasporto per parallelismo è dunque in ogni caso fornita dalla (5) [8]).

---

[8]) Questa condizione fu già sostanzialmente rilevata dallo SBRANA [Rend. Acc. Lincei (5) 33^{II} (1924), 236—238] e, in forma esplicita, dal GRAUSTEIN [Trans. American Math. Soc. 34 (1932), 557—593].

2. *Conseguenze integrali — Cicli semplici — Angolo di parallelismo* ε *— Caso dei triangoli — Relazione con l'eccesso angolare* ε'.

Se, lungo un arco $s = \widehat{AB}$ di C, l'angolo θ varia con continuità, la formula (5) dà

$$\theta_B - \theta_A = -\int_s \gamma\, ds\,.$$

Se, in qualche punto intermedio P, l'angolo θ subisce una brusca discontinuità di prima specie $\Delta\theta$, cioè se (nel senso delle s crescenti) i limiti destro θ^+ e sinistro θ^- di θ in P differiscono per $\Delta\theta$, si ha

$$\theta^- - \theta_A = -\int_{\widehat{AP}} \gamma ds\,,$$

$$\theta_B - \theta^+ = -\int_{\widehat{PB}} \gamma ds\,,$$

donde, sommando,

$$\theta_B - \theta_A = -\int_s \gamma ds + \Delta\theta\,,$$

la quale si estende ovviamente al caso di un numero finito di punti di discontinuità sotto la forma

$$\theta_B - \theta_A = -\int_s \gamma ds + \Sigma\, \Delta\theta\,,$$

la somme riferendosi alle varie discontinuità.

Come caso particolare di un arco $\widehat{AB}$ si può considerare un ciclo chiuso semplice (cioè topologicamente identico ad una circonferenza) T. B coincide allora con A e il primo membro rappresenta la differenza fra le determinazioni di θ in arrivo e in partenza, cioè, a meno di un eventuale multiplo intero di 2π, il cosidetto *angolo di parallelismo* ε. Trattandosi di un ciclo semplice, converrà assumere la differenza suddetta sotto la forma $\varepsilon - 2\pi$, identificando così ε coll'eventuale divario di $\theta_B - \theta_A$ dal valore -2π che ad esso compete nel piano euclideo (dove la direzione che si trasporta rimane fissa, mentre la tangente al ciclo di trasporto ruota di 2π nel verso positivo).

La formula si scrive allora

$$\varepsilon = -\int_T \gamma ds + \Sigma\, \Delta\theta + 2\pi\,, \tag{6}$$

e può essere applicata ad uno dei nostri triangoli T di vertici

P_h, P_{h+1}, P_{h+2}. Immaginiamo di percorrerlo, a partire p.es. da P_{h+1}, nel verso naturale (Cap. I, n. 1). I vertici del triangolo sono altrettanti punti di discontinuità per l'angolo θ, in quanto in essi varia bruscamente la direzione della curva di trasporto.

Consideriamo, per fissar le idee, il vertice P_h : ivi si passa, nel verso naturale, dal lato $P_{h+2}P_h$ al lato P_hP_{h+1}, ossia dalla tangente alla linea $h+1$ alla tangente alla linea $h+2$, la quale ultima, per definizione degli angoli ψ, è rotata appunto di ψ_h rispetto alla prima; sempre, s'intende, nel verso naturale. Perciò una generica direzione spiccata da P_h, che faccia con $h+1$ un angolo θ^-, cioè che si raggiunga a partire da $h+1$, rotando di θ^- nel verso naturale, avrà rispetto ad $h+2$ la determinazione

$$\theta^+ = \theta^- - (\psi_h)_h \, .$$

Ho scritto $(\psi_h)_h$ per mettere in evidenza che si tratta della determinazione di ψ_h nel punto P_h.

Come si vede, il salto $\Delta\theta$ in P_h vale precisamente $-(\psi_h)_h$; e la (6), designando il lato $P_{h+1}P_{h+2}$ con la stessa lettera l_h, che abbiamo introdotta per la sua lunghezza, assume l'aspetto

$$\varepsilon = -\sum_1^3{}_h \int_{l_h} \gamma_h ds_h - \sum_1^3{}_h (\psi_h)_h + 2\pi \, . \tag{7}$$

Ove si noti che $(\psi_h)_h$ $(h=1\,,\,2\,,\,3)$ sono precisamente gli angoli *esterni* del triangolo T, e che quindi, indicando con ψ'_h i corrispondenti angoli *interni*, si ha $(\psi_h)_h = \pi - \psi'_h$, la (7) diviene

$$\varepsilon = -\sum_1^3{}_h \int_{l_h} \gamma_h ds_h + \sum_1^3{}_h \psi'_h - \pi \, .$$

La differenza

$$\varepsilon' = \sum_1^3{}_h \psi'_h - \pi$$

è il così detto *eccesso angolare* (della somma degli angoli di un generico triangolo curvilineo, sopra il valore costante π che spetta a tale somma in un triangolo rettilineo). La (7) può così essere scritta

$$\varepsilon = -\sum_1^3{}_h \int_{l_h} \gamma_h ds_h + \varepsilon' \tag{7'}$$

ed esprime, per un generico triangolo T, l'angolo di parallelismo ε in funzione dell'eccesso angolare ε' e delle curvature dei lati. Per i triangoli geodetici si ritrova in particolare la nota proprietà $\varepsilon = \varepsilon'$.

3. *Identità locale fornita dai termini di primo ordine della formula* (7).

Sia da una classica formula di geometria differenziale [9]), sia come corollario di un fondamentale risultato del PÉRÈS, risulta subito che, ove si faccia rimpicciolire indefinitamente un generico triangolo T attorno ad un determinato punto P,

$$(8)\qquad \lim_{T\to 0}\frac{\varepsilon}{T}=K_P\,,$$

dove K_P designa la determinazione in P della *curvatura gaussiana* K della superficie σ, e, per non moltiplicare le notazioni, si indica con la stessa lettera T un triangolo e la sua area.

Essendo l'area T un infinitesimo di secondo ordine rispetto alle dimensioni lineari, e in particolare rispetto al diametro l, tale risulta anche ε, e la (7) può essere scritta

$$(9)\qquad -\sum_{1}^{3}{}_h\int_{l_h}\gamma_h ds_h-\sum_{1}^{3}{}_i(\psi_i)_i+2\pi+②=0\,.$$

Nella prima sommatoria, per il teorema del valore medio, gli integrali possono essere rigorosamente sostituiti con $\gamma_h l_h$, dove γ_h rappresentano opportuni valori intermedi; ma è pur lecito intendere le γ_h riferite tutte tre ad un medesimo punto O del triangolo scelto a piacere, in quanto (ammessa la derivabilità delle γ) il divario è certo di secondo ordine almeno, e rimane quindi conglobato in ②. Per questo stesso motivo, in base alle (10) del prec. Cap., si può scrivere semplicemente $l\sin\psi_h$ in luogo di l_h. Si ha così

$$(10)\qquad -l\sum_{1}^{3}{}_h\gamma_h\sin\psi_h-\sum_{1}^{3}{}_i(\psi_i)_i+2\pi+②=0\,.$$

D'altra parte (come al Cap. prec., n. 2), lo sviluppo abbreviato del Taylor dà

$$(\psi_{h+1})_{h+1}=(\psi_{h+1})_h+l_{h+2}\left(\frac{d\psi_{h+1}}{ds_{h+2}}\right)_h+②\,,$$

$$(\psi_{h+2})_{h+2}=(\psi_{h+2})_h-l_{h+1}\left(\frac{d\psi_{h+2}}{ds_{h+1}}\right)_h+②\,,$$

dove, con la stessa approssimazione, l_{h+1} e l_{h+2} possono essere

---

[9]) Cfr. p. es. DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces, III [Paris (1894), 126].

[10]) „Lezioni . . ." [1]), Cap. VII, §§ 9 e 10, 222—225.

sostituite da $l \sin \psi_{h+1}$, $l \sin \psi_{h+2}$, riferendo altresì le determinazioni di $\sin \psi_{h+1}$, $\sin \psi_{h+2}$, $\frac{d\psi_{h+1}}{ds_{h+2}}$, $\frac{d\psi_{h+2}}{ds_{h+1}}$, tutte al prescelto punto O. Ne desumiano, in quanto $X_h = \sin \psi_h \cdot \frac{d}{ds_h}$,

$$\begin{aligned}\sum_1^3{}_i\,(\psi_i)_i &= (\psi_h)_h + (\psi_{h+1})_{h+1} + (\psi_{h+2})_{h+2} \\ &= (\psi_h + \psi_{h+1} + \psi_{h+2})_h + l(X_{h+2}\psi_{h+1} - X_{h+1}\psi_{h+2}) + (2),\end{aligned}$$

la quale è valida per $h = 1, 2, 3$.

Il trinomio $(\psi_h + \psi_{h+1} + \psi_{h+2})_h$ vale rigorosamente 2π; quindi

$$l(X_{h+1}\psi_{h+2} - X_{h+2}\psi_{h+1}) = 2\pi - \sum_1^3{}_i\,(\psi_i)_i + (2).$$

Di qua, dividendo per l e passando al limite, si ritrova (Cap. III, n. 4) l'indipendenza da h delle tre differenze

$$X_{h+1}\psi_{h+2} - X_{h+2}\psi_{h+1},$$

il cui valore comune si è designato con 3τ.

Ma si può altresì riconoscere l'interpretazione di τ come curvatura triangolare in modo più rapido di quello usato nel citato n. 4 del Cap. III. Basta infatti ricavare dalla precedente formula così come è scritta, la differenza $2\pi - \sum_1^3{}_i\,(\psi_i)_i$ e sostituirla nella (10). Si ottiene

$$-\,l\sum_1^3{}_h\,\gamma_h \sin \psi_h + l(X_{h+1}\psi_{h+2} - X_{h+2}\psi_{h+1}) + (2),$$

e, passando al limite (previa divisione per l), l'identità locale

$$3\tau = \sum_1^3{}_h\,\gamma_h \sin \psi_h,$$

c.d.d.

4. *Espressione triangolare della curvatura gaussiana.*

Se si esplicita, nelle due somme,

$$Q_1 = \sum_1^3{}_i \int_{l_i} \gamma_i ds_i, \tag{11}$$

$$Q_2 = \sum_1^3{}_i\,(\psi_i)_i, \tag{12}$$

anche la parte di second'ordine, si può ricavarne una espressione di K, in verità non semplice, ma meritevole comunque di essere segnalata per la sua simmetria triangolare.

Calcolo di S.

Dalla formula dei trapezi, o, se si vuole, dalla (6) del Cap. prec. (applicata all'integrale $\int_{l_i} \gamma_i \, ds_i$) si ha

$$\int_{l_i} \gamma_i ds_i = \tfrac{1}{2} l_i \{(\gamma_i)_{i+1} + (\gamma_i)_{i+2}\} + ③ .$$

Perciò, scelto h a piacere, la (11) può essere scritta

$$Q_1 = \tfrac{1}{2} l_h \{(\gamma_h)_{h+1} + (\gamma_h)_{h+2})\} + \tfrac{1}{2} l_{h+1} \{(\gamma_{h+1})_{h+2} + (\gamma_{h+1})_h\} + \tfrac{1}{2} l_{h+2} \{(\gamma_{h+2})_h + (\gamma_{h+2})_{h+1}\} + ③ .$$

Riportiamo le determinazioni delle γ tutte al vertice P_h, omettendo nei termini di second'ordine la specificazione locale (inessenziale nel voluto ordine di approssimazione). Siccome, per le (10) del Cap. prec.,

$$l_{h+1} = l(\sin \psi_{h+1})_{h+1}(1 + l g_{h+1}) = l(\sin \psi_{h+1})_h + l^2(g_{h+1} \sin \psi_{h+1} + X_{h+2} \sin \psi_{h+1}) + ③ , \tag{13}$$

$$l_{h+2} = l(\sin \psi_{h+2})_{h+2}(1 + l g_{h+2}) = l(\sin \psi_{h+2})_h + l^2(g_{h+2} \sin \psi_{h+2} - X_{h+1} \sin \psi_{h+2}) + ③ , \tag{14}$$

si ha subito

$$Q_1 = 3l\,(\tau)_h + l^2 \sum_{i,1}^{3} \gamma_i g_i \sin \psi_i + \tfrac{1}{2} l^2 \sin \psi_h \cdot (X_{h+2} - X_{h+1})\gamma_h - \tfrac{1}{2} l^2 \sin \psi_{h+1} \cdot X_{h+1}\gamma_{h+1} + \tfrac{1}{2} l^2 \sin \psi_{h+2} \cdot X_{h+2}\gamma_{h+2} + l^2 \gamma_{h+1} X_{h+2} \sin \psi_{h+1} - l^2 \gamma_{h+2} X_{h+1} \sin \psi_{h+2} + ③ .$$

Sommando rispetto ad h e dividendo per 3 si ricava l'espressione simmetrica un po' più semplice

$$Q_1 = l \sum_{h,1}^{3} (\tau)_h - l^2 H_1 + ③ , \tag{11'}$$

avendo posto per brevità

$$H_1 = -\tfrac{1}{3} \sum_{h,1}^{3} \Big[\gamma_h \{g_h \sin \psi_h + \cos \psi_h \cdot (X_{h+1} - X_{h+2})\psi_h\} + \tfrac{1}{2} \sin \psi_h \cdot (X_{h+2} - X_{h+1})\gamma_h \Big] . \tag{15}$$

Calcolo di S_2.

Scriviamo, con h fisso, ma suscettibile di prendere i valori 1, 2, 3,

$$Q_2 = (\psi_h)_h + (\psi_{h+1})_{h+1} + (\psi_{h+2})_{h+2}$$

e riportiamo al vertice P_h le determinazioni di ψ_{h+1} e ψ_{h+2}. Ciò già si fece al n. prec. in prima approssimazione; ora vogliamo tener conto anche dei termini di second'ordine. Abbiamo

$$(\psi_{h+1})_{h+1} = (\psi_{h+1})_h + l_{h+2}\left(\frac{d\psi_{h+1}}{ds_{h+2}}\right)_h + \tfrac{1}{2}l_{h+2}^2\left(\frac{d^2\psi_{h+1}}{ds_{h+2}^2}\right)_h + ③$$

ossia, omettendo al solito nei termini di second'ordine, la designazione del posto e usando anche la (14),

$$\begin{aligned}(\psi_{h+1})_{h+1} = (\psi_{h+1})_h &+ l(X_{h+2}\psi_{h+1})_h \\ &+ l^2\{(g_{h+2} - \tfrac{1}{2}\cot\psi_{h+2}\cdot X_{h+2}\psi_{h+2})\, X_{h+2}\psi_{h+1} \\ &- \cot\psi_{h+2}\cdot X_{h+1}\psi_{h+2}\cdot X_{h+2}\psi_{h+1} + \tfrac{1}{2}X_{h+2}^2\psi_{h+1}\} + ③\,.\end{aligned}$$

In modo analogo, ricorrendo alla (13), si ottiene

$$\begin{aligned}(\psi_{h+2})_{h+2} = (\psi_{h+2})_h &- l\,(X_{h+1}\psi_{h+2})_h \\ &+ l^2\{(g_{h+1} - \tfrac{1}{2}\cot\psi_{h+1}\cdot X_{h+1}\psi_{h+1})\, X_{h+1}\psi_{h+2} \\ &+ \cot\psi_{h+1}\cdot X_{h+2}\psi_{h+1}\cdot X_{h+1}\psi_{h+2} + \tfrac{1}{2}X_{h+1}^2\psi_{h+2}\} + ③\,.\end{aligned}$$

Con ciò, tenute presenti le identità locali (1) del Cap. I e (17) del Cap. III, risulta

$$\begin{aligned}Q_2 &= 2\pi - 3l\,(\tau)_h \\ &+ l^2\,[\{g_{h+2} - \cot\psi_{h+2}\cdot(X_{h+1} + \tfrac{1}{2}X_{h+2})\psi_{h+2}\}\, X_{h+2}\psi_{h+1} + \tfrac{1}{2}X_{h+2}^2\psi_{h+1}] \\ &+ l^2\,[\{g_{h+1} + \cot\psi_{h+1}(X_{h+2} - \tfrac{1}{2}X_{h+1})\psi_{h+1}\}\, X_{h+1}\psi_{h+2} + \tfrac{1}{2}X_{h+1}^2\psi_{h+2}] + ③.\end{aligned}$$

Sommiamo rispetto ad h e dividiamo per 3, eseguendo nelle singole sommatorie ovvi cambiamenti dell'indice h in $h+1$ ovvero $h+2$. Troviamo subito

$$\begin{aligned}Q_2 = 2\pi - l\sum_1^3{}_h(\tau)_h &+ \tfrac{1}{3}l^2\sum_1^3{}_h\, g_h X_h(\psi_{h+1} + \psi_{h+2}) \\ &+ \tfrac{1}{3}l^2\sum_1^3{}_h\, X_{h+1}\psi_{h+2}\cdot X_{h+2}\psi_{h+1}\cdot(\cot\psi_{h+1} - \cot\psi_{h+2}) \\ -\tfrac{1}{6}l^2\sum_1^3{}_h\cot\psi_h\cdot X_h\psi_h\cdot X_h(\psi_{h+1}+\psi_{h+2}) &+ \tfrac{1}{6}l^2\sum_1^3{}_h X_h^2(\psi_{h+1} + \psi_{h+2}) + ③,\end{aligned}$$

ossia, sostituendo $2\pi - \psi_h$ a $\psi_{h+1} + \psi_{h+2}$,

$$(12') \qquad Q_2 = 2\pi - l \sum_{1}^{3}{}_h (\tau)_h - l^2 H_2 + ③ ,$$

dove si è posto per brevità

$$(16) \quad H_2 = \tfrac{1}{3} \sum_{1}^{3}{}_h \Big[g_h X_h \psi_h - X_{h+1}\psi_{h+2} \cdot X_{h+2}\psi_{h+1} \cdot (\cot \psi_{h+1} - \cot \psi_{h+2}) - \tfrac{1}{2} \cot \psi_h \cdot (X_h \psi_h)^2 + \tfrac{1}{2} X_h^2 \psi_h \Big] .$$

Al n. 5 del Cap. II abbiamo osservato che le 9 quantità $X_h \psi_k$ $(h, k = 1, 2, 3)$ si possono esprimere come combinazioni lineari di 4 argomenti: la curvatura triangolare τ e le tre ausiliarie c_1, c_2, c_3, avendosi precisamente (formule (26) del Cap. suddetto)

$$X_{h+1}\psi_{h+2} = c_h + 3\tau/2 , \qquad X_{h+2}\psi_{h+1} = c_h - 3\tau/2 ,$$

nonchè, da $X_h \psi_h = -(X_{h+1} + X_{h+2})\psi_h$,

$$X_h \psi_h = -(c_{h+2} - 3\tau/2) - (c_{h+1} + 3\tau/2) = -(c_{h+1} + c_{h+2}) .$$

Con ciò alla precedente espressione di H_2 si può anche attribuire la forma

$$(16') \quad H_2 = \tfrac{1}{3} \sum_{1}^{3}{}_h \Big[-g_h (c_{h+1} + c_{h+2}) - (c_h^2 - 9\tau^2/4)(\cot \psi_{h+1} - \cot \psi_{h+2}) - \tfrac{1}{2} \cot \psi_h \cdot (c_{h+1} + c_{h+2})^2 + \tfrac{1}{2} X_h^2 \psi_h \Big] .$$

Mercè le (11) e (12) la formula (5) si scrive

$$\varepsilon = - Q_1 - Q_2 + 2\pi .$$

In virtù delle (11′) e (12′), la parte del secondo membro d'ordine zero e uno in l scompare, e rimane

$$(17) \qquad \varepsilon = l^2 (H_1 + H_2) + ③ .$$

Fissiamo un generico punto P e consideriamo triangoli T infinitesimi, contenenti P nell'interno. Si ha, per l'area di un tale triangolo, a meno di termini del terz'ordine,

$$T = \tfrac{1}{2} l_{h+1} l_{h+2} \sin \psi_h = \tfrac{1}{2} l^2 \sin \psi_{h+1} \cdot \sin \psi_{h+2} \cdot \sin \psi_h ,$$

o, più brevemente,

$$(18) \qquad T = \tfrac{1}{2} l^2 \omega ,$$

designando con

$$(19) \qquad \omega = \sin \psi_1 \cdot \sin \psi_2 \cdot \sin \psi_3$$

il prodotto dei seni. Basta ora dividere membro a membro la (17) per la (18) e far convergere l a zero. Per la formula (8) di Pérès, si ha

$$K_P = \frac{H_1 + H_2}{\omega}, \tag{20}$$

dove, ben s'intende, anche in H_1 e H_2 tutto va riferito al punto P. Questa si potrebbe chiamare *formula triangolare di* Liouville. Infatti, nel caso di una coppia di congruenze ortogonali, una classica formula di Liouville [11]) esprime la curvatura gaussiana K mediante le curvature geodetiche della coppia e loro derivate. La (20) esprime analogamente K mediante elementi differenziali di una terna di congruenze comunque inclinate; arrivandosi fino al second'ordine rispetto agli angoli ψ; e fino al terz'ordine rispetto alle linee delle congruenze: terz'ordine in quanto compariscono nella formula ricordata anche derivate delle curvature γ.

5. *Osservazioni.*

Dal punto di vista concettuale è manifesto che un triangolo T rimane completamente individuato quando se ne fissi un vertice, diciamo per es. P_{h+1}, e la lunghezza di un lato passante per esso, sia $l_h = \widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$. Allora infatti risultano direttamente dai dati i due vertici P_{h+1} e P_{h+2}, dopo di che la linea $h+2$ spiccata da P_{h+1} e la $h+1$ spiccata P_{h+2} completano la determinazione di T. Tutti gli elementi del triangolo, in particolare i tre lati e i tre angoli, si presentano in conformità quali funzioni degli elementi scelti arbitrariamente: il punto P_{h+1}, e per esso le sue due coordinate, e la lunghezza l_h. Eliminando questi tre parametri fra le sei formule che esprimono lati ed angoli, si ricavano tre relazioni, involgenti soltanto lati ed angoli, che sono appunto le *relazioni trigonometriche*. Esse dipendono, in generale funzionalmente, dalla natura delle tre assegnate congruenze, o, se si vuole, dalle funzioni del posto che le caratterizzano. Come elementi essenziali di tale caratterizzazione possiamo per es. risguardare, assieme ai coefficienti del ds^2 superficiale, i parametri

$$\lambda_h^\nu (x^1, x^2) \qquad (\nu = 1, 2;\; h = 1, 2, 3),$$

che (Cap. I, n. 2) definiscono una generica linea h mediante le equazioni differenziali

$$\frac{dx^\nu}{ds_h} = \lambda_h^\nu \qquad (\nu = 1, 2).$$

Gli angoli ψ dipendono (punto per punto) dalle λ in termini

---

[11]) Cfr. in particolare il Cap. IV, p. 190 delle „Lezioni sulla teoria delle superficie" del Ricci [1]).

finiti, mentre le curvature γ dipendono dalle λ e dalle loro derivate prime.

Per quanto si è visto al Cap. III, nelle relazioni trigonometriche, sia di prima che di seconda approssimazione, intervengono non proprio direttamente le λ, ma soltanto le combinazioni ψ, γ (e loro derivate).

Per un triangolo finito T l'intervento delle λ nelle relazioni trigonometriche sarebbe in generale funzionale, poichè involge il comportamento delle stesse λ lungo i lati. È chiaro per altro, che, ammessa la validità degli sviluppi tayloriani delle λ fino ad un certo ordine n, con approssimazione dello stesso ordine la dipendenza funzionale diviene semplicemente differenziale, comparendo nelle formule finali i valori locali (in qualche punto O del triangolo) delle dette λ e loro derivate fino all'ordine n.

Non sono in grado di affermare che, come per $n=1$ ed $n=2$, di tutte le λ e loro derivate rimangano in definitiva soltanto le combinazioni corrispondenti alle ψ, γ e loro derivate. Viceversa la formula triangolare (20) mostra che la curvatura gaussiana K è esprimibile esclusivamente per le ψ, γ e loro derivate: fino al second'ordine per le ψ, fino al primo per le γ. Questi stessi elementi possono a priori comparire nelle formule trigonometriche di terza approssimazione. Un teorema di Legendre assicura che, in quanto si tratti di triangoli *geodetici*, oltre a lati ed angoli, figura unicamente K. Sviluppando con i criteri suesposti i calcoli in modo da tener conto anche dei termini di terz'ordine, si deve naturalmente ritrovare il teorema di Legendre per i triangoli geodetici, e d'altra parte può essere che ne scaturisca una qualche generalizzazione espressiva. In ogni modo si deciderebbe se o meno (in questa ulteriore approssimazione) le relazioni trigonometriche fra lati ed angoli risentano influenze locali, non esprimibili (differenzialmente) mediante gli angoli ψ e le curvature γ, ma richiedenti in modo essenziale elementi ambientali. La curvatura K non è, nel senso suaccennato, puramente ambientale, perchè come si è visto, si può anche esprimere mediante ψ, γ e loro derivate. Lo stesso vale in conseguenza anche per le derivate della K.

Diciamo ancora una parola circa i limiti di validità degli sviluppi studiati nella presente memoria, i quali procedono secondo le potenze di l (che è il *diametro*, cioè una certa dimensione lineare del triangolo di cui si tratta). Per valutare numericamente il grado di approssimazione, bisognerebbe a rigore esaminare, nelle varie formule, i resti $l^{n+1}R_{n+1}$ corrispondenti all'approssimazione d'ordine n, nei quali le quantità R_{n+1} dipendono in modo ben determinato da derivate delle ψ fino allo stesso ordine $n+1$ e delle γ fino all'ordine n.

Un apprezzamento, certamente incompleto, ma utile, si può desumere più semplicemente dai termini già esplicitati. Si riconosce così che, per $n=2$, i numeri da prendere in considerazione per l'apprezzamento suaccennato sono (come del resto ben prevedibile per ragioni di omogeneità) *prodotti di* l *per le singole curvature* γ *e per singole derivate prime delle* ψ. Per $n=3$ si avrebbero (oltre a termini quadratici e rettangolari nei prodotti suddetti) anche prodotti di l^2 per derivate prime delle γ o per derivate seconde delle ψ. Di tale tipo è in particolare l^2K.

Si vede così a posteriori come il grado di approssimazione numerica si colleghi in primo luogo ai puri numeri $l\gamma$, l^2K, ossia alla scelta di una lunghezza l abbastanza piccola in relazione ai limiti superiori delle γ e di K nel campo σ, o, ciò che è lo stesso, di fronte ai minimi raggi di curvatura, geodetica dei lati e gaussiana dell'ambiente. Ciò non toglie che la precisa valutazione dei limiti di applicabilità del procedimento, pur essendo concettualmente ovvia, richiederebbe un'indagine più approfondita che io non ho nemmeno iniziata.

(Pervenuta il 20 Settembre 1933.)