C. BASTIN
J.-P. BENZÈCRI

Exemple d'effet de chaînage complet autour d'un centre en classification ascendante hiérarchique

Les cahiers de l'analyse des données, tome 7, n° 2 (1982), p. 189-208
<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1982__7_2_189_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. VII - 1982 - n° 2 - p. 189-208

EXEMPLE D'EFFET DE CHAÎNAGE COMPLET AUTOUR D'UN CENTRE EN CLASSIFICATION ASCENDANTE HIÉRARCHIQUE [CHAÎNE COMP. C.A.H]

par C. Bastin (1) *et J.-P. Benzécri* (2)

0 Rappel

En classification ascendante hiérarchique (CAH), on part d'un nuage $N(I) = \{(M^i, m_i) | i \in I\}$, de points M^i munis chacun d'une masse m_i. Les individus i sont agrégés en classes de plus en plus grandes. A une étape donnée du processus sont déjà constituées un certain nombre de classes maximales (encore appelées sommets) ; dont certaines sont éventuellement réduites à un individu encore isolé. Si S désigne l'ensemble des sommets (à une étape donnée) on note $v(s)$ celui des sommets qui est le plus proche voisin de s selon un certain critère nv (qui n'est pas exactement une distance) : Deux sommets s et s' peuvent être agrégés s'ils sont plus proches voisins réciproques, i.e. si : $s' = v(s)$ et $s = v(s')$.

Lorsqu'on utilise le critère d'agrégation suivant la variance, la quantité $nv(a,b)$ pour deux classes a et b est définie par la formule :

$$nv(a,b) = (m_a\, m_b/(m_a + m_b))\, \|M^a - M^b\|^2 \quad ;$$

où M^a et M^b désignent respectivement les centres de gravité des classes a et b ; et m_a et m_b les masses totales des éléments de chaque classe. La formule vaut en particulier pour deux classes $\{i\}$ et $\{i'\}$ réduites chacune à un point affecté d'une masse, et désignées plus simplement par i et i'.

---

(1) *Assistante, laboratoire de statistique. Université Pierre et Marie Curie.*

(2) *Professeur de statistique. Université Pierre et Marie Curie.*

L'objet du problème est de montrer sur l'exemple qu'il existe des cas de chaînage complet autour d'un point central M^0, au sens suivant : les autres individus $M^1, M^2, \ldots, M^n$ s'agrègent l'un après l'autre à M^0 ; il n'y a jamais à chaque étape de l'agrégation qu'un veritable sommet la classe centrale $\{M^0, \ldots, M^p\} = [p]$ et $(n-p)$ sommets réduits chacun à un seul élément M^r $(r > p)$; et le plus proche voisin de chacun de ces sommets ponctuels est la classe centrale. Il est facile de voir qu'avec une telle structure l'ordre de complexité de l'algorithme des voisins réciproques, même en tenant compte des "célibataires", reste n^3 : car en fait à chaque création d'un noeud, tous les sommets isolés se retrouvent célibataires. En revanche, l'algorithme de recherche en chaîne (cf. *Cahier* Vol VII n° 2) reste en n^2, comme on l'a démontré ; en fait cet algorithme partant d'un point quelconque construit toujours une chaîne dont le deuxième point est la classe centrale ; et le troisième point est le sommet subsistant le plus proche de celle-ci. Dans un premier exemple on prend des points de même masse, mais on se place dans l'espace R^n de dimension n. Dans un deuxième exemple on se place sur la droite ; mais les points ont des masses très différentes entre elles. Le troisième exemple est dans R^n avec des masses inégales ; mais l'étude en est très simple.

Nous proposons d'abord ces exemples sous forme de problèmes (§§ 1, 2 & 3) ; puis nous expliquons les exemples en donnant la solution de ces problèmes (§§ 4, 5 & 6).

1 *Premier exemple*

1.0 *Le nuage donné ; notations* : l'ensemble des individus est désigné par la suite $[n]$ des $n+1$ premiers entiers (comptés à partir de 0) :

$$I = [n] = \{0, 1, 2, \ldots, n\} ;$$

plus généralement on notera $[p]$ la suite $\{0, 1, \ldots, p\}$ pour p quelconque. L'espace ambiant du nuage $N([n])$ est l'espace usuel R^n, muni de la norme euclidienne définie par la somme des carrés des coordonnées :

$$\|x\|^2 = \Sigma\{(x_j)^2 | j = 1, \ldots, n\} ;$$

$$\text{où } x = \{x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n\}.$$

Le point M^0 est l'origine de R^n ; les autres points M^i ($1 \le i \le n$) sont définis à partir des vecteurs de base e^i de R^n (des vecteurs dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1) par la formule :

$$M^i = x(i)\, e^i ,$$

où $x(i)$ est une fonction strictement positive définie pour $i = 1,\ldots, n$ et croissant avec i ; i.e. :

$$0 <_s x(1) <_s x(2) <_s \ldots\ldots <_s x(n).$$

On attribue à tous les points la même masse $m_i = 1$

1.1 <u>*Calcul des écarts entre points*</u>

1.1.1 Calculer $nv(0,i)$ pour i entier variant de 1 à n.

1.1.2 Calculer $nv(i,i')$ pour i et i' entiers variant de 1 à n.

1.1.3 Déterminer l'indice $v(0)$ du plus proche voisin(ppv) du point M^0.

1.1.4 Déterminer l'indice $v(i)$ du plus proche voisin du point M^i ($i = 1,\ldots, n$)

1.2 <u>*Centre de gravité d'une classe*</u> : Soit p un entier inférieur à n; déterminer en fonction des nombres $x(i)$ la masse totale $m_{[p]}$ de la classe $[p]$ (formée par les $p+1$ points $M^0, M^1,\ldots, M^p$) et les coordonnées dans R^n du centre de gravité $M^{[p]}$ de cette classe.

1.3 <u>*Ecarts entre point et classe*</u> : Soit r : $p <_s r \le n$.

1.3.1 Calculer $nv([p],r)$; dire pour quelle valeur de r ce critère est minimum.

1.3.2 L'indice r restant fixé, dire pour quelle valeur de r' (assujettie à la condition $p <_s r' \le n$) est minimum le critère $nv(r',r)$.

1.3.3 Calculer le quotient $nv([p],r)/ nv(r',r)$ en fonction de p et des nombres $x(i)$.

1.3.4 En supposant $p <_s r <_s r' \le n$, dire lequel est le plus grand des deux nombres $nv([p],r)$ et $nv(r',r)$. On se souviendra que la suite des $x(i)$ est croissante.

1.4 <u>*Recherche des plus proches voisins*</u> : En vue de reprendre la comparaison faite au § 1.3.4, sans supposer $r < r'$ (en supposant seulement $p <_s r \le n$; $p <_s r' \le n$), on suppose désormais que pour $i = 1, \ldots, n$, on a :

$$x(i)^2 = (1 + i)^2/((1 + i)^2 + 1)$$

1.4.1 On note $nv([p],\infty)$ la valeur obtenue pour $nv([p],r)$ quand on remplace $x(r)$ par la valeur limite de $x(i)$ pour i tendant vers l'∞ ; comparer $nv([p],\infty)$ et $nv([p],r)$.

1.4.2 On note nvp la valeur obtenue quand dans la formule de $nv(r',r)$ on remplace $x(r)$ et $x(r')$ par la valeur $x(p)$: comparer nvp et $nv(r',r)$.

1.4.3 Calculer le quotient $nv([p],\infty)/nvp$. En déduire la position relative de $nv([p],r)$ et $nv(r,r')$.

1.4.4 On suppose qu'à une étape de la classification on ait pour ensemble des sommets : $S = \{[p],\{p+1\},\{p+2\},\ldots,\{n\}\}$. Déterminer sous cette hypothèse le plus proche voisin de chaque sommet.

1.5 *Construction de la C.A.H.* : Représenter l'arbre de la classification ascendante hiérarchique , en donnant pour chaque noeud son niveau. Pour la figure et le calcul numérique on pourra se borner au cas $n = 4$; mais on fera une description générale valant pour n quelconque.

2 *Deuxième exemple*

2.0 *Le nuage donné ; notations* : L'espace ambiant au nuage est la droite réelle R munie de la distance usuelle. L'ensemble des individus s'identifie à la suite des $(n+1)$ premiers entiers (comptés à partir de 0).

$$I = [n] = \{0,1,\ldots, n\} ;$$

(plus généralement on notera $[p] = \{0,1,2,\ldots, p\}$) ainsi le point M^i n'est autre que l'entier i ; en particulier le point M^0 est l'origine de la droite réelle R . La masse m_i du point M^i est A^i où $A = e^a$ désigne un nombre réel supérieur à 1.

$$N(I) = N([n]) = \{(i,A^i) \mid i = 0, 1,\ldots, n\}$$

Plus généralement quel que soit le nombre réel u (entier ou non, positif ou non) on pose $(M^u,m_u) = (u,A^u)$; et on définit l'écart $nv(u,v)$ entre deux entiers par la formule générale du § 0.

$$nv(u,v) = |u-v|^2\ (m_u\, m_v)/(m_u + m_v)$$

2.1 *Etude de la fonction $nv(u,v)$ de deux variables réelles* : Cette étude prépare celle du nuage proprement dit : ici il sera commode d'exprimer m_u par e^{au} plutôt que par A^u comme on on le fera au contraire à partir de la question 2.3.

2.1.1 Calculer $nv(u,v)$ en fonction des nombres réels u, v, a.

2.1.2 On pose $nv(0,x) = f(x)$; exprimer $nv(u,u+x)$ en fonction de a, u, f(x).

2.1.3 Calculer la dérivée f' de la fonction f(x). Quel est le signe de cette dérivée pour $x > 0$?

2.1.4 On suppose désormais $a > 3$, quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \leq -1$?

2.1.5 On astreint x à être un entier algébrique non nul (i.e. $x = 1, 2, 3, \ldots$, etc. ; ou $x = -1, -2, -3, \ldots,$) : $x \in Z' = Z-\{0\}$; quel est sur Z' le sens de la variation de f(x).

2.2 *Recherche du point le plus proche* : Désormais on considère uniquement les points du nuage [n].

Soit $i \in [n]$; déterminer $i' = v(i) \in [n]$ tel que $nv(i,i')$ soit aussi petit que possible (i étant différent de i')

Soit $i \in [n]$; et r tel que $0 \leq r <_s i$: déterminer i' dans [n] tel que $nv(i,i')$ soit minimum sous la contrainte $r \leq i'$.

2.3 *Centre de gravité d'une classe* : Soit p un entier positif inférieur à n ; on note (cf. § 2.0) $[p] = \{0, 1, \ldots, p\}$; et note $(M^{[p]}, m_{[p]})$ le couple formé de l'abscisse et de la masse du centre de gravité du sous-nuage formé des p + 1 premiers points du nuage N([n]).

2.3.1 Calculer la masse $m_{[p]}$ en fonction de A et p.

2.3.2 Calculer l'abscisse $M^{[p]}$ (du centre de gravité) et fonction de A et p. (N.B. : il n'est pas demandé d'effectuer les sommations que comporte $M^{[p]}$).

2.3.3 Placer $M^{[p]}$ par rapport à la suite des p + 1 premiers entiers ; i.e. dire dans lequel des intervalles (0,1), (1,2), ..., (n - 1, n) se trouve $M^{[p]}$. On pourra commencer par le cas p = 1, et procéder par récurrence.

2.3.4 On note $(M^{\pi(p)}, m_{\pi(p)}) = (p-1, 2A^p)$; et on note h un entier ≥ 1 : Comparer :

$$nv([p], p+h) \quad \text{et} \quad nv(\pi(p), p+h)$$

formule où, e.g. $nv(\pi(p), p+h) =$

$$|M^{\pi(p)} - M^{p+h}|^2 \, m_{\pi(p)} \, m_{p+h} / (m_{\pi(p)} + m_{p+h}) \; ; \quad \text{et où}$$

$A = e^a > e^3$ cf. § 2.1.4.

On ne demande pas pour l'instant de pousser le calcul plus que le requiert la comparaison.

2.4 *Recherche du plus proche voisin* : On conserve les notations de la question précédente ; et on suppose de plus $h \geq 2$.

2.4.1 Calculer explicitement $nv(\pi(p), p+h)$ en fonction de A, p, h.

2.4.2 Calculer en fonction de A, p, h, le rapport $nv(\pi(p), p+h)/nv(p+1, p+h)$: quelle est la limite de ce rapport quand p et h étant fixés, A tend vers l'∞ ?

2.4.3 Est-il possible de fixer A de telle sorte que quels que soient les entiers p et h, $(h \geq 2)$ le rapport calculé au § 2.4.2 se place du même côté de 1 que pour $A = \infty$.

2.4.4 On suppose désormais que $A = 100$; et qu'à une étape de la classification on ait pour ensemble des sommets $S = \{[p], \{p+1\}, \{p+2\}, \ldots, \{n\}\}$. Déterminer sous cette hypothèse le plus proche voisin de chaque sommet.

2.5 *Construction de la C.A.H.* : Représenter l'arbre de la C.A.H., (dans le cas $A = 100$). Pour la figure on pourra se borner au cas $n = 4$; mais on fera une description générale valant pour n quelconque.

3 *Troisième exemple*

3.1 *Question préliminaire*

On considère la fonction de trois variables réelles

$$f(x,y,z) = (xy/(x+y))\, z^2$$

on étudie la variation de cette fonction pour x, y, z *positifs*.

1°a) Calculer les dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z de f par rapport aux trois variables.

1°b) On suppose que x, y, z, Δx, Δy, Δz sont six nombres positifs ou nuls : plus précisément x, y, z sont strictement positifs ainsi que l'un au moins des trois nombres Δx, Δy, Δz. On note :

$$x' = x + \Delta x \; ; \; y' = y + \Delta y \; ; \; z' = z + \Delta z.$$

Comparer $f(x, y, z)$ et $f(x', y', z')$.

3.2 *Le nuage donné ; notations* : L'ensemble des individus est l'ensemble noté $]n]$ des n premiers entiers comptés à partir de 1.

$$I =]n] = \{1, \ldots, n\}.$$

plus généralement on notera $]p]$ la suite $\{1, \ldots, p\}$ pour p quelconque.

L'espace ambiant au nuage $N(]n])$ est l'espace usuel R^n, muni de la norme euclidienne définie par la somme des carrés des coordonnées :

$$\|x\|^2 = \Sigma\{(x_j)^2 \mid j = 1, \ldots, n\} \; ; \text{ où } x = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

Les points M^i sont les vecteurs de base de R^n : i. e. toutes les coordonnées M^i_j du point M^i sont nulles, exceptée la i-ème qui vaut 1. La masse m_i vaut A^i où A est un nombre réel positif différent de 1.

2°a) Calculer $nv(i,i')$ pour i et i' entiers variant de 1 à n.

2°b) Déterminer l'indice $v(i)$ du plus proche voisin du point M^i. On prendra garde que le résultat obtenu dépend de la valeur de A.

3.3 *Centre de gravité d'une classe* : Soit a et b deux entiers compris entre 1 et n, avec $1 \leq a \leq b \leq n$. On note $[a,b]$ la partie de $I =]n]$, formée des entiers i compris entre a et b :

$$[a,b] = \{i \mid i \in]n] \; ; \; a \leq i \leq b\}.$$

3°a) Calculer la masse $m_{[a,b]}$ de la classe $[a,b]$, en fonction de a, b, A.

3°b) Déterminer en fonction de a, b, A, j la j-ème coordonnée $M_j^{[a,b]}$ du centre de gravité de la classe [a,b]. On donnera en particulier les formules pour les cas où a = 1 ; et les cas où b = n .

3.4 *Ecart entre point et classe* : On a comme en 3° : $1 \le a \le b \le n$: on considère $i \in]n]$, tel que $i \notin [a,b]$. Calculer en fonction de i, a, b, A, la distance $\|M^{[a,b]} - M^i\|^2$ et l'écart nv([a,b],i).

On donnera en particulier les formules pour les cas où a = 1 ; et les cas où b = n.

3.5 On suppose dans cette question que A > 1 ; et que à une étape de la classification on ait pour ensemble des sommets :

$$S = \{]p], \{p+1\}, \{p+2\}, \ldots, \{n\}\}$$

(où]p] =]0,p] = {1,..., p} comme on l'a dit). Déterminer dans ces conditions le plus proche voisin de chaque sommet.

3.6 *Construction de la CAH sur]n]*

Partant de l'étape initiale où chaque point {i} constitue un sommet ; effectuer la CAH (par agrégations successives des sommets les plus proches). On devra prendre garde que le résultat dépend de la valeur de A. On donnera d'abord le résultat général de la classification avec la formule des niveaux des noeuds . On représentera ensuite l'arbre de CAH obtenu dans le cas n = 4 ; A = 2; ainsi que dans le cas n = 3 et A = 1/2 en calculant exactement les niveaux des noeuds.

4 *Explication du premier exemple*

4.1 *Calcul des écarts entre points* : On note i un entier compris entre 1 et n ; et i' un second entier, compris entre 1 et n, distinct de i .

4.1.1 $nv(0,i) = (m_0 m_i/(m_0 + m_i)) \|M^0 - M^i\|^2 = x(i)^2/2$

4.1.2 $nv(i,i') = (x(i)^2 + x(i')^2)/2$

4.1.3 nv(0,i) est une fonction croissante de x(i), donc le plus proche voisin de M^0 est M^1 ; en d'autres termes : $v(0) = 1$.

4.1.4 en comparant nv(0,i) à nv(i,i') on voit que v(i) = 0 , quel que soit i de 1 à n.

4.2 <u>*Centre de gravité d'une classe*</u> : On a évidemment $m_{[p]} = p+1$; le centre de gravité est donné par la formule :

$$M^{[p]} = \Sigma\{M^i \mid i = 0,\dots, p\}/(p+1)$$

en désignant par $x_i^{[p]}$ les coordonnées de $M^{[p]}$ (numérotées de $i = 1$ à $i = n$) il vient :

$$\forall\, i \in \{1,\dots, p\} : x_i^{[p]} = x(i)/(1+p) ; \forall\, i \in \{p+1,\dots, n\} : x_i^{[p]} = 0 ;$$

4.3 <u>*Ecart entre point et classe*</u> : Soit $r : p <_s r \le n$;

4.3.1 On applique la formule ; il vient :

$$nv([p],r) = \|M^{[p]} - M^r\|^2 \;(m_{[p]}\, m_r/(m_{[p]} + m_r))$$

$$= ((p+1)/(p+2))\; (x(r)^2 + (1/(p+1))^2 \Sigma\{x(i)^2 \mid i=1,\dots,p\})$$

$$= ((p+1)^2 x(r)^2 + \Sigma\{x(i)^2 \mid i=1,\dots,p\})(1/((p+1)(p+2))) ;$$

puisque $x(r)$ croît avec r ce critère est minimum pour $r=p+1$.

4.3.2 Soit $r' : p <_s r' \le n$; on a, si $r \ne r'$:

$$nv(r,r') = (x(r)^2 + x(r'))/2 ;$$

pour r fixé, cet écart est d'autant plus petit que r est plus petit ; compte tenu des conditions imposées à r', le minimum est donc atteint pour r' défini par :

$$r' = \text{si } (P+1 <_s r) \text{ alors } p+1 \text{ sinon } p+2.$$

4.3.3 Le quotient $nv([p],r)/nv(r',r)$ s'écrit sous la forme N/D avec :

$$N = 2\;(\Sigma\{x(i)^2 \mid i = 1,\dots, p\} + (p+1)^2\, x(r)^2) ;$$

$$D = (p+1)(p+2)(x(r)^2 + x(r')^2).$$

4.3.4 Le numérateur N est une somme de $2(p+(p+1)^2)$ termes qui tous sont inférieurs ou égaux à $x(r)^2$; le dénominateur D est une somme de $2(p+1)(p+2)$ termes tous supérieurs ou égaux à $x(r)^2$ et dont certains (les $x(r')^2$) sont strictement supérieurs ou égaux à $x(r)^2$. Comme d'autre part les nombres des termes de D est strictement supérieur à celui des termes de N (car $p+(p+1)^2 < (p+1)(p+2) = p+1+(p+1)^2$), on a $N <_s D$ donc :

$$nv([p],r) <_s nv(r',r) \;;\; (\text{sous l'hypothèse } p <_s r <_s r' \le n).$$

4.4 <u>*Recherche du plus proche voisin*</u>

4.4.1 Le rang r intervient dans le calcul de l'écart $nv([p],r)$ par le carré $x(r)^2$; quand r tend vers l'infini, $x(r)^2$ tend en croissant vers 1 ; et $nv([p],r)$ tend de même en croissant vers sa valeur limite $nv([p],\infty)$.

4.4.2 Si dans le second membre de la formule $nv(r,r') = (x(r)^2 + x(r')^2)/2$, on remplace r et r' par p les deux termes de la somme sont strictement diminués : donc $nv\, p < nv\,(r,r')$;

4.4.3 On procède comme au § 4.3.3 ; le quotient $nv([p],\infty)/nv\, p$ s'écrit N'/D', avec :

$$N' = (\Sigma\{x(i)^2 | i = 1,\ldots, p\} + (p+1)^2) ;$$

$$D' = (p+1)(p+2)\, x(p)^2 = p x(p)^2 + ((p+1)^2 + 1)\, x(p)^2 ;$$

comme au § 4.3.3, on montrera que le dénominateur est supérieur au numérateur : d'abord, il y a dans N' les p carrés $x(i)^2$ pour $(i = 1,\ldots, p)$; leur somme est dominée strictement pour $p\, x(p)^2$ qu'on trouve dans D'; reste dans N' le terme $(p+1)^2$; et dans D' le terme $(1 + (p+1)^2\, x(p)^2)$ qui est précisément égal à $(p+1)^2$: donc $N' <_s D'$:

$$nv([p],\infty) < nv\, p \text{ ; d'où } nv([p],r) < nv(r,r') ;$$

inutile de dire que la forme de $x(p)$ a été précisément choisie en vue du calcul de ce § : le résultat resterait valable avec une autre fonction croissante $x'(p)$ supérieure à $x(p)$ et tendant en croissant vers 1 pour p tendant vers l'infini.

4.4.4 On suppose que les $p+1$ premiers points $M^i (i = 0,\ldots, p)$ ont été agrégés pour former une classe $[p]$; et que les points $p+1,\ldots, r,\ldots, n$ subsistent comme des sommets isolés formés d'un seul élément. D'après 4.4.3, le plus proche voisin de $\{r\}$ (pour $r = p+1,\ldots, n$) est la classe $[p]$; et d'après .3.1, $[p]$ lui même a pour plus proche voisin $\{p+1\}$.

4.5 *Construction de la C.A.H.* : Initialement, chaque point M^i constitue un sommet isolé ; on a :

$$S_0 = \{\{0\}, \{1\}, \{r\},\ldots, \{n\}\}.$$

Pour tout $i \geq 1$, le plus proche voisin $v(i)$ est 0; et $v(0) = 1$ (cf. § .1.3) ; il n'y a qu'une seule paire de voisins réciproques la paire (0,1) ; c'est aussi la paire des deux sommets réalisant le minimum du critère de distance ; on agrège cette paire ; et on a pour ensemble des sommets (en notant : $[1] = \{0,1\}$) :

$$S_1 = \{[1], \{2\},\ldots, \{n\}\} ;$$

le noeud $[1]$ est situé au niveau :

$$nv(0,1) = x(1)^2/2 = ((1+1)^2/((1+1)^2 + 1))/2 = 2/5 ;$$

Pour poursuivre la construction ascendante à partir de S_1, on est dans le cadre du § 4.4.4 : les deux sommets les plus proches sont [1] et {2} ; on les agrège, d'où :

$S_2 = \{[2],\{3\},\{4\},\ldots,\{n\}\}$; avec pour niveau $\nu[2]$:

$nv([1],2) = (x(2)^2(1+1)^2 + x(1)^2)/((1+1)(1+2)) = 11/15$

En général si l'on suppose qu'on soit parvenu à l'étape p avec :

$S_p = \{[p],\{p+1\},\ldots;\{n\}\}$;

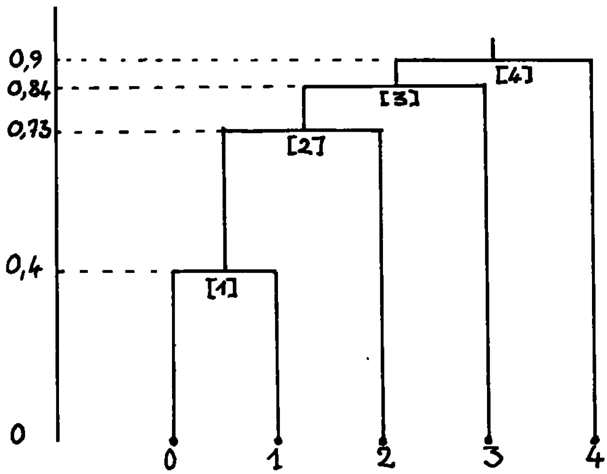
l'agrégation se fera entre [p] et {p+1}, conformément aux calculs du § 4.4.4. Le noeud [p] est créé par agrégation de [p-1] et {p} à un niveau calculé comme au § 4.3.1 :

$$nv([p-1],p) = (p(p+1))^{-1}(p^2x(p)^2 + x(1)^2 + x(2)^2 + \ldots + x(p-1)^2)$$
$$= (p(p+1))^{-1}(p+p^2-(p^2/(1+(p+1)^2)) - \Sigma\{1/(1+i^2) \mid i=1,..,p-1\});$$

Les niveaux forment une suite croissante tendant vers 1 quand p tend vers l'infini : les 4 premiers sont :

$2/5 = 0,4$; $11/15 \approx 0,73$; $16/17 \approx 0,84$; # $0,9$.

D'où le graphique ci-dessous :



5 Explication du deuxième exemple

5.1 Etude de la fonction nv(u,v) de deux variables réelles

5.1.1 $nv(u,v) = (u-v)^2\, e^{a(u+v)}/(e^{au}+e^{av})$;

5.1.2 $nv(u,u+x) = x^2\, e^{a(x+2u)}/(e^{au}+e^{au+ax})$

$= x^2\, e^{ax} e^{au}/(1+e^{ax})$;

$nv(x,0) = f(x) = x^2\, e^{ax}/(1+e^{ax})$; d'où :

$nv(u,u+x) = f(x)\, e^{au}$.

5.1.3 $f(x) = x^2\, e^{ax}/(1 + e^{ax}) = x^2/(1 + e^{-ax})$;

$$f'(x) = (2x/(1 + e^{-ax})) + (ax^2\, e^{-ax}/(1+e^{-ax})^2).$$

$$= x(2 + 2\, e^{-ax} + ax\, e^{-ax})/(1 + e^{-ax})^2 \;;$$

il est clair que pour x positif, $f'(x)$ est positif, comme somme de termes positifs.

5.1.4 On peut récrire $f'(x)$:

$$f'(x) = x(2 + (2 + ax)\, e^{-ax})/(1 + e^{-ax})^2 \;;$$

sous les hypothèses faites ($x < -1$, $a > 3$) on a $ax < -3$; donc le facteur :

$$(2 + (2 + ax)\, e^{-ax})$$

est la somme de 2 et d'un terme négatif produit de $(2+ax)$ qui est inférieur à -1 et de e^{-ax}, positif supérieur à e^2 donc *a fortiori* à 2 ; ce facteur est donc négatif ; comme x est négatif et $(1 + e^{-ax})^2$ positif, $f'(x)$ est positif. Pour $x < -1$ (sous la condition $a > 3$), la fonction $f(x)$ décroît donc quand x tend vers $-\infty$.

Faisons une étude plus complète de la fonction $f(x)$: cette fonction n'est jamais négative ; elle ne s'annule que pour $x = 0$; au voisinage de $x = 0$, $f(x)$ est équivalent à $x^2/2$ (car $e^{-ax} = 1$) ; pour x tendant vers $+\infty$, $f(x)$ est équivalent à x^2 : ceci suffit à donner l'allure parabolique de $f(x)$ pour $x > 0$. Pour x tendant vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers zéro comme $x^2\, e^{ax} = x^2\, e^{-a|x|}$. La seule difficulté est de raccorder la branche asymptotique ($x \to -\infty$) avec l'arc de parabole $x \approx 0$. On démontrera que pour $x < 0$, $f(x)$ n'a qu'un maximum unique ; autrement dit que $f'(x)$ ne s'annule que pour une seule valeur négative de x. Or pour $x < 0$, le signe de $f'(x)$ n'est autre que l'opposé du signe du facteur :

$$\varphi(x) = (2 + (2 + ax)\, e^{-ax})$$

Si ax est supérieur à -2, ce facteur est évidemment positif (comme somme de deux termes positifs) ; pour $a < -2$, ce facteur a une dérivée positive :

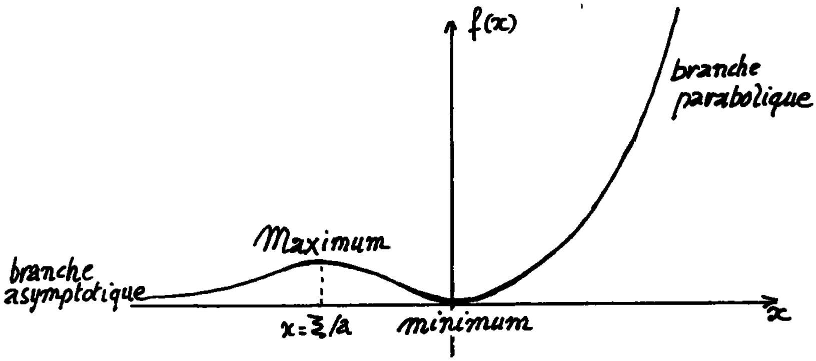
$$\varphi'(x) = -a(1 + ax) \;;\; ax < -2 \Rightarrow \varphi'(x) > a.$$

Pour $x \to -\infty$, $\varphi(x) \approx ax\, e^{-ax} = -|ax|\, e^{|ax|} < 0$; pour ax variant de -2 à $-\infty$, $\varphi(x)$ décroît donc constamment et s'annule une fois pour $ax = \xi$;

ax	$-\infty$		ξ		-2		0
$\varphi'(x)$				+		//////	
$\varphi(x)$		−	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	−		−	

Il est facile de calculer approximativement ξ en posant : $\xi = -2 - \varepsilon$; il vient :

$$0 = \varphi(\xi/a) = (2 - \varepsilon e^{2+\varepsilon}) \ ; \ 2 = \varepsilon e^{2+\varepsilon} \ ; \ \varepsilon \# \ 2e^{-2}$$



5.1.5 Sens de la variation de $f(x)$ sur $Z' = Z-\{0\}$: Du côté négatif de Z' il est clair que $f(x)$ est une fonction croissante (i.e. $\Delta x > 0 \Rightarrow \Delta f(x) > 0$) : comme sur la toute demi-droite $(-\infty,-1)$ où $f'(x)$ est positive ; de même du côté positif $f(x)$ est croissante ; d'autre part, quand on passe de $x=-1$ à $x = 1$, x croît également car $f(1)/f(-1) = (1+e^{a})/(1+e^{-a}) > 1$; donc *restreinte* à Z', $f(x)$ est strictement croissante.

5.2 Recherche du point le plus proche

5.2.1 Conformément au § 5.1.2 on pose :

$$nv(i,i') = e^{ai} f(i'-i) \ ;$$

rendre $nv(i,i')$ minimum pour i donné, c'est donc rendre $f(i'-i)$ minimum : comme i' est dans $[n]-\{i\}$, $(i'-i)$ doit être un entier algébrique différent de 0 et appartenant à l'intervalle $(-i,n-i)$; d'après le § 5.1.5, on doit prendre $(i'-i)$ aussi petit que possible : c'est-à-dire que si i est non nul on prend $(i'-i) = -i$; $i' = 0$; si $i = 0$ on prend $(i'-i) = i' = 1$;

$$v(0) = 1 \ ; \ \forall\, i \in \{1,\ldots, n\} : v(i) = 0.$$

5.2.2 On assujettit i' à une contrainte supplémentaire : $r \le i'$, (où : $0 \le r <_s i$). Comme au § 5.2.1 on prendra i' aussi petit que possible : donc $i' = r$.

5.3 Centre de gravité d'une classe

5.3.1 La masse $m_{[p]}$ de la classe $[p]$ n'est autre que la somme d'une progression géométrique de raison $A = e^{a}$:

$$m_{[p]} = 1 + \ldots + A^{p} = (A^{p+1} - 1)/(A - 1).$$

5.3.2 Calcul de l'abscisse $M^{[p]}$; on a :

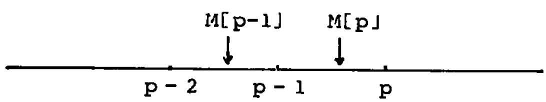
$$M^{[p]} = \Sigma\{iA^i | i \in [p]\}/m_{[p]};$$

bien que l'énoncé du § 2.3.2 ne le demande pas, on peut exprimer cette somme ; car :

$A^{-1}\Sigma\{iA^i | i = 0,\ldots,p\} = (d/dA)(\Sigma\{A^i | i = 0,\ldots, p\})$; il vient :

$$M^{[p]} = A(pA^{p+1} - (p+1)A^p + 1)/((A-1)(A^{p+1} - 1)).$$

5.3.3 Pour placer le centre de gravité $M^{[p]}$ par rapport à la suite des entiers, commençons, comme nous y invite l'énoncé par le cas $p = 1$: $M^{[1]}$ est le centre de gravité (barycentre) des deux points 0 et 1 affectés des masses respectives 1 et A : $M^{[1]}$ est donc intérieur au segment (0,1). On va noter par récurrence que $M^{[p]}$ est intérieur au segment $(p-1,p)$. En effet, $M^{[p]}$ est le barycentre de $M^{[p-1]}$, affecté de la masse $(1 + A + \ldots + A^{p-1})$ et de p affecté de la masse A^p. Il est clair, puisque $A > 3$



($A \geq 2$ suffirait) que A^p dépasse $(1+A+\ldots+A^{p-1})$: donc $M^{[p]}$ est situé entre $M^{[p-1]}$ et p, plus près de ce dernier point que de $M^{[p-1]}$: ceci suffit à établir que $M^{[p]} \in\,]p-1, p[$ si $M^{[p-1]} \in\,]p-2, p-1[$.

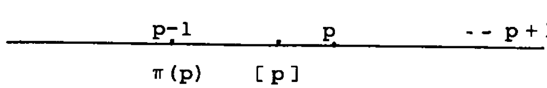
5.3.4 On vérifie sans peine sur la formule :

$$nv(a,b) = (m_a m_b/(m_a + m_b)) \| M^a - M^b \|^2,$$

que nv(a,b) augmente quand on augmente l'une des deux masses m_a, m_b ou la distance entre M^a et M^b. Il en résulte que

$$nv([p], p+h) < nv(\pi(p), p+h) ;$$

en effet on a : $\| M^{[p]} - M^{p+h} \| < \| M^{\pi(p)} - M^{p+h} \|$ (cf. figure) ; et pour la masse :



$$m_{[p]} = (A^p - 1)/(A-1) < A^p/(A-1) < 2A^p = m_{\pi(p)},$$

(car A étant supérieur à e^3, $(A-1)^{-1}$ est inférieur à 2).

5.4 *Recherche des plus proches voisins*

5.4.1 On a : $nv(\pi(p), p+h) = 2(h+1)^2 A^p/(1+2A^{-h})$;

5.4.2 On a : $nv(p+1, p+h) = (h-1)^2 A^{p+1}/(1+A^{1-h})$;
d'où pour le rapport demandé :

$$nv(\pi(p), p+h)/nv(p+1,p+h) = 2((h+1)/(h-1))^2 A^{-1}((1+A^{1-h})/(1+2A^{-h})) ;$$

quand $A \to +\infty$, ce rapport équivalent à A^{-1}, tend vers 0.

5.4.3 Pour A infini, le rapport est nul : on désire montrer que pour A suffisamment grand, le rapport est inférieur à 1, quel que soit $h \geq 2$. On a un premier facteur $2((h+1)/(h-1))^2$, qui décroît avec h (car en bref le rapport $(h+1)/(h-1)$ décroît vers 1) et dont le maximum est donc 18 (obtenu pour h = 2). Le deuxième facteur A^{-1} est évidemment celui sur lequel nous comptons pour assurer au rapport le comportement souhaité ! Le troisième facteur est un quotient de deux termes : le numérateur est supérieur au dénominateur, car A est supérieur à 2 ; toutefois le dénominateur est supérieur à 1, et le numérateur inférieur à $(1+A^{-1})$ (car $2 \leq h$) ; donc ce troisième facteur est inférieur à 2 (car on a déjà posé $A > 1$). Ainsi le produit des facteurs 1 et 3 (pour $h \geq 2$) est majoré par 36 : en prenant $A > 36$ on aura sûrement un rapport inférieur à 1.

5.4.4 Puisque A = 100 ; on a $A \geq 36$ d'où l'inégalité :

$$h \geq 2 \Rightarrow nv([p],p+h) < nv(p+1,p+h),$$

obtenue en combinant les résultats des §§ 5.3.4 et 5.4.3 pour intercaler $nv(\pi(p), p+h)$ entre les deux niveaux à comparer. On détermine aussi sans peine $v(p+h)$, le plus proche voisin de $\{p+h\}$, pour $h \geq 2$: car d'une part, formé des sommets réduits à 1 point (i.e. $\{p+1\},\ldots,\{n\}$) le plus proche de $\{p+h\}$ est $\{p+1\}$, d'après le § 5.2.2 ; mais l'inégalité précédente montre que [p] est encore plus proche donc :

$$h \geq 2 \Rightarrow v(p+h) = [p]$$

Le plus proche voisin de [p] est évidemment $\{p+1\}$; car en prenant $\{p+h\}$ (avec $h \geq 2$) au lieu de $\{p+1\}$, on augmente à la fois la masse du point et sa distance à $M^{[p]}$: donc on augmente nv ; d'où :

$$v([p]) = p+1$$

Quant à $v(p+1)$ on doit choisir entre [p] ou $\{p+2\}$; qui est d'après le § 5.2.2, le sommet le plus proche parmi ceux réduits à un point; car on a :

$$nv([p],p+1) < nv([p],p+2) < nv(p+1,p+2) ;$$

(l'inégalité de gauche parce que $v([p]) = p+1$; celle de droite parce que $v(p+2) = [p]$) d'où :
$v(p+1) = [p]$.

5.5 *Construction de la C.A.H.* : La construction procède exactement comme au § 4.5, pour le premier exemple. Initialement l'ensemble des sommets est

$$S_0 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\} ;$$

les étapes suivantes sont : ;

$$S_1 = \{[1], \{2\}, \{3\}, \ldots, \{n\}\}$$

$$\ldots\ldots$$

$$S_p = \{[p], \{p+1\}, \{p+2\}, \ldots, \{n\}\} .$$

Le dessin de l'arbre est le même qu'au § 4.5 ; à ceci près que les niveaux d'agrégation ne tendent pas vers 1 ; mais croissent au contraire très rapidement comme A^p.

6 *Corrigé de l'exemple 3*

6.1 *Question préliminaire* :

$$f(x,y,z) = (xy/(x+y))z^2$$

6.1.a $$f'x = (y^2/(x+y)^2)z^2 > 0$$

$$f'y = (x^2/(x+y)^2)z^2 > 0$$

$$f'z = 2z(xy/(x+y)) > 0 \text{ car } x,y,z \text{ sont positifs}$$

6.1.b soit $x' = x + \Delta x$, $y' = y + \Delta y$, $z' = z + \Delta z$

où x,y,z sont positifs, Δx, Δy, Δz positifs ou nuls, l'un des trois étant strictement positif.

$$f(x',y',z') \geq f(x',y',z) \geq f(x',y,z) \geq f(x,y,z)$$

l'une au moins des trois inégalités est stricte ;

donc $f(x',y',z') > f(x,y,z)$

6.2 *Ecarts entre points*

6.2.a $$nv(i,i') = 2A^iA^{i'}/(A^i+A^{i'}) = 2A^i/(A^{i-i'}+1)$$

6.2.b $nv(i,i')$ est d'après la question préliminaire, une fonction croissante de $A^{i'}$.

si $A < 1$, $A^{i'}$ est une fonction décroissante de i' et $nv(i,i')$ sera minimum si i' est maximum, c. a. d.

si $i \neq n$, $v(i) = n$ et $v(n) = n - 1$.

si $A > 1$, $A^{i'}$ est une fonction croissante de i' et $nv(i,i')$ sera minimum si i' est minimum, c. a. d.

si $i \neq 1$ $v(i) = 1$ et $v(1) = 0$

6.3 *centre de gravité d'une classe*

6.3.a masse $m_{[a,b]}$ de la classe $[a,b]$:

$$m_{[a,b]} = A^a + A^{a+1} + \ldots + A^b = A^a(A^{b-a+1}-1)/(A-1)$$

6.3.b Centre de gravité $M^{[a,b]}$ de la classe [a,b] :

$$M^{[a,b]} = \Sigma\{m_i\ M^i \mid i \in [a,b]\}/m_{[a,b]}$$

si $j < a$ ou $j > b$ $M_j^{[a,b]} = 0$

si $j \in [a,b]$ $M_j^{[a,b]} = A^j/m_{[a,b]} = A^j(A-1)/(A^a(A^{b-a+1}-1))$

dans le cas où $[a,b] =]b]$, pour $j \leq b$,

$$M_j^{]b]} = A^{j-1}(A-1)/(A^b-1)$$

dans le cas où $[a,b] = [a,n]$, pour $j \geq a$,

$$M_j^{[a,n]} = A^j(A-1)/(A^n(A^{b-n+1}-1))$$

6.4 <u>Ecarts entre point et classe</u> : Soit $i \in]n]$ tel que $i \notin [a,b]$

$$\|M^{a,b} - M^i\|^2 = 1 + \Sigma\{(A^j/m_{[a,b]})^2 \mid j \in [a,b]\}$$

$$= 1 + \Sigma\{(A^j)^2 \mid j \in [a,b]\}/m_{[a,b]}^2$$

$$= 1 + (A^{2a}((A^2)^{b-a+1}-1)/(A^2-1))((A-1)^2/(A^{2a}(A^{b-a+1}-1)^2))$$

$$= ((A+1)(A^{b-a+1}-1)+(A^{b-a+1}+1)(A-1))/((A+1)(A^{b-a+1}-1))$$

$$= 2(A^{b-a+2}-1)/((A+1)(A^{b-a+1}-1))$$

et l'écart $nv([a,b],i) = (A^i m_{[a,b]}/(A^i + m_{[a,b]}))\|M^{[a,b]}-M^i\|^2$

$$= 2A^{i+a}(A^{b-a+2}-1)/((A+1)(A^i(A-1)+A^a(A^{b-a+1}-1)))$$

dans le cas où $[a,b] =]b]$, pour $i > b$

$$nv(]b],i) = 2A^i(A^{b+1}-1)/((A+1)(A^{i-1}(A-1)+(A^{b-a+1}-1)))$$

dans le cas où $[a,b] = [a,n]$, pour $i < a$

$$nv([a,n],i) = 2A^a(A^{n-a+2}-1)/((A+1)(A-1+A^{a-i}(A^{n-a+1}-1)))$$

6.5a On suppose que $A > 1$ et que à une étape de la classification $S = \{]p], \{p+1\}, \ldots, \{n\}\}$; cherchons le plus proche voisin de chaque sommet :

α - Le plus proche voisin de $]p]$ est $\{p+1\}$. En effet $nv(]p],i) = (m_{]p]}m_i/(m_{]p]}+m_i))\ \|M^{]p]} - M^i\|^2$

or $\|M^{]p]}-M^i\|^2$ ne dépend pas de i, et d'après 6.1, $nv(]p],i)$ est une fonction croissante de m_i, donc de i puisque $A>1$ $nv(]p],i)$ est donc minimum pour i minimum appartenant à S, c. à.d. $i = p+1$.

β - Le plus proche voisin de $\{p+1\}$ est $]p]$. En effet, le point $i' > p+1$ qui minimise $nv(i,i')$ est $i' = p+2$; il reste à comparer $nv(p+1, p+2) = 2A^{p+2}/(1+A)$

et $nv(]p], p+1) = 2A^{p+1}(A^{p+1}-1)/(A+1)(A^{p+1}-1)$

$$= 2A^{p+1}/(A+1) < 2A^{p+2}/(A+1)$$

donc comme $A > 1$, $nv(]p],p+1) < nv(p+1\ ,\ p+2)$.

γ - Si $i \geq p+2$, $nv(i,i')$ est minimum pour $i' = p+1$; le plus proche voisin de i est donc soit $\{p+1\}$, soit $]p]$. En δ , nous regarderons de plus près ; mais de toutes façons $\forall\ i \geq p+2\ \ nv(]p],\ p+1) < nv(]p],\ i)$

$$\text{et } nv(]p],\ p+1) < nv(p+1\ ,p+2) < nv(p+1,\ i)$$

donc $\quad nv(]p],\ p+1) < \min\{nv(p+1,i), nv(]p],i) \mid i = p+2,\ldots,n\}$

les deux voisins les plus proches sont donc toujours $\{p+1\}$ et $]p]$.

δ - Regardons, dans quels cas le p.p.v. de i est $]p]$,

c. à d. quand $nv(]p],i) < nv(p+1,i)$

c. à d. $2A^i(A^{p+1}-1)/((A+1)(A^i-A^{i-1}+A^p-1)) < 2A^iA^{p+1}/(A^i+A^{p+1})$

ou encore $(A^{p+1}-1)(1+A^{i-p-1}) < (A+1)(A^i-A^{i-1}+A^p-1)$

ou encore $Q(A) = A^i - A^{i-1} - A^{i-2} + A^{i-p-2} + A^{p-1} - 1 > 0$

$$Q(A) = A^{i-2}(A^2-A-1) + A^{i-p-2} + A^{p-1} - 1$$

. si $\quad (A^2-A-1) > 0$ c. à d. si $A > (1+\sqrt{5})/2$

$Q(A)$ est toujours positif (car $A^{p-1} \geq 1$ dès que $p \geq 1$) et donc le p.p.v. de i est $]p]$, pour tout $\{i\} \in S$.

. si $\quad A = 1 \quad Q(1) = 0$

regardons comment varie $Q(A)$ au voisinage de 1 :

soit $A = 1+\varepsilon$.

$$A^k \sim 1 + k\varepsilon + (k(k-1)/2)\ \varepsilon^2$$

$Q(A)$ est alors équivalent à $(\varepsilon^2/2)((i-1)i-(i-1)(i-2)-(i-2)(i-3)$ $+(i-p-2)(i-p-3)+(p-1)(p-2)) = (\varepsilon^2(2)(-2i(p-1)+2p(p+1))$

donc au voisinage de 1, $Q(A) > 0$ pour $i < p(p+1)/(p-1)$

et $Q(A) < 0$ pour $i > p(p+1)/(p-1)$

par exemple pour $p = 3 \quad i = 7$

si $Q(A) < 0$, le p.p.v. de i n'est pas $]p]$ mais $\{p+1\}$, ce qui, comme on l'a vu en γ , ne change pas la C.A.H. .

6.5b Si maintenant $A < 1$, on suppose que à une certaine étape de la classification $S = \{\{1\},\ \{2\}\ ,\ldots,\ \{n-p\},[n-p+1,n]\}$;

cherchons le plus proche voisin de chaque sommet :

$$nv(n-i+1,n-i'+1) = 2A^{n-i+1}A^{n-i'+1}/(A^{n-i+1}+A^{n-i'+1})$$
$$= A^{n+1}2a^i\ a^{i'}/(a^i + a^{i'})$$

si on pose $a = 1/A$

$$nv([n-p+1,n],n-i+1) = 2A^{n-p+1}(A^{p+1}-1)/((A+1)(A-1+A^i-A^{i-p})$$
$$= A^{n+1}\ 2a^i(a^{p+1}-1)/(a+1)(a^i - a^{i-1} + a^p-1)$$

comme $A < 1$, $a > 1$ et on peut appliquer les résultats de 6.5.a :

. le p.p.v. de $[n-p+1,n]$ est $n-(p+1)+1 = n-p$

. le p.p.v. de $\{n-p\}$ est $[n-p+1,n]$ ou $\{n-p-1\}$;

en fait c'est $[n-p+1,n]$ car pour $i = p+1$

$$2a^i(a^{p+1}-1)/((a+1)(a^i-a^{i-1}+a^p-1)) < 2a^i a^{p+2}/(a^i+a^{p+2})$$

(résultat du 6.5 a)

et donc $nv([n-p+1,n],n-p) < nv(n-p,n-p-1)$

. si $i \geq p+2$, $nv(n-i+1,n-i'+1)$ est minimum pour $i' = p+1$. Le p.p.v. de $\{n-i+1\}$ est donc soit $\{n-p\}$, soit $[n-p+1,n]$.

Mais de toutes façons pour $i \geq p+2$

$$nv([n-p+1,n],n-p) < nv([n-p+1,n],\ n-i+1)$$

et $$nv([n-p+1,n],n-p) < nv(n-i+1\ ,\ n-p)$$

donc les deux voisins les plus proches sont $\{n-p\}$ et $[n-p+1,n]$

6.6 *Construction de la C.A.H.*

6.6.a cas $A > 1$

au début, $S_0 = \{\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}\}$.

étape 1 : D'après 6.2.b, les 2 p.p.v. sont $\{1\}$ et $\{2\}$, et donc $S_1 = \{]2],\{3\},\ldots,\{n\}\}$ et $nv = nv(1,2) = 2A^2/(1+A)$

étape 2 : On est dans le cadre de la question 6.5.a ; les 2 p.p.v. sont $]2]$ et $\{3\}$; $S_2 = \{]3],\{4\},\ldots,\{n\}\}$ et $nv = nv(]2],\ 3)$;

$$nv = 2A^4(A^3-1)/((A+1)(A^4-A)) = 2A^3/(1+A)$$

et ainsi de suite ; *étape p* : $S_p = \{]p+1],\{p+2\},\ldots,\{n\}\}$;

$$nv = nv(]p],p+1) = 2A^{p+2}(A^{p+1}-1)/((A+1)(A^{p+2}-A)) = 2A^{p+1}/(A+1)$$

jusqu'à l'étape $n-1$ où $S_{n-1} = \{]n]\}$;

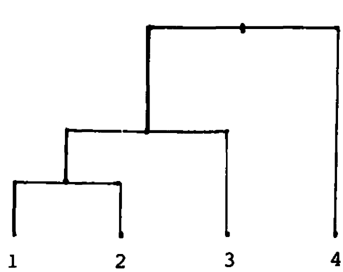
à chaque étape le niveau est multiplié par A.

cas A = 2, n = 4.

étape 1 : $S_1 = \{]2],\{3\},\{4\}\}$; $nv = 8/3$

étape 2 : $S_2 = \{]3],\{4\}\}$; $nv = 16/3$

étape 3 : $S_3 = \{]4]\}$; $nv = 32/3$.



6.6.b Cas $A < 1$.

Comme on l'a vu, en 6.5.b, tout se passe comme dans le cas précédent si on remplace i par $n-i+1$.

au début : $S_0 = \{\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}\}$

étape 1 : D'après 6.2.b les 2 p.p.v. sont $\{n-1\}$ et $\{n\}$,

$S_1 = \{\{1\},\ ,\ldots,\{n-2\},[n-1,n]\}$

$nv = nv(n-1,n) = 2A^n/(1/A)$

étape 2 : On est dans le cadre de 6.5.b, les 2 p.p.v. sont $[n-1,n]$ et $\{n-2\}$; $S_2 = \{\{1\},\ldots,\{n-3\},[n-2,n]\}$ et

$nv = nv([n-1,n],\ n-2) = 2A^{n-1}(A^3-1)/((A+1)(A^3-1)) = 2A^{n-1}/(A+1)$

et ainsi de suite à l'*étape p* : $S_p = \{\{1\},\ldots,[n-p+1,n]\}$ et

$nv = nv([n-p+1,n],n-p) = 2A^{n-p+1}/(A+1)$

jusqu'à l'étape n - 1 $S_{n-1} = \{\,]n]\}$ $nv = 2A/(A+1)$

à chaque étape le niveau est divisé par A.

Cas $n = 3$, $A = 1/2$.

étape 1 : $S_1 = \{\{1\},[2,3]\}$ nv = 1/6

étape 2 : $S_2 = \{\,]3]\}$ nv = 1/3.