LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

H. ANWAR HASSAN

Médiane et centre de gravité pour une distribution de masse de densité constante sur un convexe

Les cahiers de l'analyse des données, tome 15, n° 4 (1990), p. 381-386

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1990__15_4_381_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol XV 1990 n° 4 - pp. 381-386.

MÉDIANE ET CENTRE DE GRAVITÉ POUR UNE DISTRIBUTION DE MASSE DE DENSITÉ CONSTANTE SUR UN CONVEXE

[MÉD. CONV.]

*HASSAN H. Anwar**

1 Origine du présent travail

D.J. Newman, dans une très brève note (in *American Math. Soc. Notices*,Vol 5 n°4, Août 1958, p.510) où il annonce, entre autres résultats, le théorème de géométrie suivant:

"Pour tout ouvert Ω du plan, il existe au moins un point M tel que toute droite passant par M divise Ω en 2 parties dont chacune a une aire $\leq$ au double de celle de l'autre"

précise que, dans le cas où Ω est convexe, ce rapport 2 peut être remplacé par (5/4).

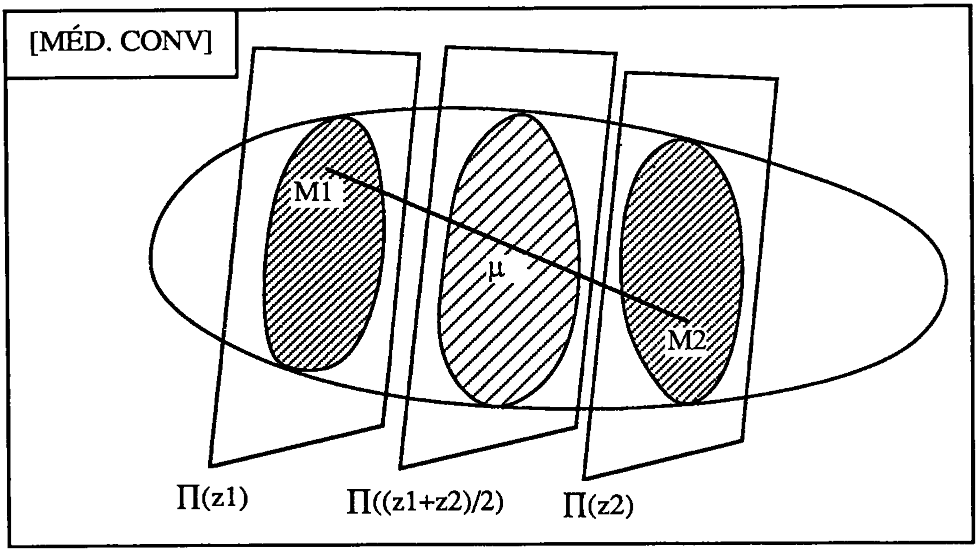
On trouve dans [MÉDIANE] (in *CAD* Vol XIV n°3) une généralisation du théorème de Newman à une distribution de masse positive finie μ à support compact ayant pour espace support un espace affin de dimension *n* quelconque. L'objet de la présente note est de généraliser le résultat de Newman relatif aux convexes. Nous démontrerons le théorème suivant:

Soit **C** un convexe compact d'intérieur non vide de R^m et G son centre de gravité: tout hyperplan Π passant par G divise **C** en deux parties dont chacune a une mesure inférieure ou égale à $((m+1)^m - m^m) / m^m$ fois celle de l'autre.

En dimension 1, on a le résultat trivial que le centre de gravité d'un segment est aussi son milieu; en dimension 2, on a le résultat énoncé par Newman; pour la dimension *m*, le rapport proposé est calculé sur l'exemple d'un simplexe,

(*) Université Pierre et Marie Curie et جامعة بغداد.

Les cahiers de l'analyse des données-0339-3097/90/04 381 06/$2.60/ c Gauthier-Villars



sachant que le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est divisé par G dans le rapport (1/m).

Bien qu'il s'agisse, comme dans [MÉDIANE], d'une généralisation du travail de Newman, la démonstration est ici bien différente. L'énoncé désigne explicitement le point de référence, qui est G; il n'y a pas lieu de passer par la géométrie projective... Au §2, nous montrerons que l'inégalité de Brünn et Minkowski permet de se ramener au cas particulier d'un convexe de révolution coupé par l'hyperplan perpendiculaire à l'axe passant par le centre de gravité. Au §3, nous démontrerons, pour ce dernier cas, l'inégalité annoncée.

2 Inégalité de Brünn-Minkowski et sections d'un convexe par des hyperplans parallèles

Avant d'énoncer l'inégalité de Brünn-Minkowski, on doit rappeler la notion de somme de Minkowski de deux parties **A** et **B** d'un espace vectoriel **E**; on pose:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{x \mid \exists\, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} : x = a + b\};$$

en d'autres termes, **A+B** est l'ensemble des vecteurs de **E** qui peuvent s'exprimer comme somme d'un vecteur de **A** et d'un vecteur de **B**.

Supposons maintenant que **A** et **B** sont des parties convexes d'un espace **E** de dimension *d*; alors, **A+B** est également une partie convexe de **E**; et l'inégalité de Brünn-Minkowski relie les volumes des trois convexes {**A**, **B**, **A+B**}:

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{A+B})^{1/d} \geq \mathrm{Vol}(\mathbf{A})^{1/d} + \mathrm{Vol}(\mathbf{B})^{1/d} \;;$$

on peut encore dire (en supposant l'espace ambiant muni d'une structure euclidienne) que l'hypersphère équivalente à **A+B** (i.e. ayant même volume que **A+B**) a un rayon supérieur ou égal à la somme des rayons des hypersphères équivalentes respectivement à **A** et à **B**.

Enoncée le plus commmunément en termes de géométrie vectorielle, l'inégalité s'applique aisément à la géométrie affine. On définit, e.g., la demi-somme de Minkowski de deux parties **A** et **B** d'un espace affin (en bref: espace vectoriel sans origine spécifiée) comme l'ensemble des milieux des segments joignant un point de **A** à un point de **B**:

$$(\mathbf{A+B})/2 = \{x \mid \exists\, a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{B} : x = (a + b)/2\};$$

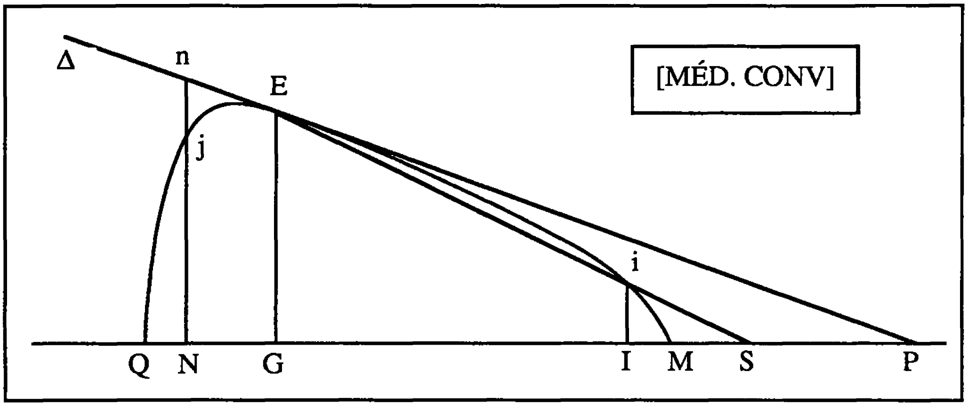
et l'inégalité de Brünn-Minkowski permet d'affirmer que le rayon de l'hypersphère équivalente à (**A+B**)/2 est supérieur ou égal à la demi-somme des rayons des hypersphères équivalentes respectivement à **A** et **B**.

Telle quelle, l'inégalité semble ne concerner que les parties convexes d'intérieur non vide d'un espace ambiant **E** de dimension d. En fait, elle s'applique aussi bien à des parties convexes **A** et **B** situées dans des sous-espaces parallèles de dimension d d'un espace ambiant **E**; par exemple dans des hyperplans parallèles (notés, ci-après, par leur abscisse z sur un axe).

L'inégalité s'applique en particculier aux sections d'un convexe par des hyperplans parallèles. Désignons par $\Pi(z1)$ et $\Pi(z2)$ deux tels hyperplans coupant un convexe **C**: la demi-somme des sections de **C** par ces hyperplans est incluse dans la section de **C** par l'hyperplan moyen intermédiaire $\Pi((z1+z2)/2)$; car, en bref, comme on le voit sur la figure, tout milieu μ d'un segment joignant deux points M1 et M2 des sections extrêmes appartient à la section moyenne.

Si, pour la commodité du langage, on suppose l'espace **E** muni d'une structure euclidienne, on pourra dire que le rayon $R(z)$ de l'hypersphère équivalente à la section du convexe **C** par l'hyperplan $\Pi(z)$ (de cote z) est une fontion convexe de z (pourvu qu'on restreigne la variation de z à l'intervalle des valeurs telles que $\Pi(z)$ coupe **C**).

Or notre propos est de comparer les volumes des deux parties du convexe **C** délimitées par un hyperplan passant par le centre de gravité G de **C**. On peut supposer que cet hyperplan est $\Pi(0)$; les volumes qui nous intéressent se calculent par intégration de tranches de **C** délimitées par des hyperplans $\Pi(z)$; on peut donc substituer à **C** le corps de révolution **CR** défini comme la réunion des hypersphères $\Sigma(z)$ de rayon $R(z)$ contenues chacune dans un $\Pi(z)$ et centrées sur la perpendiculaire à la direction Π passant par G. La suite de l'exposé repose sur le fait que, comme on l'a dit, **CR** est un convexe de révolution.



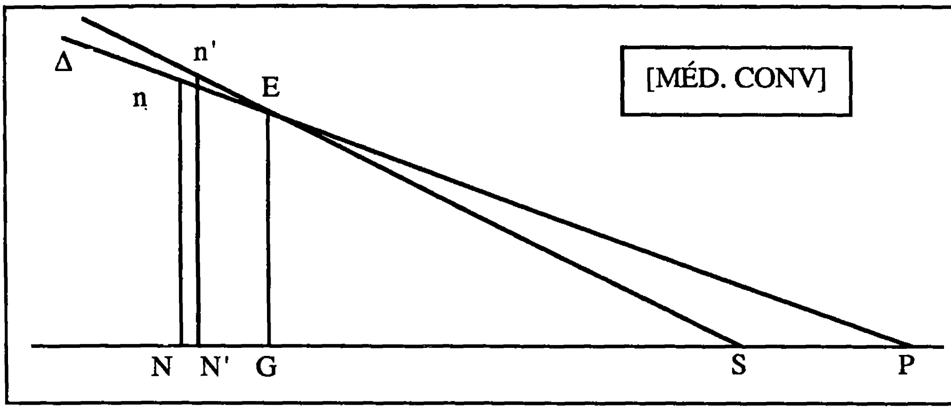
3 Rapport entre les volumes des deux parties d'un convexe de révolution déterminées par l'hyperplan perpendiculaire à l'axe passant par le centre de gravité

Il nous suffira désormais de raisonner dans un plan méridien, quel que soit le nombre, m-1, des dimensions transverses à l'axe de révolution. Dans la figure, l'axe de révolution est l'axe horizontal; le contour méridien est dessiné comme une courbe qui joint les deux points Q et M de l'axe, et coupe en E ("point équatorial") la perpendiculaire à l'axe en G. Nous voulons majorer le volume engendré par la partie gauche (i.e. le triangle mixtiligne QGE) par le produit d'une constante annoncée au §1 (et sur laquelle nous reviendrons) et du volume droit (engendré par le triangle mixtiligne MGE).

Le principe de la démonstration est de substituer au convexe donné un autre convexe de révolution, ayant même axe et même centre de gravité G, et pour lequel le volume de la partie droite est diminué tandis que celui de la partie gauche est augmenté; en sorte que l'inégalité sera certainement vraie pour le convexe donné si elle l'est pour le convexe modifié. Plus précisément, on aboutira, en deux étapes, à un convexe modifié pour lequel le rapport des volumes sera exactement égal à la valeur annoncée au §1.

Pour expliquer les modifications réalisées, il nous suffira de commenter deux figures. On a noté Δ une droite d'appui en E à la méridienne. Le point P est placé à l'intersection de Δ avec la partie droite de l'axe: si Δ est parallèle à l'axe, ou coupe celui-ci à gauche de G, on raisonnera comme si P était un point de l'axe indéfiniment éloigné vers la droite.

Le premier convexe modifié construit est engendré par la révolution du triangle EGS (à droite) et du trapèze GEnN (à gauche). Triangle et trapèze sont déterminés univoquement par la condition que pour le convexe modifié le moment relativement à l'hyperplan perpendiculaire $\Pi(0)$ à l'axe en G de la partie



gauche, ainsi que celui de la partie droite soient les mêmes que pour le convexe de révolution initial (non modifié). Puisque par moment nous entendons "intégrale de la distance z à $\Pi(0)$ par rapport à l'élément de volume", cette condition assure que, comme le convexe initial, le convexe modifié a G pour centre de gravité.

Reste à s'assurer que la condition sur les moments détermine en effet S et N de manière unique; et que sont bien vérifiées les inégalités annoncées pour les volumes des parties droites et gauches du convexe et du convexe modifié.

Plaçons-nous d'abord à droite pour déterminer S. Il suffit de faire varier S vers la droite à partir de M. Le moment du volume engendré par le triangle rectiligne EGM est d'abord trop faible, puisque ce triangle est inclus dans le triangle mixtiligne qui engendre la partie droite du convexe non modifié. Mais quand S va vers la droite en tendant vers P, le triangle rectiligne EGS tend à englober le triangle mixtiligne EGM (ou il tend vers l'infini si Δ ne coupe pas l'axe à droite de G).

Donc, pour une position convenable de S située en dessous de la droite Δ, il y a égalité des moments; et ES coupe alors le contour initial en un point *i* bien déterminé (à moins que M, S et P ne coïncident, auquel cas il n'y a pas eu besoin de modification à droite). Or en cette position, le triangle rectiligne EGS diffère du triangle mixtiligne en ce qu'il a perdu des points situés à gauche de I et gagné des points situés à droite de I: puisque le moment est le même c'est donc que le volume a diminué.

Pour la partie gauche on procède de façon analogue: on déplace le point N vers la gauche à partir de G vers Q: d'abord nul, le moment du volume engendré par le trapèze GEnN, dépasse celui de la partie gauche du convexe initial quand N est en Q. Ici encore, il y a un point N unique, qui est distinct de Q (à moins que le triangle mixtiligne QGE ne remplisse tout le trapèze limité par l'axe, la droite Δ et les perpendiculaires à l'axe en G et en Q).

La base Nn du trapèze coupe le contour en *j* et l'on voit que le convexe modifié diffère du convexe initial en ce qu'il a perdu des points situés à gauche de *j* (éloignés de Π(0)) et gagné des points situés à droite de *j* (proches de Π(0)). Cette fois, pour la partie gauche, l'égalité des moments implique donc une augmentation de volume.

La deuxième modification porte seulement sur la partie gauche . Elle consiste à utiliser SE comme droite d'appui et substituer au trapèze GEnN un trapèze GEn'N' pour lequel {n', E, S} sont alignés. On peut considérer que le principe même de la première modification est appliqué une deuxième fois à une figure particulière; ce qui dispense de toute démonstration.

Finalement, on aboutit, en deux modifications, à un cône de révolution, ayant pour sommet S; et pour base l'hypersphère de centre N' et de rayon |N'n'| de l'hyperplan perpendiculaire à l'axe en N'. Les modifications ont été faites de telle sorte que le centre de gravité est toujours G; le rapport du volume de la partie droite à celui de la partie gauche est donc exactement:

$$((m+1)^m - m^m) / m^m.$$

Et nous sommes assuré que ce nombre, supérieur à 1, est le maximum du rapport pouvant exister entre le volume de la plus grande partie et celui de la plus petite en lesquelles un convexe est partagé par un hyperplan passant par son centre de gravité.

Comme dans [MÉDIANE], l'inégalité proposée ne peut être améliorée, car elle est ici exactement réalisée.

Références bibliographiques

D.J. Newman : Partitioning of areas by straight lines, in *American Math. Soc. Notices*,Vol 5 n°4, Août 1958, p.510.

Kh. Aludaat et A. Quaqazeh: Une généralisation de la notion de médiane à une distribution de masse multidimensionnelle, in *CAD*, Vol XIV, n°3, pp. 355-364.

B. Teissier: Compte rendu du livre *Geometric inequalities*, de Yu. D. Burago & V.A. Zalgaller; in *Gazette des Mathématiciens*, n° 44, avril 1990; ce compte rendu rappelle l'inégalité de Brünn-Minkowski et donne sur les questions connexes une bibliographie de base.