LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

J. P. BENZÉCRI

Définition et mesure de l'élasticité des consommations

Les cahiers de l'analyse des données, tome 8, n° 1 (1983), p. 73-88

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1983__8_1_73_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. VIII - 1983 - *n°* 1 - *p.* 73-88

DÉFINITION ET MESURE DE L'ÉLASTICITÉ DES CONSOMMATIONS

[ÉLASTICITÉ CONSOMMATION]

par J. P. Benzécri (1)

Partant des données disponibles, nous rappelons les définitions usuelles de l'élasticité. Ces données forment un tout dont il faut se former une vue globale pour fonder les définitions. Nous cherchons cette vue globale en spéculant sur un modèle (§ 2) avant de retourner aux données (§ 3).

1 Origine de l'étude

1.1 *Les données disponibles* : Depuis 1974 sont produits régulièrement en France des comptes trimestriels, couvrant une part importante de l'activité économique. Grâce à la trimestrialisation des comptes du passé, on dispose aujourd'hui de séries homogènes remontant jusqu'au 1-er trimestre de 1970. La thèse de M. Khraibani (cf. [*COMPTES TRIMESTRIELS* 70-81]) analyse les données afférentes à 46 trimestres (de 70-1 à 81-2). Sans reprendre le détail de la conception de ces comptes présentée dans la thèse, répétons que ceux-ci utilisent deux nomenclatures : l'une, fine , à 38 postes, et l'autre agrégée à 11 postes : la différence étant par exemple que là où la nomenclature agrégée ne compte que deux postes "Produits de l'agriculture" et "Produits de l'industrie alimentaire", la nomenclature fine en distingue 5 : "Alimentation générale ; viande ; poisson ; tabac ; pain". Les données publiées qui nous intéressent consistent, pour chaque poste et chaque trimestre, en deux nombres : *la consommation des ménages en volume* et la *consommation des ménages en prix*.

L'élaboration de ces nombres est complexe ; et, partant, leur interprétation requiert la prudence. Mais même si nous devons dans la suite distinguer entre une réalité fluide, et l'image schématique qui nous en est seule accessible au travers des statistiques publiées, nous dirons ici, en bref, qu'on a pour chaque poste i de chacune des nomenclatures I, et chaque trimestre t de la période T étudiée d'une part une quantité consommée qi(t) et d'autre part un prix unitaire pi(t). Or ces grandeurs font référence à une unité de mesure du produit i ; laquelle n'a qu'exceptionnellement une interprétation physique directe (la tonne dans le cas du poste FUEL de la nomenclature fine); il faut donc comprendre en général, qu'après avoir estimé le produit qi(t).pi(t) = wi(t) (ou dépense totale afférente au poste i) qui est une quantité directement interprétable (sinon observable), on construit le prix unitaire pi(t) comme un *indice de prix* calculé pour un agrégat type de biens et services rentrant dans le poste i, la composition de cet agrégat pouvant même varier au cours du temps ; et on pose qi(t) = wi(t)/pi(t). (Nous

---

(1) *Professeur de statistique. Université Pierre et Marie Curie.*

avons spéculé ailleurs (cf. [*CALCUL INDICE PRIX*], C.A.D. Vol VIII n°, 1983, pp 89-100 ; *presertim* § 2.4) sur les fallacies que dissimulent "introduction et substitution de produit au sein d'un agrégat").

Dans la présente étude, il sera commode de rapporter les prix et dépenses à l'instant t, à la dépense totale (des ménages), elle-même assimilée au revenu total :

$$R(t) = Dép(t) = \Sigma\{(wi(t) \mid i \in I\}.$$

On notera donc :

$Pi(t) = pi(t)/R(t)$ = prix unitaire exprimé en parts du revenu total ;

$Wi(t) = wi(t)/R(t) = qi(t) \cdot Pi(t)$ = dépense (dans le poste i, au cours du trimestre t) rapporté à R(t).

L'ensemble des composantes afférentes à tous les postes i, constitue un vecteur qu'on désignera parfois en utilisant la lettre capitale I :

$$qI(t) = \{qi(t) \mid i \in I\} \; ; \; PI(t) = \{Pi(t) \mid i \in I\} \; ; \text{ id } WI(t)\ldots ;$$

il sera commode de raisonner et de calculer comme si le temps t était une variable continue, et les pi(t), qi(t), wi(t) des fonctions dérivables, dont la dérivée par rapport au temps sera notée par un accent :

$$dqi(t)/dt = qi'(t) \quad ; \quad dpi(t)/dt = pi'(t) \; ; \ldots$$

Enfin sauf exception nous ne préciserons pas laquelle des deux nomenclatures, fine ou agrégée, désigne I.

1.2 Définitions usuelles de l'élasticité : L'élasticité désigne proprement l'ensemble des propriétés mécaniques des structures rigides suivant lesquelles celles-ci répondent par des déformations réversibles à des forces et à des conditions aux limites variables. En économie on entend par élasticité l'ensemble des variations de consommations ou de dépenses, par lesquelles les consommateurs répondent à des variations dans leurs revenus propres ou dans les prix du marché. Nous reviendrons au § 2.1.1 sur cette analogie, qu'on peut suivre de plus ou moins près. D'ordinaire on pose simplement :

$(\Delta qi/qi)/(\Delta R/R)$ = élasticité relative au revenu.

$(\Delta qi/qi)/(\Delta pi/pi)$ = élasticité relative au prix.

Formellement on reconnaît dans ce rapport de variations relatives une sorte de dérivée d'un logarithme par rapport à un logarithme. Mais concrètement, il faut préciser le sens du symbole de variation Δ pour aboutir à une définition précise, voire à un calcul. De ce point de vue, on distingue entre *élasticité instantanée*, relative aux différences de consommation existant entre des individus ou des ménages, bénéficiant de revenus différents, ou ayant accès à des marchés pratiquant des prix plus ou moins favorables ; et *élasticité temporelle*, relative aux variations dans la consommation d'un agent unique ou d'un ensemble d'agents, qui accompagnent les variations des revenus et des prix. L'étude de l'élasticité instantanée ne se conçoit pas sans une observation détaillée des différentes catégories de ménages ; dans le comportement desquels l'âge, la profession, ou l'idéal de vie sont sans doute des variables plus influentes que les revenus et les prix : compte-tenu des données que nous avons en vue, on n'en parlera pas ici. Reste donc l'élasticité temporelle, considérée pour l'ensemble des ménages, avec son revenu global, et les prix moyens du marché français.

1.3 Modèles de la consommation d'un produit : Les économistes ont depuis longtemps considéré que la consommation dépend de nombreuses dispositions plus ou moins observables ; l'attitude du consommateur ne pouvant être négligée. Dans "Consumer demand in the United States", H.S. Houthakker et L.D. Taylor proposent par exemple la formule suivante (que nous récrivons dans les notations adoptées ici) :

$$qi(t) = ai + biSi(t) + ciR(t) + \text{reste} \ ;$$

ici, à côté du revenu objectif total R(t), intervient une variable d'état Si(t) qui peut notamment rendre compte de l'habitude de consommer, ou de l'état d'usure de biens d'équipements à remplacer ; la présence d'un "reste" suggérant modestement l'inadéquation du modèle,... et le recours à des méthodes classiques d'ajustement statistique. A cette formule les experts de l'I.N.S.E.E. ajoutent dans un quatrième terme le rapport du prix du bien i au prix total de tous les biens consommés dans la période t considérée (cf. M. Khraibani ; thèse).

Selon ce modèle, il y a une élasticité *à court terme*, qui se manifeste par la réponse de la consommation aux variables observables que sont les revenus et les prix ; et une élasticité *à long terme* qui résulte de la dérive temporelle des variables d'état ; et peut être appréciée par les variations des coefficients de l'élasticité à court terme.

1.4 Modèle global de la consommation : Ecrivons :

$$qI = \{qi|i \in I\} = \text{fonction}(\{Pi|i \in I\}) = F(PI)$$

Le modèle qI = F(PI) est indûment simplifié : il ne tient pas explicitement compte de l'inertie des consommations, représentée au § 1.3 par les variables d'état Si ; en rapportant les prix au revenu global (Pi = pi/R), il efface le flou de l'inflation. Mais telle quelle, la formule suffit à rappeler que là où jouent de nombreuses variables, il est vain de poser la dérivée de l'une par rapport à une autre en dehors d'un cadre multidimensionnel précis. Il est bien connu que la chaleur spécifique d'un gaz n'est pas la même à pression constante et à volume constant ; ou encore que le coefficient de compressibilité diffère selon que la compression est isotherme ou adiabatique. En général si des grandeurs sont reliées par un système d'équations d'état, tel que notre qI = F(PI), la dérivée dqi/dPi ne prend un sens que si on a précisé que les autres variables (ici les Pj pour $j \neq i$) restent constantes ou varient suivant une loi donnée. Autrement l'élasticité de la consommation n'est pas mieux définie que celle d'un gaz dont les échanges thermiques sont inconnus.

Ici, ne doit pas faire illusion la possibilité de poser :

$$dx/dy = (dx/dt)/(dy/dt) \ ;$$

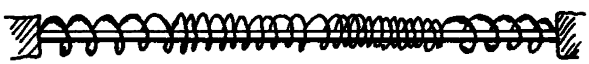
car on cherche à atteindre non un quotient différentiel relatif à tel processus temporel actuellement réalisé, mais une relation valable potentiellement sous des contraintes ultérieures différentes; et cela, en particulier afin de prévoir la réponse du système économique à un événement d'origine politique (ou autre) tel que hausse, pénurie , etc.

1.5 Ajustement de modèles et analyse des données : Cependant les données observées, (même compliquées par d'autres dont l'observation semble possible) ne suffisent pas à déterminer une loi $qI = F(PI)$ à supposer que cette loi existe en quelque sens que ce soit. Il faudrait donc restreindre *a priori* la forme de la fonction F, pour que les données permettent de déterminer celle-ci complètement. Par le fait , F ne sera pas un modèle réaliste du phénomène réel complexe, mais les paramètres de F pourront être considérés comme offrant un ajustement au réel suivant un faisceau de lignes judicieusement choisi ; et les valeurs des paramètres et leur évolution s'interpréteront non comme " la représentation formelle d'idées ou de connaissances ... idées souvent appelées théorie du phénomène, s'exprim(a)nt par un ensemble d'hypothèses" (ainsi E. Malinvaud définit les modèles) ; mais, dans l'esprit de l'analyse des données, comme une représentation géométrique suggérant des idées.

2 Le modèle de l'utilité maxima

2.1 Le modèle additif général

2.1.1 Utilité et élasticité : Imaginons une suite de ressorts différents enfilés sur une tige et comprimés entre deux butées : les ressorts se partagent l'espace qui leur est laissé, de telle sorte que s'équilibrent les forces de compression.



[ELASTICITE] §2.1.1

Quelque chose de semblable se produit lorsque le revenu total doit être partagé entre plusieurs postes, dont chacun, isolément tendrait à tout absorber : à la longueur de chaque ressort, correspond la dépense totale wi ; de même que l'équilibre statique est régi par le principe des travaux virtuels, ainsi l'équilibre entre les postes résulte d'un principe des dépenses virtuelles, suivant lequel l'utilité totale des biens consommés est stationnaire pour toute modification infinitésimale du partage des dépenses.

De façon précise on posera :

$$U(qI) = \Sigma\{Ui(qi) \mid i \in I\} ;$$

l'utilité totale U(qI) est ainsi calculée comme somme des utilités partielles afférentes à chaque poste i ; et celles-ci, sont exprimées par une fonction Ui(qi) de la seule quantité consommée qi. Et l'optimum qI sera défini en fonction des prix unitaires et du revenu par la condition de rendre U(qI) maximum sous la contrainte :

$$\Sigma\{qi.pi \mid i \in I\} = \Sigma\{wi\} = R \text{ ; ou encore :}$$

$$\Sigma\{qi.Pi \mid i \in I\} = \Sigma\{Wi\} = 1.$$

2.1.2 Critique du modèle additif d'utilité : Dans ce modèle les interactions entre postes résultent seulement de la contrainte globale $\Sigma Wi = 1$; or il y a des interactions spécifiques : le renchérissement de l'essence peut amener à différer l'achat d'une voiture ; un produit peut être substitué à un autre ne rentrant pas dans le même poste de la nomenclature. D'ailleurs ces postes gagneraient à être définis en distinguant non les corporations productrices, mais le registre : acheter des produits alimentaires de luxe, ou des vêtements de luxe, ce n'est pas augmenter la consommation alimentaire et l'usure des vêtements ; c'est s'aventurer dans le luxe.

Implicitement, le modèle d'utilité, comme la plupart des modèles proposés de la "Société de consommation", ignore la pénurie des biens : l'enveloppe des dépenses étant la seule contrainte reconnue. Or on a connu en France une pénurie de téléphone (et il y a dans la nomenclature fine, un poste "télécommunications". Certes, en économie de marché (mais le téléphone, monopole d'Etat,y échappe), un prix suffisamment élevé, assure en dissuadant les acheteurs, la permanence du produit. Mais même s'il n'y a pas pénurie proprement dite, la disponibilité peut être plus ou moins grande, la connaissance du produit, plus ou moins répandue : on sait que distribution et réclame peuvent coûter plus que la production ; et que celles-là plus que le niveau des prix, orientent le choix du consommateur ; lequel prend en fait ce qu'on lui sert.

Au modèle d'utilité, comme à tout modèle d'optimum (et singulièrement aux modèles complexes de la théorie des jeux) s'oppose cette objection déjà formulée chez K. Marx (cf. *Das Kapital* ; Dietz Verlag, Berlin ; 1975 ; TI p. 50 note 5) que le choix suppose chez l'acheteur une connaissance encyclopédique des valeurs :

"In der Zürgerlichen Gesellschaft herrscht die fictio juris, dasz jeder Mensch als Warenkaüfer eine enzyklopädische Warenkenntnis besitzt".

Assurément plus que les choix individuels, jouent les programmes-types de dépense, élaborés par tous et imités par chacun au niveau de catégories de consommateurs, sous l'influence de la réclame. Mais dans la mesure où nous considérons la consommation globale sans distinguer les profils individuels, il vaut la peine de décrire les liens entre qI et PI suivant un modèle d'optimum ; d'autant plus que dans une large mesure un système d'équation quelconque peut s'interpréter en terme d'optimum et de potentiel....

2.1.3 *Solution du modèle* : Il y a optimum si toute variation infinitésimale dqI, satisfaisant à la contrainte $\Sigma Pi\ dqi = 0$, correspond à une variation nulle dU de l'utilité totale. Ceci est réalisé s'il existe un nombre L tel que :

$$\forall\ i \in I : \partial U/\partial qi = dUi/dqi = L.Pi .$$

La valeur du paramètre L sort de l'équation unique de contrainte du revenu. De façon précise, si l'on sait inverser les fonctions dérivées Ui' :

$$dUi/dqi = xi \Leftrightarrow qi = Ui'^{-1}(xi),$$

on a pour L l'équation :

$$\Sigma\{Pi.Ui'^{-1}(L.Pi) \mid i \in I\} = 1 ;$$

et une fois trouvé L, les qi se calculent par $qi = Ui'^{-1}(L.Pi)$ ce qui achève la résolution du modèle ; les qi doivent encore satisfaire à la contrainte auxiliaire d'être tous positifs ; et on doit vérifier que l'extrémum trouvé est un maximum.

2.2 *Le modèle polynomial* : Supposer que les fonctions Ui sont toutes des polynômes est, mathématiquement ce qu'on conçoit de plus simple : une fonction linéaire ne suffisant pas (§ 2.2.1), nous nous arrêterons au modèle du 2-ème degré (§ 2.2.2) dont la solution est facile, et suggère celle d'un modèle logarithmique plus réaliste (§ 2.3).

2.2.1 *Essai de modèle linéaire* : posons :

$$Ui(qi) = ki.qi + ci \quad ;$$

l'équation de l'optimum s'écrit :

$$\exists L \; \forall i \in I : ki = L.Pi \quad ;$$

l'optimum n'existe que si le système des constantes ki est proportionnel au système des prix relatifs Pi ; et à supposer que cela soit vrai il y a une infinité de solutions qI définies par les deux conditions :

$$\forall i \in I : qi \geq 0 \quad ; \quad \Sigma\{qi.Pi\} = 1.$$

En fait si les ki ne sont pas égaux, il y a aussi un optimum du fait de la contrainte auxiliaire de positivité des qi : tous les qi sont nuls sauf celui qui correspond à la valeur ki maxima, et absorbe toute la dépense. Ce modèle linéaire ne convient pas.

2.2.2 *Le modèle quadratique : on pose* :

$$Ui(qi) = Ai(qi)^2 + 2Bi.qi + Ci \; ; \text{ d'où :}$$

$$Ui'(qi) = 2(Ai.qi + Bi) \; ; \text{ et pour l'extremum :}$$

$$2(Ai.qi + Bi) = L.Pi \quad ;$$

$$Ai.qi = (L/2)Pi - Bi \quad ; \quad qi = ((L/2)Pi - Bi)/Ai.$$

L'équation de contrainte donnant L est alors linéaire :

$$\Sigma\{Pi((L/2)Pi - Bi)/Ai \mid i \in I\} = 1.$$

On voit, sans qu'il soit utile d'achever le calcul, que les prix relatifs Pi étant donnés, on peut calculer les quantités consommées qi, *à supposer* que soient fixés les paramètres Ai et Bi du modèle. Or il est clair que ces paramètres ne peuvent venir que d'un ajustement du modèle aux valeurs observées de PI, qI et à leurs variations temporelles. Comme il y a 2n inconnues (où n = Card I), les Ai et les Bi (les constantes additives Ci étant indifférentes), et n équations exprimant les qi en fonction de AI, BI, PI, on présume que AI et BI pourront être déterminés d'après les (PI ,qI) observés à deux instants (trimestres!) t1 et t2. Nous considérerons plutôt les valeurs à un instant t, et leurs dérivées par rapport au temps (estimées dans la pratique sur une durée plus ou moins longue, cf. *infra* § 3) ; car seule une telle donnée différentielle nous a permis de résoudre facilement un modèle plus réaliste qui nous intéresse : le modèle de Fechner décalé (cf. § 2.3).

Maintenant, les données sont PI , qI et leurs dérivées temporelles PI' ,qI' ; ces données observées satisfont de par la définition même des Pi = pi/R à la condition :

$$\Sigma\{Pi.qi \mid i \in I\} = 1 \; ; \text{ et à la condition dérivée :}$$

$$\Sigma\{Pi'.qi + Pi.qi' \mid i \in I\} = 0.$$

Les inconnues sont, outre les coefficients AI, BI, le paramètre de résolution L et sa dérivée temporelle L'. On a le système :

$$\forall i \in I : \begin{cases} Ai.qi = -Bi + (L/2)\,Pi \; ; \\ Ai.qi' = (L'/2)\,Pi + (L/2)Pi'. \end{cases}$$

C'est un système linéaire homogène de 2n équations à 2n + 2 inconnues. Il est naturel que le système soit homogène, car l'optimum ne change pas si toutes les fonctions d'utilité partielle Ui sont simultanément multipliées par une même constante. Il apparaît que d'après PI, qI, PI', qI', les coefficients AI, BI sont déterminés à 2 constantes près ; ou si l'on identifie les systèmes de solutions proportionnelles à 1 constante près. Il est facile de paramétrer ces solutions par les valeurs des nombres auxiliaires L et L' :

première solution : L = 0 ; L' = 2 :

$$Ai = (Pi/qi') \quad ; \quad Bi = (-Pi.qi/qi') \; ;$$

deuxième solution : L = 2 ; L' = 0 :

$$Ai = (Pi'/qi') \quad ; \quad Bi = Pi-(Pi'.qi/qi') \; ;$$

solution générale paramétrée :

$$\begin{cases} Ai = (L'/2)(Pi/qi') + (L/2)(Pi'/qi') \; ; \\ Bi = (L'/2)(-Pi.qi/qi')+(L/2)(Pi-(Pi'.qi/qi')). \end{cases}$$

2.2.3 *Conditions et interprétation* : La forme du modèle permet de restreindre le domaine des solutions utiles.

D'abord la fonction d'utilité U(qi) doit être une fonction croissante de qi ; tout au moins (car la parabole a une branche montante et une branche descendante...), au voisinage de la valeur considérée de qi ; d'où la condition :

$$Ui'(qi) = 2(Ai.qi + Bi) = L.Pi > 0.$$

Le paramètre L doit donc être positif : vu la condition d'homogénéité, on prendra L = 2 ; et on notera L' = 2X. Soit pour la solution :

$$Ai = (Pi' + X.Pi)/qi' \; ;$$

$$Bi = Pi-(Pi'+X.Pi)(qi/qi').$$

D'autre part l'extremum de U sera un maximum si sous la contrainte Σ Pi.qi = 1, la fonction U(qI) a une différentielle seconde négative ; condition qui sera assurée si les Ai sont tous négatifs : ce qu'imposera d'ailleurs au § 2.3 l'ajustement au modèle de Fechner décalé.

En cas de croissance générale, les Pi' sont tous négatifs et les qi' positifs;on obtient donc certainement des valeurs acceptables des AI, BI en prenant pour X n'importe quelle valeur négative ou nulle.

2.3 *Le modèle de Fechner*

2.3.1 *Le modèle de Fechner pur* : La loi de Fechner, selon laquelle la sensation est proportionnelle au logarithme de l'excitation, nous paraît intéresser à plus d'un titre l'analyse des données (cf. [*SEUIL*] C.A.D. Vol IV n° 4 et [*BERGSON*] C.A.D Vol VII, n° 4,1982). Ici nous retiendrons seulement la suggestion, que l'utilité (ou la satisfaction) est proportionnelle au logarithme de la quantité consommée ; (en d'autres termes dUi est proportionnel à la variation relative dqi/qi) : soit :

$Ui(qi) = ai.\text{Log}(qi)$; $Ui'(qi) = ai/qi$; d'où le système :

$\forall\ i \in I : ai/qi = L.Pi \Leftrightarrow ai = L.Pi.qi.$

Avec la condition $\Sigma Pi.qi = 1$, la résolution est immédiate :

$L = \Sigma\{ai \mid i \in I\}$; et :

$\forall\ i \in I : Pi\ qi = ai / \Sigma\{ai \mid i \in I\}.$

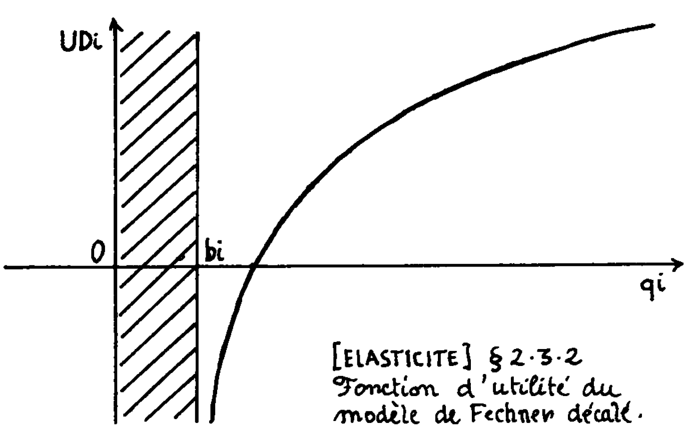
Le profil des dépenses WI est le même que le profil des coefficients aI : le profil des dépenses (Wi = Pi.qi) est donc constant: il ne dépend ni des prix pi ni du revenu total R.

Le modèle n'est pas assez souple : il n'est pourtant pas dépourvu de réalisme. Au cours du temps les parts relatives des dépenses Wi = Pi qi, varient moins que les quantités absolues : comme si les diverses branches i de l'activité économique parvenaient à peu près à maintenir leur part du marché global, quels que soient les changements des produits consommés et de leurs prix.

2.3.2 *Le modèle de Fechner décalé* : Supposons qu'il existe pour chaque poste i, un volume minimal bi au-dessous duquel la consommation ne peut descendre ; et que la loi de Fechner s'applique pour le volume qi-bi, compté à partir de ce minimum. On posera :

$UDi(qi) = ai\ \text{Log}(qi-bi)$; $bi < qi$

les paramètres ai et bi sont nécessairement positifs ; qi est assujetti à dépasser bi, la lettre D dans UDi rappelle qu'il s'agit d'un modèle décalé. Quand qi tend vers bi (par valeurs supérieures) l'utilité UDi tend vers $-\infty$: ce qui assure *a priori* que le modèle interdira l'approche de cette valeur.



[ELASTICITE] § 2.3.2 Fonction d'utilité du modèle de Fechner décalé.

Les paramètres aI, bI étant supposés connus, le calcul de la consommation qI en fonction des prix PI se fait aisément suivant les principes du § 2.1.3. On a :

$\forall\, i \in I : \mathrm{UD}i' = ai/(qi - bi) = L.Pi$; d'où

$qi = bi + L^{-1}(ai/Pi)$; avec condition de compatibilité :

$\Sigma\{Pi.qi\} = \Sigma\{Pi.bi\} + L^{-1}\Sigma\{ai\} = 1$;

d'où en notant $\Sigma\{Pi.bi\} = S$

$L^{-1} = 1 - \Sigma\{Pi.bi\} = 1 - S$;

$\forall\, i : Pi.qi = bi.qi + ai((1 - \Sigma\{bi.qi\})/\Sigma\{ai\})$.

Il est nécessaire que soit inférieur à 1 le nombre S qui exprime la part de la dépense totale requise pour le programme de consommation minimum bI : on voit qu'au-delà de S, le reste de la dépense, soit (1-S), a pour profil aI. On peut dire que l'aisance est d'autant plus grande que S est plus proche de zéro : et alors le profil global des dépenses est proche de aI ; il y a donc un profil limite de dépense défini par les coefficients aI, comme il y a un programme de volume minimum donné par les coefficients bI.

2.3.3 *Inversion du modèle et condition d'interprétation* : Par inverse nous entendons : déterminer les paramètres aI et bI en fonction des grandeurs observables PI, qI ou de leurs dérivées temporelles. De façon précise si comme au § 2.2.2, on suppose connus à un instant donné t : PI(t), qI(t), PI'(t) et qI'(t), l'inversion se fait aisément mais il reste un paramètre indéterminé X.

Telles quelles pourtant, les équations caractérisant aI et bI en fonction de (PI, PI', qI, qI'), nous paraissent très difficiles à résoudre : mais sachant que ces équations doivent être équivalentes à celles du § 2.2.2, on les résout sans peine. En effet, quelles que soient les fonctions Ui(qi) choisies pour un modèle, celles-ci n'interviennent pour déterminer (PI, PI', qI, qI') à un instant donné t, que par leurs dérivées premières et secondes calculées pour les valeurs de qi prises en cet instant. On procédera donc par identification ; on a :

Modèle de Fechner décalé : (en omettant l'indice i)

$UD(q) = a \log(q-b)$; $UD' = a/(q-b)$; $UD'' = -a/(q-b)^2$; d'où:

$a = -(UD')^2/UD''$; $q - b = -UD'/UD''$.

Modèle quadratique :

$U(q) = Aq^2 + Bq$; $UD' = 2(Aq + B)$; $UD'' = 2A$.

d'où en identifiant, au second ordre les deux modèles :

$ai = -2(Ai.qi + Bi)^2/Ai$;

$bi = 2qi + (Bi/Ai)$;

Dans ces formules interviennent AI et BI, qui sont les fonctions de (PI, PI', qI, qI') et du paramètre X trouvées au § 2.2.2 : soit :

$Ai = (Pi' + X.Pi)/qi'$;

$Bi = Pi - (Pi' + X.Pi)(qi/qi')$.

Ainsi on a trouvé les paramètres aI et bI du modèle de Fechner décalé en fonction de (PI, PI', qI, qI') (grandeurs observées) et du paramètre X ; soit :

$$ai = -\ 2Pi^2\ qi'/(Pi' + XPi)\ ;$$

$$bi = qi + Pi\ qi'/(Pi' + XPi)\ .$$

Reste à chercher s'il existe pour le paramètre X des valeurs donnant des paramètres aI, bI acceptables au sens suivant :

$$\forall\ i \in I : 0 < ai\ ;\ 0 \leq bi < qi.$$

La condition (0 < ai) équivaut à (Ai < 0) déjà vue au § 2.2.3 La condition sur bi s'écrit :

$$0 \leq bi < qi \Leftrightarrow qi < -(Bi/Ai) \leq 2qi\ ;$$

ou encore, compte tenu de ce que Ai est nécessairement négatif :

$$0 < Ai\,qi + Bi\ \ ;\ \ 2\,Ai\,qi + Bi \leq 0.$$

On a déjà vu au § 2.2.3 la première de ces conditions ; la deuxième est nouvelle. Elle exprime la positivité de bi, essentielle à l'interprétation du modèle de Fechner décalé avec volume minimum .

3 *Retour aux données*

Pour ajuster aux données publiées le modèle de Fechner décalé nous suggérons deux constructions : la première (§ 3.2) procède par voie géométrique dans le plan 1×2 issu d'une analyse factorielle (§ 3.1) ; la deuxième (§ 3.3), tout en recourant également à l'analyse des données, suit de près les formules d'inversion du § 2.3.3.

3.1 *Analyse factorielle d'un ensemble de profils de dépenses* : La comparaison entre systèmes de biens hétérogènes se fait d'après les prix (cf. *op. laud.* [*CALCUL INDICE PRIX*]) : d'ordinaire dans une étude diachronique on utilise soit pour chaque profil de consommation les prix afférents aux mêmes temps, soit un système unique de prix : par exemple ceux pratiqués au début de la période étudiée. Plus généralement on peut à chaque profil de consommation associer tous les systèmes de prix successifs : c'est ce qu'a fait M. Khraibani dans un chapitre de sa thèse, que nous rapportons brièvement ici.

3.1.1 *Le tableau analysé* : Conservons les notations introduites au § 1.1 : T ensemble des trimestres de la période étudiée ; I ensemble des postes de la nomenclature, etc. . Le tableau met en correspondance l'ensemble T × T avec l'ensemble I : chaque ligne est indicée par une paire ordonnée de trimestres (t , t') ; et à l'intersection de la ligne (t , t') et de la colonne i on lit :

$$W((t,t');i) = qi(t).Pi(t')\ ;$$

c'est-à-dire pour le poste i, la valeur du volume consommé pendant la période t calculée d'après le cours de la période t' (éventuellement au lieu de Pi(t') cours relatif, on peut mettre pi(t')).

Il est commode de noter Wtt' le profil de la ligne (t,t') et le point projection de ce profil sur un plan issu de l'analyse factorielle. De plus on désignera respectivement par j, o, f les trimestres, initial, médian, et final de la période T.

3.1.2 *Résultats de l'analyse* : Ceci posé, disons que dans le plan 1×2 qui avec 85% de l'inertie totale offre une représentation assez fidèle du nuage, l'ensemble T×T se projette à peu près suivant un parallélogramme où l'on reconnaît non sans perturbations locales, le quadrillage des deux systèmes de lignes t = cte et t' = cte. La diagonale Wjj....Wff, qui seule représente des profils de dépense réels en ce que ceux-ci associent des volumes et des prix (relatifs) afférents aux mêmes temps, est peu inclinée sur l'axe 2 : son milieu Woo pouvant être schématiquement identifié à l'origine des axes factoriels. Sur l'autre diagonale, voisine de l'axe 1, s'opposent au contraire les deux profils les moins réalistes : du côté positif, Wfj qui associe volume final et prix initial ; du côté négatif, Wjf i.e. volume initial au prix final. Il est remarquable que les chapelets de points (Wjt,...., Wot,..., Wft) formés par les profils de dépenses calculés pour les volumes afférents à la suite T des trimestres de j à f, mais avec le cours unique du trimestre t, dessinent des lignes à peu près équipollentes aux deux côtés parallèles (Wjj....Wfj) (cas t = j) et (Wjf....Wff) (cas t = f). De même on a des chapelets (Wtj,...., Wto,...Wtf) correspondant à la consommation du seul trimestre t, affectée de tous les cours successifs de j à f ; avec en position extrême pour t = j et t = f les deux côtés (Wjj... Wjf) et (Wfj...Wff). Tout se passe donc comme si, dans le domaine des profils de dépenses étudiés, appliquer à un système de consommations qI donné quelconque, le système final de prix PI(f) au lieu du système initial PI(j), équivalait à faire subir au profil de dépense WI une translation dont le vecteur est à peu près fixé, indépendamment de qI. Ceci nous paraît lié aux très faibles valeurs propres ($\lambda 1$ = 0,009 ; $\lambda 2$ = 0,003) qui attestent une grande concentration du nuage des profils permettant de réduire tout calcul à un terme du 1-er ordre.

On peut noter encore que du trimestre initial j au trimestre final f, le profil des dépenses est modifié à la fois par la déformation du profil des prix et par celle du profil des consommations. Le premier effet joue dans la direction Wjj...Wjf ; le second dans la direction Wjj...Wfj. La résultante de ces deux effets est faible dans la direction de l'axe 1, où modifications des prix et des consommations jouent en sens opposé. Au contraire dans la direction de l'axe 2 (qui est à peu près celle du vecteur Wjj...Wff joignant les deux profils de dépenses initial et final) ces effets se conjuguent. Dans le langage usuel de l'élasticité (cf. § 1.2) on peut dire qu'on a sur l'axe 1, élasticité négative (effet naturel : une hausse de prix entraîne une baisse de consommation ; et réciproquement) ; et sur l'axe 2, élasticité positive (effet paradoxal ? la hausse stimulant la consommation). Mais il faut prendre garde qu'il s'agit pour les prix comme pour les consommations de variations relatives à l'ensemble,non de variations absolues.

Quant à l'ensemble des postes de la nomenclature nous n'en citerons que 3 : la ligne (Wjj....Wjf) pointe vers FUEL, dont le coût s'est grandement accru ; la ligne (Wjj....Wfj)pointe vers TELécommunication, en nette augmentation de volume ; près de Wjj on trouve TEXtiles, poste qui comme ceux de l'alimentation voit décroître sa part dans les dépenses au fur et à mesure que l'aisance s'accroît.

3.1.3 Changement de coordonnées : En vue de l'ajustement au modèle de Fechner, nous prendrons dans le plan 1×2 deux nouveaux axes :

Ox : portant la diagonale Wjj...Wff ;

Oy : orienté suivant les chapelets Wtj...Wtf et plus précisément définis par Woj...Wof.

Ces axes sont orientés et gradués de telle sorte que les coordonnées des points remarquables sont :

$Wjj = (1;0)$; $Wff = (-1;0)$; $Woj = (0;1)$; $Wof = (0;-1)$;

$Woo = (0,0)$; $Wfj = (-1;2)$; $Wjf = (1;-2)$.

De plus, si Vj, Vo, Vf désignent trois profils de dépense calculés sur les mêmes volumes mais en suivant respectivement le cours initial, médian et final, on posera :

$$Vo = (xv;yv) \ ; \ Vi(xv;yv+1) \ ; \ Vf = (xv;yv-1) \ ;$$

l'égalité des abscisses et l'étagement des ordonnées résultent de la propriété remarquée au § 3.1.2.

3.2 *Représentation du modèle de Fechner décalé sur le plan 1×2 issu de l'analyse factorielle*

3.2.1. Mise en équation : Supposons qu'un modèle de Fechner décalé, défini par les paramètres aI et bI associe exactement aux systèmes de prix initial et final PI(j) et PI(f), les systèmes de consommations observées qI(j) et qI(f). Sera alors vérifié le système qui exprime (cf. § 2.3.2) les profils de dépense Wii et Wff (initial et final) comme des mélanges du profil de dépense limite aI et du profil afférent à la réalisation du programme de consommation bI, aux cours respectifs PI(j) et PI(f) ; la dépense relative à ce programme étant S :

$$(1-Sj)\ a + Sj\ bj = Wjj \ ;$$

$$(1-Sf)\ a + Sf\ bf = Wff \ ;$$

dans ce système d'équations on a adopté les notations condensées suivantes :

a : profil sur I de $aI = \{ai \mid i \in I\}$;
bj : profil sur I de $\{bi\ Pi(j) \mid i \in I\}$;
bf : profil sur I de $\{bi\ Pi(f) \mid i \in I\}$;
$Sj = \Sigma\{bi\ Pi(j) \mid i \in I\}$; $Sf = \Sigma\{bi\ Pi(f) \mid i \in I\}$.

Si maintenant on assimile les profils à leurs projections dans le plan (1×2) issu de l'analyse du § 3.1, et rapporté au système d'axes (x,y) introduit au § 3.1.3, on écrira :

$$Wjj = (1;0) \ ; \ Wff = (-1;0) \ ; \ a = (xa\ ;ya) \ ;$$

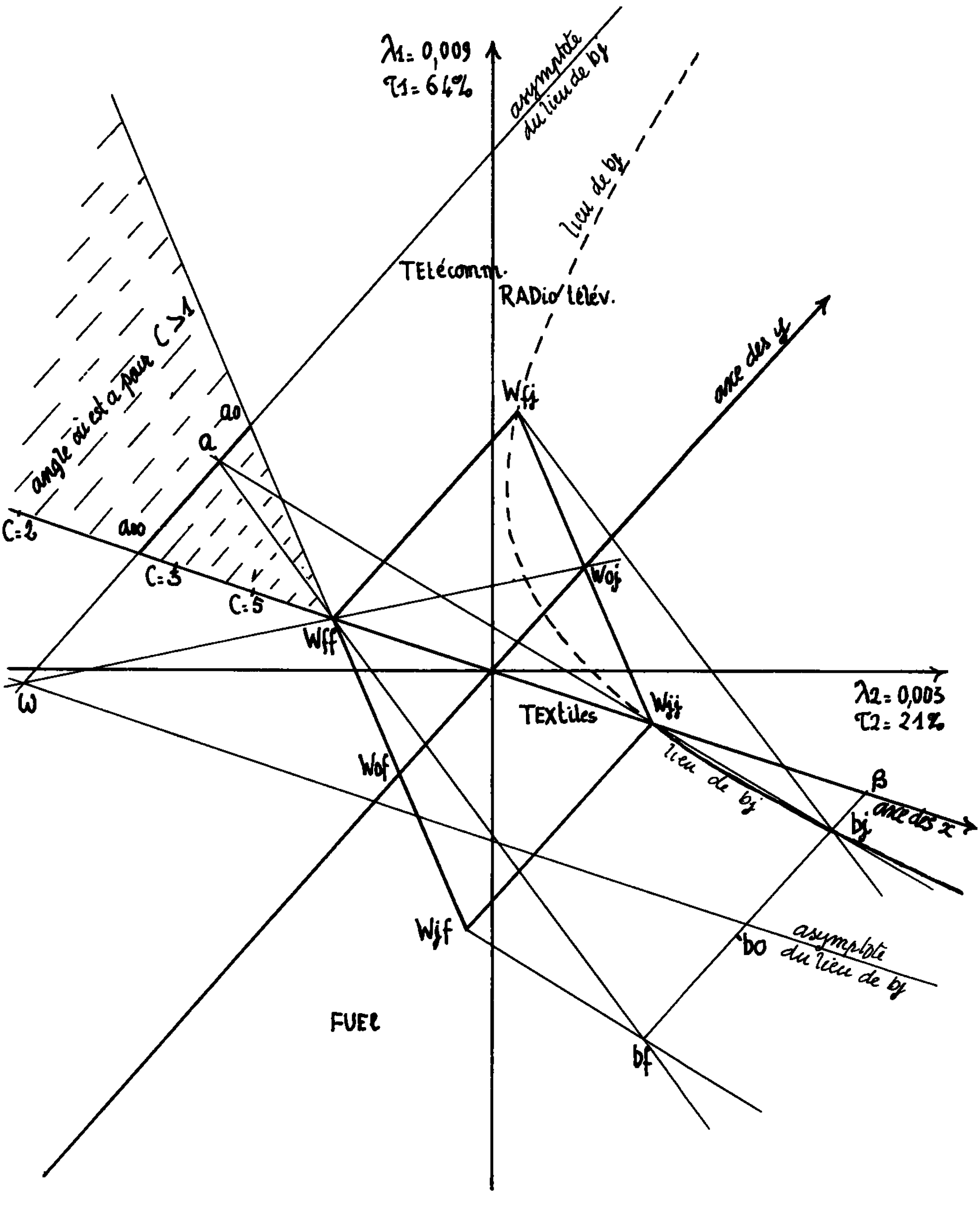
$$bj = (xb;yb+1) \ ; \ bf=(xb;yb-1) \ ; \ bo = (xb;yb),$$

où comme au § 3.1.3 on a introduit un point bo dont les coordonnées donnent celles de bj et bf. Le système prend la forme suivante :

$$\begin{cases}(1-Sj)xa + Sj\ xb = 1 \ ; \\ (1-Sf)xa + Sf\ xb = -1 \ ;\end{cases} \quad \begin{cases}(1-Sj)ya + Sj(yb + 1) = 0 \ ; \\ (1-Sf)ya + Sf(yb - 1) = 0 \ .\end{cases}$$

De tous les nombres qui interviennent dans ce système, seul est observable le rapport (Sj/Sf) que nous noterons C et assimilerons à un indice de croissance calculé par exemple sur les volumes consommés au temps médian.

$$C = \Sigma\{qi(o)Pi(j) \mid i \in I\}/\Sigma\{qi(o)Pi(f) \mid i \in I\}.$$



[ELASTICITE] § 3.2 : Construction du modèle de Fechner décalé sur le plan 1-2 issu d'une analyse factorielle

Notre point de vue sera de considérer que dans les quatre équations ci-dessus, xa et ya sont des données, en fonction desquelles on doit calculer quatre inconnues (xb,yb,Sj,Sf). Une fois ce calcul fait (§ 3.2.2), nous en utiliserons les formules pour chercher les paramètres aI, bI d'un modèle satisfaisant à (Sj/Sf) = C.

3.2.2 *Résolution du système* : Tel quel, le système n'est pas linéaire en les inconnues que nous avons choisies ; mais il le devient si l'on pose :

$$Zj = 1/Sj \quad ; \quad Zf = 1/Sf \quad ;$$

en multipliant les équations respectivement par Zj et Zf il vient :

$$\begin{cases} ((Zj-1)xa) + xb = Zi \; ; \\ ((Zf-1)xa) + xb = -Zf \; ; \end{cases} \qquad \begin{cases} ((Zj-1)ya) + yb + 1 = 0 \; ; \\ ((Zf-1)ya) + yb - 1 = 0 \; ; \end{cases}$$

en additionnant et soustrayant les équations, la résolution apparaît plus facile si on pose :

$$Zj + Zf = 2Z \quad ; \quad Zj - Zf = 2\,\Delta Z \; ; \text{ il vient :}$$

$$\begin{cases} (Z-1)xa + xb = \Delta Z \; ; \\ \Delta Z \; xa = Z \; ; \end{cases} \qquad \begin{cases} (Z-1)ya + yb = 0 \; ; \\ \Delta Z \; ya + 1 = 0 \; . \end{cases}$$

Les deux équations inférieures donnent Z et ΔZ en fonction de xa, ya ; d'où les valeurs de Zj, Zf ; puis Sj, Sf :

$$\Delta Z = -1/ya \quad ; \quad Z = -\,xa/ya \quad ;$$

$$Zj = -(xa+1)/ya \; ; \; Sj = -\,ya/(xa+1) \; ;$$

$$Zf = -(xa-1)/ya \; ; \; Sf = -ya/(xa-1) \; .$$

Au passage on note que l'abscisse xa et l'observable C=Sj/Sf se déterminent mutuellement :

$$C = (xa-1)/(xa+1) \; ; \; xa = (1+C)/(1-C).$$

La résolution s'achève par le calcul de xb, yb en fonction de xa , ya :

$$xb = ((xa+ya)xa-1)/ya \; ; \; yb = xa + ya.$$

A cette solution algébrique, correspond dans le plan des deux premiers axes une solution géométrique que nous avons figurée. On part d'un point a, choisi arbitrairement dans le plan (ce qui correspond au fait que xa, ya sont considérées ici comme des données). Puisque Wjj est au barycentre de a affecté de la masse (1-Sj) et de bj affecté de la masse Sj, le point bj est sur la droite (a,Wjj) ; de même bf est sur la droite (a,Wff). De plus il y a égalité entre les vecteurs (dont nous désignerons la valeur commune par $\vec{V}$) :

$$\overrightarrow{Wjf\,Wjj} = \overrightarrow{Wff\,Wfj} = \overrightarrow{bf\,bj} = \vec{V} = (0,2),$$

reliant deux profils de dépenses correspondant aux mêmes volumes sous les cours PI(f) et PI(j). Donc si bf est sur la droite (a,Wff), bj est sur la droite translatée de celle-ci par le vecteur $\vec{V}$, c'est-à-dire sur la parallèle à (a,Wff) menée par Wfj ; d'où bj, à l'intersection de cette parallèle et de (a,Wjj). De même bf est à l'intersection de (a,Wff) et de la parallèle à (a,Wjj) menée par Wjf. Ce qui achève la résolution géométrique, car les points étant mis en place il est facile de calculer Sj et Sf comme des rapports de vecteurs colinéaires : Sj = $\overline{a\ Wjj}/\overline{a\ bj}$; Sf = $\overline{a\ Wff}/\overline{a\ bf}$.

3.2.3 *Condition et interprétation* : Puisque (xb,yb) se calculent en fonction de (xa,ya), le choix d'un modèle de Fechner décalé , se réduit au choix du point a. On a d'abord des conditions relatives aux valeurs calculées de Sj et Sf :

$$Sj \in (0,1) \quad ; \quad Sf \in (0,1) \quad ; \quad Sj = C\ Sf \ ;$$

où on supposera C supérieur à 1 ce qui correspond à une aisance croissante. D'après les formules trouvées pour Sj et Sf ces deux nombres sont positifs si et seulement si sont de même signe les trois quantités (-ya), (xa+1) et (xa-1) ou encore si:$1<|xa|$ et $xa\ ya < 0$. Comme de plus $1 < C$, il reste la seule possibilité $xa<-1$. Enfin la condition $Sj < 1$, laisse pour (xa,ya) le domaine défini par :

$$0 < ya \ ; \ xa < -1 \ ; \ (xa + ya + 1) < 0 \ ;$$

c'est-à-dire un angle de sommet Wff et opposé à l'angle formé par (Wff,Wjj) et (Wff,Wjf). Le domaine de a est haché sur la figure.

On a déjà vu au § 3.2.2 que C détermine l'abscisse xa : c'est pourquoi sur la figure on a gradué suivant les valeurs correspondantes de C le demi-axe des x négatifs à partir de Wff ($C = \infty$), jusqu'à l'infini négatif ($C = 1 + \varepsilon$).

Finalement, l'indice de croissance C étant connu, il reste pour a un segment de droite :

$$xa = (1+C)/(1-C) \quad ; \quad 0 < ya < -(1 + xa) = 2/(C - 1).$$

Sur la figure on a noté a0, $a\infty$ les extrémités de ce segment :

$$a\infty = (xa;0) \ ; \ a0 = (xa;-(1 + xa)).$$

Cette notation s'explique parce que quand a se déplace de a0 à $a\infty$, le point bj (que a détermine) se déplace depuis Wjj en tendant vers l'infini sur une branche d'hyperbole. Pour démontrer cela, il suffit de calculer l'équation du lieu de bj en éliminant le paramètre ya entre les deux équations donnant l'abscisse et l'ordonnée de bj en fonction de xa et ya. On a :

$$Y = ybi = yb + 1 = xa + ya + 1 \ ;$$

$$X = xbi = xb = ((xa+ya)xa-1)/ya.$$

En portant dans la deuxième équation la valeur de ya tirée de la première il vient :

$$X = ((Y-1)xa - 1)/(Y - xa - 1) \ ; \text{ d'où :}$$

$$Y = (xa + 1)\ (X - 1)/(X - xa) \ .$$

C'est l'équation d'une hyperbole qui a pour asymptotes d'une part la droite X = xa (où se déplace a) , d'autre part la droite Y = xa + 1 ; le centre $\omega = (xa \ ; xa + 1)$ étant sur la droite (Wff,Woj). Dans les limites assignées à a sur la droite d'abscisse xa, le point bj ne décrit qu'une partie d'une branche de cette hyperbole : cette partie est figurée en trait plein, le reste de la branche est en tireté. On notera sur la figure que le vecteur $\overrightarrow{a0}$ est égal au vecteur

$\overrightarrow{bj\beta}$ (où β est l'intersection avec Ox de la droite bf bj).

Il semble que pour C donné il y ait une infinité de modèles de Fechner décalés acceptables : a parcourant un segment tandis que b parcourt un arc d'hyperbole. Cependant, il faut prendre garde que les points a et b construits dans le plan ne sont que les projections de profils de aI et bI qui caractérisent le modèle. La formule de reconstitution des données en fonction des facteurs fournit ces profils : aI peut être normalisé par la condition Σ ai = 1 (mais peu importe car la fonction d'utilité n'est définie qu'à une constante multiplicative près). Pour bI on doit avoir :

$$\Sigma\{bi\ Pi(j)\,|\,i \in I\} = Sj\ ;\ \Sigma\{bi\ Pi(f)\,|\,i \in I\} = Sf\ ;$$

or Sj et Sf sont connus en fonction de xa et ya ; ce qui fournit deux conditions de normalisation qui pratiquement coïncident, dans la mesure où nos approximations sont justifiées. La contrainte nouvelle relative a aI et bI est seulement que ces vecteurs doivent avoir toutes leurs composantes positives. Cette contrainte est effective : et interdit certainement que b s'éloigne à l'infini.

On a trouvé au § 3.2.2 que pour xa (ou C) fixé, Sj et Sf sont d'autant plus faibles que ya est plus faible, donc b plus éloigné de Wjj. Il nous paraît bon de placer b aussi loin que possible de Wjj : le cas où b est en Wjj (a = a0) correspond à Sj = 1 : cas où initialement toutes les dépenses sont consacrées à l'acquisition du volume minimum : incompressibilité absolue des dépenses qui est absurde dans l'hypothèse de croissance régulière où on s'est placé. Au contraire Sj minimum (dans les limites permises par les données et le modèle) caractérise une aisance maxima.

Pour la compréhension de l'économie voici ce que nous attendons de ces essais d'ajustement. Premièrement l'existence de aI , bI acceptables donnera de la vraisemblance au modèle simple proposé. La valeur minima acceptable pour Sj pourra montrer à quel point la société se comporte comme si ses dépenses étaient incompressibles. A ce propos il sera bon de faire plusieurs essais sur des périodes T de quelques années, décalées dans le temps. En effet on peut penser que la Société vit en ayant devant elle un profil idéal de consommation aI qui se déforme ; tandis que derrière les volumes bI considérés comme un minimum indispensable, avancent et talonnent sans cesse le volume des consommations réelles (c'est ce qu'on appelle "créer des besoins"). Ces variations de aI et bI peuvent aisément être suivies en projection (e.g. comme éléments supplémentaires) sur une analyse factorielle.

3.3 *Ajustement du modèle de Fechner décalé d'après les prix et consommations instantanés et leurs dérivées temporelles* : Les formules du § 2.3.3 permettent de calculer aI, bI en fonction de (PI(t), PI'(t), qI(t), qI'(t)), avec toutefois un paramètre X et des conditions de compatibilité.

Pratiquement, nous pensons que ces formules ne doivent être appliquées qu'après un lissage des quantités observées et de leurs dérivées : ce lissage pourrait se faire d'après le premier facteur d'une analyse factorielle de correspondance sur les prix et d'une autre sur les volumes, portant sur une période T plus ou moins longue centrée sur t. Les aI et bI ainsi calculés seraient projetés sur le plan 1×2 de l'analyse factorielle considérée aux §§ 3.1 et 3.2. En suivant l'ajustement du modèle sur diverses périodes T centrées sur des temps t successifs, on acquerrait des vues suggestives sur l'évolution des désirs et des besoins.