YVES COLIN DE VERDIÈRE

Chapitre I Espaces vectoriels symplectiques

Cours de l'institut Fourier, tome 18 (1982-1983), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1982-1983__18__A1_0>

CHAPITRE I

ESPACES VECTORIELS SYMPLECTIQUES

Bibliographie pour le chapitre I :

[A-M], [D], [W], [G-S].

1. ESPACES SYMPLECTIQUES.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et ω une forme bilinéaire sur E. On dit que ω est <u>non dégénérée</u> si l'application $x \to \omega(x,\cdot)$ de E dans E^* est un isomorphisme (vérifier qu'il en est de même de $x \to \omega(\cdot,x)$).

DEFINITION. - Un espace vectoriel symplectique est un couple (E,ω) où E est un espace vectoriel réel de dimension finie et ω une forme bilinéaire antisymétrique et non dégénérée.

THEOREME. - <u>Si</u> (E,ω) <u>est symplectique la dimension</u> d <u>de</u> E <u>est paire</u> : $d = 2n$ <u>et il existe une base</u> $(e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n)$ <u>de</u> E <u>telle que</u>

$$\omega = e_1^* \wedge f_1^* + \dots + e_n^* \wedge f_n^*$$

[<u>si</u> $L_1, L_2 \in E^*$, $L_1 \wedge L_2(x,y) = (L_1(x)L_2(y) - L_1(y)L_2(x))$].

<u>Une telle base est appelée base canonique</u>.

<u>Démonstration</u>. - (Il peut être utile de comparer cette démonstration à celle de l'existence d'une base orthonormée pour un e.v. euclidien). Preuve par récurrence sur k . Supposons construits $2k$ vecteurs linéairement indépendants $e_1,\dots,e_k,f_1,\dots,f_k$ tels que :

$$\begin{cases} \omega(e_i,f_j) = \delta_{ij} \\ \omega(e_i,e_j) = 0 \\ \omega(f_i,f_j) = 0 \end{cases}$$

pour tous les $1 \le i,j \le k$. Soit F le sous-espace de dimension $2k$ de E engendré par ces vecteurs. Si $2k = \dim(E)$, c'est fini. Sinon on a $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ (le vérifier) et donc comme ω est non dégénérée $E = F \oplus F^{\perp}$ et $F^{\perp}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $e_{k+1} \in F^{\perp}\setminus\{0\}$ et $\tilde{f}_{k+1}$ tel que $\omega(e_{k+1}, \tilde{f}_{k+1}) = 1$, si f_{k+1} est la projection de $\tilde{f}_{k+1}$

sur $F^{\perp}$, on a encore $\omega(e_{k+1}, f_{k+1}) = 1$ et comme $e_{k+1}, f_{k+1} \in F^{\perp}$, cela achève le passage de k à $k+1$.

Remarque 1. - La relation $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ n'est pas générale : le sous-espace G engendré par $e_1, \ldots, e_n$ vérifie $G^{\perp} = G$ (un tel sous-espace est dit lagrangien : cf. § 3). Comparer le cas euclidien.

Remarque 2. - Soit $\Omega = \frac{1}{n!} \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n \text{ fois}}$: Ω est une forme de degré $2n = d$ et non nulle (forme volume) : tout espace symplectique est canoniquement muni d'une forme volume et d'une orientation.

Exemples fondamentaux.

1) F e.v. de dim n sur $\mathbb{R}$, $E = F \oplus F^*$ avec
$\omega(x \oplus L, x' \oplus L') = L(x') - L'(x)$.

On peut alors prendre pour $e_1, \ldots, e_n$ une base de F et $f_1, \ldots, f_n$ la base duale de F^*.

2) Si F un e.v. de dim finie sur $\mathbb{R}$ munie d'une forme bilinéaire antisymétrique α dégénérée, soit $F^{\perp} = \operatorname{Ker} \alpha = \{x \in F \mid \alpha(x, \cdot) = 0\}$ alors $E = F/F^{\perp}$ est symplectique avec la forme quotient $\omega(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(x, y)$. En particulier, $\dim F - \dim F^{\perp}$ est paire.

3) E e.v. de dim n sur $\mathbb{C}$ munie d'une forme hermitienne $\langle \mid \rangle$ non dégénérée (pas nécessairement définie ≥ 0). On peut considérer E comme un e.v. de dim $2n$ sur $\mathbb{R}$, noté $E^{\mathbb{R}}$: c'est un espace symplectique avec la forme $\omega = \operatorname{Im} \langle \mid \rangle$.

Exercice 1. Réfléchir à la notion de structure symplectique dans un espace de Hilbert. Donner un exemple simple de structure symplectique sur $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

2. TRANSFORMATIONS CANONIQUES LINEAIRES.

DEFINITION. - Soit (E_1, ω_1) , (E_2, ω_2) deux espaces symplectiques et $T : E_1 \to E_2$ une transformation linéaire, on dit que T est canonique si $T^*(\omega_2) = \omega_1$; on définit de même la notion d'endomorphisme canonique de (E, ω) .

THEOREME 1. - Si T est canonique, T est injective. En particulier, l'ensemble des endomorphismes canoniques de (E, ω) forme un groupe (pour la composition, i.e. ss groupe de $GL(E)$) appelé groupe symplectique $Sp(E, \omega)$; si $E = \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ et $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$, ce groupe est noté $Sp(n)$.

THEOREME 2. - (structure d'un endomorphisme canonique) : après extension des scalaires à $\mathbb{C}$ $(E^{\mathbb{C}} = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, on a, en désignant par E_λ l'espace propre généralisé de valeur propre λ de l'endomorphisme T :

$$E = E_1 \oplus E_{-1} \oplus \left(\underset{i}{\oplus} E_{\lambda_i} \oplus E_{1/\lambda_i} \right)$$

où $E_{\pm 1}$ sont des sous-espaces symplectiques de E ;

E_{λ_i} et E_{1/λ_i} sont de même dimension et correspondent à des blocs de Jordan avec le même nombre de 1 et de 0 .

De plus, si $F_\lambda = E_\lambda \oplus E_{1/\lambda}$, les $E_{\pm 1}$ et les F_λ sont ω-orthogonaux, alors que ω induit une dualité entre E_λ et $E_{1/\lambda}$ et $\omega \restriction E_\lambda \; (\lambda \neq \pm 1) \equiv 0$. Si $\lambda \notin \mathbb{R}$, on a évidemment $\dim E_\lambda = \dim E_{\bar{\lambda}}$ etc.

Preuve. - Le preuve dans le cas général est laissée en exercice (ex. 2), nous ne la faisons que dans le cas où T est diagonalisable sur $\mathbb{C}$:

soit $e \in E_\lambda$ et $f \in E_\mu$, on a $\omega(\lambda e, \mu f) = \lambda\mu\omega(e,f) = \omega(e,f)$.

Donc si $\lambda\mu \neq 1$, $\omega(e,f) = 0$: en particulier $(E_{\pm 1})^{\perp} \supset \underset{\lambda \neq \pm 1}{\oplus} E_\lambda$, d'où $E_{\pm 1}$ symplectique et de même F_λ symplectique.

Cas particuliers.

(1) $n = 1$:

(i) si les valeurs propres sont $e^{\pm i\alpha}$ $(\neq \pm 1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que T est elliptique : on peut trouver une base (e_1, f_1) canonique telle que $T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

(ii) si les valeurs propres sont λ et $\frac{1}{\lambda}$ avec $\lambda \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, on dit que T est hyperbolique. Dans une base canonique $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$.

(iii) si $\lambda = +1$ (resp. $\lambda = -1$) est la seule valeur propre, on dit que T est parabolique. On a les formes normales $T = \mathrm{Id}$, $T = -\mathrm{Id}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) $n = 4$: laissé en exercice (ex. 3).

THEOREME 3. - Le groupe $Sp(E, \omega)$ est un groupe de Lie. Si $E = \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$, et $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$ l'algèbre de Lie $sp(n)$ est formée des matrices A telles que ${}^tA + JAJ = 0$.
[JA symétrique] : $\dim(Sp(n)) = n(2n+1)$ $(3, 10, 30, \ldots)$.

Preuve. - On a $\omega((x_1, y_1);(x_2, y_2)) = (x_1 y_1) \circ J \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et donc $T \in Sp(n) \Leftrightarrow {}^tTJT = J$.

Remarque. - Topologie : le groupe $Sp(E, \omega)$ n'est pas simplement connexe ; son π_1 est $\mathbb{Z}$. Le revêtement à deux feuillets est un groupe (non algébrique), le groupe métaplectique $Mp(n)$ qui joue un grand rôle dans la quantification (cf. Guillemin-Sternberg).

3. SOUS-ESPACES LAGRANGIENS.

DEFINITIONS. - Un sous-espace $F \subset (E,\omega)$ est dit :

- <u>symplectique</u> si $\omega_{\restriction F}$ est symplectique $(F \cap F^{\perp} = \{0\})$;
- <u>isotrope</u> si $\omega_{\restriction F} = 0$ $(F \subset F^{\perp})$;
- <u>lagrangien</u> s'il est isotrope maximal ;
- <u>coisotrope</u> si $F^{\perp} \subset F$.

PROPOSITION 1. - <u>Les espaces lagrangiens</u> F <u>sont les espaces isotropes de dimension</u> $n = \dim(E)/2$ <u>i.e. tels que</u> $F = F^{\perp}$.

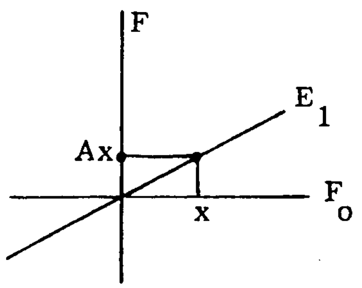
PROPOSITION 2. - <u>Si</u> E_1 <u>est lagrangien, il admet un supplémentaire lagrangien</u> E_2 <u>et</u> ω <u>induit une dualité entre</u> E_1 <u>et</u> E_2 .

PROPOSITION 3. - $\Lambda(E)$, <u>ensemble de tous les sous-espaces lagrangiens de</u> E <u>est une variété différentiable compacte de dim</u> $n(n+1)/2$ <u>dont un atlas explicite est décrit plus bas.</u>

Les propositions 1 et 2 sont faciles, la 2 redonne une démonstration de l'existence de bases canoniques.

<u>Etude de</u> $\Lambda(E)$.

Soit $F \subset E$ lagrangien et $U_F = \{E_1 \in \Lambda(E) \mid E_1 \cap F = \{0\}\}$. On va définir une carte de domaine U_F : si F_0 est un lagrangien transverse à F , tout lagrangien de U_F est le graphe d'une application linéaire de F_0 dans F , comme F est canoniquement isomorphe à $(F_0)^*$, on a une application de F_0 dans F_0^* , c'est-à-dire une forme bilinéaire ; plus précisément



$E_1 = \{x + Ax \mid x \in F_0\}$; $B(x,y) = \omega(Ax,y)$.

PROPOSITION. - E_1 <u>lagrangien</u> $\Leftrightarrow$ B <u>symétrique</u> :

$$\begin{aligned}\omega(x+Ax\,,\ y+Ay) &= \omega(x,y) + \omega(Ax,Ay)\\ &\quad + \omega(x,Ay) + \omega(Ax,y)\\ &= B(x,y) - B(y,x)\ .\end{aligned}$$

Donc on a une bijection entre U_F et $Q(F_o)$ qui est l'espace vectoriel des formes quadratiques sur F_o : on a ainsi défini une carte de $\Lambda(E)$. Il est clair d'après la proposition 2 que ces cartes recouvrent $\Lambda(E)$.

<u>Exercice 4.</u> (E,ω) symplectique : $E = F \oplus F^*$.

Sur $\mathcal{E} = E \oplus E$, on introduit $\Omega(x_1 \oplus x_2\,, y_1 \oplus y_2) = \omega(x_1,y_1) - \omega(x_2,y_2)$.

1) Vérifier que $(\mathcal{E},\Omega)$ est symplectique.

2) $T \in Sp(E,\omega) \Leftrightarrow \text{graphe}(T) \in \Lambda(\mathcal{E})$.

3) Si on pose $F = (0 \oplus y_1 \oplus 0 \oplus y_2)$, $F^o = (x_1 \oplus 0 \oplus x_2 \oplus 0)$, quels sont les T de U_F ?

4) Décrire la paramétrisation ainsi obtenue de U_F et retrouver la dimension de $Sp(E,\omega)$.

<u>Exercice 5.</u> Reprendre ce chapitre dans le cas parallèle d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. (Consulter à ce sujet le livre de E. ARTIN : Algèbre géométrique).

<u>Exercice 6.</u> On a une action naturelle de $Sp(n\,;\mathbb{R})$ sur $\Lambda(n)$: $g(\Lambda)$ est l'image par g du sous-espace Λ . Prouver que cette action est transitive et décrire le groupe d'isotropie du sous-espace engendré par $(e_1,\dots,e_n)$. Retrouver ainsi la dimension de $Sp(n\,;\mathbb{R})$.

<u>Exercice 7.</u> Décrire explicitement les cartes de $\Lambda(1)$. A quelle variété simple $\Lambda(1)$ est-elle difféomorphe ? Essayer de décrire $\Lambda(2)$.

D. E. A. - Géométrie symplectique.
1982-1983

BIBLIOGRAPHIE provisoire.

[A-A] ARNOLD-AVEZ, Problèmes ergodiques de la mécanique classique.

[A] ARNOLD, Problèmes mathématiques de la mécanique classique.

[A-M] ABRAHAM-MARSDEN, Foundations of mechanics.

[G-S] GUILLEMIN-STERNBERG, Geometric asymptotics.

[S-M] SIEGEL-MOSER, Lectures on celestial mechanics.

[D] DUISTERMAAT, Lectures on Fourier integral operators.

[W] WEINSTEIN A., Lectures on symplectic momifolds.

... Et pour des compléments de géométrie différentielle :

[S] STERNBERG, Differential geometry.

[M] MILNOR, Morse theory.

[B-G] BERGER-GOSTIAUX, Géométrie différentielle.
