G. FUBINI

Sur la géométrie projective des réseaux plans

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 103-105
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__103_0>

Sur la géométrie projective des réseaux plans

par

G. Fubini

Turin

Soient données *deux* familles de courbes planes, telles que par chaque point du plan (ou d'une région du plan) il passe une courbe et une seule de chaque famille. Il s'agit de construire une géométrie projective du réseau engendré par ces deux familles de courbes. La présente note se propose de compléter les remarquables recherches que M. E. Čech a consacrées à cette question [1]).

La généralisation aux réseaux formés par trois familles de ∞^1 surfaces dans l'espace à trois dimensions (et même la généralisation aux hyperespaces) ne semble pas difficile. La généralisation aux réseaux formés par exemple par trois familles de ∞^2 courbes dans l'espace à trois dimensions sera au contraire beaucoup plus intéressante et beaucoup plus difficile. Les recherches analogues en géométrie métrique occupent une place de grande importance dans l'oeuvre mathématique de Ricci et forment une des plus brillantes applications de son calcul tensoriel.

Dans cette note nous nous bornons aux réseaux plans.

Si nous considérons les courbes d'un tel réseau comme courbes coordonnées u, v dans le plan, les coordonnées homogènes x, y, z d'un point de ce plan seront fonctions des u, v, le point x (c'est-à-dire le point de coordonnées x, y, z) et les points x_u, x_v $\left(\text{c'est-à-dire les points de coordonnées } \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ seront linéairement indépendants; le déterminant $e^{\theta} = (x, x_u, x_v)$ formé par les coordonnées de ces points sera différent de zéro (voir l.c.).

---

[1]) Voir par exemple: G. Fubini, E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Chap. X. [Paris, Gauthier-Villars 1931].

Nous pourrons déterminer des fonctions α, β, $\gamma, \ldots$ des u, v de manière que

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
x_{uu} &= \alpha x_u + \beta x_v + px \\
x_{vv} &= \gamma x_u + \delta x_v + qx \\
x_{uv} &= a x_u + b x_v + cx
\end{aligned}
$$

et que ces équations soient encore satisfaites si l'on écrit y ou z au lieu de x.

On aura alors

$$
(2) \qquad \theta_u = \alpha + b , \quad \theta_v = \delta + a \qquad [e^\theta = (x, x_u, x_v)] ;
$$

du reste l'équation $(\alpha + b)_v = (\delta + a)_u$ est une conséquence des conditions d'intégrabilité du système (1)

$$
\begin{aligned}
&\alpha_v - a_u = \delta_u - b_v = c + ab - \beta\gamma \\
&\beta_v + p + (\alpha - b)b + \beta(\delta - a) = b_u \\
&\gamma_u + q + (\delta - a)a + \gamma(\alpha - b) = a_v \\
&p_v + (\alpha - b)c + \beta q - \alpha p = c_u \\
&q_u + (\delta - a)c + \gamma p - \beta q = c_v
\end{aligned}
$$

Les fonctions α, β, γ, ... ne sont pas toutes *invariantes* par rapport aux transformations projectives du réseau et n'ont pas de signification *intrinsèque*, c'est-à-dire indépendante du choix des paramètres u, v. Elles changent en général, si l'on substitue aux paramètres u, v de nouveaux paramètres U, V (bien entendu de manière que u soit fonction de U et v de V).

En appliquant les méthodes que j'ai développées pour les surfaces, on trouve les résultats suivants qu'on peut facilement vérifier par un calcul élémentaire.

Si l'on pose

$$
(3) \quad \begin{cases} P = p + \beta a + \alpha b - b_u - b^2 ; & Q = q + \gamma b + \delta a - a_v - a^2 \\ C = c + ab - b_v ; & C' = c + ab - a_u \end{cases}
$$

les conditions d'intégrabilité deviennent

$$
(4) \quad
\begin{aligned}
&\beta_v + P + \beta(\delta - 2a) = 0 , \qquad \gamma_u + Q + \gamma(\alpha - 2b) = 0, \\
&P_v + C(d - 2b) + \beta Q = C_u , \qquad Q_u + C'(\delta - 2a) + \gamma P = C'_u \\
&\qquad\qquad C - C' = a_u - b_v
\end{aligned}
$$

(la dernière étant une conséquence de la définition de C et C').

Les formes

$$
F_2 = 2e^\theta du\, dv , \qquad F_3 = e^\theta(\beta\, du^3 + \gamma dv^3)
$$

ont une signification *intrinsèque,* sans être invariantes; c'est *leur rapport* (*l'élément linéaire projectif* du réseau selon M. Čech) qui est *invariant.*

Si $\beta = 0$ ou si $\gamma = 0$, les courbes $v = \text{const.}$ ou $u = \text{const.}$ sont des droites, et le réseau est par conséquent réglé. Si le réseau n'est pas réglé, on aura $\beta\gamma \neq 0$ et nous pourrons choisir (*normaliser*) les coordonnés homogènes x, y, z de manière que $e^{\theta} = \beta\gamma$; les formes F_2, F_3 deviendront les formes *normales*

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv\,, \qquad \varphi_3 = \beta\gamma\,(\beta du^3 + \gamma\alpha v^3)$$

qui sont *invariantes* et ont une signification *intrinsèque*.

La forme

$$\Phi_2 = P du^2 + (C + C')\, du\, dv + Q dv^2$$

est aussi *invariante* et a une signification *intrinsèque*.

Etudions le cas le plus intéressant, celui d'un réseau non réglé ($\beta\gamma \neq 0$). *Si les formes F_2, F_3, Φ_2 sont données, le réseau est complètement déterminé* (à une transformation linéaire unimodulaire des x, y, z près); par conséquent *le réseau est complètement déterminé* (à une homographie près) *si les formes φ_2, φ_3, Φ_2 sont données.* En effet les deux premières équations (4) déterminent $\delta - 2\alpha$ et $\alpha - 2b$, et les équations (2) déterminent α, δ, a, b. Le coefficient de $du\,dv$ dans la forme Φ_2 étant connu, la dernière équation (4) déterminera C et C', et les équations (3) permettront de déterminer p, q, c. Le système (1) et par conséquent notre réseau sont complètement déterminés, c.q.f.d.

On obtient facilement les *deux conditions de compatibilité* de nos formes. Il suffit de substituer dans la troisième et dans la quatrième des équations (4) les valeurs déjà trouvées de α, δ, a, b, C, C'.

(Reçu le 21 septembre 1933.)