LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

ABDUL MONIM ALKAYAR

Mesure du bord et mesure du volume pour une réunion de boules de même rayon

Les cahiers de l'analyse des données, tome 16, nº 1 (1991), p. 87-93

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1991__16_1_87_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol XVI - 1991 - n° 1 - pp. 87-93.

MESURE DU BORD ET MESURE DU VOLUME POUR UNE RÉUNION DE BOULES DE MÊME RAYON

[BORD BOULES]

*Abdul Monim ALKAYAR**

1 Les notions géométriques

Le cadre géométrique de la présente étude est un espace euclidien de dimension finie *n* quelconque. On considère des parties compactes **V** assujetties à la seule condition de régularité d'être la réunion d'un ensemble, fini ou infini, de boules de même rayon R. Il faut remarquer que cette condition est équivalente à celle, apparemment moins restrictive, que **V** est réunion d'un ensemble de boules de rayon ≥R: en effet, une boule de rayon supérieur à R est elle-même réunion d'un infinité de boules de rayon R.

La condition semble équivaloir à une limitation de la courbure. Mais considérons l'exemple du volume engendré par un cercle tournant (dans l'espace usuel) autour d'une de ses cordes: aux points de rencontre de la corde et du cercle, ce volume présente deux points coniques. On peut seulement dire qu'au voisinage d'un point frontière M, **V** est une réunion de boules de rayon R passant par M; d'où il résulte qu'est convexe le cône contingent en M de l'extérieur, i.e. du complémentaire, de **V**.

On se propose de montrer que la condition de régularité a pour conséquence que la mesure euclidienne (notée ∂V) du bord ∂**V** de **V** est majorée en fonction de la dimension *n*, du rayon R, et du volume (noté V) de **V**; avec pour formule précise:

$$\partial V \leq (n / R)\, V;$$

l'égalité étant justement réalisée dans le cas où **V** se réduit à une boule unique de rayon R. On sait qu'il existe, d'autre part, une *minoration* classique de ∂V en fonction de V et de *n*; mais cette minoration, fournie par l'étude des isopérimètres, n'étant pas modifiée par l'hypothèse de régularité faite quant à **V**, nous n'en traiterons pas ici.

(*) Étudiant en Thèse de Statistique; Université Pierre et Marie Curie; Paris.

Au §2, nous démontrerons l'inégalité annoncée, dans la cas particulier où **V** est une réunion finie de boules de Rayon R; la démonstration donnée valant aussi dans la cas d'une réunion finie de boules de rayon ≥R. Dans ce cas, la structure de ∂**V** est simple: le bord est formé de morceaux d'hypersphères délimités par des hyperplans. Il n'y a donc pas lieu de s'interroger sur le choix d'une définition de la mesure euclidienne du bord.

Mais, en vue du cas général, on a dû introduire une définition de la mesure H d'une hypersurface **H**:

$$H = \lim_{r \to 0} \mathrm{Vol} \ \cup \{ \mathbf{B}(M, r) \mid M \ in \ \mathbf{H}\} \,/\, (2r);$$

en d'autres termes, on associe à l'hypersurface **H** la *plaque* d'épaisseur 2r qui est la réunion de toutes les boules de rayon *r* centrées en un point de **H**; et on passe à la limite en faisant tendre vers zéro le rayon. Ce procédé (aujourd'hui d'une utilisation classique pour définir, plus généralement des ensembles de dimension fractionnaire et leur mesure; le terme de *fractal* étant bien connu) permet d'assimiler à des hypersurfaces des ensembles peu réguliers; et de leur attribuer une mesure euclidienne.

Au §3, on applique donc cette définition de la mesure du bord au cas où **V** est une réunion finie de boules. Au §4, on considère en quel sens la *plaque* associée à la frontière ∂**V** peut, dans le cas général, être regardée comme la limite de plaques associées à la frontière d'une réunion finie de boules. Ceci permet de donner une démonstration générale de l'inégalité annoncée.

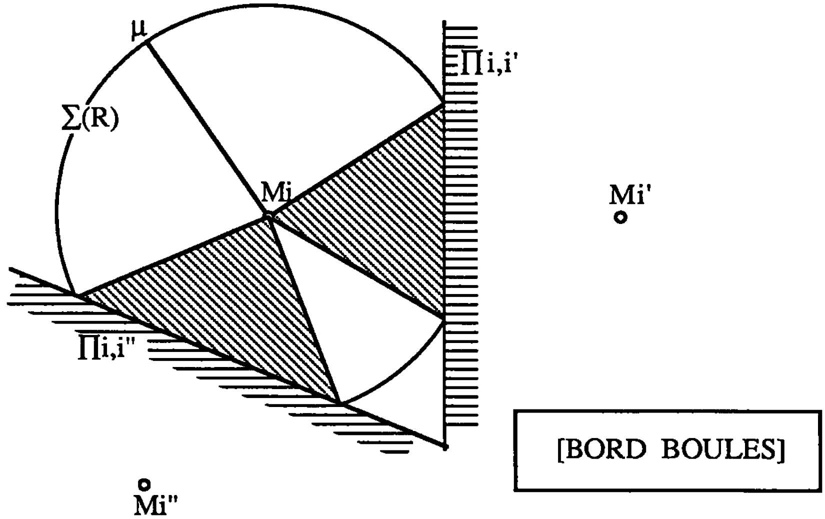
2 Bord d'une réunion finie de boules

Dans ce §, on considère une partie **V** de l'espace euclidien qui est une réunion finie de boules de rayon R:

$$\mathbf{V} = \cup \{\mathbf{B}(Mi, R) \mid i \ in \ I\}.$$

La donnée de l'ensemble {Mi} des centres permet d'associer à chacun de ceux-ci un domaine polyédral **Dom**(i) défini comme l'ensemble des points de l'espace qui sont plus proches de Mi que d'aucun autre des centres. On peut encore dire que **Dom**(i) est le domaine convexe intersection de l'ensemble des demi-espaces contenant Mi et limité chacun par un hyperplan médiateur Π(i,i') perpendiculaire en son milieu à l'un des segments MiMi'. Il n'y a pas lieu ici de préciser si l'on parle de domaine fermé ou de domaine ouvert; dans la mesure où il n'y a qu'un nombre fini de centres.

On peut regarder **V** comme la réunion d'un ensemble fini de parties **Vi** dont chacune est l'intersection de **V** avec un domaine **Dom**(i): d'ailleurs, comme on le voit sur la figure, **Vi** n'est autre que l'intersection de **Dom**(i) avec la boule **B**(Mi, R). Quant au bord ∂**Vi** de **Vi**, il comprend d'une part des portions de l'hypersphère Σ(Mi, R) de centre Mi et de rayon R (portions qui ne sont autres



que les composantes de l'intersection de Σ(Mi, R) avec **Dom**(i)); et d'autre part des portions d'hyperplan médiateur Π(i, i'), Π(i, i"), ...

Notons Σi l'hypersurface réunion des portions d'hypersphère que comporte ∂Vi; et Σi la mesure de cette réunion: ∂**V** n'est autre que la réunion des ∂Vi.

Ceci posé, on voit que **Vi** s'étend autour de Mi dans toutes les directions; certains rayons, comme Miμ sur la figure, vont jusqu'à la sphère; d'autres sont interrompus par un des hyperplans médiateurs. Ainsi **Vi** peut être décomposé en deux parties: d'une part, l'ensemble des rayons s'étendant de Mi jusqu'à Σi; cet ensemble a, tout simplement, pour volume (R/n) Σi (cette formule s'obtient en appliquant celle du volume de la pyramide; comme on le fait élémentairement pour calculer le volume de la sphère à partir de la surface de celle-ci); et, d'autre part l'ensemble des rayons aboutissant à des hyperplans frontières de **Vi**.

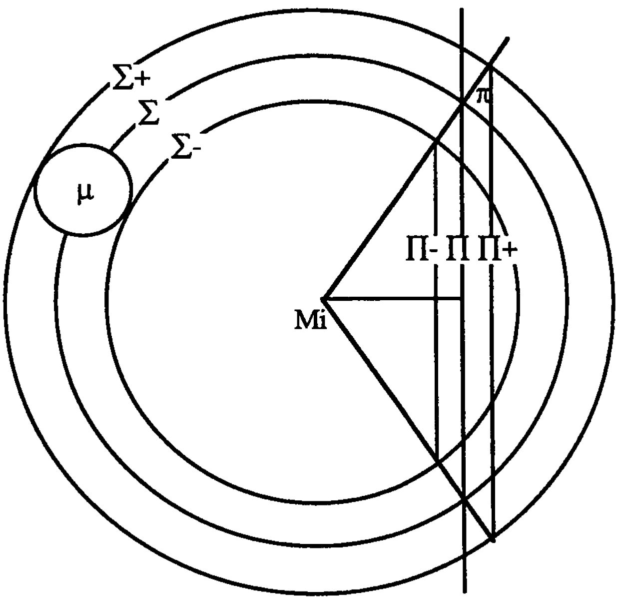
On a donc l'inégalité:

$$(R/n)\ \Sigma i \leq Vi \quad ;$$

l'égalité n'étant réalisée que si **Vi** = **B**(Mi, R); c'est-à-dire si la boule de centre Mi constitue une composante isolée de **V**. En sommant par rapport à l'indice *i* on obtient les inégalités:

$$(R/n)\ \partial V \leq V \quad ; \quad \partial V \leq (n / R)\ V;$$

l'égalité n'est réalisée que si **V** est une réunion finie de boules de rayon R disjointes ou, éventuellement, ayant entre elles des points de contact.



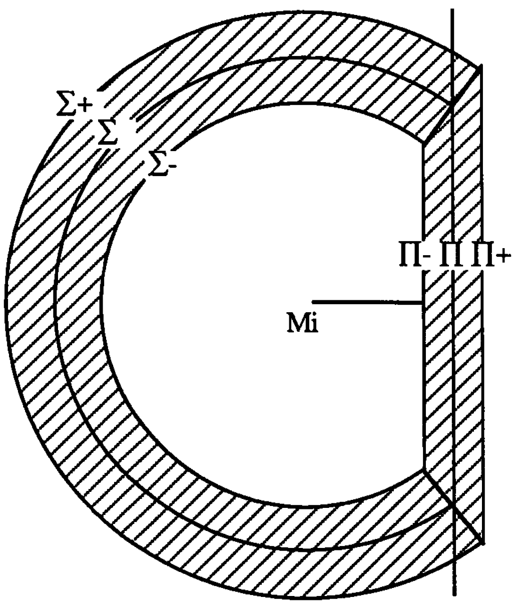
[BORD BOULES]

3 Mesure, par limites de recouvrements, du bord d'une réunion finie de boules

Comme au précédent, nous considérons le cas où **V** est une réunion finie de boules; mais nous adoptons pour la mesure du bord une définition qui vaut aussi pour une réunion infinie. Et, afin de pouvoir procéder par passage à la limite dans ce cas général, nous précisons comment s'effectue ce passage dans le cas présent. Nous reprenons, à peu près, la figure du §2; mais, pour plus de clarté, nous ne représentons qu'un seul des hyperplans médiateurs Π délimitant **Vi**.

On considère l'ensemble ∂V(r) réunion des boules de rayon *r* centrées en un point quelconque μ du bord ∂V; comme au §1, ∂V(r) sera, pour faire image, appelé *plaque* d'épaisseur 2r. Comme **V** ou ∂V, la plaque sera regardée comme une réunion de parties ∂iV(r) contenues chacune dans l'un des domaines **Dom**(i). Pour majorer le volume (noté ∂iV(r)) de ∂iV(r) (et, par suite, celui de ∂V(r)) on va montrer que ∂iV(r) est compri entre les deux homothétiques du bord de **Vi** dans les rapports ((R+r) / R) et ((R-r) / R).

Nous avons posé que ∂V(r) est réunion des boules de rayon *r* centrées en un point μ de ∂V. Relativement à **Dom**(i) on distinguera deux cas: ou bien le centre μ est un point de la sphère Σ(Mi, R) de centre Mi et rayon R; ou bien μ appartient à une composante de ∂V autre que ∂Vi; et, dans ce dernier cas, la distance de μ à Mi est, non pas égale, mais supérieure à R. Dans les deux cas, la



boule **B**(μ, r) est extérieure à la boule **B**(Mi, R-r): celle-ci ne contient donc à son intérieur aucun point de ∂**V**(r); et, *a fortiori*, de ∂i**V**(r).

D'autre part, si un point d'une boule **B**(μ, r) appartient au domaine **D**om(i), c'est qu'il est plus proche de Mi que de tout autre point Mi'; or, par définition, μ est à la distance R de l'un au moins des points Mi, Mi', Mi", ...; ce qui entraîne que tout point d'une boule **B**(μ, r) soit à une distance ≤(R+r) d'au moins un des Mi', et donc de Mi, s'il appartient au domaine **D**om(i).

En collationnant ce qui a été dit, on voit que ∂i**V**(r) est inclus dans l'intersection de **B**(Mi, R+r) avec **D**om(i); et n'a aucun point dans l'intersection de **B**(Mi, R-r) avec **D**om(i). En relâchant chacune de ces deux conditions, on peut encore dire que ∂i**V**(r) est inclus dans le transformé de **V**i par l'homothétie de centre Mi et de rapport ((R+r)/r); et extérieur au transformé de **V**i par l'homothétie de centre Mi et de rapport ((R-r)/r). En bref, comme le montre la figure, les conditions relâchées diffèrent des conditions strictes en ce que à un hyperplan Π on substitue un hyperlan Π+ ou Π-, respectivement plus éloigné de Mi ou plus proche.

Ayant enfermé ∂i**V**(r) dans une zone telle que celle hachurée sur la figure, on peut écrire pour les volumes (notés sans caractères gras) la relation:

$$\partial i V(r) \quad \leq \quad (((R+r)^n - (R-r)^n) / R^n) \quad Vi \quad ;$$

en sommant par rapport à i, on a la relation globale:

$$\partial V(r) \quad \leq \quad (((R+r)^n - (R-r)^n) / R^n) \;\; V \quad ;$$

d'où, compte tenu du développement bien connu des puissances de sommes:

$$\partial V(r) \quad \leq \quad (2.r) \;\; (n /R) \;\; U(r/R) \; V \quad ;$$

où U(r/R) est une fonction de r/R tendant vers 1 quand r/R tend vers zéro.

Quant à la mesure du bord ∂V d'une réunion finie de boules, cette formule ne nous apprend rien qui n'ait déjà été vu au §2; Mais la formule a l'intérêt d'offrir une majoration de ∂V(r) *uniforme*, indépendante du nombre de boules; et c'est pourquoi on l'utilisera pour passer au cas infini.

4 Frontière d'une réunion infinie de boules comme limite de la frontière de réunions finies de boules

On considère désormais un ensemble compact **V** (de l'espace euclidien de dimension n) qui est une réunion infinie de boules fermées de rayon R; on notera:

$$\mathbf{V} = \cup \; \{\mathbf{B}(Mi, R) \mid i \; \mathit{in} \;\; I\infty \};$$

en précisant qu'est infini l'ensemble I∞ indexant les boules. Il résulte du théorème de Borel–Lebesgue, que, pour tout r > 0, il existe un recouvrement ouvert fini de **V** par un ensemble de boules **B**(Mi, R+r) dont les centres sont indexés par un sous-ensemble fini, I(r), de I∞. Il est commode de noter (sans préciser le choix d'un I(r)):

$$\mathbf{V}_r = \; \cup \; \{\mathbf{B}(Mi, R) \mid i \; \mathit{in} \;\; I(r) \};$$

on notera qu'il s'agit de la réunion de boules ayant mêmes centres que celles du recouvrement, mais avec pour rayon R, et non R+r.

De l'hypothèse de recouvrement par les boules de rayon R+r, il résulte que, si μ est un point de **V**, la boule **B**(μ, r) a une intersection non vide avec $\mathbf{V}_r$.

Soit maintenant un point μ de ∂**V**: de par la définition de la frontière, il y a dans **B**(μ, r), comme dans toute boule de centre μ, des points de l'espace ambiant n'appartenant pas à **V**; donc n'appartenant pas à $\mathbf{V}_r$, qui est inclus dans **V**. Ainsi **B**(μ, r), contenant à la fois des points de $\mathbf{V}_r$ et de son complémentaire, contient des points de la frontière $\partial\mathbf{V}_r$ de $\mathbf{V}_r$.

Il est équivalent de dire, en reprenant les notations du §3, que ∂**V** est inclus dans $\partial\mathbf{V}_r(r)$, réunion des boules de rayon r centrées en un point du bord de $\mathbf{V}_r$.

Plus généralement, si on introduit un autre nombre positif r', on peut dire que $\partial \mathbf{V}(r')$ est inclus dans $\partial V_r(r+r')$. On a donc, pour les volumes, les inégalités:

$$\partial V(r') \leq \partial V_r(r+r') \leq 2(r+r')\ (n/R)\ U((r+r')/R)\ V_r$$
$$\leq 2(r+r')\ (n/R)\ U((r+r')/R)\ V \quad ;$$

or, dans ces formules, les rayons r et r' ne sont assujettis à aucune relation mutuelle; on peut, par exemple supposer que r est le carré de r'; d'où:

$$\partial V(r') \leq 2r'\ (n/R)\ V\ [(1+r')\ U((r'+r'^2)/R)] \quad ;$$

dans le membre de droite de cette formule de majoration, le produit placé entre crochets tend vers 1 quand r' tend vers zéro; par conséquent, la mesure ∂V du bord $\partial \mathbf{V}$ de $\mathbf{V}$ est obtenue comme limite d'un quotient, $\partial V(r')/2r'$, majoré par $(n/R)V$: c'est la majoration annoncée au §1, démontrée ici dans le cas général où $\mathbf{V}$ est un compact, réunion infinie de boules de rayon R; et où $\partial \mathbf{V}$ est la frontière de $\mathbf{V}$.