

J. P. BENZÉCRI

## **Sur le calcul continu d'un indice global des prix ou des consommations**

*Les cahiers de l'analyse des données*, tome 8, n° 1 (1983),  
p. 89-100

[http://www.numdam.org/item?id=CAD\\_1983\\_\\_8\\_1\\_89\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CAD_1983__8_1_89_0)

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LE CALCUL CONTINU D'UN INDICE GLOBAL DES PRIX OU DES CONSOMMATIONS

### [CALCUL INDICE PRIX]

par J. P. Benzécri (1)

Communément on tente en économie d'exprimer par des indices globaux des phénomènes multidimensionnels tels que la variation temporelle des prix des biens et services ; et de leur consommation par les divers types d'individus ou de ménages. Nous considérons au § 1 les difficultés mathématiques du calcul d'un indice ; au § 2 nous montrons sur des cas modèles réalistes la signification pour l'économie de l'instabilité des formules mathématiques ; au § 3 nous rappelons que chaque type de consommateurs ressent différemment les variations de prix : ce qui requerrait de calculer des indices propres à chaque type.

1 Les formules de calcul d'indice : Partant de deux formules classiques, nous donnons la formule intégrale du calcul de proche en proche d'un indice continu des prix (§ 1.1) ; formule qui donne aussi un indice des consommations (§ 1.2) ; en fait le calcul d'un indice continu comprend les divers calculs usuels d'indices, moyennant des hypothèses sur les variations intermédiaires des prix et quantités (§ 1.3) ; mais il n'est pas possible de faire des hypothèses dont le résultat dépende de façon stable (§ 1.4).

#### 1.1 Comparaison entre deux extrêmes et calcul de proche en proche :

Pour calculer un indice global des prix, on doit considérer à la fois les prix des produits individuels et leur consommation : en effet l'indice global ne peut résulter que d'une sorte de moyenne entre les variations de prix qu'ont connues les différents produits ; et les coefficients de cette moyenne (qu'elle soit arithmétique, géométrique ou autre) sont à chercher dans les consommations. Soit par exemple  $I$  l'ensemble des produits distingués dans la nomenclature utilisée ; notons  $p_i(t)$  le prix au temps  $t$  de l'unité du produit  $i$  ; (cette unité pourra être l'individu pour une voiture ; la tonne pour une matière telle que le blé ; ou résulter elle-même d'une construction complexe si le produit  $i$  est en fait un agrégat tel que "les livres"), et notons  $q_i(t)$ , le taux au temps  $t$  de la consommation du produit  $i$  par unité de temps ; (cette consommation étant mesurée dans la même unité que celle par laquelle on définit  $p_i$ ) ; alors l'indice des prix au temps courant  $t_c$ , par rapport au temps de base  $t_b$  est communément défini par l'une des deux formules suivantes :

Laspeyres (1871) :

$$IL(t_c/t_b) = \sum \{q_i(t_b)p_i(t_c) \mid i \in I\} / \sum \{q_i(t_b)p_i(t_b) \mid i \in I\} ;$$

Paasch (1874) :

$$IP(t_c/t_b) = \sum \{q_i(t_c)p_i(t_c) \mid i \in I\} / \sum \{q_i(t_c)p_i(t_b) \mid i \in I\} .$$

(1) Professeur de statistique. Université Pierre et Marie Curie.

En bref Laspeyres prend pour coefficients les consommations au temps de base  $t_b$ , et Paasch utilise les consommations au temps courant  $t_c$  ; ce qui du point de vue statistique requiert une opération supplémentaire : la détermination suivie de ces coefficients.

Un familier du calcul différentiel, ne manquera pas de remarquer que la différence entre temps de base et temps courant disparaît quand l'intervalle  $(t_b, t_c)$  devient infiniment court : ce qui suggère la formule différentielle suivante :

$$dI/I = \sum_i \{q_i(t) dp_i(t)\} / \sum_i \{q_i(t) p_i(t)\} ;$$

ou sous forme intégrale :

$$\text{Log} I(t_c/t_b) = \int_{t_b}^{t_c} (\sum_i \{q_i(t) p_i'(t)\} / \sum_i \{q_i(t) p_i(t)\}) dt ;$$

dans cette formule  $p_i'(t)$  désigne la dérivée au temps  $t$  du prix unitaire du produit  $i$  (par rapport au temps) ; et on a adopté la forme logarithmique afin que l'indice obtenu coïncide avec ceux de Laspeyres et de Paasch dans le cas où tous les taux de consommation  $q_i$  sont constants au cours du temps.

Evidemment des grandeurs économiques telles que  $q_i(t)$  et  $p_i(t)$  ne sont pas connues comme fonctions continues du temps ; et encore moins comme des fonctions dérivables : mais d'une part, comme on le verra dans la suite, la formule intégrale suggère une critique mathématique de l'instabilité des indices ; d'autre part elle peut être approchée par un calcul de proche en proche, qui, lui, est parfaitement réalisable. Supposons par exemple que les grandeurs économiques soient déterminées annuellement ; et soit  $t_c = t_b + n$  ; l'indice  $I(t_c/t_b)$  se calculera comme un produit de  $n$  facteurs :

$$I(t_c/t_b) = \prod \{I(t+1/t) \mid t = t_b, t_b+1, \dots, t_b+n-1\} ;$$

ici dans les facteurs  $I(t+1/t)$ , il importe peu de choisir la formule de Laspeyres ou celle de Paasch, dans la mesure où d'une année à l'autre le profil des consommations varie peu (il est d'ailleurs naturel de prendre le profil moyen de consommation au cours de l'année  $(t, t+1)$  : seule grandeur vraiment accessible à l'observation).

*Remarque* : Dans la formule intégrale, la rapidité avec laquelle se modifient les quantités et les prix ne joue par elle-même aucun rôle ; en ce sens que seule compte la suite des états par lesquels passe le système des  $(p_i, q_i)$  : on le voit sur l'expression donnée ci-dessus de  $dI/I$ , en fonction des différentielles  $dp_i$ . Ainsi soit  $\theta$  une fonction croissante quelconque réalisant une correspondance biunivoque entre deux segments  $(t_b, t_c)$  et  $(\theta_b, \theta_c)$  de la droite et soit  $\theta^{-1}$  la fonction inverse de  $\theta$ .

$$\theta_b = \theta(t_b) \quad ; \quad \theta_c = \theta(t_c) \quad ;$$

$$t_b = \theta^{-1}(\theta_b) \quad ; \quad t_c = \theta^{-1}(\theta_c) \quad ;$$

$$(\theta_b, \theta_c) \xleftrightarrow[\theta]{\theta^{-1}} (t_b, t_c) \quad ;$$

notons encore :

$$\hat{p}_i = p_i \circ \theta^{-1} \quad ; \quad \text{i.e.} \quad : \quad \forall t \in (t_b, t_c) : \hat{p}_i(\theta(t)) = p_i(t) \quad ;$$

$$\hat{q}_i = q_i \circ \theta^{-1}$$

alors l'indice des prix calculé entre les temps  $\theta_b$  et  $\theta_c$ , pour le

système des quantités  $q_i$  et des prix  $p_i$  est le même que l'indice calculé entre les temps  $t_b$  et  $t_c$  pour le système des quantités  $q_i$  et des prix  $p_i$ .

1.2 Indice des consommations et indices des prix : Pour exprimer, par un seul nombre une consommation globale portant sur des produits variés, il faut mesurer dans une même unité toutes les consommations partielles. Le plus simple est assurément de prendre pour commune mesure le prix ; mais les prix relatifs des biens et services changent : on rencontre donc le même obstacle qu'il s'agisse de calculer un indice global pour les prix ou les consommations. Plus précisément nous verrons en partant de la formule intégrale du § 1.1, qu'une fois défini l'un des indices, la définition de l'autre s'impose.

A un instant donné  $t$ , la variation de la consommation peut raisonnablement être estimée en prenant pour coefficients d'équivalence des produits entre eux, les prix instantanés  $p_i(t)$  : autrement dit on assimile la variation relative  $dIC/IC$  de l'indice global de consommation à la variation relative d'une dépense globale fictive calculée à prix constants ; il vient :

$$dIC/IC = \frac{\sum_1 \{dq_i(t)p_i(t)\}}{\sum_1 \{q_i(t)p_i(t)\}} ;$$

en se reportant à la formule du § 1.1, on trouve pour somme des variations relatives des deux, des prix et des consommations, la variation relative de la dépense réelle globale :

$$Dép(t) = \sum_1 \{q_i(t)p_i(t)\}$$

$$(dI/I) + (dIC/IC) = dDép/Dép ;$$

résultat qui est parfaitement logique puisque l'augmentation des dépenses résulte à la fois de l'augmentation des prix et de celle des consommations. Par intégration entre un temps de base  $t_b$  et un temps courant  $t_c$ , il vient :

$$I(t_c/t_b) \times IC(t_c/t_b) = Dép(t_c)/Dép(t_b).$$

Cette formule étant démontrée dans le cas du calcul des indices de proche en proche, on peut l'utiliser pour associer de manière logique à toute formule d'indice des prix une formule d'indices des consommations. Voici ce qu'est de ce point de vue l'indice de Laspeyres des consommations (ICL) :

$$\begin{aligned} ICL(t_c/t_b) &= Dép(t_c)/Dép(t_b) / (I(t_c/t_b)) \\ &= \frac{\sum_1 \{q_i(t_c)p_i(t_c)\}}{\sum_1 \{q_i(t_b)p_i(t_b)\}} ; \end{aligned}$$

autrement dit, si dans le calcul de l'indice des prix (I) on utilise les consommations au temps de base  $t_b$ , il faut dans l'indice des consommations (IC) se fonder sur les prix au temps courant  $t_c$ .

Corrélativement pour l'indice de Paasch des consommations, on se fondera sur les prix au temps courant  $t_c$  :

$$ICP(t_c/t_b) = \frac{\sum_1 \{q_i(t_c)p_i(t_b)\}}{\sum_1 \{q_i(t_b)p_i(t_b)\}}.$$

Comme on le verra au § 1.3 ces formules d'indices résultent d'ailleurs de l'application du calcul intégral à diverses hypothèses sur l'évolution intermédiaire des prix et quantités.

Dans la suite du § 1 nous parlerons seulement de l'indice des prix ; étant entendu que tout ce qu'on en dit s'applique à l'indice des consommations ; nous ne calculerons explicitement celui-ci qu'au § 2, afin que l'interprétation économique des modèles proposés soit complète.

1.3 Diversité des formules et interpolation des séries : Outre les formules de Laspeyres et de Paasch qui s'interprètent clairement comme des rapports entre coûts globaux calculés suivant divers profils de consommation, les économistes ont eu recours à divers calculs de moyenne moins directement interprétables (cf. e.g. l'intéressante critique qu'en donne Bojarskij et coll., in *Ekonomičeskaja Statistika*, Université de Moscou, 1980 ; chap. XXII). On se demandera si ces formules (ou d'autres meilleures!) peuvent s'obtenir en interpolant, d'une manière ou d'une autre les valeurs des consommations et des prix entre les temps extrêmes  $t_b$  et  $t_c$  et appliquant aux fonctions du temps  $q_i(t)$ ,  $p_i(t)$  ainsi obtenues, la formule intégrale du § 1.

Considérons d'abord deux modèles très simples, que nous désignerons d'après les noms des auteurs des formules auxquelles ils aboutissent :

Modèle de Laspeyres : l'intervalle  $(t_b, t_c)$  est divisé en deux intervalles consécutifs  $(t_b, t_m)$  et  $(t_m, t_c)$ . Au cours du premier intervalle, les consommations restent constantes ; et les prix varient (d'une façon d'ailleurs quelconque) de leur niveau de base (temps  $t_b$ ) au niveau courant ( $t_c$ ) ; i.e. :

$$\forall i \in I, \forall t \in (t_b, t_m) : q_i(t) = q_i(t_b) ;$$

$$\forall i \in I : p_i(t_m) = p_i(t_c).$$

Au cours du deuxième intervalle les prix sont constants, et la consommation rejoint d'une manière quelconque son niveau courant : i.e.

$$\forall i \in I, \forall t \in (t_m, t_c) : p_i(t) = p_i(t_c).$$

La formule intégrale donne de par le principe logarithmique même du calcul de proche en proche :

$$I(t_c/t_b) = I(t_c/t_m) I(t_m/t_b) ;$$

le facteur  $I(t_c/t_m)$  qui correspond au second intervalle où les prix sont constants, est évidemment égal à 1 ; le facteur  $I(t_m/t_b)$  correspondant au premier intervalle où les volumes sont constants n'est autre que  $I(t_c/t_b)$ , comme on le vérifie aisément.

Modèle de Paasch : il ne diffère du modèle de Laspeyres qu'en ce que les prix restent constants au cours du premier intervalle, et les consommations au cours du second.

On peut noter qu'au lieu des conditions de "constance des prix" ou "constance des consommations" au cours d'un intervalle de temps, on peut considérer les conditions moins irréalistes de "constance des profils" : par exemple par constance du profil des prix on entend :

$$\forall i, j \in I, \forall t, t' \in T : p_i(t)/p_i(t') = p_j(t)/p_j(t') ;$$

alors l'indice des prix peut être calculé d'après n'importe quel produit indépendamment de toute pondération par des consommations. De même si le profil des consommations est constant, il importe peu de prendre les coefficients en un temps ou en un autre.

Mais si l'on fait varier simultanément les profils des prix et des consommations, (comme c'est le cas dans la réalité) le chemin choisi peut influencer grandement sur l'indice obtenu (cf. *infra*). Du point de vue du calculateur, une interpolation sera d'autant plus satisfaisante qu'elle permet d'intégrer facilement  $\text{Log} I(t_c, t_b)$ . Or si par exemple on suppose que les  $p_i(t)$ ,  $q_i(t)$  sont des fonctions linéaires du temps, le dénominateur de la fraction à intégrer est du deuxième degré en  $t$ , ce

qui conduit à intégrer par des changements de variables dont l'interprétation économique est obscure ; si on tente une interpolation exponentielle, (i.e.

$$p_i(t) = p_i(t_b) \exp((t-t_b)/(t_c-t_b) \cdot \log(p_i(t_c)/p_i(t_b))),$$

et de même pour les  $q_i(t)$ , on a au dénominateur une somme d'exponentielles dont les exposants diffèrent, excepté si :

$$\forall i, j \in I : p_i(t_c)q_j(t_c)/(p_i(t_b)q_j(t_b)) = p_j(t_c)q_j(t_c)/(p_j(t_b)q_j(t_b)),$$

c'est-à-dire si les *profils de dépense* sont constants ; seul cas où l'intégration est aisée aboutissant à une moyenne géométrique pondérée.

De façon précise, supposons, dans le seul but d'alléger les notations, que  $t_b = 0$ ,  $t_c = 1$  ; et notons, selon l'hypothèse faite de constance du profil des dépenses :

$$p_i(t) = p_i \exp(\pi_i t) ; \quad q_i(t) = q_i \exp((\alpha - \pi_i)t) ;$$

où  $\pi_i$  est le coefficient de croissance exponentielle propre au produit  $i$  ; et  $\alpha$  est le coefficient de croissance exponentielle commun à l'ensemble des dépenses. Alors dans l'intégrand du numérateur et du dénominateur de  $\log I$ , tous les termes contiennent la même exponentielle  $\exp(\alpha t)$ , qui s'élimine donc, et il reste :

$$\log I(t_c/t_b) = \sum \{ p_i q_i \pi_i \mid i \in I \} / \sum \{ p_i q_i \mid i \in I \} ;$$

en d'autres termes, le coefficient de croissance exponentielle générale des prix, est calculé comme la moyenne des coefficients  $\pi_i$  propres aux différents produits ; les coefficients étant ceux  $p_i q_i$  du profil des dépenses. Pour l'indice et non pour le logarithme, on a la formule de moyenne géométrique pondérée suivante :

$$I_b(t_c/t_b) = \prod \{ (p_i(t_c)/p_i(t_b))^{d_i} \mid i \in I \}$$

où on a noté :  $d_i = p_i q_i / \sum \{ p_j q_j \mid j \in I \}$ .

Cette formule nous paraît imposée par le calcul de proche en proche dans le cas où le profil des dépenses est constant ; autrement, on peut certes la généraliser soit dans les sens de Laspeyres, soit dans celui de Paasch ; en calculant les coefficients du profil des dépenses au temps  $t_b$  ou au temps  $t_c$ . Selon Bojarski et coll (*op. laud.*) cette formule (qu'ils écrivent par simplification sans coefficients) "est dénuée de tout sens économique" (не имеет никакою экономическою смысла). Nous venons de voir qu'il n'en est rien, même si (cf. M. Khraibani...), la constance du profil des dépenses n'est pas plus vérifiée que celle des profils des prix ou des consommations.

1.4 Calcul des variations et instabilité de l'indice : Des interpolations différentes conduisent à des indices différents : la meilleure interprétation pourrait être choisie suivant le critère qu'au voisinage de celle-ci le calcul intégral de l'indice donne un résultat stationnaire ; au sens suivant : si on donne aux fonctions  $p_i(t)$ ,  $q_i(t)$  des variations du premier ordre  $\Delta p_i(t)$ ,  $\Delta q_i(t)$  (nulles pour  $t = t_b$  et  $t = t_c$ ), la variation de  $I(t_c/t_b)$  sera un infiniment petit du deuxième ordre ; l'interpolation choisie suivant ce critère pouvant être telle qu'elle donne à  $I(t_c/t_b)$  la plus faible ou la plus forte valeur possible... C'est là le problème classique du calcul des variations. Nous rappellerons les équations classiques d'Euler et Lagrange pour les appliquer au calcul de l'indice.

Soit  $F(z, z', t)$  une fonction dépendant de  $t$  par l'intermédiaire

de la fonction dérivable  $z(t)$  ; l'intégrale  $\int F(z, z', t) dt$  est stationnaire si on a :

$$(\partial F / \partial z) - d_t (\partial F / \partial z') = 0 ;$$

où on a noté  $d_t$  la dérivée par rapport au temps de  $\partial F / \partial z'$ , qui dépend du temps par l'intermédiaire de  $z(t)$  et  $z'(t)$ , ainsi que par la présence explicite de  $t$ . Si interviennent dans  $F$  un ensemble de fonctions dérivables  $z_i(t)$  on a pour chaque indice  $i$  une équation :

$$(\partial F / \partial z_i) - d_t (\partial F / \partial z_i') = 0.$$

Dans le cas présent on a :

$$F = \Sigma \{ q_i(t) p_i'(t) \mid i \in I \} / D ; \text{ où}$$

$$D = \Sigma \{ q_i(t) p_i(t) \mid i \in I \} ;$$

ici les fonctions  $z$  sont donc d'une part les  $q_i(t)$ , d'autre part les  $p_i(t)$  ; mais seules interviennent les dérivées  $p_i'(t)$  des  $p_i(t)$ . D'où le système :

$$\partial F / \partial q_i = 0 ;$$

$$(\partial F / \partial p_i) - d_t (\partial F / \partial p_i') = 0.$$

Il vient par calcul des dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \partial F / \partial q_i &= (p_i'(t) / D) - F p_i(t) / D \\ &= (p_i'(t) - F(t) p_i(t)) / D(t) ; \end{aligned}$$

$$\partial F / \partial p_i = -F q_i(t) / D ;$$

$$\partial F / \partial p_i' = q_i(t) / D ;$$

$$d_t (\partial F / \partial p_i') = (q_i'(t) / D) - (q_i(t) D' / D^2) ;$$

(où on a noté :  $d_t D = D'$ ). D'où finalement pour les conditions de stationarité le système suivant :

$$\forall i \in I : p_i'(t) / p_i(t) = F(t) ;$$

$$q_i'(t) / q_i(t) = (D'(t) / D(t)) - F(t) = G(t) ;$$

en d'autres termes tous les  $p_i(t)$  ont même dérivée logarithmique ; et également, tous les  $q_i(t)$  ont même dérivée logarithmique ; ou encore : à la fois le profil des prix et le profil des consommations sont constants ; on le vérifie par intégration :

$$p_i(t) = p_i(0) \exp(\int_0^t F(t) dt) ;$$

$$q_i(t) = q_i(0) \exp(\int_0^t G(t) dt).$$

De ce fait il est en général impossible de relier l'état de base ( $t_b$ ) à l'état courant ( $t_c$ ) par une interpolation des  $p_i(t)$ ,  $q_i(t)$ , telle que l'indice soit stationnaire. Nous dirons que l'indice est *instable*. Du point de vue du calcul des variations, cette instabilité se manifeste, si on recherche une interpolation des  $p_i(t)$ ,  $q_i(t)$  telle que  $I$  soit maximum (ou minimum) : tel quel le problème est mal posé ; il faut d'abord imposer aux  $p_i(t)$ ,  $q_i(t)$  des conditions restrictives : par exemple de varier de façon monotone ; et alors l'extremum sera atteint non à l'intérieur du domaine fonctionnel ainsi défini ; mais sur le bord (par exemple avec une suite d'intervalles où varie un seul des  $p_i$  ou des  $q_i$  ; cf. exemples du § 1.3) ; la solution exacte du problème n'étant d'ailleurs pas simple.

## 2 Exemples d'instabilité de l'indice sur des cas modèles réalistes:

En imposant aux consommations et aux prix de croître puis décroître entre un état de base et un état courant identiques, on peut obtenir que l'indice des prix, calculé de proche en proche connaisse une variation de niveau absurde. Nous préférons proposer des cas modèles, qui sans produire les variations les plus amples qu'on puisse imaginer aient le mérite de montrer que l'instabilité de l'indice se manifeste dans des cas réels.

2.1 *Introduction d'un produit nouveau* : Nous supposons que l'ensemble I des produits comprend d'une part : un produit nouveau n qui initialement coûte très cher et n'a qu'une consommation restreinte, mais dont le prix décroît grandement en sorte que sa consommation augmente ; et d'autre part : un ensemble de produits dont les prix et consommations sont rigoureusement constants entre  $t_b$  et  $t_c$  ; et qui pour cette raison peuvent être considérés comme un produit unique qu'on désignera par r (initiale de reste). De façon précise on pose:

$$p_r' = 0 ; q_r' = 0 ; p_r q_r = 1 ;$$

$$p_n = t^{-1} ; q_n = x t^2 ; p_n q_n = x t ;$$

$$t_b = \epsilon ; t_c = 1 .$$

Commentons les modèles que définissent ces notations. Au temps courant  $t_c = 1$ , on a  $p_n q_n = x$  : le produit nouveau représente une dépense x relativement aux autres dépenses,  $p_r q_r = 1$ . Pour être réaliste on posera  $x = 1/100$  : ce qui peut être la part afférente à un produit nouveau. Le prix du produit nouveau est supposé infini au temps zéro, avec une consommation nulle, la limite de la dépense  $p_n q_n$  étant nulle également si  $t = 0$  : cette situation limite n'est pas absurde, mais il n'est pas réaliste d'imaginer qu'un produit de coût trop grand soit introduit sur le marché : c'est pourquoi le modèle n'est utilisé qu'à partir d'un temps  $\epsilon$  ; en posant  $\epsilon = 1/10$  on verra le prix du produit divisé par 10 au cours de la période étudiée ( $t_b, t_c$ ) : ce qui paraîtra réaliste si on considère la variation des prix des calculateurs électroniques (portatifs ou autres) au cours des 10 dernières années.

Il ne faut pas accorder d'importance au choix fait des fonctions  $p_n = 1/t$ ,  $q_n = x t^2$  : il fallait seulement avoir au départ une dépense nulle ( $t=0$ ) ou quasi nulle ( $t_b=\epsilon$ ). D'ailleurs il résulte de la remarque faite au § 1.1 que tout ce qu'on dira du présent modèle vaut aussi pour tous les modèles qui s'en déduisent par une transformation monotone de l'échelle des temps : de ce point de vue la caractéristique de notre modèle est la relation qui lie  $p_n$  et  $q_n$  soit :  $(p_n)^2 q_n = x$ . Inutile de dire qu'outre l'allure qualitative du modèle nous avons voulu assurer la simplicité du calcul de l'indice !

On applique la formule intégrale du § 1.1 ; il vient :

$$\begin{aligned} I(t_c/t_b) &= \exp\left(\int_{\epsilon}^1 -x dt/(1+xt)\right) \\ &= \exp(-\text{Log}(1+x) + \text{Log}(1+x\epsilon)) \\ &= (1+x\epsilon)/(1+x) ; \end{aligned}$$

c'est-à-dire avec les valeurs numériques suggérées ( $x = 1/100$  ;  $\epsilon = 1/10$ ), une diminution de l'indice des prix de 0,9%. Il est clair qu'il s'agit d'une diminution quelque peu fictive : l'essentiel de la consommation concerne le reste r dont le prix est constant ; l'introduction d'un produit nouveau peut éventuellement apporter aux consommateurs des délices nouvelles : elle n'est pas en elle-même l'équivalent d'une baisse



des prix ; d'ailleurs si le produit avait été introduit sur le marché à un prix proche de son prix courant (1) et non dix fois plus élevé ( $1/\epsilon = 10$ ), l'effet de baisse des prix aurait été réduit en proportion.

Calculons également l'indice des dépenses et celui des consommations (cf. § 1.2).

$$\text{Dép}(tc)/\text{Dép}(tb) = (1+x)/(1/x\epsilon) ;$$

$$\text{IC}(tc/tb) = ((1+x)/(1+x\epsilon))^2 \approx 1,018 ;$$

autrement dit de par l'effet (fictif selon nous) de baisse des prix, l'indice des consommations offre une augmentation de 1,8% double de ce que nous considérerions comme son augmentation réelle.

La formule de calcul de proche en proche nous paraît la plus appropriée à montrer l'effet de l'introduction d'un produit nouveau : qui se répercute sur les indices de prix et les indices de croissance économique sur une période de plusieurs années. Il est cependant instructif de calculer entre  $t_b$  et  $t_c$  les indices classiques de Laspeyres et de Paasch. Il vient :

Indice de Laspeyres :

$$\text{IL}(tc/tb) = \frac{q_r(t_b) p_r(tc) + q_n(t_b) p_n(tc)}{q_r(t_b) p_r(t_b) + q_n(t_b) p_n(t_b)} = \frac{1 + x\epsilon^2}{1 + x\epsilon}$$

$$\# 1 - x\epsilon(1 - \epsilon) \approx 1 - 0,9 \cdot 10^{-3} ;$$

l'indice de Laspeyres, calculé avec les consommations du temps de base minimise donc l'effet de l'introduction d'un produit nouveau.

Indice de Paasch :

$$\text{IP}(tc/tb) = \frac{q_r(tc) p_r(tc) + q_n(tc) p_n(tc)}{q_r(tc) p_r(t_b) + q_n(tc) p_n(t_b)} = \frac{1 + x}{1 + (x/\epsilon)}$$

$$\# 1 - x(1 - (1/\epsilon)) \approx 1 - 8 \cdot 10^{-2} ;$$

Cette fois l'effet est amplifié.

Au présent calcul on peut objecter que l'introduction d'un produit nouveau entraîne rarement la création d'un poste nouveau  $n$  dans la nomenclature : le produit nouveau sera plutôt incorporé tant bien que mal à un agrégat existant (tel que "électroménager", ou "électronique" etc.). Nous perfectionnerons donc le modèle pour répondre à cette objection.

2.2 Introduction d'un produit nouveau, le volume des dépenses restant constant : Le modèle étudié n'est qu'une variante de celui du § 2.1 : il ne suggère rien de plus ; mais il prépare le modèle de substitution d'un produit nouveau à un produit ancien, objet du § 2.3.

Les notations sont celles du § 2.1, avec deux produits  $r$  et  $n$  ; on pose :

$$p_r' = 0 ; p_r q_r = 1 - xt ;$$

$$p_n = t^{-1} ; q_n = xt^2 ; p_n q_n = xt ;$$

$$t_b = \epsilon ; t_c = 1.$$

En supposant une réduction dans la consommation de  $r$ , on rend constant  $\text{Dép}(t)$ , avec la valeur 1. Comme au § 2.1 on essaiera  $x = 0,01$  ;  $\epsilon = 0,1$ . Il vient :

$$I(tc/tb) = \exp\left(\int_{\epsilon}^1 -x dt\right) = \exp(-x(1 - \epsilon)) ;$$

la diminution fictive obtenue pour l'indice des prix est équivalente à celle du § 2.1. Comme Dép est constant, cette diminution s'accompagne d'une augmentation de signe contraire pour l'indice de consommation :

$$IC(tc/tb) = \exp(x(1 - \epsilon)) \approx 1,009 = 1 + 0,9\%.$$

Quant aux indices classiques on a :

Indice de Laspeyres :

$$IL(tc/tb) = (1 - x\epsilon + \epsilon^2) \approx 1 - 0,9 \cdot 10^{-3} ;$$

Indice de Paasch :

$$IP(tc/tb) = 1/(1 + x(\epsilon^{-1} - 1)) \approx 1 - 8 \cdot 10^{-2} ;$$

Ce sont les mêmes résultats qu'au § 2.1 ; dont il est inutile de répéter les commentaires.

2.3 Substitution d'un produit nouveau à un produit ancien : Nous considérons maintenant un modèle à trois produits :

n = nouveau ; a = ancien ; r = reste.

$$pr' = 0 ; qr' = 0 ; prqr = 1 - x ;$$

$$pn = t^{-1} ; qn = xt^2 ; pnqn = xt ;$$

$$pa = (1+t)^{-1} ; qa = x(1-t^2) ; paqa = x(1-t) ;$$

le produit n a les mêmes prix et consommation qu'au § 2.1 ; la consommation du produit ancien est fixée pour être complémentaire de celle du produit nouveau, en ce sens que  $(qa + qn)$  est constant et égal à  $x$  ; le prix pa est ensuite calculé de telle sorte que la dépense totale ne varie pas ; ce qui simplifie les calculs et donne sur la période étudiée une diminution du prix du produit ancien de 1 à 1/2 ; ce qui est naturel pour un produit en désuétude auquel se substitue un produit nouveau. Enfin, comme aux §§ 2.1 et 2.2 on pose :

$$tb = \epsilon ; tc = 1 ;$$

avec  $\epsilon = 1/10$ , pour éviter que le produit nouveau ait un prix de base infini. Il vient :

$$I(tc/tb) = \exp\int_{\epsilon}^1 -x \left( \frac{2/(1+t)}{(1+x)} \right) dt \\ = \left( \frac{1+tb}{1+tc} \right)^{2x/(1+x)} ;$$

$$\text{soit : } (1+\epsilon)/2)^{2/101} = (11/20)^{2/101} \approx 1 - 1,2\%$$

Corrélativement, la dépense étant constante dans ce modèle on a pour indice des consommations :

$$IC(tc/tb) = 1/I(tc/tb) \approx 1 + 1,2\%$$

Une question se pose ici : s'agit-il de variations réelles ou de variations fictives ? Assurément mettre une machine à laver au prix d'une lessiveuse, c'est réaliser une baisse réelle des prix ; disposer d'une machine à laver à la place d'une lessiveuse, c'est disposer d'un bien nouveau d'une valeur supérieure à celle de l'ancien. En revanche substituer un jouet électronique à un autre jouet, (électronique ou non) ou remplacer un objet démodé par un objet à la mode, ce peut n'être qu'un changement futile. Ainsi pour l'information et les

loisirs, on est passé du système (journal, spectacle), au système (radio, cinéma); puis (télévision en noir), puis (télévision en couleur); chacun appréciera à sa guise la valeur de tels changements. Un cas plus divertissant est celui du pain : à la boule de pain bis, base des repas de jadis, a succédé la baguette de pain de fantaisie ; auprès de laquelle le pain de campagne fait aujourd'hui figure d'un produit de luxe: de progrès en progrès on est revenu au point de départ, par des substitutions dont le modèle objet du présent § nous paraît offrir le schéma.

Pour compléter la description du modèle, voici les indices classiques :

$$IL(tc/tb) = 1 - (x(1-\epsilon^2))/2 \approx 1 - 0,5 \cdot 10^{-2} ;$$

$$IP(tc/tb) = (1 + x(\epsilon^{-1}-1))^{-1} \approx 1 - 8 \cdot 10^{-2} ;$$

Comme dans le cas des modèles précédents (§§ 2.1 et 2.2), relativement au calcul de l'indice des prix de proche en proche, l'indice de Laspeyres diminue l'effet et celui de Paasch l'amplifie.

#### 2.4 Introduction et substitution de produit au sein d'un agrégat :

Comme on l'a dit ci-dessus (§ 2.1 *in fine*) l'introduction d'un produit nouveau n'entraîne pas ordinairement la création d'un poste dans la nomenclature d'après laquelle est calculé l'indice : le produit nouveau sera plutôt incorporé à un agrégat existant. Mais nous ne croyons pas que cette pratique ôte tout réalisme aux modèles présentés aux §§ 2.1 à 2.3. Désignons par  $e$  "l'agrégat existant" au sein duquel se réalise une transformation de la consommation : introduction de  $n$ , ou substitution de  $n$  à  $a$  ; on rencontre pour définir le prix moyen  $pa(t)$  relatif à cet agrégat le même problème rencontré ci-dessus pour définir un indice global des prix : de quelque manière qu'on s'y prenne, il nous paraît vraisemblable qu'une transformation de la consommation telle que celles schématisées aux §§ 2.1 à 2.3, entraîne une diminution de  $pa(t)$  ; diminution dont il reste à décider si elle est réelle ou fictive. Au niveau d'un agrégat l'effet sera même de plus grande amplitude que pour la consommation globale ; car en bref si le changement concerne une fraction  $x$  de l'ordre du centième de la consommation globale, il pourra représenter le dixième, voire la moitié de l'agrégat  $a$ .

Du point de vue économique, il nous paraît certain que l'introduction et la substitution de produits nouveaux ou leur généralisation dans les télécommunications ou l'électronique domestique notamment se manifeste dans l'indice de la consommation des ménages (et aussi de la production nationale...) par des taux de croissance en partie fictifs, créés par une surestimation du nouveau, relativement à l'ancien ; due à ce que le nouveau est d'abord introduit à un prix très supérieur à sa valeur réelle ; valeur qui est assimilée à ce prix, et le demeure dans la suite, alors que "le nouveau" est devenu "l'ordinaire".

### 3 Indices des prix et indices de consommation pour les divers types de consommateurs :

En principe la définition de tels indices est claire : notons  $c$  une catégorie de consommateurs ; et  $qi(t;c)$  le taux au temps  $t$  de la consommation du produit  $i$  par unité de temps pour un ménage de la catégorie  $c$  ; alors on aura pour l'indice des prix  $I(t;c)$  et l'indice de consommation  $IC(t;c)$  propre à cette catégorie les formules différentielles :

$$dI(t;c)/I(t;c) = \frac{\sum_i \{qi(t;c) dpi(t)\}}{\sum_i \{qi(t;c) pi(t)\}} ;$$

$$dIC(t;c)/IC(t;c) = \frac{\sum_i \{dqi(t;c) pi(t)\}}{\sum_i \{qi(t;c) pi(t)\}} .$$

On pourrait de même récrire les formules de Laspeyres et de Paasch en distinguant la catégorie. La difficulté est de définir les notions intervenant dans la formule ; et de mesurer les grandeurs !

Ce que nous dirons ici repose essentiellement sur l'expérience concrète des budgets familiaux qu'on peut acquérir en étudiant l'article [BUDG. FAM.] de Messieurs P. Clapier et J.L. Madre, publié par les C.A.D. (Vol IV ; n° 4 pp 443-463 ; 1979) et notamment les §§ 3 et 4.

L'information de base ne peut provenir que d'enquêtes de consommations individuelles, conduites méticuleusement dans les familles. Il ne s'agit pas cependant de calculer un indice pour une famille particulière, mais pour une "catégorie" ; laquelle doit être définie non seulement par la C.S.P. (catégorie socioprofessionnelle) du chef de ménage, mais aussi par la structure du groupe familial (nombre d'adultes et d'enfants etc. : sur la définition de cette variable cf. S. Mérimanis [LOGEMENTS] C.A.D. ; VOL VII n° 3 pp 311-340) ; sans négliger la zone de résidence. Ainsi les  $qi(t;c)$  seront calculés comme des moyennes brutes sur les observations individuelles ; puis corrigées des fluctuations temporelles et des variations saisonnières...

La nomenclature des produits devra être assez fine pour que le prix moyen  $pi(t)$  de l'agrégat  $i$ , calculé sur l'ensemble des consommateurs, ne diffère pas excessivement dans leur variation temporelle des prix moyens de ce même agrégat calculés en donnant aux produits individuels compris dans  $i$  non des pondérations générales mais les pondérations propres à telle ou telle catégorie  $c$ . Par exemple l'agrégat "boissons alcooliques" correspondrait selon les catégories à une consommation centrée sur les vins fins ou sur le vin ordinaire ; produits dont les prix varient indépendamment : il serait donc erroné d'introduire un même  $dpi(t)$  dans le calcul du  $dI$  des diverses catégories.

L'autoconsommation (c'est-à-dire la consommation des produits d'un jardin ou d'une exploitation agricole familiale) semble importante pour certaines catégories : non seulement d'agriculteurs, mais de provinciaux (cf. [BUDG. FAM.]). Dans la nomenclature, l'autoconsommation est représentée par quelques agrégats (légumes frais, pommes de terre, lapins et gibiers etc.). On attribue par principe à ces postes un coût nul ; une valeur estimée d'après les postes correspondants du marché ; et une quantité calculée d'après cette même correspondance... Cette distinction entre coût et valeur, sort du modèle du § 1, où l'on postule une économie entièrement monétarisée. Dans le calcul des indices, nous suggérons donc de procéder comme suit :

Soit  $ia$  et  $im$  deux agrégats identiques considérés l'un en autoconsommation, l'autre sur le marché (en fait la nomenclature usuelle, cf. [BUDG. FAM.], diffère entre l'autoconsommation et le marché...). On attribue à ces agrégats à la fois une valeur instantanée  $v$  et un coût ou prix  $p$  suivant la convention :

$$via(t) = vim(t) = pim(t) ; pia(t) = 0. (*)$$

L'indice de consommation se calcule tout naturellement en ne tenant compte que des valeurs, suivant la formule :

$$dIC((t;c)/IC(t;c) = \sum_i \{dqi(t;c)vi(t)\} / \sum_i \{qi(t;c)vi(t)\}.$$

Mais sur l'indice des prix, l'incidence de l'autoconsommation est moins claire : il faut avant tout noter que pour un consommateur qui ne recourt pas du tout au marché, la notion même d'indice des prix n'a plus de sens ; tandis que pour un consommateur qui répond à une hausse des prix en augmentant l'autoconsommation l'effet de cette hausse est

(\*) Eventuellement, on posera  $pia \neq 0$ , si on reconnaît un coût à la production rentrant dans l'autoconsommation.

amorti. Il nous paraît logique de revenir à la formule du § 1.2, liant prix, consommation et dépense :

$$(\dot{d}I/I) + (\dot{d}IC/IC) = d\text{Dép}/\text{Dép}.$$

Ici le calcul de Dép et donc de  $d\text{Dép}/\text{Dép}$  s'impose : il ne fait intervenir que les prix et non les valeurs ; ne concerne que le marché, à l'exclusion de l'autoconsommation :

$$\text{Dép} = \sum_i \{p_i(t) q_i(t;c)\}.$$

On aura alors  $(\dot{d}I/I)$  par différence. Il importe de noter que la formule est assez complexe : car d'une part les deux dérivées  $(\dot{d}IC/IC)$  et  $(d\text{Dép}/\text{Dép})$  n'ont pas le même dénominateur (la première est une valeur, la deuxième un prix) ; d'autre part les  $dq$  interviennent avec les  $dp$  dans le calcul de l'indice des prix ; parce que comme on l'a dit une augmentation de l'autoconsommation peut absorber la hausse des prix. (Et réciproquement un abandon de l'autoconsommation est ressenti comme une hausse) ; enfin nous rappelons que  $d\text{Dép}/\text{Dép}$  est indéterminé si Dép est nul !

Assurément nous prétendons ici faire des calculs pour lesquels on trouvera difficilement des données satisfaisantes. Mais les problèmes en jeu ont un intérêt qui sort du cadre des spéculations mathématiques : la variation de l'autoconsommation est un phénomène fondamental de l'économie du tiers-monde ; elle joue un rôle partout en période de crise ; et les inégalités entre les indices économiques calculés pour les diverses catégories de ménages ont une importance sociale essentielle. Même s'il est impossible d'avoir des mesures exactes, la réflexion mathématique doit au moins permettre de rejeter les mesures absurdes, et d'orienter l'observation et les décisions économiques.