LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

S. ELOUARDIRHI

Somme directe d'ensembles ordonnés et modèles de codages multiples d'une variable unique

Les cahiers de l'analyse des données, tome 16, nº 4 (1991), p. 429-436

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1991__16_4_429_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol XVI - 1991 - n° 4 - pp. 429-436.

SOMME DIRECTE D'ENSEMBLES ORDONNÉS ET MODÈLES DE CODAGES MULTIPLES D'UNE VARIABLE UNIQUE

[SOM. COD. MULT.]

*S. ELOUARDIRHI**

0 Ordre latéral et ensembles partiellement ordonnés

Plusieurs mémoires ont été récemment publiés afin de justifier, dans divers cas modèle, les heureux résultats obtenus communément dans l'analyse des réponses fournies par un ensemble I de sujets à un questionnaire. Ces mémoires partent tous de l'hypothèse que l'ensemble I a une structure d'ordre total définie par une abscisse *i* (I étant assimilé, à la limite, à un segment muni d'une distribution de masse); et supposent généralement que la réponse à chaque question résulte d'un codage par partition ou d'un codage barycentrique de l'abscisse *i*.

Pour de tels modèles, partant de la notion d'ordre latéral entre mesures portées par I et J (cf. [Ord. Lat.], TIB, n°8), on démontre que les transitions $f_J{}^I$ et $f_I{}^J$ sont latéralement croissantes; d'où l'on déduit qu'il a au moins un couple de facteurs associés croissants, $F_1{}^I$, $G_1{}^J$, relatifs à la 1-ère valeur propre λ_1.

Les mémoires [MOD. DÉC. VAR.] et [MOD. CLASS. PART.] utilisent explicitement le fait qu'à la différence de celle postulée sur I, la strustrure d'ordre sur J peut n'être qu'un ordre partiel. En poursuivant dans cette voie, nous pourrons généraliser ou préciser les résultats obtenus dans [MOD. CODE BARY.] et [DOUB. REC. PERS.]. En effet, considérer simultanément plusieurs codages *q* d'une même variable sous-jacente équivaut à créer plusieurs blocs totalement ordonnés J_q de modalités; et l'ensemble J, réunion de ces blocs, peut être muni d'un structure d'ordre partiel induisant l'ordre propre à chacun des blocs et complétée, éventuellement, comme dans [MOD. CLASS. PART.], par des relations existant entre des modalités de blocs différents.

(*) Étudiant en Doctorat à l'Université Pierre et Marie Curie.

Les cahiers de l'analyse des données - 0339-3097/91/04 429 08/$ 2.80/ c Gauthier-Villars

1 Structure de blocs et somme directe d'ensembles ordonnés

1.1 Définition de la somme directe

Soit $\{J_q \mid q \in Q\}$ un système fini, indicé par Q, d'ensembles ordonnés finis; notons $Dr_q(j, j')$ la relation d'ordre (analogue de j<j') dont est muni J_q; on appelle somme directe des ensembles ordonnés J_q l'ensemble union directe J, muni de la relation d'ordre Dr_Q définie comme suit:

$$\forall\, j, j' \in J = \oplus \{J_q \mid q \in Q\}: \; Dr_Q(j, j') \Leftrightarrow$$

$$\exists\, q \in Q : j \in J_q \,;\, j' \in J_q \,;\, Dr_q(j, j') \;;$$

i.e. sont comparables pour la relation Dr_Q les paires d'éléments appartenant à un même J_q et comparables pour la relation Dr_q dont est muni J_q.

1.2 Ordre latéral entre mesures sur la somme directe

Soit m_J une distribution de masse sur J : m_J s'identifie au système, indicé par Q, de ses restrictions aux sous-ensembles J_q :

$$m_J \approx \{m_{Jq} \mid q \in Q\} \;.$$

Deux lois de probabilité (ou systèmes de masses positives ou nulles de masse totale 1) sur J, m_J et n_J, satisfont à la relation d'ordre latéral notée Dr_Q sous la condition ci-après:

$$Dr_Q(m_J, n_J) \Leftrightarrow \forall\, q \in Q : Dr_q(m_{Jq}, n_{Jq}) \;;$$

i.e. si la relation d'ordre latéral est vérifiée entre leurs restrictions aux J_q. Cette condition implique que toutes les comparaisons se font entre deux restrictions ayant même masse:

$$\forall\, q \in Q : \text{masse}(m_{Jq}) = \text{masse}(n_{Jq}) \,.$$

Pour démontrer ces propriétés, il suffit de se rappeler que, selon la définition de l'ordre latéral donnée dans [Ord. Lat.], $Dr_Q(m_J, n_J)$ équivaut à l'existence d'une mesure sur $J \times J$, portée par le graphe de la relation d'ordre Dr_Q, et dont les deux projections soient m_J et n_J. Or le graphe de Dr_Q n'est autre que la réunion de cardQ blocs portés par les $J_q \times J_q$; ce qui conduit aux propriétés d'ordre latéral entre les couples (m_{Jq}, n_{Jq}); et, en particulier, aux égalités annoncées entre masses des restrictions.

1.3 Transition latéralement croissante entre un ensemble totalement ordonné I et un somme directe J d'ensembles J_q

Soit f_J^I une transition probabiliste d'un ensemble totalement ordonné I vers une somme directe $J = \oplus \{J_q \mid q \in Q\}$ d'espaces ordonnés, f_J^I est latéralement croissanre si et seulement si il existe une loi de probabilité μ_Q sur Q et un système fini de transitions probabilistes latéralement croissantes $f^q{}_{Jq}{}^I$ de I vers les J_q tel que:

$$f_J^I = \Sigma\{ \mu_q f^q{}_{Jq}{}^I \mid q \in Q\} \ ; \quad \text{i.e.}$$

$$\forall\, i \in I, \forall\, q \in Q, \forall\, j \in J_q : f_j^i = \mu_q \times f^q{}_j{}^i \ ;$$

de plus, si $\mu_q \neq 0$, $f^q{}_{Jq}{}^I$ est déterminé de manière unique par f_J^I.

Pour démontrer cette assertion, il suffit d'appliquer le résultat du §1.3 à deux profils f_J^i et $f_J^{i'}$ pour deux éléments i et i' tels que $Dr_I(i, i')$; on a:

$$Dr_Q(f_J^i, f_J^{i'}) \Leftrightarrow \forall\, q \in Q : Dr_q(f_{Jq}{}^i, f_{Jq}{}^{i'}) \ ,$$

(où on a noté $f_{Jq}{}^i$ et $f_{Jq}{}^{i'}$ les restrictions à J_q de f_J^i et $f_J^{i'}$); d'où il résulte que la masse totale de $f_{Jq}{}^i$ est indépendante de i et peut être notée μ_q ; et, si $\mu_q \neq 0$, la transition probabiliste $f^q{}_{Jq}{}^I$ est simplement définie par la relation:

$$\mu_q f^q{}_{Jq}{}^I = f_{Jq}{}^I \quad ; \ (\text{i.e. } \forall\, i \in I : \ \mu_q f^q{}_{Jq}{}^i = f_{Jq}{}^i) \ .$$

Remarque: pour la démonstration, il n'est pas nécessaire que I soit totalement ordonné, mais seulement que deux éléments quelconques i et i' de I puissent être reliés par une chaîne d'éléments de I deux à deux comparables.

Soit f_I^J une transition probabiliste de J vers I; pour que f_I^J soit latéralement croissante, il faut et suffit que soient latéralemnt croissantes les transitions probabilistes f_I^{Jq} qui sont les restrictions de f_I^J aux J_q.

Supposons maintenant que sur la somme directe J des J_q soit défini, outre la structure d'ordre Dr_Q, une structure d'ordre Dr_J plus fine que Dr_Q (i.e. telle que $Dr_Q(i, i')$ implique $Dr_J(i,i')$); alors, si f_J^I est latéralement croissante vers J muni de Dr_Q , f_J^I est, de même, latéralement croissante vers J muni de Dr_J .

En effet, de ce que $\mathrm{Dr_J}$ est plus fine que $\mathrm{Dr_Q}$ résulte l'implication:

$$\mathrm{Dr_Q}(f_J^{\,i}, f_J^{\,i'}) \Rightarrow \mathrm{Dr_J}(f_J^{\,i}, f_J^{\,i'}) \quad ;$$

on le voit en revenant à la définition de l'ordre latéral, compte tenu de ce que le graphe de la relation d'ordre $\mathrm{Dr_Q}$ est inclus dans celui de $\mathrm{Dr_J}$.

En revanche, de ce que $f_I^{\,J}$ est latéralement croissante, J étant muni de $\mathrm{Dr_Q}$, il ne résulte pas que $f_I^{\,J}$ soit latéralemnt croissante, J étant muni de $\mathrm{Dr_J}$; il reste à vérifier la relation $\mathrm{Dr_I}(f_I^{\,j}, f_I^{\,j'})$ pour les paires (j, j') satisfaisant à $\mathrm{Dr_J}$(j, j') mais non à $\mathrm{Dr_Q}$(j, j').

2 Application à l'analyse des correspondances

Dans ce §, I désigne désigne un ensemble d'individus identifié à un ensemble de nombre rééls qu'on peut supposer compris dans un intervalle fixé, par exemple [0, 1], ou [-1, +1]; on notera *i* aussi bien l'individu *i* que son abscisse sur la droite réelle **R**.

Q désigne un ensemble de codages de l'abscisse *i*; il peut s'agir d'un codage logique q par découpage de i suivant un ensemble de modalités définies par des intervalles consécutifs de **R**; d'un codage barycentrique de i, défini par un ensemble de valeurs pivot; ou, plus généralement, d'un codage barycentrique effectué, non directement sur i, mais sur un e fonction croissante quelconqe de i.

À tout codage $q \in Q$, correspond un ensemble totalemnt ordonné J_q de modalités. Du codage q résulte un tableau $I \times J_q$; et les deux transitions associées à ce tableau sont latéralement croissantes; ainsi qu'il est démontré au §2 de [MOD. CODE BARY.], (in *CAD*, Vol XVI, n°1; 1991), dans le cas le plus complexe d'un codage barycentrique, I étant muni d'un système de pondération quelconque.

En juxtaposant les tableaux $I \times J_q$ afférents aux divers codages q, on obtient un tableau $I \times J$, croisant I avec la réunion J des J_q ; J étant muni de la structure d'ordre partiel $\mathrm{Dr_Q}$, somme directe des structures d'ordre des J_q. On peut, éventuellement, affecter les différents blocs $I \times J_q$ de coefficients de pondérations inégaux.

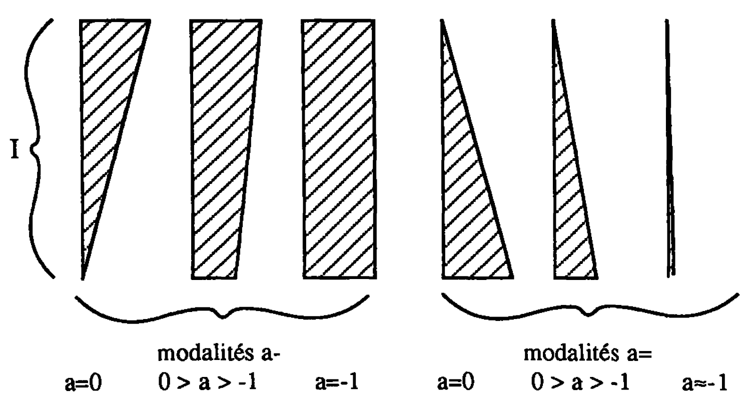
Il résulte du §1.3 que les deux transitions $f_J^{\,I}$ et $f_I^{\,J}$, associées au tableau $I \times J$, sont latéralemnt croissantes; et par conséquent que sur le 1-er axe issu de l'analyse factorielle (ou sur un axe, au moins, afférent à la 1-ère valeur propre, si celle-ci est multiple), l'ensemble I se projette dans son ordre naturel ainsi que chacun des ensembles J_q de modalités afférents aux divers codages.

On peut, de plus, dans certains cas, connaître, *a priori*, sur cet axe, la position relative de modalités j, j' appartenant à des blocs J_q et $J_{q'}$ différents. De façon précise, considérons sur J un ordre Dr_J plus fin que l'ordre Dr_Q, (défini par somme directe et qui ne permet pas de comparer des modalités de deux blocs distincts); et supposons que:

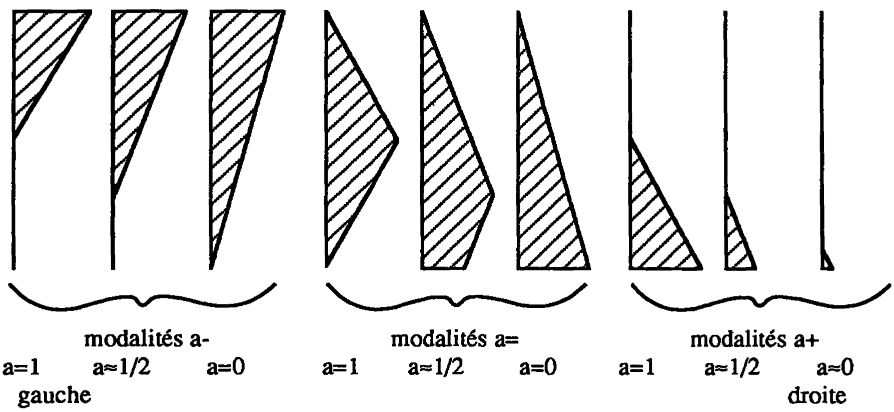
$$\forall\, j, j' \in J : Dr_J(j, j') \;\Rightarrow\; Dr_I(f_I^j, f_I^{j'}) \qquad ;$$

(i.e. la relation d'ordre $Dr_J(j, j')$ implique la même relation entre les profils des colonnes j et j'); alors la relation d'ordre Dr_J se trouve vérifiée en projection sur l'axe 1. Nous dirons dans ce cas, en bref, que l'ordre Dr_J est *compatible* avec le tableau de correspondance $I \times J$.

La proposition précédente s'applique, en particulier, à un couple (j, j') de modalités logiques appartenant à deux blocs distincts J_q et $J_{q'}$ mais définies par des intervalles I_q et $I_{q'}$ dont le second est situé à droite du premier sur **R**; on peut alors poser $Dr_J(j, j')$. La proposition s'applique également à deux modalités barycentriques j et j' dont les intervalles supports I_j et $I_{j'}$ ont une intersection non vide, mais sur laquelle k(i, j) décroît jusqu'à zéro tandis que k(i, j') croît à partir de la valeur zéro.



La proposition permet encore de démontrer des particularité qu'on observe sur la figure illustrant l'exemple numérique donné à la fin du §4 de [DOUB. REC. PERS.]. Sans reprendre les formules de cet article auquel nous renvoyons, nous montrons sur des schémas des profils des colonnes que l'ensemble J, muni d'un ordre compatible, peut être partagé en sous-ensembles totalement ordonnés dont deux seulement ne sont pas directement comparables.



De façon précise, convenons de noter comme suit les blocs de modalités de divers signes:

$$N- = \{a- \mid 0 \geq a \geq -1\} \; ; \; N\approx = \{a= \mid 0 \geq a \geq -1\} \; ;$$

$$P- = \{a- \mid 1 \geq a \geq 0\} \; ; \; P\approx = \{a= \mid 1 \geq a \geq 0\} \; ; \; P+ = \{a+ \mid 1 \geq a \geq 0\} \; ;$$

dans ces notations, les lettres N et P rappellent qu'il s'agit, respectivement des valeurs négatives ou positives du paramètre a.

Il n'y a pas lieu de considérer N≈, qui, comme on le voit sur le schéma de la page précédente, ne comporte qu'un seul profil, obtenu a= , obtenu pour la valeur zéro de a.

Nous conviendrons d'écrire $B \leq B'$, si tout élément du bloc B est à droite de tot élément b' de B':

$$(B \leq B') \Leftrightarrow \forall\; b \in B, \forall\; b' \in B' : Dr(b, b') \; .$$

D'après les schémas, on voit que:

$$P- \;\leq\; P\approx \;\leq\; P+ \; ; \quad P- \;\leq\; N- \;\leq\; P+ \; ;$$

il faut seulement prendre garde à ce que, compte tenu du paramétrage adopté dans [DOUB. REC. PERS.], l'on a Dr(a-, a'-) si $(a > a')$; et de même pour les autres groupes de modalités de même signe. Les schémas ordinaux se retrouvent en effet sur l'axe 1 de la figure du §4 de l'article cité.

En revanche, il n'a pas de relation d'ordre latéral valable pour les blocs P≈ et N- pris chacun dans son ensemble; en particulier, ne sont pas comparables entre elles, pour l'ordre latéral des profils, '-1-', modalité a- du bloc N- obtenue pour la valeur -1 de a, et '1=', modalité a= du bloc P≈ obtenue pour a=1. Mais on voit, sur l'exemple fini traité dans l'article cité, que ces N- et P≈ se projettent, respectivement, à gauche et à droite de l'origine sur l'axe 1.

En considérant l'analyse de correspondance elle-même, il est facile de montrer que '-1-' se projette à l'origine sur l'axe 1, d'où il résulte que N- se projette tout entier à gauche de l'origine: en effet, le profil de '-1-' est plat, et se projette au centre de gravité du nuage, i.e. à l'origine sur tous les axes.

Quant aux relations d'ordre latéral entre profils des colonnes des blocs N- et P≈, elles permettent d'affirmer quelques résultats, moins forts toutefois que ceux qui apparaissent sur l'axe 1. Il suffit, pour cela, d'appliquer la proposition du §3; laquelle caractérise complètement l'ordre latéral entre mesures portées par un segment de droite.

3 Une caractérisation de l'ordre latéral entre mesures portées par un segment de droite

Dans ce §, nous considérons des lois de probabilité portées par un segment de la droite **R**, par exemple I= [0, 1] muni de sa structure d'ordre usuelle. Sont compris dans ce modèle les lois portées par un ensemble fini totalement ordonné; lequel, pour la structure d'ordre, peut être considéré comme une partie finie de I.

On associe classiquement à une mesure μ portée par I, une fonction croissante, la fonction caractéristique $F\mu$, définie par:

$$F\mu(x) = \int\{d\mu \mid x \in [0,x]\} \;;$$

les discontinuités de $F\mu$ correspondent aux masses ponctuelles éventuellement comprises dans μ. Quand x va de l'extrémité gauche à l'extrémité droitee de I, $F\mu$ varie de 0 à 1.

Sur l'intervalle [0, 1], est définie une fonction croissante, $f\mu$, inverse de $F\mu$; les discontinuités de $f\mu$ correspondent aux intervalles de I qui ne portent pas de masse pour μ; tandis que des paliers où $f\mu$ est constant résultent des masses ponctuelles de μ.

Soit maintenant deux lois de probabilités, μ et π, portées par I; les deux fonctions $f\mu$ et $f\pi$ définissent ensemble une application de [0, 1] dans le carré $I \times I$, c'est-à-dire une courbe; laquelle joint les deux extrémités de la diagonale ascendante du carré. En munissant cette courbe de la distribution de masse image de la loi uniforme portée par [0, 1], on a sur le carré une loi Ω qui se projette sur le premier et le deuxième axe respectivement suivant les lois μ et π. On notera que les discontinuités de $f\mu$ et $f\pi$ sont irrelevantes pour la présente construction, car elles ne portent pas de masse.

En bref, la loi Ω réalise, de la gauche vers la droite, une correspondance biunivoque entre les éléments de masse des deux distributions μ et π.

Ceci posé, sont équivalentes les trois assertions suivantes :

$\mathrm{Dr}(\mu, \pi)$; (I)

$\forall\ x \in I : F\mu(x) \geq F\pi(x)$; (II)

$\forall\ x \in [0, 1] : f\mu(x) \leq f\pi(x)$; (III)

Il est d'abord clair que (II) et (III) sont équivalentes du fait que $\{f\mu, f\pi\}$ sont les inverses des fonctions croissantes $\{F\mu, F\pi\}$ égales entre elles aux extrémités de leur intervalle de définition. En suite, (III) implique que la mesure Ω a son support au dessus de la diagonale du carré; ce qui permet de démontrer (I) par la définition usuelle de l'ordre latéral. Enfin, (I) implique (II), car, en bref, s'il existe une mesure Ω' sur la moitié supérieure du carré ayant pour projections respectives μ et π, la restriction de Ω' au triangle $\{(i,i') \mid 0 \leq i \leq i' \leq x\}$ a une masse égale à $F\pi(x)$ et $\leq F\mu(x)$.

Dans l'exemple du §2, le calcul de la fonction F des profils est facile, puisqu'il s'agit de fonctions linéaires ou linéaires par morceaux.

Références bibliographiques

A. ALAWIEH: "Cas modèle de l'analyse d'une variable continue unique codée barycentriquement", [MOD. CODE BARY.], in *CAD*, Vol XVI, n°1, (1991).

H. ALWARD: "Un cas modèle pour l'analyse d'un ensemble redondant de variables découpées en classes", [MOD. VAR. CLASS.], in *CAD*, Vol XV, n°4, (1990).

S. CHAHDOURA: "Étude sur un cas modèle de questionnaire du double recadrage des notes suivant l'équation personnelle", [DOUB. REC. PERS.], in *CAD*, Vol XVI, n°3, (1991).

Th. ETTÉ: "Modèle général de classes et modéle de partitions pour le découpage d'une variable unique", [MOD. CLASS. PART.], in *CAD*, Vol XVI, n°2, (1991).

J. HAYEK: "Un cas modèle pour l'analyse d'un ensemble de découpages d'une variable unique", [MOD. DÉC. VAR.], in *CAD*, Vol XVI, n°2, (1991).