

P. LOSLEVER

Un exemple de caractérisation d'enregistrements quasi périodiques : la marche normale de l'homme

Les cahiers de l'analyse des données, tome 21, n° 1 (1996), p. 83-102

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1996__21_1_83_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN EXEMPLE DE CARACTÉRISATION D'ENREGISTREMENTS QUASI PÉRIODIQUES: LA MARCHÉ NORMALE DE L'HOMME

[CARACT. MARCHÉ]

P. LOSLEVER

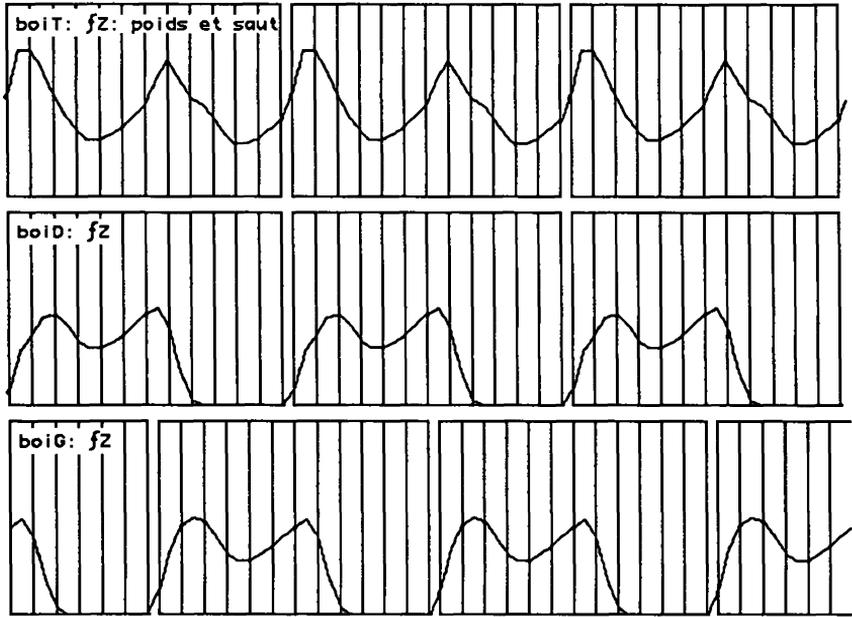
La cinématographie, née il y a un siècle, avait été précédée par des enregistrements du mouvement, dépourvus d'attrait pour le profane, mais déjà précieux pour l'anatomie fonctionnelle et l'orthopédie. Ces recherches se poursuivent aujourd'hui: au lieu de saisir, tel qu'on le voit, le mouvement global du corps, on s'applique à analyser, ne fût-ce que schématiquement, la cinématique des parties et quelques composantes des forces auxquelles celles-ci sont soumises. Les données de cette sorte dont nous disposons sont présentées sous une forme qui nous paraît inadéquate; mais nous croyons qu'elles méritent d'être considérées, afin de préparer des études ultérieures.

1 Les données disponibles

1.1 Format des données individuelles: configuration et forces

Sur des sujets, marchant normalement, on enregistre, 50 fois par seconde, les trois coordonnées de repères articulaires matérialisés par des petits miroirs; simultanément, sont mesurées, sous chaque pied, les trois composantes de la réaction du sol. À partir des coordonnées, on a calculé des "angles articulaires", pour la hanche, le genou et la cheville. Les longueurs ne nous étant pas données, non plus que la vitesse du déplacement d'ensemble, nous ne pouvons reconstituer le mouvement des repères et tenter d'estimer des forces à partir d'accélération. Le taux d'enregistrement suffirait peut-être, même si le passage de l'appui d'une jambe à l'autre se fait en ≈ 5 centièmes de seconde; mais, par une interpolation non précisée, on a réduit les données à 25 enregistrements par pas (celui-ci étant compris comme l'intervalle entre une pose du pied droit et la suivante). Le plus fâcheux est que les enregistrements afférents aux deux jambes, droite et gauche, ne sont pas synchronisés; mais donnés chacun, séparément, pour un seul pas, à partir de la pose du pied correspondant. Or, il est clair que la marche est un phénomène coordonné; le déséquilibre entre les deux jambes étant le trait le plus manifeste de la démarche pathologique; dont le laboratoire d'où proviennent les données a fait, précisément, l'objet ultime de ses recherches.

(*) Laboratoire d'Analyse Automatique industrielle et Humaine. URIAH. U.A. CNRS n°1118.
Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis;
Le Mont Houy, B.P. 311 - 59304 Valenciennes CEDEX - France.



Les mesures de forces de réaction, sous la forme où nous en disposons, sont en butte aux mêmes critiques que les mesures de position; mais elles sont plus directement interprétables; et permettent une reconstitution approximative de la synchronisation des deux jambes. Nous considérerons donc d'abord ces mesures d'après l'exemple d'un sujet.

1.2 Variation de la réaction verticale du sol: pieds droit et gauche, et réaction totale

Dans la marche, le sujet repose alternativement sur le pied droit et sur le pied gauche, avec une brève transition de l'un à l'autre. C'est pourquoi chaque composante de la réaction est nulle pendant presque la moitié du pas.

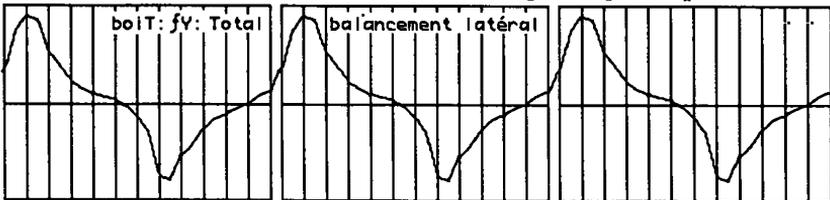
Considérons d'abord, la composante verticale, f_{ZD} , de la réaction du sol sur le pied droit: la courbe de variation de f_{ZD} peut être décrite comme un tapèze, dont le pallier supérieur est déprimé en son milieu. Après la pose du pied droit, tandis que le pied gauche s'élève, f_{ZD} croît rapidement jusqu'à égaler le poids du corps; elle le dépasse même, car, quand la jambe droite, posée obliquement vers l'avant, tend vers la direction verticale, le centre de gravité du corps s'élève, et cette quantité de mouvement verticale est fournie par une force. Au milieu de la pose du pied droit, au voisinage de la verticale, il y a, au contraire, décélération, accélération vers le bas; la réaction du sol devient quelque peu inférieure au poids. Mais, en fin de pose du pied droit, la descente du centre de gravité se ralentit et se prépare une nouvelle ascension, correspondant à la pose du pied gauche; sur lequel le sol exerce une réaction verticale, f_{ZG} , dont la variation est analogue à celle de f_{ZD} .

Pour conjecturer une synchronisation des deux courbes, fZD et fZG , on peut partir de l'hypothèse d'une stricte symétrie entre droite et gauche; laquelle implique que la réaction verticale totale, $fZ = fZD + fZG$, soit une fonction ayant pour période un demi-pas; avec, en particulier, des maxima égaux correspondant à la pose du pied droit et à celle du pied gauche. Même si la marche normale est affectée d'une certaine dissymétrie, qui constitue un terme de comparaison essentiel avec la démarche pathologique, on peut choisir un décalage temporel, entre droite et gauche, donnant, pour fZ , une courbe dont nous croyons qu'elle offre une base à des considérations ultérieures.

De façon précise, on a, par tâtonnement sur les courbes d'un seul sujet, $i=boi$, d'abord, puis par programme numérique pour 46 sujets, déterminé le décalage entre droite et gauche pour lequel soit aussi faible que possible le maximum, sur toute la durée du pas, de la somme $fZ = fZD + fZG$ (en fait: $fZD + f'ZG$, f' désignant la fonction décalée). Le pas de $1/25$ ne suffisant pas, on a interpolé fZG , afin de pouvoir considérer des décalages fractionnaires relativement à ce pas (cf. *infra*). La figure représente une suite de trois pas, pour la réaction Droite (courbe $boiD$), pour la Gauche ($boiG$); et au total ($boiT$).

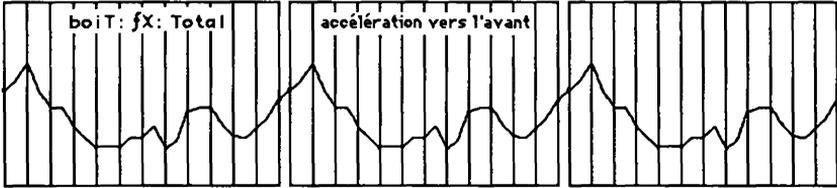
1.3 Forces de balancement et réaction vers l'avant

Une fois déterminé d'après la composante verticale, ce décalage peut servir à calculer la variation, sur un pas, des réactions totales: vers l'avant, $fX = fXD + fXG$; et transversalement au mouvement, $fY = fYD + fYG$. Du point de vue de la dynamique, l'interprétation de fY est claire; et s'accorde avec la courbe trouvée. En bref, s'il n'y avait pas de mouvement, le centre de gravité du corps devrait se trouver à la verticale d'un point du polygone de sustentation; lequel est constitué par l'empreinte du pied lequel repose sur le sol; ou par l'enveloppe convexe des deux empreintes, pendant les brèves fractions du pas où l'on passe de G à D ou de D à G. Comme la marche est une suite de bonds, avec des chûtes alternées qui se compensent, il n'est pas strictement nécessaire que la verticale du centre de gravité tombe dans le polygone de sustentation. Mais parce que, contrairement à la formule usuelle, on ne met pas "un pied devant l'autre", mais les empreintes des deux pieds tracent des lignes parallèles distinctes, un balancement latéral alternatif tend à maintenir le corps au-dessus de celui des deux pieds qui est posé.



Sans prétendre posséder une démonstration rigoureuse fondée sur un calcul dynamique, nous dirons, d'après la courbe de fY , que le corps est soumis alternativement à des impulsions vers la droite et vers la gauche;

l'impulsion vers la droite ayant son maximum dans la fraction du pas où le pied gauche s'élève et le droit se pose; tandis que l'impulsion vers la gauche accompagne le changement contraire. Globalement, on peut décrire la courbe de f_Y comme une sinusoïde, dont la période est égale à un pas; avec, correspondant aux impulsions, des *extrema* fortement exagérés au-delà du dessin exact de la sinusoïde.



La composante vers l'avant, f_X , nous paraît plus difficile à expliquer. D'abord, puisque la vitesse moyenne et donc la composante moyenne de la quantité de mouvement vers l'avant ne varient pas au cours d'une marche régulière, la moyenne de f_X , sur une période, devrait être nulle, les changements de signe correspondant aux fluctuations de la vitesse du centre de gravité. En fait, pour répondre aux frottements qui s'opposent au mouvement, au contact du sol, voire dans les articulations, la moyenne de f_X est non nulle; mais bien inférieure au module moyen de f_Y ; elle-même nettement dépassée par f_Z . Quant à la forme de la courbe f_X , elle suggère, dans le cas présenté, une dissymétrie entre droite et gauche; mais l'imprécision des interpolations sur de faibles valeurs interdit de rien affirmer.

2 Tableau de correspondance pour plusieurs sujets

Nous avons déjà dit que le format des données laisse à désirer: nous en poursuivons cependant l'étude par des analyses multidimensionnelles propres à préparer des recherches à venir. Comme dans l'examen d'un seul sujet, nous nous bornerons aux composantes $\{f_X, f_Y, f_Z\}$ des forces de réaction sur les pieds droit et gauche.

2.1 Calcul de la réaction totale par synchronisation des composantes afférentes aux pieds Droit et Gauche

Pour chacun des deux pieds, $\{iD, iG\}$, du sujet i , on a une ligne comprenant 75 mesures, en trois blocs successifs de 25 mesures, afférentes à f_X, f_Y et f_Z . Dans chaque bloc, les dix premières composantes diffèrent de zéro, les dix dernières sont toujours nulles; l'intervalle non nul s'étend plus ou moins loin selon la durée de pose du pied. Pour avoir les réactions totales, il faut, comme on l'a dit, qu'à f_D on ajoute f_G , convenablement décalé. Si la symétrie entre D et G était parfaite, le décalage devrait être de $25/2$; ce que l'on ne peut faire sans interpolation. Nous avons choisi de calculer les courbes somme afférentes à 4 décalages entiers différents: 11, 12, 13 et 14; entre deux courbes consécutives, nous avons, en guise de décalages fractionnaires,

calculé, par moyenne pondérée, des courbes intermédiaires. Par exemple, soient $\partial 11$ et $\partial 12$ les courbes afférentes aux décalages 11 et 12; $(2/3).\partial 11 + (1/3).\partial 12$ sera la courbe associée au décalage $11+(1/3)$. Avec des pas successifs de $(1/9)$, on a, au total 28 courbes (y compris celles calculées par décalage entier). De toutes ces courbes, on adopte, pour chaque individu, celle pour laquelle le maximum de fZ est le plus faible. Tel qu'on l'a effectué, le calcul prend le pied Droit pour base; mais il est facile de voir que, à une permutation circulaire près au sein de chaque bloc de 25 composantes, on choisirait la même combinaison en partant du Gauche.

2.2 Critères de synchronisation entre plusieurs sujets

Nous supposons donc construit un tableau 46×75 , donnant les réactions totales pour 42 sujets; avec, répétons-le, 25 composantes de fX , 25 de fY et 25 de fZ ; un bloc de 25 étant censé représenter, pour une marche rigoureusement périodique, une période complète avec, successivement, pose sur D et sur G. Pour une analyse multidimensionnelle, il convient de synchroniser l'ensemble des sujets; ce qu'on fera en choisissant pour chacun d'eux une permutation circulaire du cycle des 25 instants. Nous avons considéré trois critères:

[a] Synchronisation sur le maximum de fZ : de façon précise, comme on l'a vu sur l'exemple du §1.2, il y a deux maxima, correspondant respectivement à la pose des pieds D et G. Pour chacun des 46 sujets, on prend donc deux lignes: l'une, iD , où le maximum à la pose de D est amené à l'instant 1; l'autre, iG , où l'on fait de même pour G; soit, au total, un tableau à 92 lignes. Les décalages requis pour iD et iG se repèrent aisément; car, avant décalage, compte tenu du mode de calcul de la réaction totale, le maximum pour D ne peut être que dans les instants 1 à 10; et celui pour G, ensuite.

[b] Synchronisation sur les extrema de fY : on a dit, au §1.3, que la composante transversale de la réaction est approximativement sinusoïdale, changeant de signe avec le balancement du corps; avec maximum positif de la réaction vers la droite, pour la pose sur D; et (avec la même convention de signe) un minimum négatif pour la pose sur G. On prend donc deux lignes $i>$ et $i<$, décalées de telle sorte que soit, respectivement, à l'instant 1, l'extremum positif et l'extremum négatif de fY . Comme en a), on retient donc un tableau à 92 lignes.

[c] Considération simultanée, pour chaque individu, des 25 courbes afférentes à tous les décalages possibles: on a ainsi $25 \times 46 = 1150$ lignes; mais, à ce prix, pose sur D et pose sur G jouent le même rôle. Suivant un résultat déjà connu, et dont la démonstration sera rappelée au §5, l'analyse factorielle s'identifie alors avec l'analyse de FOURIER de la marche considérée comme rigoureusement périodique.

2.3 Enchaînement des analyses

Dans les tableaux construits d'après les critères du §2.2, l'ensemble J_s comprend trois blocs successifs de 25 colonne, afférents respectivement aux composantes fX , fY et fZ de la réaction totale (D+G). Seul le bloc fZ se laisse directement interpréter comme un tableau de correspondance; fZ étant une réaction, toujours positive, qui fluctue au voisinage du poids total du sujet. L'analyse est donc faite avec ce bloc en principal, les deux autres étant en supplément. Il se trouve que la composante totale vers l'avant, fX , n'a pas de valeurs négatives (sinon par exception): on a donc considéré les projections des 25 éléments supplémentaires sur certains des graphiques plans issus de l'analyse de fZ . Au contraire, la composante fY , ou force de balancement de balancement, change de signe en fonction du passage alterné de D à G: elle ne se prête donc pas, telle quelle, à une analyse de correspondance; en revanche, elle se prête à une décomposition en somme de FOURIER. Ainsi qu'on l'a dit, cette décomposition, pour fZ , sort de l'analyse du tableau où, suivant le critère [c], la symétrie dans la suite des temps est établie par permutation circulaire.

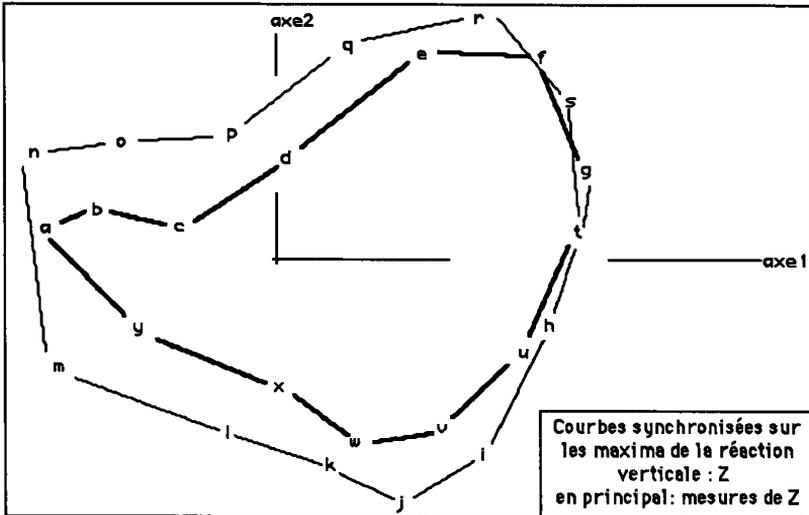
Dans les analyses avec deux lignes par sujet, l'instant initial peut être fixé soit d'après un maximum de fZ , [a], soit d'après un maximum de fY , [b]. Une autre voie, subordonnée à la décomposition de FOURIER, serait d'imposer que la composante principale de fZ , laquelle, ainsi qu'on a vu au §1.2, est l'harmonique 2, se réduise au terme en cosinus: critère qui réalise, de façon indirecte, un ajustement aux maxima de fZ ; et qu'on a appliqué au §5, malgré l'imprécision des données.

3 Analyse avec synchronisation des courbes sur les maxima de la réaction verticale

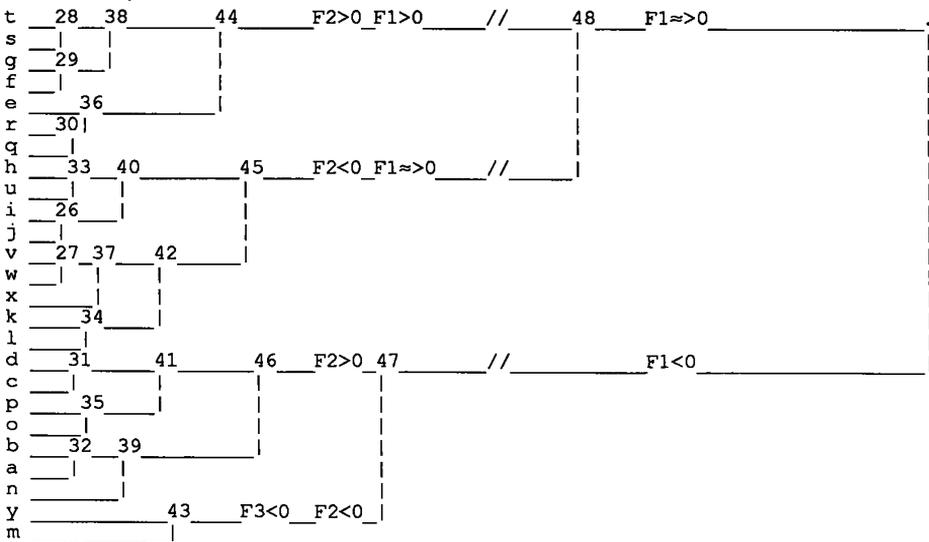
tableau de marche : 92 × 25 : courbes calées sur les maxima de fZ

trace :	1.446e-2									
rang :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
lambda :	61	41	13	8	8	3	3	2	2	1 e-4
taux :	4184	2809	891	570	531	234	194	154	130	91 e-4
cumul :	4184	6994	7885	8454	8986	9220	9413	9567	9697	9788 e-4

L'analyse est dominée par les axes 1 et 2, nettement séparés des suivants. Dans le plan (1, 2), les 25 instants successifs s'enroulent en un double cycle; ce qui correspond au fait que chaque courbe (iD, avec pose sur D au début; ou iG, avec pose sur G) se compose de deux périodes successives différant peu l'une de l'autre. Sur le graphique, les instants de mesure afférents à fZ sont notés par les 25 lettres {a, b, ..., y}; et les deux cycles successifs, le premier centré sur a, le second sur {m,n}, sont suggérés par des lignes brisées de largeur différente. On note, entre ces deux cycles, un faible décalage, le second enveloppant le premier. En effet, les lignes du tableau étant fixées pour avoir un maximum en a, les différences entre {...y, a, b...} correspondent à l'intensité de ce maximum plus qu'à son décalage (très faible); au contraire, les différences des profils de {...l, m, n, o...} sur l'ensemble I des lignes expriment la variabilité du centre du second maximum.



La CAH de J est conforme à l'image du plan (1, 2). Au sommet de la hiérarchie, se séparent, suivant l'axe 1 la branche j47 ($F1 < 0$) formée des instants où sont les deux maxima. L'autre branche, j48, ($F1 > 0$), contient les instants où se placent les deux minima; j48 se partage, suivant l'axe 2, en j44 et j45. Au sein de chacune de ces deux subdivisions, on trouve des instants des deux cycles.



Représentation de l'ensemble J des 25 instants consécutifs

c	Partition en 16 classes : Sigles des individus de la classe c
161	tod goe Tod all vap luc
153	foi Foi Mic Bau Goe mic bau Vap Luc

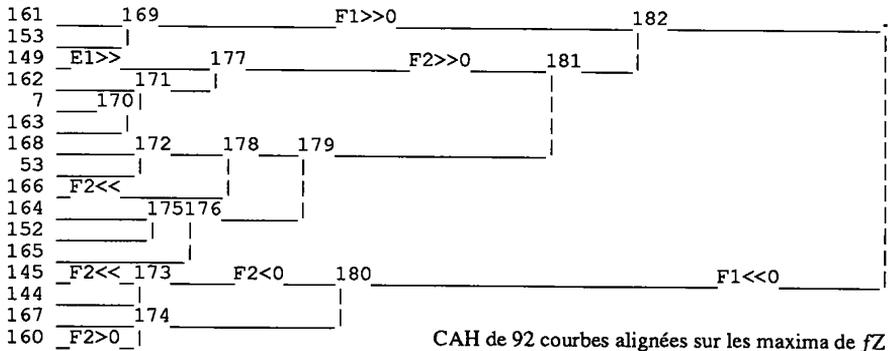
149	All Der
162	war Seg soe Tai tel dev lem hav fry
7	den
163	Duc van Mer cab eve fra boi

168	War Soe seg Tel Dev Lem Hav Fry der lhe tai Van
53	Den
166	boy duc mer Boy Lem Bre pon jjf

164	Pon Jjf Lhe Cab lem bre Eve Wil
152	bib Far dup Boi Fra roc rau
165	Bib far Dup Roc Rau wil Rem Jou
=====	
145	Str Voi voyr
144	str voi Voyr

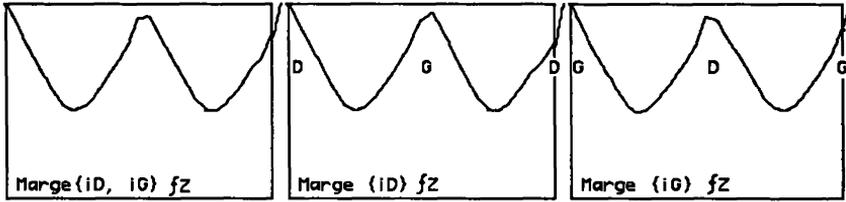
167	rem gau jou Deg Laa
160	deg Gau laa

Quant aux individus, iD ou iG, on trouve, vers ($F1 < 0$), ceux pour lesquels sont le plus nets les maxima de fZ , aux instants $\approx a$ ou $\approx \{m, n\}$. Au contraire, vers ($F1 > 0$), la modulation de fZ est minima. Comme on le précisera sur des exemples, la projection sur l'axe 2 résulte de la place de l'intervalle couvert par chacun des deux maximum, particulièrement le second; lequel, n'étant pas calé sur une ordonnée imposée, a la plus grande latitude dans son étalement. Auparavant, nous considérerons, sur la CAH, l'ensemble des courbes.



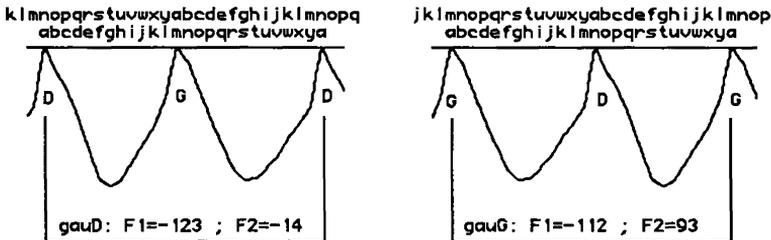
CAH de 92 courbes alignées sur les maxima de fZ

Sur le tableau de la CAH de l'ensemble I, chaque sujet i est désigné par un sigle de 3 lettres, qui est en bas de casse (minuscule) pour la courbe avec maximum à l'instant a de l'appui sur D; et avec une capitale initiale pour l'appui sur G. Les deux sortes de courbes semblent également répandues dans toutes les classes: on en déduira qu'il n'y a pas, entre appui sur D et sur G, de différence commune à tous les sujets; la courbe D de l'un pouvant être très semblable à la courbe G de l'autre.

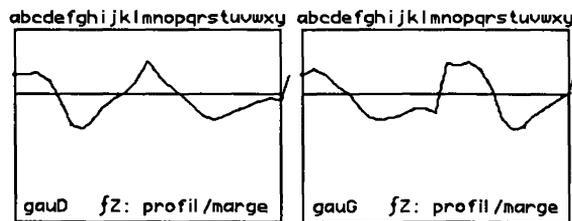


D'ailleurs, d'une part, le centre de gravité de l'ensemble des courbes D, comme celui des courbes G, ne s'écartent pas de l'origine; et, d'autre part, les deux courbes calculées comme moyennes des courbes {iD} ou {iG} diffèrent très peu l'une de l'autre et très peu de la moyenne générale. Mais, pour un même sujet i, les courbes iD et iG peuvent différer notablement; même si, dans la plupart des cas, iD et iG s'agrègent à un niveau peu élevé. Le contraste entre max et min est le plus fort dans la branche i180; $F1 << 0$. Il est le plus faible dans i169, $F1 >> 0$. La branche i177 va nettement vers $F2 >> 0$; au contraire, i179, dont le centre est proche de l'origine se distribue autour de celle-ci.

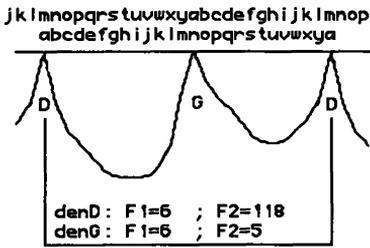
Pour plus de précision, nous considérerons les courbes afférentes à plusieurs sujets; notre choix étant fait dans toutes les directions du plan (1, 2). Au-dessus de chaque courbe, on marque, à la fois, l'échelle abcd...wxy; et une échelle décalée de telle sorte que l'instant "a" se place avec le point maximum intermédiaire. Les lettres, D ou G, spécifiant, dans chaque maximum, quel pied le sujet pose.



Prenons d'abord les deux courbes, gauD et gauG, du sujet gau. Avec un fort contraste entre maxima et creux, on a, pour iD et iG, $F1 << 0$. Sur gauD, le second maximum est en m; mais la moyenne de la pointe, qui couvre {m, n}, se place au centre du cycle: d'où $F2 \approx 0$. Pour gauG, le second maximum est en n avec une pointe sur {n, o}: d'où $F2 > 0$.

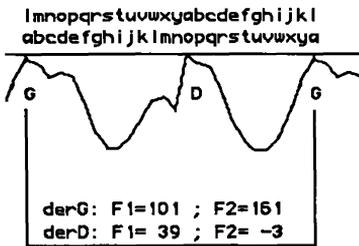


Plus précisément, sur la courbe (profil/marge), on voit les intervalles qui contribuent au calcul des facteurs: e.g., pour gauG, il y a un massif vers {nopq}, où $F2$ est positif; d'où ($F2 > 0$) pour $F2(\text{gauG})$.



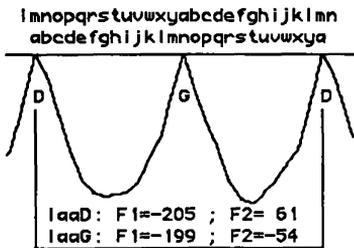
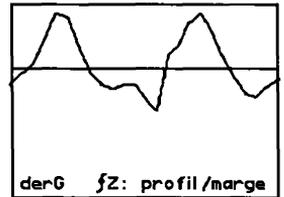
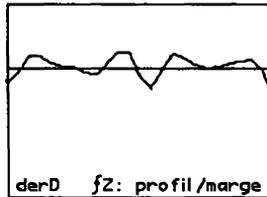
Pour denD et denG, le contraste est, selon les données que nous avons, très inégal entre les deux demi-pas; mais, en moyenne, il n'est ni fort ni faible: d'où $F1 \approx 0$. Pour denD (qui est figurée telle quelle), le max sur D est concentré en {y,a,b}; mais celui sur G s'étale sur {m,n,o,p}, $F2 > 0$; effet renforcé par un minimum profond sur {g,h,i,j} (intervalle qui s'étend vers $F2 < 0$).

Pour denG (qu'on se représentera d'après l'échelle décalée), les effets se compensent: $F2 \approx 0$.



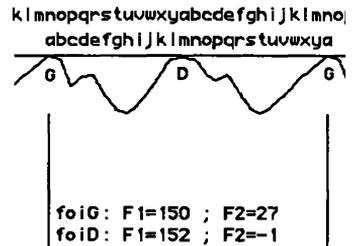
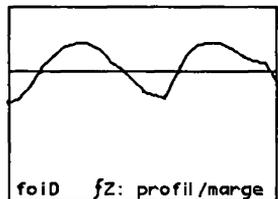
Pour derG, les max (vers {nopqr} et {abcde}) se placent nettement vers $F2 \gg 0$; et le contraste est assez faible (relativement à celui du profil moyen présenté plus haut, d'où $F1 > 0$). Pour derD, avec des maxima usuels, en {yabcd}, {lmnop}, on a $F2 \approx 0$; et ces maxima étant, d'une part, peu accusés, et, d'autre part, centrés en des positions où ($F1 < 0$), $F1$ est positif mais faible.

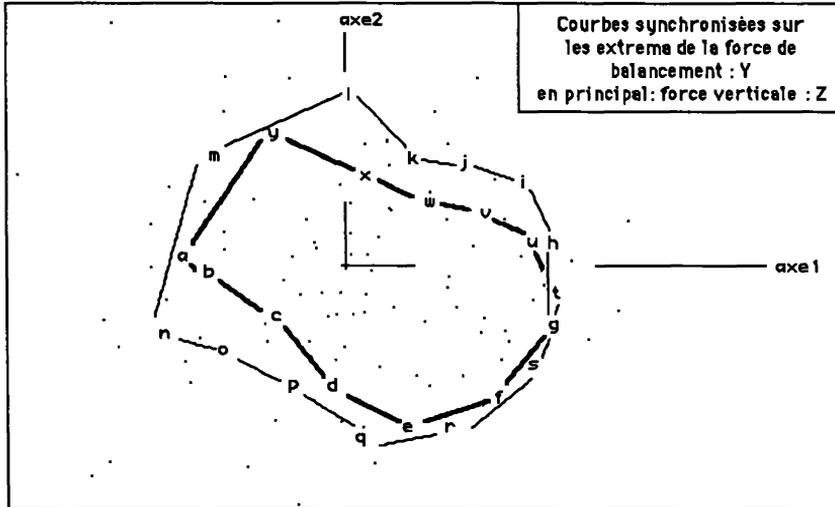
Pour plus de précision, on peut voir que les courbes (profil/marge) de derD et derG diffèrent grandement, cette dernière étant seule nettement écartée de sa moyenne.



Avec un contraste très fort, les courbes laaD et laaG ont $F1 \ll 0$; elles s'opposent quelque peu suivant l'axe 2: le second maximum, G, de laaD est en {mno}, vers ($F2 > 0$); pour laaG, au contraire, le second maximum, D, est en {lmn}, vers ($F2 < 0$).

Avec un contraste très faible, les courbes foiD et foiG ont $F1 \gg 0$; et $F2 \approx 0$. Le quotient (profil/marge) est quasi sinusoïdal, à l'image du facteur $F1$.





4 Analyse avec synchronisation des courbes sur les extrema de la force de balancement

tableau de marche : 92x25 ; courbes calées sur les extrema de fY

trace :	1.490e-2									
rang :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
lambda :	61	41	16	9	7	3	3	2	2	2 e-4
taux :	4069	2758	1090	636	439	230	177	159	125	104 e-4
cumul :	4069	6827	7917	8554	8992	9222	9400	9558	9683	9788 e-4

Comme au §3, l'analyse est dominée par les axes 1 et 2, nettement séparés des suivants. Dans le plan (1, 2), les instants successifs de fZ, notés par les 25 lettres {a, b, ..., y} s'enroulent en un double cycle; ce qui, ainsi qu'on l'a dit, correspond au fait que chaque courbe de fZ se compose de deux demi-périodes successives différant peu l'une de l'autre; et on a, entre les deux cycles, un faible décalage, le second enveloppant le premier. Une telle similitude entre les résultats des deux analyses s'accorde avec le fait que, pour les courbes, Droite ou Gauche, de plusieurs sujets, les critères des §§3 et 4 conduisent à adopter le même décalage.

La présente analyse nous offre l'occasion de considérer la variation de la composante fX de la réaction vers l'avant (cf. §1.3). De façon précise, avec 92 lignes, deux par sujet, le tableau analysé met en correspondance trois blocs de 25 mesure {Xa,... , Xy}, {Ya,... , Yy} et {Za,... , Zy}, afférents respectivement aux composantes fX (vers l'avant), fY (balancement) et fZ (verticale); ce dernier bloc figurant seul en principal dans l'analyse. Du fait des changements de signe des colonnes du bloc {Y} leurs coordonnées sur les axes factoriels ne se prêtent pas une interprétation directe. Il n'en est pas de même pour le bloc {X}

5 Considération simultanée, pour chaque individu, des 25 courbes afférentes à tous les décalages entiers possibles

5.1 Analyse de correspondance et analyse harmonique

Par permutation circulaire des 25 temps, on obtient $25 \times 46 = 1150$ lignes; mais, à ce prix, pose sur D et pose sur G jouent le même rôle.

Suivant un résultat connu, l'analyse factorielle d'un tel tableau s'identifie avec l'analyse de FOURIER de la marche considérée comme rigoureusement périodique.

De façon précise, identifions l'ensemble $J = \{Za, Zb, \dots, Zt\}$ des 25 composantes de fZ , avec l'ensemble $\{0, 1, \dots, 24\}$ des entiers modulo 25. Par double transition de J vers J , la fonction complexe:

$$\Phi_k(j) = \exp(2k.j.i\pi/25) \quad ;$$

(où k désigne un entier; et $i = \sqrt{-1}$) est transformée en une fonction $\Psi_k(j)$ qui lui est proportionnelle. En effet, Φ_k satisfait à la condition:

$$\Phi_k(j+1) = \exp(2k.i.\pi/25) \times \Phi_k(j) \quad ;$$

et, du fait de l'invariance par permutation circulaire de J , Ψ_k possède aussi cette propriété, qui caractérise Φ_k ; ainsi que les fonctions de la forme $z.\Phi_k$, où z est un nombre complexe quelconque. On a donc $\Psi_k = z \times \Phi_k$. De plus, les valeurs propres de la double transition étant réelles, on a:

$$\Psi_k = \lambda_k \times \Phi_k \quad ;$$

où λ_k désigne un scalaire réel; et sont facteurs de l'analyse les composantes réelle et imaginaire de Φ_k , c'est-à-dire les deux fonctions trigonométriques:

$$\varphi_{k,c} = \sqrt{2}.\cos(2k.j.\pi/25) \quad ; \quad \varphi_{k,s} = \sqrt{2}.\sin(2k.j.\pi/25) \quad ;$$

où le coefficient $\sqrt{2}$ n'a été introduit que pour assurer aux $\varphi_{k,h}$ une variance 1 sur J , conformément aux notations classiques. Mais ce qui précède n'implique pas l'ordre dans lequel ces facteurs sortiront de l'analyse du tableau principal, 1150×25 .

Sur l'ensemble I , les facteurs $F_{k,h}(i)$ associés aux $\varphi_{k,h}(j)$ se calculent classiquement en intégrant le facteur normalisé par rapport à la densité du profil de la ligne i ; ce qui revient à calculer pour la ligne (plus précisément pour la ligne divisée par son total) un coefficient de FOURIER.

De là résulte aussi l'interprétation de l'ordre dans lequel sortent les valeurs propres $\lambda_{k,s} = \lambda_{k,c} = \lambda_{[k]}$; chacune de celle-ci est la variance du coefficient de FOURIER correspondant sur l'ensemble des profils de lignes, chacun de ceux-ci étant pondéré par la moyenne de la ligne (c'est-à-dire, en bref, par le poids même du sujet, que porte la réaction fZ).

```

tableau de marche : 1150 x 25 ; toutes les courbes décalées
trace : 7.965e-2
rang : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
[onde]: [2] [2] [4] [4] [6] [6] [1] [1] [3] [3] [8] [8]
lambda: 353 353 18 18 6 6 6 6 6 6 3 3 e-4
taux : 4433 4433 230 230 78 78 71 71 69 69 40 40 e-4
cumul : 4433 8867 9096 9326 9405 9483 9554 9625 9694 9763 9804 9844 e-4

rang : 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
[onde]: [5] [5] [7] [7] [10] [10] [9] [9] [12] [12] [11] [11]
lambda: 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 e-4
taux : 22 22 16 16 15 15 10 10 8 8 7 7 e-4
cumul : 9866 9888 9904 9919 9934 9948 9959 9969 9977 9985 9993 10000 e-4

```

5.2 Ordre des facteurs et représentation de l'ensemble J des temps

Sur le tableau des valeurs propres, il apparaît d'abord que celles-ci vont par paires. Ce qui confirme ce qu'on a annoncé: pour chacun des entiers k , de 1 à 12, il y a un couple de valeurs propres égales, $\lambda_{k,s} = \lambda_{k,c} = \lambda_{[k]}$; les facteurs qui leur correspondent sur J sont, en bref, les lignes trigonométriques, sin et cos, avec toutefois une latitude quant à la phase et au signe.

Afin de publier l'ordre dans lequel sortent les harmoniques, on a ajouté, au tableau usuel des valeurs propres et taux, une ligne [onde], avec, entre crochets, l'indice $[k]$ afférent au rang du facteur.

Sortent d'abord des harmoniques pairs, de rang [2], [4], [6]; le rang [2] donne, à lui seul, dans le plan (1×2), 887‰ de l'inertie; et le cumul afférent à ces ondes est de 948‰. Ceci confirme l'observation déjà faite que les courbes de fZ peuvent, en première approximation, être assimilées à des sinusoides dont la période est la moitié de celle de la marche; la dissymétrie de forme entre pointe des maxima et creux des minima (cf. exemples de courbes: §§1.2 et 3) étant représentée par les ondes suivantes, [4] et [6].

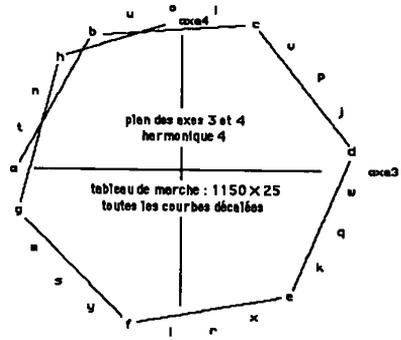
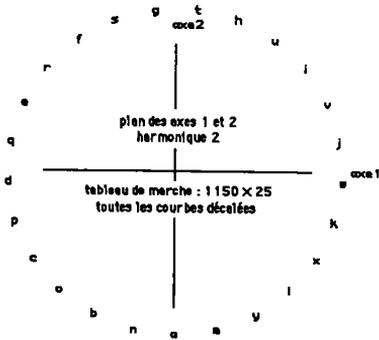
Viennent ensuite les deux premières ondes de rang impair: [1] et [3]; lesquelles, apportant ensemble moins de 3% de l'inertie du nuage, rendent compte de l'inégalité entre les deux demi-pas successifs.

Au-delà, l'onde [5] et les ondes de rang supérieur ou égal à [7] apportent à l'inertie une contribution totale inférieure à 2,4%.

Dans chacuns des douze plans $\{F_{k,s}, F_{k,c}\}$, de par la forme même des facteurs, l'ensemble J se projette sur un cercle centré à l'origine; plus précisément, d'un point au suivant, e.g. de a à b , on passe par une rotation dont l'angle est $(2.k.\pi / 25)$.

Si k est premier à 25, i.e. $k \neq 5$ et $k \neq 10$, l'ensemble J occupe les sommets d'un polygone régulier à 25 côtés; en liant les points $\{a, b, \dots, y, a\}$ dans leur ordre naturel, on obtient un polygone; en général étoilé, excepté quand $k=1$.

Dans les cas exceptionnels, $k=5$ et $k=10$, le polygone obtenu est un pentagone, respectivement convexe ou étoilé.



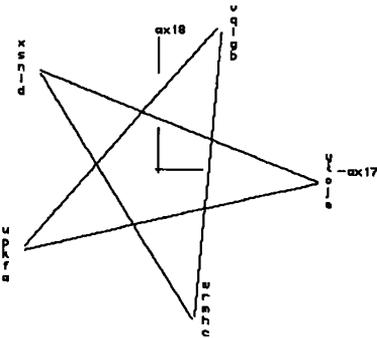
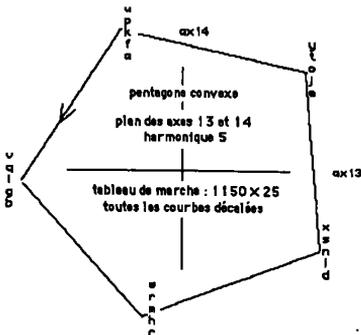
N.B. Pour les graphiques de l'ensemble J l'échelle change d'un plan à l'autre

Quant à la phase des facteurs, l'initialisation de l'algorithme d'analyse donne plusieurs fois des résultats simples: on a: $0 = F_1(a) = F_4(a) = F_7(a) = F_9(a)$; d'où, plus précisément, d'après les figures et le listage, les formules suivantes, où, comme ci-dessus, on a posé pour le point $a, j=0$ etc... :

$$\begin{aligned}
 F_1(j) &= -\sqrt{(\lambda_{[2]})} \cdot \sin(2.2.j.\pi/25) ; & F_2(j) &= -\sqrt{(\lambda_{[2]})} \cdot \cos(2.2.j.\pi/25) ; \\
 F_4(j) &= -\sqrt{(\lambda_{[4]})} \cdot \sin(2.4.j.\pi/25) ; & F_3(j) &= -\sqrt{(\lambda_{[4]})} \cdot \cos(2.4.j.\pi/25) ; \\
 F_7(j) &= -\sqrt{(\lambda_{[1]})} \cdot \sin(2.1.j.\pi/25) ; & F_8(j) &= -\sqrt{(\lambda_{[4]})} \cdot \cos(2.1.j.\pi/25) ; \\
 F_9(j) &= -\sqrt{(\lambda_{[3]})} \cdot \sin(2.3.j.\pi/25) ; & F_{10}(j) &= \sqrt{(\lambda_{[4]})} \cdot \cos(2.3.j.\pi/25) ;
 \end{aligned}$$

Le même décalage angulaire que pour J, se retrouve, au sein de l'ensemble I, pour le cycle I_5 des 25 points associés à chacun des sujets, s ; et on a donc, pour I_5 , la même figure polygonale que pour J; à une similitude près qui dépend de l'individu.

Ceci suggère un critère de synchronisation des courbes, autre que ceux des §§3 & 4 (cf. §2.2, [a], [b] et [c]).



5.3 Synchronisation des courbes d'après l'harmonique 2

Prenons pour modèle une courbe de marche $fZ_s(j)$ rigoureusement sinusoïdale: $fZ_s(j) = A_0 + A_1 \cdot \cos(2.2.j.\pi/25)$, où A_0 et A_1 sont des nombres positifs et $A_1 < A_0$. Pour une telle courbe, $F_2(s)$ est négatif, et tous les autres facteurs sont nuls, en particulier, $F_1(s) = 0$; parmi les courbes obtenues en décalant fZ_s , il y en a deux, correspondant aux décalages 12 et 13, pour lesquelles F_1 encadre la valeur zéro et F_2 est négatif (les autres facteurs, de rang >2 , sont nuls, dans ce cas modèle d'une sinusoïde parfaite).

Une courbe réelle, s , ne suit pas le modèle sinusoïdal; mais la suite I_s des courbes décalées se projette, dans le plan (1, 2), suivant un double cycle qui coupe deux fois le demi-axe ($F_2 < 0$). Par intrapolation entre deux courbes successives du cycle, on peut obtenir des courbes réalisant le passage ($F_2 < 0$) avec, exactement $F_1 = 0$. L'une correspond à la pose du pied Droit à l'instant $a=0$, l'autre à la pose du pied Gauche.

Construites, comme on l'explique au §2.1, à partir de données échantillonnées seulement 25 fois par pas, les 46 courbes de réaction globale, $fT = fD + fG$, sur lesquelles portent les analyses de §§3, 4 et 5, n'offrent pas matière à des interpolations précises. Mais nous avons tenté une expérience dont voici le principe.

Soit une fonction f admettant la décomposition suivante, que, d'après les résultats du §5.2, nous limitons aux harmoniques {2, 4, 6, 1, 3}:

$$f(j) = A_0 + \sum \{ A_k \cdot \cos((k.j.2.\pi/25) + \psi_k) \mid k = 2, 4, 6, 1, 3 \} ;$$

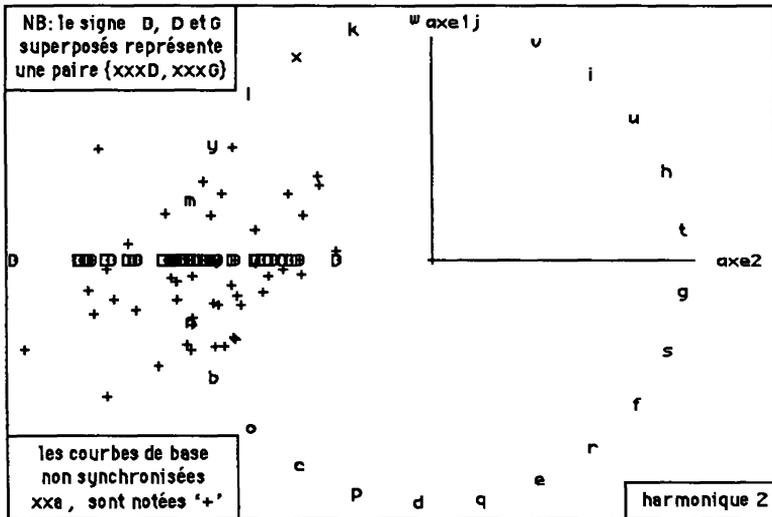
dans cette somme, le terme dominant est celui de rang $k=2$; d'après lequel on fera la synchronisation; en remplaçant la valeur entière j par une valeur décalée par un angle ϑ convenable. La formule s'écrit alors:

$$f(j+\vartheta) = A_0 + \sum \{ A_k \cdot \cos((k.(j+\vartheta).2.\pi/25) + \psi_k) \mid k = 2, 4, 6, 1, 3 \} .$$

En particulier, pour que l'harmonique de rang 2 soit exactement le cosinus, il suffit de prendre $\vartheta = -\psi_2/2$. Dans cette formule, ϑ est défini à π près.

Dans notre analyse factorielle, $j=0$ (i.e. $j=a$) sort avec $F_1=0$, $F_2 < 0$; et, au voisinage de ce point, se projette, dans le plan (1, 2) la courbe f telle qu'on l'a construite, au §3, pour débiter, à peu près, sur la pose du pied Droit. En d'autres termes, A_2 est négatif et ψ_2 est un petit angle; il est donc facile de calculer un angle aigu ϑ d'après les facteurs F_1 et F_2 ; tandis que la détermination $\vartheta+\pi$, correspondra à la pose sur le pied Gauche.

Ceci fait, on calcule aisément les valeurs des facteurs pour les deux courbes, notées fD et fG , construites à partir de f par les déphasages respectifs ϑ et $\vartheta+\pi$. En bref, dans le plan où sont sortis les harmoniques

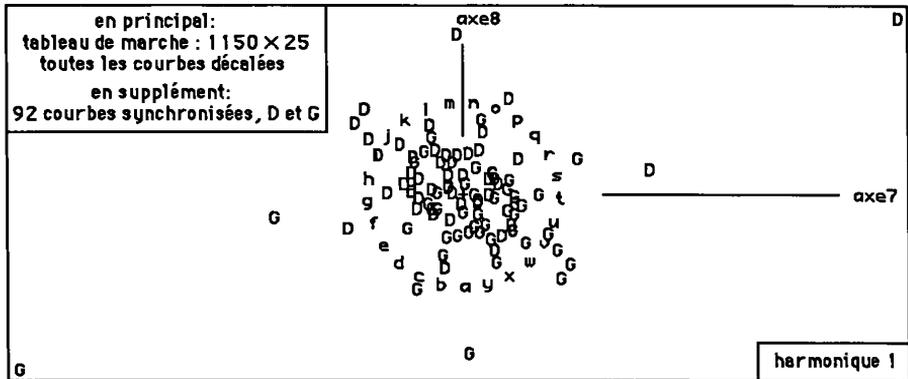


$\cos(k.j)$ et $\sin(k.j)$, on fait une rotation d'angle $k.\vartheta$, ou $k.(\vartheta+\pi)$. Il faut seulement prendre garde à ce que l'orientation, définie par l'angle saillant qui fait passer de a à b, soit la même dans le plan de référence ($k=2$) (plan des axes 1 et 2) et dans le plan considéré; ce qu'on obtiendra, au besoin en changeant l'orientation d'un des axes. L'effet des rotations associées à ϑ et $\vartheta+\pi$ est le même si k est pair (facteurs de rang 1 à 6); sinon elles diffèrent par une symétrie de centre O.

En suivant cette voie, nous avons obtenu un fichier de facteurs du format usuel, où chacun des sujets, xxx, observés, est représenté par deux lignes xxxD et xxxG, qui sont les pas alignés respectivement sur la pose du pied droit et sur celle du pied gauche.

Dans le plan (1, 2) le nuage des {xxxD, xxxG} est, par définition, concentré sur le demi-axe ($F1=0; F2<0$); et, de plus, xxxD et xxxG coïncident pour chaque sujet. Au contraire, dans le plan (7, 8), afférent à l'harmonique 1, {cosj, sinj}, les points D et G s'opposent symétriquement (cf. *supra*).

Il faut prendre garde que dans le tableau de base, dont le nombre des lignes est $25 \times 46 = 1150$, chaque sujet xxx est représenté par un bloc, {xxxa, xxxb, ..., xxxy}, construit par permutation circulaire des temps à partir de la courbe xxxa, obtenue en ajoutant à la réaction propre au pied Droit, celle propre au Gauche, convenablement décalée, avec interpolation éventuelle (cf. §2.1). (Sur le plan (1, 2), le nuage des 46 points xxa est marqué par des "+"). Le maximum afférent à la pose de D est, pour xxxa, à l'instant 0 ou un peu après; le minimum du module de F1 est donc atteint pour l'une des courbes {xxxxy, xxxa, xxxb}; dont la ligne déphasée, xxxD, ne peut manquer d'être proche. De même, xxxG doit être proche de {xxxl, xxxm, xxxn, xxxo}.



Afin de vérifier les calculs de déphasage, on a donc cherché, pour chacune des courbes xxxD et xxxG, celle des 1150 courbes de l'ensemble I qui en est la plus proche (au sens de la distance euclidienne dans l'espace engendré par les axes 1 à 10). Voici le bilan des résultats:

les affectations {xxxD→xxxxy, xxxD→xxxxa, xxxD→xxxxb} ont été obtenues respectivement {6, 18, 6} fois; soit (30/46) cas : e.g. des 1150 courbes, la plus proche de vapD est vapy...

les affectations {xxxG→xxxli, xxxG→xxxm, xxxG→xxxn, xxxG→xxxo} ont été obtenues respectivement {1, 10, 17, 1} fois; soit (29/46) cas: e.g. des 1150 courbes, la plus proche de micG est micn...

Mais on trouve aussi des affectations telles que strG→stra; et, dans 17 cas la ligne la plus proche de xxxD ou de xxxG n'est pas l'une des 25 lignes décalées {xxxa, ..., xxxy}: e.g., on a: rauD→fara. Ce qu'on expliquera par des similitudes entre courbes issues de différents sujets.

Afin de préciser ces similitudes, on a fait une CAH de l'ensemble des 92 courbes {xxxD, xxxG} afférentes aux divers sujets. Comme l'attestent les tableaux publiés, les résultats sont semblables à ceux du §3.

Au sommet de la hiérarchie, se sépare la branche 180, qui s'écarte fortement vers ($F2 < 0$); ce qui correspond à une forte modulation par la sinusoïde de l'harmonique 2, relativement à la valeur moyenne (poids du sujet). Il faut prendre garde que, ainsi qu'on l'a vu dans le plan (1, 2), F2 est négatif sur tout le nuage des 92 courbes déphasées; mais la dispersion principale du nuage n'en est pas moins dans la direction de l'axe 2. En valeur absolue, F2 est minimum dans la classe 164; maximum dans 135.

Aux subdivisions des branches 180 et 182, les facteurs F3 et F4 contribuent après F2. Les facteurs de rang 7 à 10, afférents aux harmoniques 1 et 3, suivant lesquels xxxD s'oppose à xxxG, n'ont qu'un rôle subalterne.

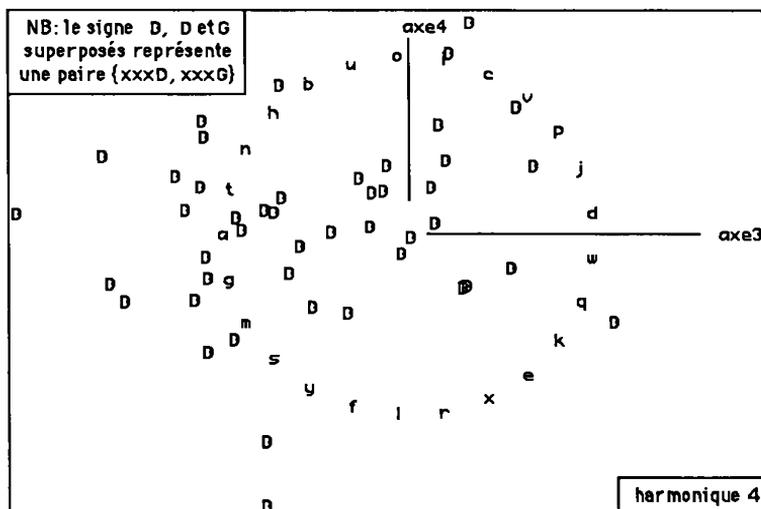
c	Partition en 16 classes : Sigles des pas de la classe c
157	allD lucD lucG allG
164	vapG vapD micG micD foiD foiG goeD todG bauD bauG goeG todD
168	derG lheG boyG ponG ponD jjfG jjfD cabG cabD derD lheD boyD breD
13	denD
148	merG ducG vanD lemD
166	soeD soeG segD warG segG ward taiG taiD telD telG
149	merD lemG ducD vanG
14	denG
154	rocD farG farD rocG rauG
146	breG lemD lemG eveD eveG
163	bibG fryG dupG fraG bibD fryD dupD fraD havD havG devD devG
167	gauD strG voiD gauG strD voiG
135	laaG laaD
130	degG degD
160	boiD boiG jouG jouD rauD remG remD
152	wild wilG voiD voiG

157	170	F2-	//	182	//
164		--			
168		181	F2--	//	
13	176	179	F3-		
148	173		F2 (177) < F2 (168) < F2 (176)		
166					
149	174	177			
14					
154	172				
146	171				
163					
167		F4+ 180	F2----	//	//
135	178	F3-			
130	175				
160	169				
152					

N.B. par construction, F2 est toujours négatif

Aussi n'est-il pas surprenant que, des 16 classes de la partition retenue, aucune ne se signale par une inégalité entre le nombre des xxxD et celui des xxxG; les deux profils afférents à un même sujet s'agrégeant, ordinairement, à un bas niveau de la hiérarchie.

Quant aux différences entre la présente CAH et celle du §3, on prendra garde que l'ensemble des courbes individuelles classées au §2 se retrouve comme un sous-ensemble des 1150 lignes du tableau de base du §5. Dans le plan (1, 2), tous les points de ce sous-ensemble ont un facteur F2 négatif; mais ils ont une certaine dispersion suivant l'axe 1; tandis que les 92 courbes classées ici sont déphasées pour avoir F1=0.



On sait que le plan (3, 4) est associé à l'harmonique 4; lequel, relativement à la sinusoïde prédominante, joue le rôle d'un harmonique 2. En particulier, un facteur $F3$ négatif introduit un terme en $\cos(4.j)$; un tel terme a pour effet d'accentuer le maximum des oscillations relativement à leur minimum; ce qui, ainsi qu'on l'a vu plus haut sur des exemples, correspond à la forme de beaucoup de courbes fZ . Aussi le nuage est-il vers ($F3 < 0$).

5 Conclusions et perspectives

Dans l'analyse de la marche, on ne peut considérer séparément les deux jambes. Nous nous sommes d'abord appliqué à synchroniser entre elles les données droite et gauche afférentes à chaque sujet. L'analyse comparative, la caractérisation des types de marche, requiert encore que les données afférentes aux divers sujets soient synchronisées les unes relativement aux autres; ce qu'on a fait, ci-dessus, suivant divers critères. Les résultats cohérents obtenus ici n'ont valeur que de suggestion; mais, avec des données plus précises, l'occasion s'offrirait de fonder, sur l'analyse multidimensionnelle, une typologie de la marche normale ou pathologique.