

KH. BOUCHKI

**Décomposition des mesures et fonctions sur un ensemble fini probabilisé muni d'une classification arborescente. (I) Arbres et hiérarchies de parties**

*Les cahiers de l'analyse des données*, tome 21, n° 2 (1996), p. 243-254

[http://www.numdam.org/item?id=CAD\\_1996\\_\\_21\\_2\\_243\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CAD_1996__21_2_243_0)

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# DÉ COMPOSITION DES MESURES ET FONCTIONS SUR UN ENSEMBLE FINI PROBABILISÉ MUNI D'UNE CLASSIFICATION ARBORESCENTE

## (I) ARBRES ET HIÉRARCHIES DE PARTIES

### [MES. FONCT. ARB. (I)]

*Kh. BOUCHKI*

N.B. Le présent exposé est extrait d'un mémoire préparé par l'auteur pour obtenir le Doctorat en Statistique. Le mémoire contient des démonstrations complètes. Ici, on se borne à l'enchaînement des définitions et propositions. Ce premier article concerne la seule structure d'ordre; mesures et fonctions seront considérées ensuite.

#### 1 Ensemble muni d'une structure d'arbre

##### 1.1 Définitions et notations pour les ensembles finis ordonnés

Soit  $A$  un ensemble fini muni d'une relation d'ordre  $H_A$ , ou  $H$ , pour laquelle on note:  $H(a, b)$ :  $a$  est inférieur à  $b$ ; on convient, comme d'usage, que:

$$\forall a \in A : H(a, a) .$$

On note:

Som  $A$  : l'ensemble des éléments maximaux, ou sommets de  $A$ :

$$\text{Som } A = \{ a \mid a \in A ; \forall b \in A : H(a, b) \Rightarrow (a = b) \} ;$$

Ter  $A$  : l'ensemble des éléments minimaux, ou terminaux de  $A$ :

$$\text{Ter } A = \{ a \mid a \in A ; \forall b \in A : H(b, a) \Rightarrow (a = b) \} ;$$

Is  $A$  : l'ensemble des éléments isolés de  $A$ , i.e. à la fois minimaux et maximaux:  $\text{Is } A = \text{Ter } A \cap \text{Som } A$  :

$$\text{Is } A = \{ a \mid a \in A ; \forall b \in A : H(b, a) \vee H(a, b) \Rightarrow (a = b) \} ;$$

Nod  $A$  : l'ensemble des nœuds, ou éléments de  $A$  admettant au moins un successeur distinct de lui-même:  $\text{Nod } A = A - \text{Ter } A$  :

$$\text{Nod } A = \{ a \mid a \in A ; \exists b \in A : H(b, a) \wedge (a \neq b) \} ;$$

Pour tout élément  $a$  de  $A$ , on note:

$\text{Pred}(a, A)$ , ou  $\text{Pred } a$ , si aucune confusion n'est à craindre: l'ensemble des prédécesseurs de  $a$ , y compris  $a$ , dans  $A$ :

$$\text{Pred}(a, A) = \{ b \mid b \in A ; H(a, b) \} ;$$

$\text{Su}(a, A)$ , ou  $\text{Su } a$ : l'ensemble des  $b$  successeurs de  $a$  dans  $A$  et distincts de  $a$ :

$$\text{Su}(a, A) = \{ b \mid b \in A ; b \neq a ; H(b, a) \} ;$$

(On notera que  $a$  est son propre prédécesseur, mais non son successeur.)

$\text{Sui}(a, A)$ , ou  $\text{Sui } a$ : l'ensemble des successeurs immédiats de  $a$  dans  $A$ ; c'est-à-dire, l'ensemble des successeurs  $b$  de  $a$  tels qu'il n'y ait pas d'autre élément de  $A$  entre  $b$  et  $a$ :

$$\text{Sui}(a, A) = \{ b \mid b \in A ; b \neq a ; \{ u \mid u \in A ; H(b, u) ; H(u, a) \} = \{ a, b \} \} ;$$

On peut encore dire que  $\text{Sui } a$  est l'ensemble des éléments maximaux de  $\text{Su } a$ ; il est non vide si et seulement si  $a$  est un nœud:  $a \in \text{Nod } A$ .

## 1.2 Définition et axiomes de la structure d'arbre hiérarchique

L'ensemble  $A$ , muni de la structure d'ordre  $H$  est un *arbre hiérarchique*, (en bref, ici, *arbre*), si et seulement si est satisfait l'axiome  $H_a$ :

**$H_a$** :  $\forall a \in A$ , l'ensemble  $\text{Pred } a$ , muni de l'ordre induit par  $H$ , est totalement ordonné;

autrement dit,  $A$  est un arbre si et seulement si:

$$\forall a \in A, \forall x, y \in \text{Pred } a : H(x, y) \vee H(y, x) ;$$

Un arbre est dit *connexe* si et seulement si il satisfait à l'axiome  $H_c$ :

$$\mathbf{H_c} : \text{Card}(\text{Som } A) = 1 ;$$

autrement dit,  $A$  a un unique sommet; celui-ci est souvent noté:  $\text{som } A$ .

Un arbre est dit *binnaire* si et seulement si il satisfait à l'axiome  $H_b$ :

$$\mathbf{H_b} : \forall a \in \text{Nod } A : \text{Card}(\text{Sui } a) = 2 ;$$

autrement dit, un nœud de  $A$  a exactement deux successeurs immédiats.

Un arbre est dit *fourchu* si et seulement si il satisfait à l'axiome  $H_f$ :

$$\mathbf{H_f} : \forall a \in \text{Nod } A : \text{Card}(\text{Sui } a) \geq 2 ;$$

autrement dit, un nœud de  $A$  a au moins deux successeurs immédiats.

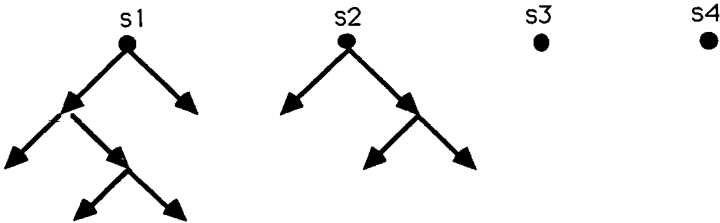
Nous donnerons, sans démonstration, un scholie; où est introduite une notation usuelle.

Scholie : Soit  $A$  un arbre, pour une structure d'ordre  $H$ :

- 1)  $\forall a \in A$  - Som  $A$ , il existe un élément, unique, noté  $p(a)$ , appelé le père de  $a$ , et tel que:  $a \in \text{Sui}(p(a), A)$ .
- 2)  $\forall a \in A$ , il existe un sommet unique,  $s \in \text{Som } A$ , tel que  $H(a, s)$ .
- 3)  $\forall s \in \text{Som } A$ , il existe  $t \in \text{Ter } A$ , tel que  $H(t, s)$ .

### 1.3 Représentation graphique d'un arbre et langage associé

Soit  $A$  un ensemble fini, muni d'une structure d'arbre par la relation d'ordre  $H$ . Pour construire une représentation graphique de  $A$ , on peut représenter les sommets de  $A$  par des points convenablement espacés sur une ligne horizontale. Si un sommet  $s$  n'est pas point isolé ( $s \in \text{Som } A$ ;  $s \notin \text{Is } A$ ), on représente l'ensemble  $\text{Sui } s$ , des successeurs immédiats de  $s$ , par des points liés à  $s$  par des flèches descendantes; et ainsi de suite, jusqu'à épuisement de l'ensemble  $A$ ; les suites de flèches descendantes aboutissent toutes à un élément terminal. Pour la structure d'arbre telle qu'elle est considérée ici, l'orientation des flèches à droite ou à gauche est indifférente.



On dira encore, pour aider à l'intuition, qu'on peut considérer le sommet unique d'un arbre connexe, comme une souche, ou un tronc; de chaque nœud partent autant de branches qu'il a de successeurs immédiats; un arbre non-connexe est une sorte de forêt. Mais il faut prendre garde que l'ordre  $H$  est défini de telle sorte que les branches sont inférieures au tronc; en ce sens, dans la notation mathématique, l'arbre est renversé.

On appelle *chemin descendant* de l'arbre  $A$ , une suite  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  d'éléments de  $A$ , telle que :  $\forall i \in \{1, 2, \dots, (n-1)\} : a_{i+1} \in \text{Sui}(a_i)$  ;

de même, on appelle *chemin ascendant* de l'arbre  $A$ , une suite  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  d'éléments de  $A$ , telle que :  $\forall i \in \{1, 2, \dots, (n-1)\} : a_i \in \text{Sui}(a_{i+1})$  .

Lemme : Soit  $A$  un arbre *binnaire*, connexe ou non. Notons:

$S$  : nombre des sommets non isolés de  $A$ :  $S = \text{Card}(\text{Som } A - \text{Is } A)$  ;

$N$  : nombre des nœuds de  $A$  qui ne sont pas sommet ;

$T$  : nombre des éléments terminaux non isolés :  $T = \text{Card}(\text{Ter } A - \text{Is } A)$  ;

alors, on a la relation :  $N + 2.S = T$  ; en particulier, si l'arbre est *connexe*,  $S = 1$ ; et l'on a:  $N = T - 2$ .

## 2 Relations entre arbres et au sein d'un arbre A

### 2.1 Sous-arbres

Une partie  $A'$  d'un arbre  $A$ , munie de la structure d'ordre induite par celle de  $A$ , satisfait nécessairement à l'axiome  $H_a$  (cf. §1.2): c'est donc un arbre. On dit que  $A'$  est un *sous-arbre* de  $A$ ; et que  $A$  est un *sur-arbre* de  $A'$ . On dit que  $A$  et  $A'$  sont *coterminaux*, si  $\text{Som}(A) = \text{Som}(A')$  et  $\text{Ter}(A) = \text{Ter}(A')$ .

On dit que  $A'$  est un sous-arbre *plein*, ou *dense* de  $A$ , si  $A'$  satisfait l'axiome  $H_d$ :

$$H_d : \forall a, b \in A' : A' \supset \{u \mid u \in A; H(a, u); H(u, b)\} ;$$

autrement dit: si  $A'$  contient  $a$  et  $b$ , il contient tout  $u$ , intermédiaire, dans  $A$ , entre  $a$  et  $b$ .

Un sous-arbre  $A'$  est dit entier, relativement à  $A$ , s'il satisfait l'axiome  $H_e$ :

$$H_e : \forall a \in \text{Nod}(A'), \forall b \in A : H(b, a) \Rightarrow \dots$$

$$\exists u \in A' : (u \neq a) \wedge H(u, a) \wedge (H(b, u) \vee H(u, b)) ;$$

en bref: si  $b \notin A'$ , on trouve, dans  $A'$ , dans la direction de  $b$ , un  $u$ , soit au-dessus, soit au-dessous de  $b$ .

### 2.2 Sections et relations entre sections pour un ensemble ordonné

Soit  $E$  un ensemble muni d'une relation d'ordre  $H$ . On appelle *section* de  $E$  une partie  $X$ , de  $E$ , telle que deux éléments distincts quelconques de  $X$  ne soient pas comparables pour la relation  $H$  :

$$\forall x, x' \in X : H(x, x') \Rightarrow x = x' .$$

Cette définition s'applique au cas où  $E$  est un arbre fini,  $A$ . En particulier, pour tout arbre  $A$ ,  $\text{Som } A$  et  $\text{Ter } A$  sont des sections.

Une section  $X$  d'un arbre  $A$  est dite *totale* si :

$$\forall t \in \text{Ter } A, \exists x \in X : H(t, x) ;$$

autrement dit si,  $\forall t \in \text{Ter } A$ , la suite  $\text{Pred}(t, A)$ , des prédécesseurs de  $t$  dans  $A$ , rencontre  $X$  en un point  $x$ ; lequel est unique, de par la définition même des sections.

Plus généralement, dans un ensemble  $E$  muni d'une relation d'ordre  $H$ , on dit qu'une section  $X$  *recouvre* une section  $Y$  si sont satisfaites les conditions:

$$\forall x \in X, \exists y \in Y : H(y, x) ;$$

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : H(y, x) \wedge (\forall x' \in X : H(y, x') \Rightarrow x = x' ) ;$$

en bref, au-dessous de tout  $x$ , il y a au moins un  $y$ ; au-dessus de tout  $y$  il y a un seul  $x$ .

On définit, sur l'ensemble  $\text{Sec}(E)$  des parties finies de  $E$  qui sont des sections, la relation  $\text{HZ}(Y, X)$  :

$$\forall X, Y \in \text{Sec}(E) : \text{HZ}(Y, X) \Leftrightarrow X \text{ recouvre } Y ;$$

On démontre que  $\text{HZ}$  est une relation d'ordre sur  $\text{Sec}(E)$ . Dans un arbre  $A$ , on a la relation  $\text{HZ}(\text{Ter } A, \text{Som } A)$ . Il importe de noter ici que la relation  $\text{HZ}(Y, X)$  ne dépend pas de la structure de  $E$  tout entier, mais seulement de l'ordre induit sur  $X \cup Y$ ; ce que précise l'énoncé qui suit.

Soit  $E$ , un ensemble muni d'une relation d'ordre  $H$ ;  $X$  et  $Y$ , deux sections de  $E$ . La relation  $\text{HZ}(Y, X)$  est satisfaite si et seulement si  $X \cup Y$ , muni de la relation d'ordre induite par  $H$ , est un arbre pour lequel  $X$  et  $Y$  sont, respectivement, l'ensemble des sommets et l'ensemble des terminaux:

$$\text{Som}(X \cup Y) = X ; \text{Ter}(X \cup Y) = Y .$$

### 2.3 Relations entre sections d'un arbre

Pour un arbre  $A$ , on définit, entre sections, une relation  $\text{HZZ}$ , plus stricte que  $\text{HZ}$ . De façon précise: soit  $X$  un section de  $A$ , notons  $\text{Ter } A \setminus X$  (ce qu'on lira:  $\text{Ter}$  de  $A$  sous  $X$ ) l'ensemble des éléments terminaux de  $A$  qui sont successeurs d'un élément de  $X$ :

$$\text{Ter } A \setminus X = \{t \mid t \in \text{Ter } A ; \exists x \in X : H(t, x)\} .$$

Ceci posé, soit  $X$  et  $Y$  deux sections de  $A$ : on dira que  $X$  *repose* sur  $Y$ , si  $X$  recouvre  $Y$  et  $Y$  recouvre  $\text{Ter } A \setminus X$  :

$$\text{HZZ}(Y, X) \Leftrightarrow \text{HZ}(Y, X) \wedge \text{HZ}(\text{Ter } A \setminus X, Y) .$$

On a l'implication :

$$\text{HZZ}(Y, X) \Rightarrow \text{Ter } A \setminus X = \text{Ter } A \setminus Y .$$

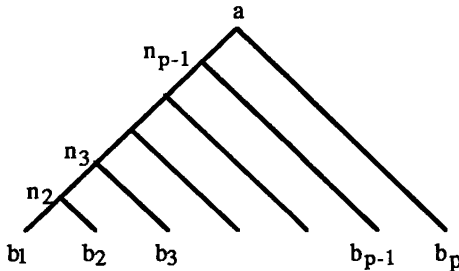
On démontre que la relation  $\text{HZZ}$  et une relation d'ordre sur  $\text{Sec}(A)$ . À la différence de  $\text{HZ}$ , la relation  $\text{HZZ}$ , dépend essentiellement de  $A$  tout entier. On doit donc noter, si une confusion est à craindre,  $\text{HZZ}_A(Y, X)$ .

Une partie  $A'$  de  $A$  est un sous-arbre *entier* de  $A$  (cf. *supra*, axiome  $H_e$ ) si et seulement si on a:  $\text{HZZ}_A(\text{Ter } A', \text{Som } A')$ . En particulier, si  $X$  et  $Y$  sont deux sections de  $A$  telles qu'on ait  $\text{HZZ}_A(Y, X)$ ,  $X \cup Y$  est un sous-arbre entier de  $A$  (avec, cf. *supra*,  $\text{Som}(X \cup Y) = X ; \text{Ter}(X \cup Y) = Y$ ).

### 2.4 Sur-arbres binaires associés à un arbre fourchu

Notre objet ultime est d'associer, à un ensemble muni d'une loi de probabilité et d'une classification hiérarchique, une base canonique orthonormée de fonctions sur cet ensemble. La base n'est complètement déterminée que si la hiérarchie est binaire: d'où le présent §.

La construction commence par le cas d'un sous-arbre *élémentaire*. Soit  $a \in \text{Nod } A$ : le sous-arbre élémentaire associé à  $a$  n'est autre que l'ensemble  $\{a\} \cup \text{Sui}(a)$ , muni de la structure induite par  $A$ . Pour cet arbre,  $a$  est l'unique sommet; et  $\text{Sui}(a)$  est l'ensemble des terminaux (de cardinal  $\geq 2$ , puisque l'arbre est fourchu). Nous donnons sur une figure une construction de sur-arbre binaire  $\beta(a)$ , associé à  $\{a\} \cup \text{Sui}(a)$ ; avec, pour  $\beta(a)$ ,  $\text{Som}(\beta(a)) = \{a\}$ ;  $\text{Ter}(\beta(a)) = \text{Sui}(a)$ . La construction proposée ici dépend du choix d'un ordre total sur  $\text{Sui}(a)$ ; et, en général, tout parenthésage sur  $\text{Sui}(a)$  fournit une telle structure.



On pose  $\text{Card}(\text{Sui}(a)) = p > 2$ . On note  $\text{Sui}(a) = \{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ ; alors,  $\beta(a)$  s'écrit:  $\{a\} \cup \text{Sui}(a) \cup \{n_2, \dots, n_{p-1}\}$ ; avec, sur  $\beta(a)$ , les relations d'ordre:

- $H(b_1, n_2)$  ;  $H(b_p, a)$  ;  $H(n_{p-1}, a)$  ;
- $H(b_2, n_2)$  ;  $H(b_3, n_3)$  ; ... ;  $H(b_{p-1}, n_{p-1})$  ;
- $H(n_2, n_3)$  ; ... ;  $H(n_{p-2}, n_{p-1})$  ;

et toutes celles qui s'en déduisent par transitivité. Il est clair que la structure de  $\beta(a)$  dépend de l'ordre choisi sur  $\text{Sui}(a)$ ; un ordre et son inverse donnant, toutefois la même structure. Le cas où  $\text{Card}(\text{Sui } a) = 2$  est trivial.

Plus généralement, pour un arbre fourchu  $A$ , on définit un sur-arbre  $\beta(A)$  en appliquant la construction ci-dessus à chaque nœud de  $A$ ; soit, en formule:

$$\beta(A) = (\cup \{\beta(a) \mid a \in \text{Nod } A\}) \cup \text{Is } A ;$$

formule qui n'est pas univoque, dans la mesure où elle ne l'est pas pour  $\beta(a)$  si  $\text{Sui}(a)$  compte plus de deux éléments.

### 3 Opérations sur les arbres et sous-arbres : catégorie

Dans la suite, afin d'associer à un ensemble probabilisé muni d'une classification hiérarchique une décomposition des mesures et fonctions, on considérera un système d'opérateurs linéaires correspondant aux sous-arbres d'un arbre; avec des opérations que l'on peut, formellement, définir sur ceux-ci, ainsi qu'on le fera dans le présent §, en reprenant des notions de la théorie des catégories.

**3.1 Somme directe d'arbres et de sous-arbres**

Soit  $\{(A_p, H_p) \mid p \in P\}$ , une famille finie, indicée par  $p$ , d'ensembles  $A_p$ , deux à deux d'intersection vide, et dont chacun est muni d'une structure d'arbre  $H_p$ . Notons  $A = \cup \{A_p \mid p \in P\}$ , la réunion des  $A_p$ , et  $H$ , la structure d'ordre la moins fine sur  $A$ , induisant, sur chacun des  $A_p$ , la structure  $H_p$  ; Soit :

$$\forall x, x' \in A : H(x, x') \Leftrightarrow \exists p \in P : x, x' \in A_p \wedge H_p(x, x') ;$$

alors,  $H$  définit sur  $A$  une structure d'arbre, appelée *somme directe* des structures  $(A_p, H_p)$ ; et l'on note:

$$(A, H) = \oplus \{(A_p, H_p) \mid p \in P\} ; \text{ ou: } A = \oplus \{A_p \mid p \in P\} ;$$

[La somme directe peut se construire, en toute généralité, même si les  $A_p$  ne sont pas d'intersection vide: il faut alors prendre pour  $A$  une somme directe des ensembles  $A_p$ ; i.e., en bref, distinguer les éléments qui se rencontrent dans plusieurs des  $A_p$ .]

Comme la réunion  $\cup$ , la somme directe  $\oplus$  est associative et commutative.

Soit  $A$  un arbre, on associe, à tout  $a \in A$ , sa *branche*,  $Br(a, A)$  définie par:  $Br(a, A) = \{x \mid x \in A ; H(x, a)\} = \{a\} \cup Su(a, A)$ . Il est clair que  $Br(a, A)$  est un sous-arbre de  $A$ . Et on a la formule de somme directe:

$$A = \oplus \{Br(a, A) \mid a \in \text{Som } A\} ;$$

formule où  $Br(a, A)$  peut être appelée la *composantes connexe* du sommet  $a$ .

Plus généralement, soit  $\{B_p \mid p \in P\}$  une famille finie de sous-arbres d'un même arbre  $(A, H)$ . La réunion  $B = \cup \{B_p \mid p \in P\}$ , considérée avec la structure induite par  $H$ , s'identifie à la somme directe  $\oplus \{B_p \mid p \in P\}$ , à condition que deux éléments  $\{x, x'\}$  appartenant à des  $B_p$  distincts entre eux soient non comparables pour la relation d'ordre  $H$ :

$$\forall x, x' \in B : H(x, x') \Rightarrow \exists p \in P : x, x' \in B_p ;$$

on dit alors que les  $B_p$  sont deux à deux *étrangers* pour la relation  $H$ ; ce qui équivaut encore à poser que les  $\text{Ter } A \setminus \text{Som } B_p$  sont deux à deux d'intersection vide (cf. §2.3 pour la notation  $\text{Ter } A \setminus X$ , qu'on lit: *Ter de A sous X*).

**3.2 Composition entre sous-arbres d'un arbre A**

Soit  $A$ , un arbre; notons  $\text{arb}(A)$ , l'ensemble des parties de  $A$  considérée chacune comme un sous-arbre, avec la structure d'arbre induite par  $A$ . Soit deux sous-arbres  $A_1$  et  $A_2$  tels que  $\text{Ter } A_1 = \text{Som } A_2$ ; on dit que  $A_1$  et  $A_2$  sont *composables* (dans l'ordre donné); et l'on note  $A_1 \circ A_2$  (avec le même signe que pour une composition d'opérateurs), le sous-arbre  $A_1 \cup A_2$  de  $A$ .



L'on a:

$$\text{Som}(A1 \circ A2) = \text{Som}(A1) \quad ; \quad \text{Ter}(A1 \circ A2) = \text{Ter}(A2) \quad .$$

Il est clair que la composition ainsi définie est associative; en ce sens que si A1 et A2 sont composables, ainsi que A2 et A3, on a:

$$((A1 \circ A2) \circ A3) = (A1 \circ (A2 \circ A3)) = A1 \circ A2 \circ A3 \quad ;$$

la dernière écriture, sans parenthèse, étant justifiée par l'associativité.

On sait que, pour tout sous-arbre B de A, Som(B) et Ter(B) sont des sections de A. Toute section de A constitue un sous-arbre particulier. Pour la composition, on a:

$$B = \text{Som}(B) \circ B = B \circ \text{Ter}(B) = \text{Som}(B) \circ B \circ \text{Ter}(B) \quad ;$$

il apparaît donc que, pour la composition, toute section X est une *unité à gauche* pour les sous-arbres B dont elle est l'ensemble des sommets ( $X = \text{Som } B$ ); et *unité à droite* pour les sous-arbres dont elle est l'ensemble des terminaux ( $X = \text{Ter } B$ ).

### 3.3 La catégorie des sous-arbres entiers d'un arbre donné

Dans la suite, on se servira plus particulièrement des sous-arbres entiers, d'un arbre A donné (associé à une classification hiérarchique). Notons  $\text{arbe}(A)$  l'ensemble de ces sous-arbres. On va définir sur  $\text{arbe}(A)$  une structure de catégorie. Le lecteur non habitué à cette notion pourra se borner à accepter telles quelles les définitions générales reprises ici pour  $\text{arbe}(A)$ .

La classe des *objets* de  $\text{arbe}(A)$  est l'ensemble,  $\text{Sec}(A)$ , des sections de A.

La classe des *flèches*, ou *morphismes* n'est autre que  $\text{arbe}(A)$ ; i.e. (§2.3):

$$\text{arbe}(A) = \{B \mid A \supset B; \text{HZZ}_A(\text{Ter } B, \text{Som } B)\} \quad ;$$

pour  $B \in \text{arbe}(A)$ , Som B et Ter B sont appelés respectivement *but* et *source* de B:  $\text{source}(B) = \text{Ter } B$  ;  $\text{but}(B) = \text{Som } B$  .

Deux morphismes B et C sont composables (cf. §3.2) si et seulement si la source de B (placé à gauche) coïncide avec le but de C (placé à droite):

$$\forall B, C \in \text{arbe}(A) : \text{Ter } B = \text{Som } C \Rightarrow B \circ C = B \cup C \in \text{arbe}(A) \quad ;$$

que  $B \circ C$  soit un sous-arbre entier de A résulte de la transitivité de HZZ.

Soit X et Y deux sections de A telles qu'on ait  $\text{HZZ}_A(X, Y)$  ; on note  $\text{Hom}(X, Y)$  l'ensemble des morphismes dont la source est X et le but, Y:

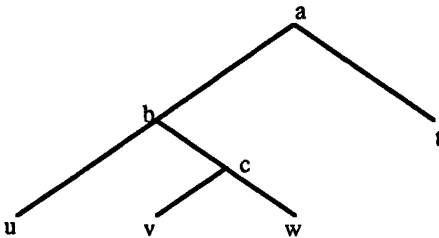
$$\text{Hom}(X, Y) = \{B \mid A \supset B ; \text{Ter } B = X ; \text{Som } B = Y\} \quad ;$$

en particulier:  $\text{HZZ}(X, Y) \Rightarrow X \circ Y = X \cup Y \in \text{Hom}(X, Y)$  .

On peut identifier les notions d'objet, de section et de morphisme unité.

La catégorie  $\text{arbo}(A)$  est stable pour la somme directe: si les  $B_p$  sont des sous-arbres entiers et que  $B = \oplus \{B_p \mid p \in P\}$  est défini,  $B$  est un sous-arbre entier. En effet,  $\text{Ter } A \setminus \text{Som } B$  n'est autre que la réunion des  $\text{Ter } A \setminus \text{Som } B_p$ ; et puisque chacun des  $\text{Ter } B_p$  recouvre  $\text{Ter } A \setminus \text{Som } B_p$ , la réunion de ceux-là,  $\text{Ter } B$ , recouvre la réunion de ceux-ci, qui n'est autre que  $\text{Ter } A \setminus \text{Som } B$

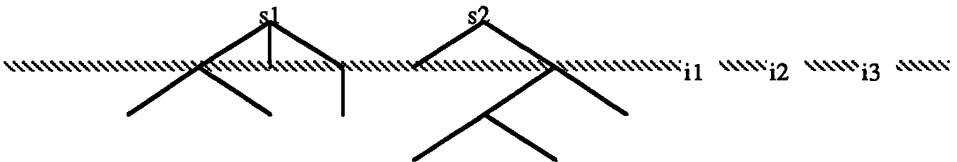
**3.4 Expression d'un arbre en fonction de ses sous-arbres élémentaires**



$$A = A(a) \circ (A(b) \oplus \{t\}) \circ (\{u\} \oplus A(c) \oplus \{t\}) ;$$

$$A = A(a) \circ ((A(b) \circ (\{u\} \oplus A(c))) \oplus \{t\}) ;$$

Partons de l'exemple ci-dessus. L'arbre  $A$  est connexe, de sommet  $a$ ; il a trois nœuds  $\{a, b, c\}$  et trois terminaux  $\{t, u, v, w\}$ . Pour tout nœud  $n$ , on note  $A(n)$  le sous-arbre élémentaire  $\{n\} \cup \text{Sui}(n)$ . Sont proposées deux expressions de l'arbre  $A$ , où figurent des sous-arbres élémentaires, des arbres réduits à un élément, et les signes de composition et de somme directe.



Notre propos est de montrer qu'une expression de cette forme existe pour tout arbre. Afin de procéder par récurrence sur le cardinal de l'arbre, on considère un énoncé plus général: étant donné un arbre  $A$ , tout sous-arbre plein,  $B$ , de  $A$  s'exprime par composition et somme directe à partir des sous-arbres élémentaires de  $A$  et d'éléments isolés. La proposition est évidente si  $B = I_s B$ , ne comporte que des éléments isolés. Sinon, avec les notations ci-après, on écrit  $B$  sous la forme:  $B1 \circ B2$ ; avec  $B1$  décomposé en somme directe, et  $\text{Card } B2 < \text{Card } B$ :

$$V = \text{Som } B - I_s B ; \quad T1 = \cup \{ \text{Sui}(s) \mid s \in V \} ;$$

$$B1 = \text{Som } B \cup T1 ; \quad B2 = B - V ;$$

$$B1 = (\oplus \{A(s) \mid s \in V\}) \oplus (\oplus \{i \mid i \in I_s\}) ; \quad B = B1 \circ B2 ;$$

Sur la figure,  $B1$  comprend ce qui est sur la ligne hachurée au au-dessus de celle-ci;  $B2$ , ce qui est sur la ligne et au-dessous.

#### 4 Classifications hiérarchiques sur un ensemble fini

##### 4.1 Rappel de la définition d'une classification hiérarchique

Soit  $I$  un ensemble fini ; on note  $P(I)$  l'ensemble de ses parties non vides:

$$P(I) = \mathcal{P}(I) - \{\emptyset\} = \{X \mid I \supset X; X \neq \emptyset\} .$$

L'inclusion définit sur  $P(I)$  une relation d'ordre  $H$  :  $H(X, Y) \Leftrightarrow Y \supset X$  .

Nous appellerons *classification hiérarchique* ou *classification* dans  $I$ , une partie  $A$  de  $P(I)$  qui, munie de la relation  $H$ , satisfait aux axiomes suivants

**Axiome d'intersection** : deux éléments de  $A$ , non comparables pour l'inclusion, sont d'intersection vide; ce qu'on peut écrire:

$$H_i : \forall x, y \in A : x \cap y \in \{x, y, \emptyset\} ;$$

**Axiome de réunion** : tout nœud de  $A$  est réunion de ses successeurs :

$$H_u : \forall n \in \text{Nod } A : n = \cup \{x \mid x \in \text{Su}(n)\} ;$$

plus précisément, il résulte de  $H_i$  que  $\text{Sui}(n)$ , ensemble des successeurs immédiats de  $n$ , est une partition de  $n$  (en classes disjointes).

**NB:** Il importe de noter que l'on utilise communément, dans la pratique, des classifications *non-hiérarchiques*, ne satisfaisant pas à  $H_i$ .

Si  $A$  satisfait aux axiomes  $H_i$  et  $H_u$ ,  $A$ , muni de  $H$ , est un arbre; et  $A$  est fourchu; car si un nœud  $n$  n'avait qu'un seul successeur immédiat, celui-ci devrait coïncider avec  $n$ .

On appelle support de  $A$ , et on note  $\text{Sup } A$ , la réunion des éléments de  $A$ , considérés comme des parties de  $I$  :

$$\text{Sup } A = \cup \{x \mid x \in A\} = \cup \{x \mid x \in \text{Som } A\} = \cup \{x \mid x \in \text{Ter } A\} ;$$

plus généralement, une section  $X$  de  $A$ , telle que  $HZZ(X, \text{Som } A)$ , définit, comme  $\text{Som } A$  et  $\text{Ter } A$ , une partition de  $\text{Sup } A$ . On dit que  $A$  est une hiérarchie *sur*  $\text{Sup } A$  et *dans*  $I$ . Dans la suite, on notera respectivement  $\text{Clsf}(I)$  et  $\text{Prtt}(I)$  l'ensemble des classifications et celui des partitions dans  $I$ .

Une partie  $A'$  de  $A$  est une classification dans  $I$ , si et seulement si  $A'$  est un sous-arbre entier de  $A$ . On dit alors que  $A'$  est une *sous-classification* de  $A$ . Si  $A'$  est une section de  $A$ ,  $A'$  est une *partition* de son support  $\text{Sup } A'$ .

Une classification,  $A$ , dans  $I$ , est dite *fine* si tout  $t \in \text{Ter } A$  est une partie de  $I$  réduite à un élément. Une classification  $A$  est dite *totale* si elle est fine et a pour unique sommet  $I$  ; alors,  $\text{Som } A = \{I\}$  ;  $\text{Ter } A = \{\{i\} \mid i \in I\}$ .

Soit  $A$  un arbre fourchu:  $A$  définit sur  $\text{Ter } A$ , une classification

arborescente fine  $A^{\text{Ter}} = \{a^{\text{Ter}} \mid a \in A\}$  ; où :  $a^{\text{Ter}} = \{t \mid t \in \text{Ter } A; H(t, a)\}$ .

Plus généralement, étant donné un ensemble  $I$ , et une surjection  $f$  d'une partie  $I'$ , de  $I$ , sur  $\text{Ter } A$ , on a une classification  $A^I$ , (dans  $I$ , sur  $I'$ ) en posant:

$$A^I = \{a^I \mid a \in A\} \quad ; \quad \forall a \in A : a^I = \{i \mid i \in I' ; H(f(i), a)\} ;$$

#### 4.2 Catégorie des classifications dans un ensemble

Reprenons maintenant les considérations du §3.3. Soit  $I$  un ensemble fini. On définit une catégorie dont l'ensemble des morphismes est l'ensemble,  $\text{Clsf}(I)$ , des classifications dans  $I$ , muni des deux opérations  $\{ \circ ; \oplus \}$ .

Le sous-ensemble  $\text{Prtt}(I)$  des partitions, s'identifie aux objets (ou aux unités): la source de la classification  $A$  est  $\text{Ter}(A)$ , son but est  $\text{Som}(A)$ . Deux morphismes  $B$  et  $C$  sont composables dans l'ordre  $B \circ C$  si et seulement si la source de  $B$  coïncide avec le but de  $C$ ; on alors:

$$\forall B, C \in \text{Clsf}(I) : \text{Ter } B = \text{Som } C \Rightarrow B \circ C = B \cup C \in \text{Clsf}(I) ;$$

Soit  $X$  et  $Y$  deux objets (ou morphismes unité), i.e. deux partitions dans  $I$ . L'ensemble  $\text{Hom}(X, Y)$  est non-vide si et seulement si  $X$  et  $Y$  ont même support et que  $X$  est plus fine que  $Y$ . On a alors, en particulier:

$$(X \cup Y) \in \text{Hom}(X, Y).$$

— La somme directe de deux objets ou de deux morphismes  $B$  et  $C$ , (les objets n'étant que des cas particuliers des morphismes), est définie si et seulement si  $\text{Sup}(B) \cap \text{Sup}(C) = \emptyset$ ; on a alors  $B \oplus C = B \cup C$ .

On peut écrire ici des formules analogues à celles proposées au §3.4 pour exprimer un arbre en fonction de ses sous-arbres élémentaires. Soit  $X$  et  $Y$  deux partitions dans  $I$ , avec  $\text{Sup}(X) = \text{Sup}(Y) = s$ ; et  $X$  plus fine que  $Y$ . On a sur  $s$ , 4 partitions; qui sont, de la plus grossière à la plus fine:

$$\{s\} ; Y ; X ; \{\{i\} \mid i \in s\} ;$$

à partir de ces partitions, on construit sur  $I$  une classification totale  $A$ , i.e. fine (distinguant tous les éléments) et de sommet  $I$ :

$$A = \{s, I-s, I\} \circ (B \oplus C) \in \text{Hom}(\{\{i\} \mid i \in I\}, \{I\}) ;$$

où on a noté :

$$B = (Y \cup \{s\}) \circ (Y \cup X) \circ (X \cup \{\{i\} \mid i \in s\}) \in \text{Hom}(\{\{i\} \mid i \in s\}, \{s\}) ;$$

$$C = (\{I-s\} \cup \{\{i\} \mid i \in I-s\}) \in \text{Hom}(\{\{i\} \mid i \in I-s\}, \{I-s\}) ;$$

Toutefois,  $\{I\} \cup Y \cup X \cup \{\{i\} \mid i \in I\}$  est également une classification fine et totale sur  $I$ ; et c'est évidemment la plus simple de celles où rentrent  $X$  et  $Y$ .

### 4.3 Introduction de la partie vide dans une hiérarchie

Dans la suite, pour la décomposition des fonctions sur  $I$ , il sera commode de faire se correspondre la fonction constante et la partie vide,  $\emptyset$ . À cette fin, étant donné une classification,  $A$ , sur  $I$ , on notera  $A^\circ$  l'ensemble  $A \cup \{\emptyset\}$ ,  $A^\circ$  étant muni d'une relation d'ordre,  $H$ , définie par l'inclusion; à ceci près que  $\emptyset$  sera considéré comme supérieur à tous les  $a$  de  $A$  :  $\forall a \in A : H(a, \emptyset)$ ; bien que, au contraire,  $\emptyset$  soit inclus dans tout  $a$ . Ainsi, on a pour successeurs immédiats de  $\emptyset$  dans  $A^\circ$  les sommets de  $A$ :  $\text{Sui}(\emptyset, A^\circ) = \text{Som } A$ .

Soit  $B^\circ$  un sous-arbre de  $A^\circ$ , avec  $\emptyset \in B^\circ$ ,  $\text{som } B^\circ = \emptyset$  : si  $B^\circ$  n'est pas réduit à  $\{\emptyset\}$ , et que  $B^\circ$  est entier (cf. §2.1, axiome He), on a  $\text{Sup } B = \text{Sup } A = I$ . De même, on convient que  $\{\emptyset\}$  est la partition la plus grossière sur  $I$ . On notera :

$$\text{Prtt}^\circ(I) = \text{Prtt}(I) \cup \{\{\emptyset\}\} \quad ;$$

$$\text{Clsf}^\circ(I) = \text{Clsf}(I) \cup \{B^\circ \mid B \in \text{Clsf}(I) ; \text{Sup } B = I\} \cup \{\{\emptyset\}\} \quad ;$$

NB: avec cette convention, *on n'a pas*  $B^\circ \in \text{Clsf}^\circ(I)$ , si  $\text{Sup}(B) \neq I$ . La notation  $B^\circ$  sera cependant parfois employée même si  $\text{Sup } B \neq I$ .

En convenant de placer  $\{\emptyset\}$  au-dessus de tout élément de  $\text{Prtt}(I)$  ayant pour support  $I$ , (bien que  $\emptyset$  ne figure dans aucune partition,) on a adjoint à la catégorie des partitions dans  $I$  un nouvel objet  $\{\emptyset\}$  ; ayant, de plus, attribué  $I$  comme support à  $\{\emptyset\}$ , on peut convenir que  $\text{Hom}(X, \{\emptyset\})$  est non vide si et seulement si  $\text{Sup } X = I$ , auquel cas  $\text{Hom}(X, \{\emptyset\})$  s'identifie à l'ensemble des classifications de source  $X$ , complétée chacune par le sommet  $\emptyset$  :

$$\text{Hom}(X, \{\emptyset\}) = \{B^\circ \mid B \in \text{Clsf}(I) ; \text{Sup } B = I ; \text{Ter } B = X\} \quad .$$

On a bien ainsi une catégorie ayant pour ensemble de ses objets  $\text{Prtt}^\circ(I)$ ; et pour ensemble de ses morphismes  $\text{Clsf}^\circ(I)$ .