LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

J.-P. BENZÉCRI

Corrélation à distance entre phénomènes simultanés selon la mécanique quantique

Les cahiers de l'analyse des données, tome 17, nº 1 (1992), p. 113-118
<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1992__17_1_113_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol XVII 1992 - n° 1 - pp. 113 118.

CORRÉLATION À DISTANCE ENTRE PHÉNOMÈNES SIMULTANÉS SELON LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

[CORRÉL. QUANT.]

J.-P. BENZÉCRI

Selon une inégalité associée au grand nom de Heisenberg, on ne peut, dans le cadre de la mécanique quantique, décrire l'état d'une particule en en spécifiant, à la fois, le moment et la position pour un même instant. À cet impossibilité, un mémoire fameux d'Einstein, Podolsky et Rosen (EPR) répond en proposant une expérience imaginaire dans laquelle il apparaît, selon les auteurs, qu'une particule doit simultanément avoir un moment et une position déterminée.

Plutôt que l'expérience d'EPR, Bell a considéré un schéma analogue, se prêtant mieux à une vérification expérimentale; et il a, de façon précise, démontré des inégalités qui doivent être satisfaites dans le cadre de toute théorie déterministe à *paramètres cachés*; mais qui ne sont pas compatibles avec les résultats que la mécanique quantique prévoit pour l'expérience qu'il a proposée.

Il était réservé à A. Aspect, de réaliser, à l'Institut d'optique, une expérience du type suggéré par Bell; et d'accumuler des résultats incompatibles avec les *inégalités de Bell*, donc avec toute théorie à *paramètres cachés*. Aspect lui-même reconnaît toutefois que son expérimentation n'a pas toute la force probante requise; du fait, essentiellement, de l'inertie du montage expérimental.

Nous nous proposons de reprendre le principe de l'expérience EPR; en soulignant l'originalité du point de vue de Bell; et donnant à l'expérience même d'Aspect une forme mathématique telle qu'il apparaît, selon nous, possible de perfectionner le montage physique afin de pouvoir le modifier dans un temps inférieur au temps de vol des faisceaux lumineux en cause.

1 Principe mathématique de l'expérience d'Einstein Podolsky Rosen, et de ses généralisations

On part d'un système à deux composantes: 1, 2; dont les espaces d'états sont notés respectivement E1 et E2; ces espaces E1 et E2 peuvent être des

Les cahiers de l'analyse des données - 0339-3097/92/01 113 06/$ 2.60/ c Gauthier-Villars

espaces de Hilbert, ou plus simplement des espaces C^n de dimension finie, munis d'une norme hermitique définie positive. Dans le cas du mémoire original d'EPR, $E1 \approx E2 \approx$ espace des fonctions complexes de carré sommable d'une variable réelle.. Dans l'expérience d'Aspect, $E1 \approx E2 \approx C^2$. Il semble que ce soit Bohm qui ait le premier pensé à prendre E1, E2 de dimension finie...

L'état du système composé est décrit par un vecteur de $E1 \otimes E2$. Dans le cas d'EPR, il s'agit d'une fonction complexe de deux variables réelles, $\psi(x1, x2)$; tc... Les auteurs supposent qu'après une interaction entre les composantes 1 et 2, celles-ci deviennent totalement indépendantes; en ce sens que chacune d'elles ne se ressent pas de ce qu'on peut faire à l'autre; en particulier, soumettre celle-ci à un processus de mesure.

Pour que l'expérience (imaginaire d'abord; réelle ensuite...) soit plus claire, on suppose qu'après arrêt de l'interaction entre les composantes la fonction d'état ψ, ($\psi \in E1 \otimes E2$), est telle que, si l'on prend la trace du côté 1 ou du côté 2 pour la matrice de densité ${}^c\psi \otimes \psi$, on obtient de l'autre côté la matrice identité; i.e. l'équiprobabilité de tous les états, quelle que soit la base orthonormée choisie. (Dans le cas EPR, on pose:

$$\psi = \int \{\exp((2\pi i / h)\, p\, (x1 - x2))\, dp \mid p \in (-\infty, +\infty)\};$$

ce qui entraîne quelques difficultés; car ψ n'est pas normalisable...)

En d'autres termes, si on adopte une base orthonormée quelconque $\{\varphi 1i \mid i = 1, 2,\ldots\}$ du côté 1, on hérite d'une base orthonormée $\{\varphi 2i \mid i = 1, 2,\ldots\}$ du côté 2, base déterminée de manière unique pour que:

$$\psi = \Sigma\, \{\varphi 1i \otimes \varphi 2i \;\mid i = 1, 2,\ldots\}.$$

On peut encore dire qu'une fois choisie une base d'un côté, on a un isomorphisme entre les deux espaces E1 et E2.

(De façon précise, on dira que ψ, élément de $E1 \otimes E2$, définit une application linéaire de ${}^tE1$, dual de E1, dans E2; ou encore, puisque E1 est muni d'une norme hermitique qui met en isomorphisme ${}^tE1$ et l'espace complexe conjugué ${}^cE1$, ψ définit une application linéaire de ${}^cE1$ dans E2. Si on suppose que cette application est un isomorphisme, on peut identifier ${}^cE1$ à E2; si, *de plus*, on fixe une base orthonormée $\{e_\alpha\}$ dans E1, E1 et ${}^cE1$ peuvent être mis en isomorphisme par la formule:

$$\Sigma_\alpha z^\alpha e_\alpha \approx \Sigma_\alpha z^\alpha \; {}^c e_\alpha \;;$$

d'où, par l'intermédiaire de ψ, un isomorphisme entre E1 et E2. Évidemment, les rôles dévolus à E1 et E2 peuvent être échangés.)

2 Calculs et arguments propres à EPR

Le mémoire original d'EPR considère seulement deux bases; fournies respectivement par la représentation en moment et la représentation en position. De façon précise on a:

a) représentation initiale en moment:

$$\psi = \int \exp\left((2\pi i / h)\, px1\right) \otimes \exp\left(- (2\pi i / h)\, px2\right) dp \;\;;$$

il y a symétrie (avec changement de signe) entre p1 et p2.

b) représentation en position:

$$\psi = \int \delta(x1 - x) \otimes \delta(x2 - x)\, dx \;\;;$$

il y a identité entre x1 et x2.

Au vu de quoi, les auteurs (EPR) argumentent comme suit.

Si l'on mesure x1, x2 a, *ipso facto*, une valeur déterminée: x2 = x1. Si l'on mesure p1, p2, *ipso facto*, vaut -p1; etc... Or, après la coupure des interactions entre 1 et 2, chacune des deux composantes n'a cure de ce qui advient à l'autre. Donc, lors de la coupure, 1 et 2 ont chacune, à la fois, une position et un moment déterminés. Car, autrement, comment 2 pourrait-il être trouvé avoir même position que 1 et moment opposé, alors qu'ils sont séparés. Si la mesure de x1 pouvait donner deux résultats différents (ou plus de 2), la mesure de x2 ne coïnciderait pas toujours avec celle de x1! et de même en *p*.

Les auteurs (EPR) estiment qu'on doit conclure que, l'interaction entre 1 et 2 une fois terminée, les deux composantes ont à la fois moment et position: or ceci correspond à un état que la mécanique quantique est inapte à décrire complètement; EPR ne parlent toutefois pas de paramètres cachés: il leur suffit d'avoir montré qu'il a plus de *réel* qu'on n'en peut mettre dans une fonction d'onde.

3 Schéma généralisé et inégalités de Bell

En se bornant au schéma d'EPR, avec deux systèmes de grandeurs seulement, la position et le moment, il n'y a aucune difficulté à concevoir ce que peuvent être les paramètres cachés: il suffit de dire péremptoirement que derrière toute fonction d'onde se cachent à la fois une valeur déterminée de *x* et une valeur déterminée de p. Dans le cas d'EPR, x et p seront uniformément distribués.

Il est manifeste qu'un tel modèle est dépourvu d'intérêt: c'est pourquoi EPR n'ont pas parlé de paramètres cachés. Si Bell a pu, sur ce thème, tenir un discours non trivial, c'est qu'il n'a pas seulement considéré deux représentations (i.e. deux bases orthonormées dans l'espace des états E1 ou E2) mais une famille continue de représentations. Dès lors, non seulement le paramétrage caché n'est pas trivial...: il est impossible, du moins si l'on veut qu'il s'accorde avec les prédictions de la mécanique quantique. C'est ce qui résulte des *inégalités de Bell.*

De cette rétrospective sur l'expérience d'EPR et ses généralisations, on tirera d'abord une conclusion épistémologique, puis une suggestion pour l'expérimentation.

Conclusion épistémologique: Einstein et ses collaborateurs n'ont pas eu la moindre intuition des inégalités de Bell: s'ils y avaient tant soit peu pensé, ils auraient considéré plus de deux représentations; introduit des familles d'opérateurs; etc...

Reste la suggestion d'expérience.

4 Vers une généralisation de l'expérience d'A. Aspect

En optique, rien n'oblige à prendre comme repère dans C^2 un système de deux composantes polarisées linéairement dans des directions perpendiculaires entre elles. Notons, par exemple, (a, b) les directions perpendiculaires choisies (a1, b1, du côté 1; a2, b2, du côté 2); le vecteur d'état ψ est:

$$\psi = a1 \otimes a2 + b1 \otimes b2 \;;$$

(pour normaliser, on devrait diviser par $\sqrt{(2)}$). Si on passe à une base de composantes polarisées circulairement, on aura:

$$2\psi = (a1 + i\, b1) \otimes (a2 - i\, b2) + (a1 - i\, b1) \otimes (a2 + i\, b2) \;;$$

ce qui veut dire que si l'on mesure l'hélicité du côté 1, on a, *ipso facto*, une hélicité déterminée du côté 2.

Mais on peut aussi prendre pour repère deux polarisations elliptiques constituant un repère orthonormé: on aura toujours une décomposition de la même forme. De façon précise, l'ensemble des décompositions possibles peut être paramétré par un nombre complexe z et une phase ϑ. Notons:

$$\alpha 1 = \exp(i\, \vartheta)\, (a1 + z\, b1)\, (1 + |z|^2)^{1/2} \;;$$

$$\alpha 2 = \exp(-i\vartheta)\,(a2 + {}^{c}z\, b2)\,(1 + |z|^2)^{1/2} \;;$$

$$\beta 1 = \exp(-i\vartheta)\,(-{}^{c}z\, a1 + b1)\,(1 + |z|^2)^{1/2} \;;$$

$$\beta 2 = \exp(i\vartheta)\,(-z\, a2 + b2)\,(1 + |z|^2)^{1/2} \,.$$

On a alors, pour le passage de (a1, b1) à ($\alpha 1$, $\beta 1$), (ou de (a2, b2) à ($\alpha 2$, $\beta 2$)) les conditions caractérisant le groupe SU(2) unitaire unimodulaire:

$$\|\alpha 1\|^2 = \|\beta 1\|^2 = \|\alpha 2\|^2 = \|\beta 2\|^2 = 1 \;;$$

$$\alpha 1 \wedge \beta 1 = a1 \wedge b1 \;\; ; \;\; \alpha 2 \wedge \beta 2 = a2 \wedge b2 \;;$$

et, d'autre part, on a pour ψ les deux expressions équivalentes:

$$\psi = (a1 \otimes a2) + (b1 \otimes b2) = (\alpha 1 \otimes \alpha 2) + (\beta 1 \otimes \beta 2)\,.$$

Reste à dire ce que cet exercice de calcul suggère pour l'expérimentation.

Au lieu de faire arriver directement les rayons sur un analyseur double, on peut interposer un compensateur de Soleil; lequel, en bref, réalise dans C^2 la transformation unitaire unimodulaire:

$$(a1,\ b1) \;\rightarrow\; (\exp(-i\vartheta)\, a1,\ \exp(i\vartheta)\, b1)\;;$$

ou, si l'axe du compensateur diffère de la direction de a1:

$$(\cos\varphi\, a1 + \sin\varphi\, b1) \;\rightarrow\; \exp(-i\vartheta)\;(\cos\varphi\, a1 + \sin\varphi\, b1)\;;$$
$$(-\sin\varphi\, a1 + \cos\varphi\, b1) \;\rightarrow\; \exp(i\vartheta)\;(-\sin\varphi\, a1 + \cos\varphi\, b1)\;;$$

et ensuite, avec un analyseur tourné d'un angle ϑ', on a la transformation de SU(2) la plus générale.

En complétant, selon ce qu'on vient de suggérer le dispositif expérimental, nous pensons qu'il est possible de modifier celui-ci pendant que les photons, déjà séparés, se propagent vers les détecteurs: il suffit de disposer de compensateurs de très faible inertie. Or une telle modification est précisément ce que souhaitent les expérimentateurs pour répondre à l'objection suivante:

"le système des variables cachées peut dépendre du système physique; il n'a pas à être le même pour deux dispositions différentes des analyseurs";

En effet, dans notre cas les variables cachées devraient être fixées alors que le dispositif expérimental n'est pas encore dans son état définitif.

Références bibliographiques

A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.*, **47**, 777, (1935).

J. S. Bell, *Physics*, **1**, 195, (1964).

A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Phys. Rev. Letters*, **49**, 1804, (1982).

P. Grangier, G. Roger, A. Aspect, *Europhysics Letters*, **1**, 173, (1986).