A. QUAQAZEH

Trace minima pour un tableau de correspondance où certaines valeurs sont nulles

Les cahiers de l'analyse des données, tome 17, nº 4 (1992), p. 465-470

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1992__17_4_465_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol XVII - 1992 - n°4 - pp. 465 470.

TRACE MINIMA POUR UN TABLEAU DE CORRESPONDANCE OÙ CERTAINES VALEURS SONT NULLES

[TRAC. VAL. NUL.]

*A. QUAQAZEH**

1 Position du problème

Des travaux récents ont montré l'intérêt du critère de la trace minima pour assigner des valeurs acceptables à des données qui manquent dans un tableau de correspondance (cf. [TRAC. MANQ.], in *CAD*, Vol. XVII, n°1, 1992). Cependant, (cf. *loc. cit.*, §7,) on ne connaît pas, en toute généralité, les conditions d'existence et d'unicité de solutions non triviales pour la construction d'un tableau de trace minima complétant un tableau donné présentant des lacunes. Nous résolvons ici ce problème dans un cas particulier, qui n'est pas réaliste du point de vue de recherche des données manquantes, mais nous paraît susceptible de préparer, par des exemples, la solution générale.

En bref, on suppose donnés deux ensembles finis, I et J, et un sous-ensemble Z du produit $I \times J$; on cherche une loi de probabilité μ_{IJ} , sur $I \times J$, ayant masse nulle en tout point de Z, et dont la trace, *au sens de l'analyse des correspondances*, soit aussi faible que possible.

Le problème qu'on vient de poser doit être précisé. Il n'est pas essentiel, au cours de la recherche, d'imposer la condition que les mesures positives qu'on considère aient masse totale 1: on parlera donc plutôt de k_{IJ} , avec les conditions:

$$\forall\,(i, j) \in I \times J \;:\; k(i, j) \geq 0 \quad ; \quad \forall\,(i, j) \in Z \;:\; k(i, j) = 0 \quad ;$$

mais il reste à imposer à k_{IJ} des conditions supplémentaires assurant que la trace soit définie.

De façon précise, la trace, dont nous cherchons le minimum, peut être donnée par la formule:

(*) Université Pierre et Marie Curie, et Université d'Amman.

$$\text{trace} + 1 = \Sigma\{ ((k(i, j) / k(i)) . (k(i,j) / k(j)) \mid (i, j) \in I \times J \} \;;$$

en écrivant une somme de termes dont chacun est le produit d'une composante de la densité d'une ligne par une composante de la densité d'une colonne, on voit apparaître les conditions d'existence de la trace. Il semblerait nécessaire que les dénominateurs k(i) et k(j) ne s'annulent, respectivement, pour aucun *i* et aucun *j*.

En fait, étant une composante d'un profil, chacun des deux facteurs, k(i, j) / k(i) et k(i, j) / k(j), est nécessairement compris entre 0 et 1: on suppose donc que cette condition est vérifiée, à la limite, même si se présente une division par zéro. Si k(i, j) est ≠0, le terme correspondant de la trace est bien défini; si k(i, j) = 0, il suffit que l'un des deux, k(i) ou k(j) soit non nul. Globalement, il faut que l'une au moins des deux marges k_I et k_J ne comporte aucune masse nulle; car si les deux en comportaient, on aurait au moins un (i, j) avec k(i) = k(j) = k(i, j) = 0 ; donc un terme indéterminé dans le calcul de la trace.

Notre problème peut donc être précisé comme suit. Soient I et J deux ensembles finis, et Z une partie de I × J telle que soit vérifiée la condition disjonctive:

$$(\forall\, i \in I, \exists\, j \in J : (i, j) \notin Z) \vee (\forall\, j \in J, \exists\, i \in I : (i, j) \notin Z) \quad ,$$

(condition destinée à assurer l'existence de tableaux ayant une trace); sur l'ensemble des tableaux k_{IJ} ayant une trace et satifaisant aux conditions:

$$\forall\, (i, j) \in I \times J \;: k(i, j) \geq 0 \quad ; \quad \forall\, (i, j) \in Z \;: k(i, j) = 0 \;;$$

chercher le minimum de la trace; considérer si ce minimum est effectivement atteint; ou, au contraire, est une limite; et, dans ce cas, montrer une suite de tableaux k_{IJ} pour lesquels la trace tend vers cette limite.

2 Étude de cas particuliers

Exemple 1 :

$I = \{1, 2\} \;;\; J = \{a, b\} \;;\; Z = \{(1, a), (1, b)\};$

	a	b
1	0	0
2	?	?

On impose, au tableau carré, une première ligne nulle; pour que la trace soit déterminée, il faut que les éléments de la deuxième ligne soient, tous deux, non nuls; quelles que soient leurs valeurs, trace + 1 = 1 ; trace = 0 .

On peut, plus généralement, considérer un tableau de dimensions quelconques; et imposer qu'un certain nombre de ses lignes soient nulles. Il suffit de supposer que les lignes restantes sont toutes égales (ou proportionnelles) entre elles et ne comportent pas de zéro, pour obtenir trace = 0, le minimum possible.

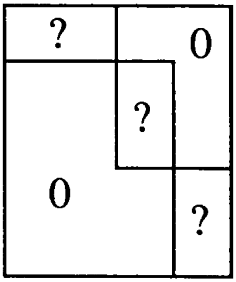
Exemple 2 :

On impose que soient nuls les termes extradiagonaux d'un tableau carré 3×3 ; il faut que les termes diagonaux soient, tous trois, non nuls; quelles que soient leurs valeurs, trace + 1 = 3 ; trace = 2 .

?	0	0
0	?	0
0	0	?

Exemple 3 :

Le complémentaire de l'ensemble Z des zéros imposés forme trois blocs: $I_1 \times J_1$, $I_2 \times J_2$, $I_3 \times J_3$, définissant des correspondances partielles; on sait que les valeurs propres de la correspondance globale, $I \times J$, sont, d'une part, la valeur propre 1, de multiplicité 2 (nombre des blocs moins 1); et, d'autre part, les valeurs propres des correspondances partielles. La trace est donc ≥ 2; elle vaut exactement 2, si l'on s'assure que les blocs ont trace nulle; i.e. sont formés, chacun, de lignes proportionnelles.



Au lieu d'évoquer, comme nous venons de le faire, des résultats connus relatifs à l'analyse des tableaux décomposés en blocs, on peut utiliser directement la formule:

$$\text{trace} + 1 = \Sigma\{ k(i, j)^2 \ / (k(i) \,.\, k(j)) \mid (i, j) \in I \times J \} \ ;$$

d'où il résulte que (trace + 1), pour la correspondance globale, est la somme des trois (trace + 1) afférents à chacun des blocs.

Exemple 4 :

Ici, le complémentaire N de l'ensemble Z des zéros imposés ne peut être décomposé en blocs (se projetant sur I et J suivant des intervalles d'intersection vide); on peut tracer, au sein de N, une chaîne dont deux éléments consécutifs appartiennent alternativement à la même ligne ou à la même colonne et qui se projette sur I et J tout entiers. Soit, en notant $I = \{1, 2, 3\}$, $J = \{a,b, c\}$:

1		0
ε	ε^2	
0	ε^3	ε^4

$$\{ (1, a) , (2, a) , (2, b) , (3, b) , (3, c)\}$$

en affectant des valeurs, en progression géométrique de raison ε, aux cases successives de la chaîne, on obtient:

$$\text{trace} + 1 \ = \ (1/(1+\varepsilon)) + 3\ (\varepsilon/(1+\varepsilon)^2) + ((\varepsilon/(1+\varepsilon)) \ = \ 1 + (3\varepsilon/(1+\varepsilon)^2) \ .$$

Cette formule montre que la trace peut être arbitrairement proche de zéro; elle ne peut, toutefois être nulle: car alors les colonnes seraient proportionnelles entre elles; ce qui, compte tenu des zéros imposés sur Z, donnerait au tableau une forme pour laquelle le calcul de la trace est indéterminé; (si, e.g., la ligne 3 n'est pas réduite à zéro, et que les deux autres lui sont proportionnelles, la première colonne, *a*, sera réduite à zéro, donc aussi la ligne 1; et la contribution de k(1, a) à la trace sera indéterminée).

Au lieu de prendre des valeurs en progression de raison ε, arbitrairement proche de 0, de k(1, a) à k(3, c), comme sur la figure, on peut, dans l'ordre inverse, poser:

$$k(3, c) = 1 \ ; \ k(3, b) = \varepsilon \ ; \ k(2, b) = \varepsilon^2 \ ; \ k(2, a) = \varepsilon^3 \ ; \ k(1, a) = \varepsilon^4 \ ;$$

on a ainsi, pour la trace, la même valeur, mais c'est le terme en k(3, c) qui prédomine.

3 Calcul de la borne inférieure de la trace dans le cas général d'un ensemble Z, quelconque, de zéros spécifiés

Nous reprenons, dans le cas général, les raisonnements faits, sur des cas particuliers, au §2.

Soit Z donné; notons $N = (I \times J) - Z$. Partons, pour fixer l'intuition, du tableau μ_{IJ} qui a des 0 pour les cases de Z et des 1 pour les cases de N. On sait, d'après le §1, que ce tableau peut comporter soit un bloc de colonnes nulles soit un bloc de lignes nulles, mais non les deux à la fois. Afin de nous exprimer avec plus d'aisance, nous supposerons qu'il n'y a ni lignes nulles ni colonnes nulles; et nous imposerons aux tableaux complétés considérés la condition de n'avoir, eux-mêmes, ni ligne nulle ni colonne nulle: il apparaîtra clairement que la voie suivie pour déterminer la trace minima aboutit au même résultat si l'on s'affranchit des hypothèses faites ici (cf. exemple 1); pourvu que l'on conserve la condition, indispensable, que, pour les tableaux considérés, la valeur de la trace est bien définie.

Le tableau μ_{IJ} que nous considérons (rempli de 0 et de 1) admet une décomposition la plus fine en *p* blocs disjoints (on dit communément: en blocs diagonaux): nous affirmons que la valeur de la trace minima, tmin, n'est autre que (p-1), le nombre des blocs, diminué de 1. Il est d'abord clair, d'après ce qu'on a dit à propos des exemples 2 et 3, que: tmin $\geq$ (p-1). Reste à démontrer que l'on a tmin = (p-1); étant entendu que, d'après l'exemple 4, ce minimum peut n'être pas strictement atteint, mais seulement approché d'arbitrairement près. Pour construire un tableau dont la trace approche arbitrairement du minimum, on procédera comme dans l'exemple 4; à ceci près que, dans le cas général, il faut procéder par étapes pour ranger les k(i, j) non nuls dans un ordre tel qu'une progression géométrique des valeurs assure une trace $\approx$ 1.

La voie que nous proposons de suivre débute par les étapes suivies classiquement pour établir l'existence et l'unicité d'une décomposition en blocs la plus fine. Nous ferons donc ici quelques rappels (cf. [Corr. Esp.], §2.1).

Étant donné un tableau de correspondance μ_{IJ}, on définit une relation d'équivalence, $\approx_\mu$, sur $I \cup J$, en saturant la relation réflexive suivante entre un élément de I et un élément de J:

$$\forall\, (i, j) \in I \times J \ : \quad (\mu(i, j) \neq 0) \ \Rightarrow \ (i \approx_\mu j) \wedge (j \approx_\mu i) \quad ;$$

supposons qu'il y ait p classes d'équivalences dans $I \cup J$: chacune de celles-ci est une réunion $I_h \cup J_h$, et il y correspond, dans le tableau μ_{IJ}, un bloc $I_h \times J_h$; le cas singulier (exclu ici au début du §3) de lignes ou de colonnes de zéros correspond à des classes d'équivalences réduites à un $\{i\}$ ou un $\{j\}$ isolé.

Pour démontrer que la trace est égale au nombre des blocs de μ_{IJ}, diminué de 1, il suffit d'opérer au niveau de chaque bloc séparément et de démontrer que l'on peut fixer dans celui-ci les valeurs des k(i, j) non nulles de telle sorte que la trace soit arbitrairement voisine de 0. Ainsi, il ne reste plus qu'à considérer le cas où μ_{IJ} est formé d'un seul bloc et à fixer, dans ce cas, les k(i, j) afin que la trace soit arbitrairement voisine de 0; ou, ce qui revient au même, que, dans la somme (trace + 1), un terme soit de l'ordre de 1 et les autres négligeables. C'est d'après la relation d'équivalence $\approx_\mu$ qu'on entreprend de construire une chaîne analogue à celle utilisée dans l'exemple 4.

Convenons de noter $U = I \cup J$, et de désigner par u un élément quelconque de U. Par hypothèse, il existe une longueur n convenable, et une suite finie d'éléments de U, {u(1), u(2), ..., u(h), u(h+1), ..., u(n)}, jouissant des propriétés suivantes:

$$\forall\, h \in \{1, \ldots, n\text{-}1\} \ : \ (u(h) \in I) \ \Leftrightarrow \ (u(h+1) \in J) \ ;$$

i.e., les u(h) appartiennent alternativement à I et J;

$$\forall\, h \in \{1, \ldots, n\text{-}1\} \ : \ (u(h) \in I) \ \Rightarrow \ (u(h), u(h+1)) \in N \ ;$$

i.e., deux éléments consécutifs de la suite sont directement reliés, en ce sens qu'ils définissent une case (i, j) non mise à zéro;

$$\forall\, i \in I, \exists\, h : u(h) = i \quad ; \quad \forall\, j \in J, \exists\, h : u(h) = j \ ;$$

i.e., tout élément, i ou j, de U figure au moins une fois dans la suite des {u(h)}; et enfin:

la longueur n est la plus petite telle que les conditions précédentes soient satifaites par une suite de longueur n;

nous dirons que, sous ces conditions, {u(1), ..., u(n)} constitue une *suite distinguée* (relativement à μ_{IJ} ou à N).

Si l'on tente de reprendre telle quelle la construction de l'exemple 4, on bute sur le fait qu'un même *u* peut figurer plusieurs fois dans la suite des {u(h)}; mais la condition de longueur *n* minima permet de réussir. On démontrera par récurrence sur card(U) la proposition suivante:

Étant donné un tableau μ_{IJ} est formé d'un seul bloc, on peut fixer les k(i, j) non nuls de telle sorte qu'un seul d'entre eux soit égal à 1, les autres étant des puissances entières d'un infiniment petit ε, afin que la trace soit arbitrairement voisine de 0; ou, ce qui revient au même, que, dans la somme (trace + 1), un terme (celui pour lequel k(i, j) = 1) soit de l'ordre de 1, les autres étant négligeables.

La proposition est évidente si cardU = 2; car le tableau se réduit à une seule case où on inscrit 1. Supposons la proposition démontrée jusqu'à cardU = p, et considérons un cas où cardU = p+1. On peut construire une suite distinguée, {u(h)}, telle que le dernier élément de cette suite, u(n), n'y figure qu'une seule fois; car autrement, on devrait le supprimer, pour obtenir une chaîne de longueur n-1 et satisfaisant à toutes les conditions demandées.

Supposons, pour parler plus à l'aise, que u(n)=j° $\in$ J ; en supprimant la colonne u(n), on obtient un tableau $\mu_{IJ'}$ en un seul bloc (car la chaîne distinguée des {u(1), ...,u(n-1)} convient pour lui) et auquel s'applique la proposition démontrée par récurrence. Supposons que *r* soit l'ordre en ε du terme de plus haut degré figurant dans le tableau $k_{IJ'}$ associé à $\mu_{IJ'}$: en donnant l'ordre (r+1) aux éléments non nuls de la colonne j°, on complète le tableau $k_{IJ'}$ en un tableau k_{IJ} convenable; car, en bref, les termes de (trace+1) afférents aux éléments k(j°, i), non nuls, de cette colonne sont d'ordre $\geq$1: en effet la densité de la colonne, k(i, j°)/k(j°) est $\leq$1, et la densité de la ligne, k(i, j°)/k(i), est d'ordre $\geq$1 parce que, dans le tableau $k_{IJ'}$, le total de la ligne est d'ordre $\leq$r.

Références bibliographiques

[Corr. Esp.], in *L'Analyse des Données*, TIIB n°7, §2.1.

[TRAC. MANQ.], in *CAD*, Vol. XVII, n°1, (1992).