

J. P. BENZÉCRI

Sur l'interprétation statistique de la mécanique quantique : l'évolution de la matrice de densité

Les cahiers de l'analyse des données, tome 11, n° 2 (1986),
p. 235-245

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1986__11_2_235_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'INTERPRÉTATION STATISTIQUE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE : L'ÉVOLUTION DE LA MATRICE DE DENSITÉ

[INT. STAT. QUANT.]

par J.P. Benzécri*

4 Thèse 4 : Pour un système regardé comme formé de deux composantes la dépolarisation de la matrice de densité de l'une de celles-ci, peut résulter de l'application de l'équation de Schrödinger au système global.

4.0 Pour expliquer cette thèse, nous considérerons d'abord, au § 4.1 la description d'un système composé : l'espace des états d'un tel système est le produit tensoriel des espaces des états de ses deux composantes. A toute matrice de densité du système on associe classiquement une matrice de densité partielle pour chacune des composantes. Même si le système est dans un état pur ψ , avec pour matrice de densité $w(\psi)$, les matrices de densité partielles peuvent être de rang strictement supérieur à 1, donc décrire des états de mélange. En particulier, à partir d'un état initial pur ψ , qui est le produit tensoriel de deux états des composantes, le système peut (tout en étant dans un état pur : conformément à l'équation de Schr.) évoluer vers un état dont chacune des matrices de densité partielle est un état de mélange : si on se restreint à considérer une seule composante, il y a donc dépolarisation. C'est ainsi que s'explique la dépolarisation associée à un processus de mesure, ainsi que la diffraction incohérente : on le verra au § 4.2 sur des exemples d'expériences et au § 4.3 sur un schéma formel.

4.1 Description d'un système composé

4.1.1 Notations pour les états purs : Nous nous bornons à considérer un système à deux composantes, et notons respectivement EA et EB les espaces des états afférents à celles-ci. L'espace des états du système est donc $EA \otimes EB$. Si, en particulier α et β sont deux états des composantes, $\alpha \otimes \beta$ est un état du système ; mais plus généralement une combinaison linéaire $\sum_u \alpha(u) \otimes \beta(u)$ décrit aussi un état pur du système, bien qu'on ne puisse associer à celui-ci un état déterminé de chacune des composantes.

Soit A l'opérateur sur EA associé à une grandeur relative à la première composante : A définit aussi une grandeur associée au système si l'on pose :

$$A(\alpha \otimes \beta) = (A\alpha) \otimes \beta ; \text{ ou en général :}$$

$$A(\sum_u \{\alpha_u \otimes \beta_u\}) = \sum_u \{(A\alpha_u) \otimes \beta_u\}$$

ceci revient à associer l'opérateur A sur EA, l'opérateur $A \otimes \delta_{BB}$ sur $EA \otimes EB$ (où δ_{BB} désigne l'opérateur identité de EB). De même à une

(*) *Professeur de statistique. Université Pierre et Marie Curie.*

Le présent article fait suite à celui publié dans CAD Vol XI n° 1.

grandeur B relative à la deuxième composante est associée la grandeur $\delta_{AA} \otimes B$, relative au système. Il est clair que A et B sont simultanément mesurables pour le système ; car les opérateurs $A \otimes \delta_{BB}$ et $\delta_{AA} \otimes B$ commutent.

Reprenons pour A et B les notations du § 2.2 :

A : vecteurs propres $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n\}$; valeurs propres $\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_n\}$;

B : vecteurs propres $\{\beta_1, \dots, \beta_j, \dots, \beta_m\}$; valeurs propres $\{b_1, \dots, b_j, \dots, b_m\}$.

Alors pour $A \otimes \delta_{BB}$, chacune des valeurs propres a_i de A, acquiert la multiplicité m (dimension de EB) avec pour vecteurs propres :

$$\{\alpha_i \otimes \beta_1, \dots, \alpha_i \otimes \beta_j, \dots, \alpha_i \otimes \beta_m\} ;$$

chacun des produits tensoriels $\alpha_i \otimes \beta_j$ est à la fois vecteur propre pour $A \otimes \delta_{BB}$ relatif à la v.p. a_i ; et pour $\delta_{AA} \otimes B$, relatif à la v.p. b_j . Un vecteur d'état quelconque, vecteur ψ de norme 1 du produit tensoriel $EA \otimes EB$, peut être décomposé suivant la base des m.n vecteurs $\alpha_i \otimes \beta_j$:

$$\psi = \sum \{x_{ij} \alpha_i \otimes \beta_j \mid i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, m\} ;$$

la probabilité que la grandeur A (associée à l'opérateur $A \otimes \delta_{BB}$) prenne pour le système la valeur a_i , n'est autre que :

$$\text{prob}(a_i) = \sum \{|x_{ij}|^2 \mid j = 1, \dots, m\},$$

norme de la composante de ψ dans le sous-espace propre de $A \otimes \delta$ afférent à la valeur propre a_i ; résultat usuel dans le cas d'une valeur propre multiple.

4.1.2 Matrice de densité du système et matrice de densité partielle :

L'espace E des états du système composé est le produit tensoriel $EA \otimes EB$; une matrice de densité W pour le système est donc un élément hermitique, positif du produit tensoriel.

$$E \otimes {}^C E = (EA \otimes EB) \otimes ({}^C EA \otimes {}^C EB) \approx (EA \otimes {}^C EA) \otimes (EB \otimes {}^C EB) ;$$

il apparaît sur cette formule que la matrice de densité du système appartient au produit tensoriel des espaces des matrices de d_i des composantes et peut donc s'écrire comme somme de produits tensoriels de deux telles matrices.

On a vu au § 4.1.1 que toute grandeur A afférente à la première composante est une grandeur pour le système ; et on a calculé la probabilité d'une valeur propre de a_i de A pour un état du système, en faisant usage de la base sur EB associée à une grandeur B relative à la deuxième composante. Ceci suggère un problème plus général : le système étant dans un état de mélange W, calculer la probabilité des diverses issues de la mesure de la grandeur A pour le système ; En fait ce problème se résout comme au § 2.3 : à partir de W, (état de mélange du système) on calcule une matrice de densité partielle W_A pour la première composante : et la probabilité des résultats de mesure (pour le système) d'une grandeur A afférente à celle-ci, se calcule alors sur W_A sans référence à l'autre composante.

Il nous suffira de donner sous forme invariante l'application linéaire r_A :

$$E \otimes {}^C E + EA \otimes {}^C EA ; W \rightarrow W_A ;$$

et de vérifier dans la base particulière utilisée au § 4.1.1 qu'on a bien le résultat déjà trouvé pour $\text{prob}(ai)$ dans le cas d'un état pur $w(\psi)$ du système. Par linéarité le résultat s'étendra à un mélange quelconque.

En termes algébriques ; l'application linéaire r_A est le produit tensoriel de l'application identité de $EA \otimes {}^C EA$ dans lui-même, par l'application trace de $EB \otimes {}^C EB$ dans C (corps des complexes) ; soit :

$$r_A : \alpha \otimes {}^C \alpha' \otimes \beta \otimes {}^C \beta' \rightarrow \langle \beta', \beta \rangle \alpha \otimes {}^C \alpha' .$$

Si on fait usage d'une base on a (avec les notations du § 4.1.1) :

$$W = \sum W_{i,i';j,j'} \alpha_i \otimes {}^C \alpha_{i'} \otimes \beta_j \otimes {}^C \beta_{j'} ;$$

$$\begin{aligned} W_A &= \sum W_{i,i';j,j'} \langle \beta_{j'}, \beta_j \rangle \alpha_i \otimes {}^C \alpha_{i'} \\ &= \sum_{i,i'} \left\{ \sum_j W_{i,i';j,j} \right\} \alpha_i \otimes {}^C \alpha_{i'} \end{aligned}$$

où on a tenu compte de l'orthonormalité des β_j pour passer d'une somme quadruple à une somme triple dans l'expression de W_A .

Dans le cas d'un état pur $W = (\psi \otimes {}^C \psi)$ on a :

$$\psi = \sum_{ij} x_{ij} \alpha_i \otimes \beta_j$$

$$W = \sum_{i,i';j,j'} x_{ij} \bar{x}_{i'j'} \alpha_i \otimes {}^C \alpha_{i'} \otimes \beta_j \otimes {}^C \beta_{j'} ;$$

$$W_A = \sum_{i,i'} \left\{ \sum_j x_{ij} \bar{x}_{i'j} \right\} \alpha_i \otimes {}^C \alpha_{i'} ;$$

avec, en particulier, pour le terme diagonal coefficient de $\alpha_i \otimes {}^C \alpha_i$, la valeur $\sum_j \{|x_{ij}|^2\}$ trouvée au § 4.1.1 pour $\text{prob}(ai)$. Ce qui, comme annoncé, prouve que les résultats de mesure, sur le système, d'une grandeur afférente à sa première composante, dépendent exclusivement de la matrice de densité partielle W_A .

On voit que la matrice de densité partielle W_A d'un état pur $W = w(\psi)$, peut être n'importe quelle matrice positive de rang π (où m désigne la dimension de EB , espace des états de la deuxième composante) ; si $m \geq n$, W_A est une matrice de densité quelconque. En se plaçant dans la base où W_A est diagonale il suffit en effet de poser :

$$W_A = \sum_i p_i \alpha_i \otimes {}^C \alpha_i ; W = w(\psi) = \psi \otimes {}^C \psi ;$$

$$\psi = \sum |p_i|^{1/2} \alpha_i \otimes \beta_i \quad (i=1, \dots, n).$$

Il est clair que la matrice de densité partielle W_B , relative à la deuxième composante, est toute analogue à W_A .

4.2 Exemples simples de dépolariation d'une matrice de densité partielle

4.2.0 Choix des exemples : Pour introduire les principes de la mécanique ondulatoire, R.P. Feynman (*The theory of fundamental processes* ; Benjamin ; 1962 ; cité, "Th. of F.P.") part de l'expérience des fentes d'Young (réalisée avec des électrons) et cite la diffraction des neutrons sur un cristal, exemple qu'il explique plus en détail ailleurs (*Quantum mechanics and path integrals* ; R.P. Feynman & H.A. Hills ; Mc Graw-Hills 1965 ; cité "Path I"). Il s'agit, là comme ici d'un système dont la première composante est le corpuscule incident (électron, neutron...) ; et la deuxième, la cible (écran percé de fentes et éventuellement muni d'un système d'observation ; cristal..) ; avec, au-delà, un écran d'observation où apparaissent éventuellement des figures d'interférence ou de diffraction. La matrice de densité partielle du corpuscule au-delà de la cible peut être un état pur ou un état de mélange : dans ce dernier cas, on dit qu'il y a eu destruction de la cohérence. Nous considérons ces deux exemples : au § 4.2.1, les fentes d'Young ; au § 4.2.2, la diffraction des neutrons.

Dans l'expérience d'Young, on détruit la cohérence si on observe la trajectoire au niveau des fentes. Il en est ainsi dans tout processus de mesure : on le montre au § 4.3 en considérant la matrice de densité partielle du corpuscule soumis à la mesure, relativement au système formé du corpuscule et de l'appareil de mesure.

Mais quel que puisse être l'intérêt des schémas généraux on doit noter que l'appareil par excellence, destinés à saisir les événements mettant en jeu des particules individuelles, est la chambre de détection ; chambre de Wilson, chambre à bulle, système de plans de fils... Cet exemple complexe nous ramène au problème posé par Heisenberg "de la frontière entre l'objet et l'observateur" (ou l'appareil de mesure) ; frontière mouvante que tente de décrire la thèse 5 : nous traiterons donc au § 5.1 des chambres de détection.

4.2.1 Détermination du point de passage dans l'expérience des fentes

d'Young : Rappelons par une figure cette expérience, réalisée initialement avec un flux lumineux incident, mais qu'on appliquera à des corpuscules chargés de masse $\neq 0$, tels que des électrons (cf. Feynman ; Th. of F.P. ; p. 2). A la partie de l'onde incidente qui



passé par la fente (1) si la fente (2) est obturée, correspond sur l'écran C la fonction d'onde $\psi_1(c)$; de même pour la fente (2) on a $\psi_2(c)$. La linéarité de la propagation entraîne que si (1) et (2) sont simultanément ouvertes, l'onde sur l'écran est $\psi_1(c) + \psi_2(c)$.

Supposons qu'il y ait entre les fentes un dispositif d'observation B, (utilisant, e.g., selon Feynman, une source lumineuse) : l'hypothèse la plus générale considérée par nous sera que B admet un système de trois états orthonormés.

β_0 : état initial, ou absence d'observation du passage d'un corpuscule.

β_1 : passage enregistré en (1) ;

β_2 : passage enregistré en (2).

(pour alléger les notations, nous omettons la possibilité d'une double détection simultanée, en (1) et (2)).

Le passage effectif de l'onde par (1), (ou, si l'on préfère, la propagation de l'onde incidente quand la fente (2) est obturée) produit un état conjoint du dispositif d'observation B et de l'écran C, dont le vecteur d'état est :

$$\psi_1 \otimes (a' \beta_0 + ab' \beta_1 + ab' \beta_2) ;$$

de même, pour un passage par (2) on a :

$$\psi_2 \otimes (a' \beta_0 + ab' \beta_1 + ab' \beta_2) ;$$

en écrivant ces formules, on peut, tenant compte de la symétrie entre (1) et (2) et de l'unitarité, choisir les phases de β_1 et β_2 en sorte que soient satisfaites les conditions :

$$a, a', b \in \mathbb{R}^+ ; b' \text{ complexe} ;$$

$$a^2 + (a')^2 = b^2 + |b'|^2 = 1.$$

Au total, après passage de l'électron, l'état du système à deux composantes (appareil de détection B, écran C) est :

$$(\psi_1 + \psi_2) \otimes (a' \beta_0) + (b\psi_1 + b'\psi_2) \otimes (a\beta_1) + (b'\psi_1 + b\psi_2) \otimes (a\beta_2).$$

Si la source lumineuse est forte, il y a toujours observation effective : $a' = 0$, $a = 1$; sinon $a \neq 1$. Si la longueur d'onde de la lumière servant à l'observation est petite (vis-à-vis de la distance des fentes), il ne peut y avoir de confusion entre (1) et (2) : $b' = 0$, $b = 1$; sinon $b \neq 1$.

En appliquant les formules du § 4.1.2, on trouve que la matrice de densité partielle du corpuscule sur l'écran est :

$$(a')^2 (\psi_1 + \psi_2) \otimes ({}^c \psi_1 + {}^c \psi_2) + a^2 (b\psi_1 + b'\psi_2) \otimes (b^c \psi_1 + \bar{b}'^c \psi_2) \\ + a^2 (b'\psi_1 + b\psi_2) \otimes (\bar{b}'^c \psi_1 + b^c \psi_2).$$

Si l'écran est pavé de détecteurs quasi ponctuels, on a pour probabilité d'enregistrement au point c (ou densité de présence sur l'écran C) :

$$(a')^2 |\psi_1(c) + \psi_2(c)|^2 + a^2 (|b\psi_1(c) + b'\psi_2(c)|^2 + |b'\psi_1(c) + b\psi_2(c)|^2).$$

La formule se simplifie dans des cas extrêmes :

(X) : absence de dispositif d'observation : $a' = 1$; $a = 0$;

(Y) : dispositif d'observation parfait : $a' = b' = 0$; $a = b = 1$;

(Z) : observation en B totalement inefficace : $b = b' = 2^{-1/2}$;

on a alors pour densité de présence sur l'écran :

$$(X) : |\psi_1(c) + \psi_2(c)|^2 ; (Y) : |\psi_1(c)|^2 + |\psi_2(c)|^2 ; (Z) : \text{comme (X)}.$$

En dehors des cas de cohérence parfaite entre ψ_1 et ψ_2 (X et Z); ou d'absence totale de cohérence (Y), on a un continuum d'états intermédiaires; gradation qu'il importe de rapprocher du caractère discontinu inhérent au saut quantique (cf. § 2.4, *in fine*).

4.2.2 Diffraction cohérente et diffraction incohérente des neutrons

polarisés sur un cristal : Voici comment Feynman explique ces deux modes de diffraction (Path I. pp. 17 sqq). les neutrons diffractés sans changement de spin "émergent seulement dans certaines directions déterminées par la loi de Bragg, comme pour les rayons X", en fonction de la longueur d'onde de Broglie du neutron et de la maille du réseau cristallin. Au contraire, la diffraction avec changement de spin est une "diffraction diffuse, dans toutes les directions... La loi de conservation du moment angulaire requiert qu'avec le spin du neutron bascule le spin du noyau sur lequel celui-là a été diffusé... Donc en principe ce noyau pourrait être déterminé, ... pourvu qu'on eût noté avant l'expérience le spin de tous les noyaux... et réexaminé le cristal après diffusion d'un neutron... Il n'y a pas d'alternatives susceptibles d'interférer. Les ondes sphériques qui émergent de ce noyau particulier décrivent le mouvement du neutron diffusé, et seules les ondes issues de ce noyau participent à cette description... L'important est qu'en principe on peut, sans perturber le neutron diffusé... déterminer le noyau en cause... même si la détermination n'est pas faite... il s'agit d'alternatives qui s'excluent et donc n'interfèrent pas."

Quoi qu'il en soit de cette explication rapide et suggestive, on peut dans cet exemple-ci, comme dans celui des fentes d'Young, voir sur la fonction d'onde du système formé de la particule diffusée et du cristal, si les termes correspondant aux différents noyaux sont ou non cohérents entre eux. Sans entrer dans le détail, supposons que l'état du cristal est décrit par un vecteur Ψ :

$$\Psi = \otimes \{ \psi^\epsilon(n) | n \in N \},$$

donnant pour chaque noyau n de l'ensemble N , son spin $\epsilon = +, -$.

Si le cristal est initialement polarisé son état est $\Psi^+ = \otimes \{ \psi^+(n) \}$. Le neutron incident est décrit par une onde plane initiale $\pi^-(x)$ (où l'indice - rappelle la valeur du spin).

L'interaction du neutron avec le cristal crée d'une part des termes de diffusion sans changement de spin de la forme :

$$f \Psi^+ \otimes \omega^-(x, n)$$

où $\omega^-(x, n)$ est une onde sphérique de neutron à spin -, centrée sur le noyau n (et f désigne une constante de couplage); et d'autre part des termes :

$$f' \Psi_{-n}^+ \otimes \omega^+(x, n),$$

où Ψ_{-n}^+ est la fonction de spin du cristal, modifiée par le passage à - du spin du noyau n ; et $\omega^+(x, n)$ est, comme ω^- , une onde sphérique de neutron centrée sur n , mais avec spin +; (et f' désigne une autre constante de couplage).

La somme des termes sans changement de spin s'écrit :

$$\sum_n \{ f \Psi^+ \otimes \omega^-(x, n) \} = f \Psi^+ \otimes \sum_n \{ \omega^-(x, n) \},$$

expression où le vecteur d'état du cristal, apparaît en facteur de la

somme des ondes diffractées sur tous les noyaux ; somme qui est donc une véritable fonction d'onde, décrivant un état pur du neutron.

Dans le cas du changement de spin on a au contraire une somme de termes orthogonaux entre eux, par le seul fait que sont orthogonaux les ψ_{-n}^+ correspondant à deux valeurs distinctes n' et n'' . Ces termes ne peuvent interférer ; la matrice de densité des neutrons diffusés avec changement de spin décrit un état de mélange :

$$\sum_n \{ \omega^+(x, n) \otimes {}^c \omega^+(x, n) \}$$

En revanche, comme le souligne Feynman (Th. of F.P. ; p. 3) , il peut y avoir diffraction cohérente avec changement de spin du neutron, si sont excités dans le cristal des ondes de spin. De plus dans le cas de la diffusion sans changement de spin, il y a une certaine diffusion incohérente (i.e. la matrice de densité partielle du neutron, n'est pas un état pur) parce que la réponse des noyaux ne se borne pas à changer ou non de spin, mais que leur fonction d'onde de position est altérée. Si on a le hamiltonien exact, cette incohérence peut être calculée de façon précise, suivant le schéma suivant. A chaque noyau n , correspond un terme :

$$f(\psi^+ + a \Delta n) \otimes \omega^-(x, n),$$

où $(a \Delta n)$ est une modification petite, perpendiculaire à la fonction d'état initiale ψ^+ du cristal. La somme s'écrit :

$$(f \psi^+ \otimes \sum_n \{ \omega^-(x, n) \}) + \sum_n \{ f a \Delta n \otimes \omega^-(x, n) \}.$$

Si on suppose que les Δn sont orthonormés (ce qui semble possible : puisqu'il s'agit de noyaux séparés) et les $\omega^-(x, n)$ normalisés (ce qui est une simple notation) le terme incohérent a pour norme $f^2 a^2 n$; si de plus on suppose les $\omega^-(x, n)$ orthonormés (ce qui est sujet à caution) le terme cohérent a pour norme $f^2 n$.

4.3 Schéma formel de la dépolarisation d'une matrice de densité :

Dans ce schéma, nous généralisons la description de l'expérience des fentes d'Young en reprenant dans la mesure du possible les notations du § 4.2.1.

4.3.1 Cas où l'appareil de mesure a un nombre fini d'états distincts

directement observables : On considère le système formé d'un objet à observer A (décrit par un vecteur ψ de l'espace des états EA), et d'un appareil de mesure B . On suppose que l'espace EB des états de celui-ci est engendré par une base orthonormée finie B_0 , contenant d'une part un vecteur d'état β_0 (état initial ou état d'absence de mesure) et d'autre part un ensemble B de vecteurs d'état β correspondant chacun à une issue effective du processus de mesure. De plus on admet dans ce § 4.3.1 que l'état de l'appareil après la mesure est connu de façon certaine, comme étant l'un des éléments de B_0 .

Dans le cas d'une mesure toujours effective et parfaite, le vecteur d'état initial du système, $\psi \otimes \beta_0$, se transforme en :

$$\sum \{ p \beta (\psi) \otimes \beta \mid \beta \in B \},$$

où les $p \beta$ sont des projecteurs, réalisant une partition de l'identité

(i.e. dont la somme est l'application identité de EA dans EA : $\sum_{\beta} \{pr\beta\} = \delta$). D'où pour la matrice de densité partielle de l'objet observé la transformation :

$$\psi \otimes {}^c\psi \rightarrow \sum \{pr\beta(\psi) \otimes {}^c(pr\beta(\psi)) | \beta \in B\};$$

ce qui constitue une dépolarisation. Si l'appareil de mesure a une probabilité a^2 de fonctionner et une probabilité $(a')^2$ de rester dans l'état initial (avec : $a, a' \in \mathbb{R}^+$; $a^2 + (a')^2 = 1$), on aura après la mesure pour état du système :

$$a^2 \psi \otimes \beta_0 + a \sum \{pr\beta(\psi) \otimes \beta | \beta \in B\}.$$

On peut envisager que l'appareil donne des mesures fausses ; ce qui formellement correspond à une suite d'opérateurs $op\beta$ qui ne sont pas des projecteurs $pr\beta$. Plus précisément, la transformation unitaire la plus générale de $\psi \otimes \beta_0$ s'écrit :

$$\sum \{op\beta(\psi) \otimes \beta | \beta \in B_0\}; \text{ où } B_0 = B \cup \{\beta_0\}$$

avec pour la suite des opérateurs $op\beta$ (de EA dans EA) la condition :

$$\sum \{{}^{ct}op\beta \circ op\beta | \beta \in B_0\} = \delta$$

où ${}^{ct}op$ désigne l'opérateur conjugué hermitique de op (conjugué du transposé) ; et δ est l'opérateur identité de l'espace EA des états (de l'objet observé).

Sur une matrice de densité $w = w_A \otimes (\beta_0 \otimes {}^c\beta_0)$ décrivant l'état initial, le processus de mesure a , plus généralement, l'effet suivant :

$$w = w_A \otimes (\beta_0 \otimes {}^c\beta_0) \rightarrow W;$$

$$W = \sum \{(op\beta' \circ w_A \circ {}^{ct}op\beta) \otimes (\beta' \otimes {}^c\beta) | \beta \in B_0; \beta' \in B_0\}$$

Ayant supposé (cf. *supra*), comme il est naturel que B_0 est une base orthonormée de l'espace EB des états de l'appareil de mesure, reprenons les notations du § 4.1.2. On a pour la matrice de densité w_A résultat de la dépolarisation de w_A par le processus de mesure :

$$w_A = \sum \{op\beta \circ w_A \circ {}^{ct}op\beta | \beta \in B_0\}.$$

Quant à la probabilité, $Prob(\beta)$, que le résultat de la mesure ait été β , elle apparaît sur la matrice de densité partielle w_B , laquelle se calcule comme w_A :

$$\begin{aligned} w_B &= \sum \{\text{trace}(op\beta' \circ w_A \circ {}^{ct}op\beta) \cdot (\beta' \otimes {}^c\beta) | \beta \in B_0; \beta' \in B_0\} \\ &= \sum \{\text{trace}(({}^{ct}op\beta' \circ op\beta) \circ w_A), (\beta' \otimes {}^c\beta) | \beta \in B_0; \beta' \in B_0\} \end{aligned}$$

d'où pour la probabilité $Prob(\beta)$ que l'observation de B fournisse le résultat β :

$$Prob(\beta) = \text{trace}(({}^{ct}op\beta \circ op\beta) \circ w_A)$$

Il apparaît sur cette formule qu'il convient d'associer à chaque

résultat de mesure β l'opérateur hermitique positif (${}^{\text{ct}}\text{op}\beta \circ \text{op}\beta$) de EA dans EA ; et que cet opérateur doit être noté $\text{Prob}(\beta)$ puisque sa valeur sur l'état w_A du système est précisément la probabilité que sorte le résultat β ; on a donc :

$$\text{Prob}(\beta) = {}^{\text{ct}}\text{op}\beta \circ \text{op}\beta \quad ; \quad \Sigma \{ \text{Prob}(\beta) \mid \beta \in B_0 \} = \delta \text{ (identité de EA)} ;$$

ces dernières identités montrent que, comme il convient, les probabilités $\text{Prob}(\beta)$ sont pour tout état initial w_A des nombres positifs dont la somme est 1.

Réciproquement, supposons donné sur EA un ensemble d'opérateurs hermitiques positifs $\text{Prob}(\beta)$, indicés par β parcourant un ensemble fini quelconque B_0 , avec la condition $\Sigma \{ \text{Prob}(\beta) \mid \beta \in B_0 \} = \delta$. on peut formellement (!) concevoir un processus de mesure qui à partir d'un état w_A du système A, fournisse chacune des issues β de B_0 , avec la probabilité $\text{trace}(\text{Prob}(\beta) \circ w_A)$. Il suffira pour cela de trouver pour tout β un opérateur $\text{op}\beta$ tel que ${}^{\text{ct}}\text{op}\beta \circ \text{op}\beta = \text{Prob}(\beta)$; ce qui est possible, puisque $\text{Prob}(\beta)$ est hermitique positif (son spectre étant, de plus, nécessairement inclus dans l'intervalle (0,1)). Le couplage du système A dans l'état pur ψ avec un hypothétique appareil de mesure dans l'état B_0 réalisera la transformation :

$$\psi \otimes \beta_0 \rightarrow \Sigma \{ \text{op}\beta(\psi) \otimes \beta \mid \beta \in B_0 \}.$$

Dans le cas où les $\text{Prob}(\beta)$ sont des projecteurs commutant deux à deux et ayant pour somme l'identité, on retrouve la notion usuelle de processus de mesure en posant $\text{op}\beta = \text{Prob}(\beta)$. Mais dans le cadre proposé ici, on introduit aisément tous les taux d'erreur et de non-fonctionnement qu'on désire.

Une question se pose ici : quelle est la forme la plus générale d'une application linéaire (sur R) lin de $EA \otimes_{\mathbb{S}} {}^{\text{C}}EA$ dans lui-même, conservant dans leur ensemble les matrices de densité (i.e. les opérateurs hermitiques positifs de trace 1) ? Dans le cas où lin est un isomorphisme de l'ensemble des matrices de densité avec lui-même (lin inversible) on peut montrer que lin est défini soit par un opérateur unitaire (un) de EA, soit par un opérateur antiunitaire (au) ou isométrie linéaire de EA sur ${}^{\text{C}}EA$:

$$\text{lin}(\psi \otimes {}^{\text{C}}\psi) = \text{un}(\psi) \otimes {}^{\text{C}}(\text{un}(\psi)) \quad ; \quad \text{ou} \quad :$$

$$\text{lin}(\psi \otimes {}^{\text{C}}\psi) = {}^{\text{C}}(\text{au}(\psi)) \otimes \text{au}(\psi) \quad ;$$

en d'autres termes :

$$\text{lin}(w_A) = \text{un} \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{un} = \text{un} \circ w_A \circ \text{un}^{-1} \quad ; \quad \text{ou} \quad :$$

$$\text{lin}(w_A) = {}^{\text{C}}(\text{au} \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{au}) = {}^{\text{C}}(\text{au} \circ w_A \circ \text{au}^{-1}).$$

Dans le cas général où lin n'est pas inversible nous conjecturons qu'il existe soit une famille d'applications linéaires op de EA dans EA, soit une famille d'appl. linéaires ap de EA dans ${}^{\text{C}}EA$, avec :

$$\text{lin}(w_A) = \Sigma \{ \text{op}\beta \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{op}\beta \mid \beta \in B \} \quad ; \quad \Sigma \{ {}^{\text{ct}}\text{op}\beta \circ \text{op}\beta \mid \beta \in B \} = \delta \quad ; \quad \text{ou}$$

$$\text{lin}(w_A) = \Sigma \{ {}^{\text{C}}(\text{ap}\beta \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{ap}\beta) \mid \beta \in B \} \quad ; \quad \Sigma \{ {}^{\text{ct}}\text{ap}\beta \circ \text{ap}\beta \mid \beta \in B \} = \delta.$$

4.3.2 Cas où on effectue successivement deux observations avec des

appareils sans action l'un sur l'autre : Supposons qu'après l'observation de B, on effectue une deuxième observation C avec un appareil de mesure tout analogue à B, et indépendant de celui-ci. Un tel dispositif correspond à celui de l'expérience d'Young, B étant le système des fentes et C l'écran (à ceci près qu'on distingue sur l'écran une infinité d'impacts possibles...). Comme au § 4.3.1 pour B, on note γ_0 le vecteur d'état initial de C, et C_0 une base orthonormée de vecteurs d'états contenant γ_0 ; et on suppose que l'interaction de A avec C a pour effet la transformation unitaire ci-dessous :

$$\psi \otimes \gamma_0 \rightarrow \Sigma \{ \text{op}_\gamma(\psi) \otimes \gamma \mid \gamma \in C_0 \}; \text{ où } \psi \in EA,$$

et les op_γ sont des applications de EA dans EA satisfaisant à la condition :

$$\Sigma \{ {}^{\text{ct}}\text{op}_\gamma \circ \text{op}_\gamma \mid \gamma \in C_0 \} = \delta \text{ (identité de EA).}$$

Si A est mis successivement en interaction avec B et C on a une transformation en deux étapes :

$$\begin{aligned} \psi \otimes \beta_0 \otimes \gamma_0 &\rightarrow \Sigma \{ \text{op}_\beta(\psi) \otimes \beta \mid \beta \in B_0 \} \otimes \gamma_0 \dots \\ &\rightarrow \Sigma \{ (\text{op}_\gamma \circ \text{op}_\beta(\psi)) \otimes \beta \otimes \gamma \mid \beta \in B_0 ; \gamma \in C_0 \}. \end{aligned}$$

La probabilité que la mesure C fournisse le résultat γ , n'est autre que la norme au carré du vecteur, qui dans l'expression ci-dessus figure en facteur de γ ; soit :

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\gamma) &= \left| \Sigma \{ (\text{op}_\gamma \circ \text{op}_\beta(\psi)) \otimes \beta \mid \beta \in B_0 \} \right|^2 \\ &= \Sigma \{ |\text{op}_\gamma \circ \text{op}_\beta(\psi)|^2 \mid \beta \in B_0 \}. \end{aligned}$$

Cette probabilité peut encore s'écrire comme l'espérance mathématique de la norme au carré d'une somme de vecteurs de EA, affecté chacun d'un facteur de phase φ distribué aléatoirement ; soit :

$$\text{Prob}(\gamma) = \text{Esp} \left| \text{op}_\gamma \Sigma \{ \exp(i\varphi\beta) \text{op}_\beta(\psi) \mid \beta \in B_0 \} \right|^2.$$

On dit communément que la première mesure a apporté une "perturbation de phase" à chacun des termes $\text{op}_\beta(\psi)$ (lesquels, dans le cas où la mesure B est parfaite, ne sont autre que les composantes de ψ définies par des projecteurs pr_β).

Il semble qu'il y ait là non un phénomène physique, mais un artifice mathématique, conçu pour qu'une somme de normes (au carré) devienne la norme (au carré) d'une somme de vecteurs. En fait la dépolarisation résulte réellement de ce que l'on considère le système composé AB, dont les vecteurs d'états, $\text{op}_\gamma \circ \text{op}_\beta(\psi) \otimes \beta$ (afférents aux différents β) sont orthogonaux entre eux, alors que les vecteurs d'état $\text{op}_\gamma \circ \text{op}_\beta(\psi)$, (du système A), ne le sont pas.

Si l'on part d'un état initial de A décrit par une matrice de densité w_A , on a les transformations successives :

$$\begin{aligned} w_A \times (\beta_0 \otimes {}^C\beta_0) \otimes (\gamma_0 \otimes {}^C\gamma_0) &\rightarrow \\ \dots \Sigma \{ (\text{op}_\beta' \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_\beta) \otimes (\beta' \otimes {}^C\beta) \mid \beta', \beta \in B_0 \} \times (\gamma_0 \otimes {}^C\gamma_0) &\mapsto \\ \dots \Sigma \{ (\text{op}_\gamma \circ \text{op}_\beta' \circ w_A \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_\beta \circ {}^{\text{ct}}\text{op}_\gamma) \otimes (\beta' \otimes {}^C\beta) \otimes (\gamma \otimes {}^C\gamma) \mid \beta', \beta \in B_0 ; \gamma, \gamma' \in C_0 \}. \end{aligned}$$

Sur cette expression, la probabilité $\text{Prob}(\gamma)$ de l'issue γ , se calcule comme la trace du coefficient de $(\gamma \otimes \gamma^C)$; soit :

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\gamma) &= \text{trace}(\Sigma\{(\text{op}\gamma \circ \text{op}\beta \circ w_A \circ \text{op}\beta \circ \text{op}\gamma) \times (B' \times^c B) | \beta, \beta' \in B_O\}) \\ &= \Sigma\{\text{trace}(\text{op}\gamma \circ \text{op}\beta \circ w_A \circ \text{op}\beta \circ \text{op}\gamma) | \beta \in B_O\} \\ &= \Sigma\{\text{trace}(\text{op}\beta \circ \text{op}\gamma \circ \text{op}\gamma \circ \text{op}\beta) \circ w_A | \beta \in B_O\} ; \end{aligned}$$

(compte tenu de ce que la trace d'un produit n'est pas changée par permutation circulaire des facteurs ; et $\text{trace}(U \otimes V) = \text{trace}(U) \times \text{trace}(V)$).

Ceci permet de définir $\text{Prob}(\gamma)$ comme un opérateur hermitique positif sur EA :

$$\text{Prob}(\gamma) = \Sigma\{\text{op}\beta \circ \text{op}\gamma \circ \text{op}\gamma \circ \text{op}\beta | \beta \in B_O\} ;$$

dans le cas particulier où $(\text{op}\gamma \circ \text{op}\gamma)$ commute avec tous les $\text{op}\beta$ on peut écrire (compte tenu de $\Sigma\{\text{op}\beta \circ \text{op}\beta = \delta\}$) :

$$\text{Prob}(\gamma) = \Sigma\{\text{op}\beta \circ \text{op}\beta \circ \text{op}\gamma \circ \text{op}\gamma | \beta \in B_O\} = \text{op}\gamma \circ \text{op}\gamma ;$$

le résultat est alors le même que si la mesure B n'avait pas été effectuée (cf § 4.3.1).

On doit maintenant considérer sur des systèmes plus complexes la dépolarisation de la matrice de densité, objet de la thèse 4. Il est particulièrement utile de discuter de la théorie quantique des mesures photographiques des trajectoires des particules dans les chambres de détection. Mais parce que cette théorie montre bien entre l'objet et l'observateur ce que W. Heisenberg appelle une frontière mobile, nous l'exposerons avec la thèse 5, consacrée à la notion de limite ; thèse eulement énoncée ci-dessous.

Thèse 5 : L'état d'un système quantique ne peut être décrit par une fonction d'ordre, ni par une matrice de densité ; mais par une limite projective des matrices de densité.

Bibliographie : elle est la même que celle donnée avec le 1-er article [INT. STAT. QUANT.] in CAD Vol XI n° 1 p. 109.