LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

A. BENER

Décomposition des interactions dans une correspondance multiple

Les cahiers de l'analyse des données, tome 7, nº 1 (1982), p. 25-32

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1982__7_1_25_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. VII - 1982 - n° 1 - p. 25-32

DÉCOMPOSITION DES INTERACTIONS DANS UNE CORRESPONDANCE MULTIPLE [INTER. CORR. MULT.]

par A. Bener (1)

0 *Introduction ; exemple du cas ternaire*

A la différence des tableaux de correspondance binaire (tableaux rectangulaires usuels), les tableaux de correspondance multiple ne se prêtent pas à une décomposition algébrique exhaustive et ordonnée. Il est de règle, notamment dans l'étude des questionnaires et dans celle des correspondances binaires évoluant au cours du temps, d'analyser divers tableaux rectangulaires construits à partir du tableau multiple des données : mais cette méthode si féconde soit-elle n'est qu'imparfaite et il demeure utile de la placer dans le cadre général de la décomposition des interactions.

Après avoir rappelé des résultats classiques relatifs au cas ternaire (tableaux parallélépipédiques) nous donnons un lemme élémentaire (§ 1)qui permet de construire simplement une décomposition canonique des interactions dans le cas multiple le plus général ; cette décomposition se rattache à des calculs classiques dans l'usage du χ^2 ou en analyse de la variance (§ 2) ; et elle peut guider les analyses de tableaux binaires auxquelles se ramènent les calculs effectifs (§ 3).

Quant aux notations, pour l'exemple du cas ternaire ainsi que presque partout dans la suite nous suivrons de près les conventions usuelles pour les questionnaires.

Soit donc $Q = \{q1,q2,q3\}$; et $Jq1$, $Jq2$, $Jq3$ trois ensembles finis qu'on appellera les ensembles Jq (définis pour $q \in Q$). On suppose donné sur chaque Jq une loi de référence p_{Jq} (il y a donc trois blocs p_{Jq1}, p_{Jq2}, p_{Jq3}) ; d'où une loi produit p_S sur S :

$$S = \Pi\{J_q | q \in Q\} = Jq1 \times Jq2 \times Jq3.$$

$$p_S = p_{Jq1} \times p_{Jq2} \times p_{Jq3} \cdot$$

Chaque espace R^{Jq} est muni d'une structure euclidienne par le produit scalaire usuel :

$$<\varphi^{Jq}, \psi^{Jq}> = \Sigma\{\varphi^j \psi^j \; pj \mid j \in J_q\} \;;$$

Et de même pour R^S, produit tensoriel des trois espaces R^{Jq} :

$$<\varphi^S, \psi^S> = \Sigma\{\varphi^s \psi^s \; p_s | s \in S\}$$

où pour $s = (j1,j2,j3)$ on a $p_s = p_{j1} \cdot p_{j2} \cdot p_{j3}$ (selon la définition de la loi produit).

---

(1) Docteur 3° cycle. Assistant à l'université technique d'Istanbul.

Supposons qu'on fasse choix dans chacun des R^{Jq} d'une base de fonctions orthonormée (pour la structure euclidienne ci-dessus définie).

$$\mathrm{Base}(R^{Jq}) = \{\varphi^{Jq}_{\alpha q} | \alpha q = 0,\ldots, \mathrm{Card}Jq - 1\},$$

avec pour première fonction φ^{Jq}_0, la fonction constante et égale à 1; les autres fonctions de base étant alors des fonctions de moyenne nulle (puisqu'elles sont orthogonales à φ^{Jq}_0). On a alors une base dans R^S dont les fonctions sont les produits des fonctions de base des R^{Jq}; afin d'avoir des notations complètes on note :

$$Aq = \{0,\ldots, \mathrm{Card}\, Jq - 1\} \ ; \quad AQ = Aq1 \times Aq2 \times Aq3.$$

$$\alpha Q = (\alpha q1, \alpha q2, \alpha q3) \in AQ \ ;$$

$$\varphi^S_{\alpha Q} = \varphi^{Jq1}_{\alpha q1} \cdot \varphi^{Jq2}_{\alpha q2} \cdot \varphi^{Jq3}_{\alpha q3} \ ;$$

et les fonctions de base de R^S ne sont autres que les $\varphi^S_{\alpha Q}$, obtenus pour αQ parcourant AQ (produit des ensembles d'indices afférents à chacun des Jq).

Il importe de remarquer que parmi les fonctions $\varphi^S_{\alpha Q}$ (fonctions de $s \in S$), toutes ne dépendent pas explicitement des trois composantes q1, q2, q3 de s. En particulier la fonction φ^S_{000} n'est autre que la fonction constante et égale à 1 sur S (comme produit des fonctions 1 φ^{Jq}_0 considérées sur chacun des trois ensembles facteurs). En général une fonction $\varphi^S_{\alpha Q}$ dépend explicitement de la composante q si l'indice αq est non nul. Et il y a huit familles de fonctions $\varphi^S_{\alpha Q}$ définies chacune par la condition de dépendre explicitement des composantes q appartenant à une partie donnée a de Q et d'elles seulement : par exemple si $a = \emptyset$, la famille associée à a comprend la seule fonction 1, φ^S_{000} ; si $a = \{q1, q3\}$, il s'agit des fonctions $\varphi^S_{\alpha Q}$ pour lesquelles $\alpha Q = \alpha q1, 0, \alpha q3$ avec $\alpha q1 \neq 0$, $\alpha q3 \neq 0$; etc. .

Une fonction nulle quelconque ψ^S sur S s'exprime de manière unique en combinaison linéaire des fonctions de base ; on note :

$$\psi^S = \Sigma\{\psi^{\alpha Q}\, \varphi^S_{\alpha Q} | \alpha Q \in AQ\}$$

où les $\psi^{\alpha Q}$ sont des coefficients (nombres réels) qu'on calcule comme de règle, par produit scalaire :

$$\psi^{\alpha Q} = \langle \psi^S, \varphi^S_{\alpha Q} \rangle = \Sigma\{\psi^s . \varphi^s_{\alpha Q} . p_s | s \in S\}.$$

Dans l'ensemble des termes de la décomposition de ψ^S on peut distinguer ceux qui dépendent explicitement d'une partie a ($a \subset Q$) des coordonnées et de celles-ci seulement ; on note :

$$\mathrm{pr}(a)\psi^S = \Sigma\{\psi^{\alpha Q}\, \varphi^S_{\alpha Q} | \alpha Q \in AQ \ ; \ \alpha q = 0 \Leftrightarrow q \in Q - a\} \ ;$$

si en particulier a est la partie vide ($a = \emptyset$), $\mathrm{pr}(\emptyset)\psi^S$ est la fonction constante et égale à ψ^{000}, coefficient qui n'est autre que la moyenne de la fonction ψ^S, pour la loi de référence p_S (produit des lois p_{Jq}). Il importe de savoir que les 8 termes $pr(a)\psi^S$ ne dépendent que de ψ^S et de la loi de référence p_S et non des fonctions bases particulières choisies dans les R^{Jq} (pourvu que comme on l'a demandé, la base commence par une fonction d'indice 0 qui est la constante 1). Et la décomposition en huit termes :

$$\psi^S = \Sigma\{pr(a)\ \psi^S | a \in Q\},$$

peut être construite rapidement, sans calculer explicitement les coefficients $\psi^{\alpha Q}$ relatifs à une base.

L'interprétation de ce calcul est au plus clair, si on considère ψ^S comme densité relativement à p_S d'une mesure sur S (système des masses) ; cas qui est évidemment général , et pour lequel nous donnerons donc les formules ; réservant les démonstrations à la suite de l'exposé où nous considérerons une correspondance multiple quelconque (et non seulement, comme dans l'introduction, une correspondance ternaire).

Soit donc μ_s une mesure sur S (qu'on peut se représenter comme une loi de probabilité ; mais il importe peu que μ_s soit positive, et de masse totale 1) ; sa densité d^S est :

$$d^S = (\mu_S/p_S)^S \ ; \ \forall\ s \in S : d^s = \mu_s/p_s .$$

Pour chaque partie a de Q on a défini une mesure marginale $mar(a)\mu_S$ sur le produit X(a) des Jq pour $q \in a$:

$$X(a) = \Pi\{Jq | q \in A\} \ ; \ mar(a)\mu_S = \mu_{X(a)}$$

$$\forall\ x \in X(a) : \mu_x = \Sigma\{\mu_{x,y} | y \in Y(a)\}$$

où on a noté $Y(a) = X(Q-a) = \Pi\{J(q) | q \in Q-a\}$. Par exemple si $a = \{q1\ , q3\}$ on a :

$$X(a) = Jq1 \times Jq3 \ ; \ Y(a) = Jq2$$

$$\forall\ (j1,j3) \in Jq1 \times Jq3 : \mu_{j1,j3} = \Sigma\{\mu_{j1,j2,j3} | j2 \in Jq2\}.$$

Dans le cas où $a = \emptyset$, $X(\emptyset)$ (produit d'une famille vide d'ensembles) est réduit à un seul élément et $mar(\emptyset)\mu_S$ est le nombre "masse totale de la mesure μ_S". Pour $a = Q$ on a $X(a) = S$, $\mu_{X(a)} = \mu_S$; etc. . La densité de la mesure marginale $\mu_{X(a)}$, par rapport au produit correspondant $p_{X(a)} = \Pi\{p_{Jq} | q \in a\}$, des mesures de référence est notée:

$$d^{X(a)} = (\mu_{X(a)}/p_{X(a)})^{X(a)} \ ;$$

$$\forall\ x \in X(a) : d^x = \mu_x/p_x \ ; \text{ e.g. pour } a = \{q1\ , q3\} :$$

$$d^{j1,j3} = \mu_{j1,j3}/(p_{j1} \times p_{j3}).$$

La fonction $d^{X(a)}$ définie sur X(a) peut être considérée comme une fonction sur S ne dépendant pas des composantes jq d'indice $q \in Q-a$; on notera alors :

$$m(a)d^S = d^{X(a)} = \text{densité marginale sur } X(a).$$

Eventuellement, la fonction $m(a)d^S$ peut être définie sans passer par la loi marignale $\mu_{X(a)}$ de la mesure μ_S dont la fonction d^S est la densité : il suffit de dire que $m(a)d^S$ résulte de d^S si on effectue une moyenne par rapport aux coordonnées jq dont l'indice q n'appartient pas à a, la moyenne étant calculée avec les coefficients de pondération fournis par les lois marginales p_{Jq} (pour $q \in Q - a$). Cette définition nous paraît seulement moins commode à introduire que celle par les densités des lois marginales ; mais la propriété de $m(a)d^S$ d'être une moyenne est essentielle : elle nous servira au § 1.

Ceci posé, les termes $pr(a)d^S$ de la décomposition introduite ci-dessus pour la fonction d^S se calculent en fonction des densités marginales par une somme étendues aux parties b de a :

$$pr(a)d^S = \Sigma\{(-1)^{\mathrm{Card}(a-b)}\ m(a)d^S | b \subset a\} ;$$

dans notre exemple d'une correspondance ternaire, le cas le plus compliqué est $a = Q = \{q1,q2,q3\}$; interviennent alors les 8 parties Q (y compris la partie vide) et on a :

$$pr(Q)d^S = d^S - d^{Jq1\times Jq2} - d^{Jq2\times Jq3} - d^{Jq3\times Jq1}$$
$$+ d^{Jq1} + d^{Jq2} + d^{Jq3} - d^{\emptyset} ;$$

ici d^S (terme $b = Q$) est la densité de la loi ternaire elle même ; suivent avec le signe - les densités des trois lois marginales binaires, puis avec le signe + les densités des lois marginales sur Jq1 , Jq2, Jq3 ; enfin le terme noté $d^{\emptyset}$, correspondant à $b = \emptyset$, n'est autre que la masse totale de la mesure μ_S ou encore la moyenne de la densité d^S par rapport à la loi de référence p_S.

Pour les termes binaires ($a = \{q1,q2\}$ etc.) ou "uninaire" ($q=\{q1\}$) on a simplement :

$$pr(\{q1,q2\})d^S = d^{Jq1\times Jq2} - d^{Jq1} - d^{Jq2} + d^{\emptyset} ;$$
$$pr(\{q1\})d^S \quad = d^{Jq1} - d^{\emptyset}$$

Eventuellement dans l'étude d'une mesure μ_S qui est une loi de probabilité (ou loi de fréquence) f_S , on prend pour lois de références p_{Jq} sur les Jq les lois marginales f_{Sq} de f_S dans ce cas particulier usuel, les densités d^{Jq1}, d^{Jq2} , d^{Jq3} ne sont autres que la fonction 1 ; et le terme $pr(\{q1\})d^S$ est nul (et de même pour q2 et q3).

1 *Un lemme de décomposition* : Pour démontrer dans le cas d'une multiplicité quelconque la formule de décomposition énoncée au § 0 dans le cas ternaire, nous utilisons un lemme qui concerne non des fonctions (de densité) sur les produits finis X(a) d'ensembles Jq d'une famille $\{Jq | q \in Q\}$, mais seulement les fonctions à valeur réelle sur une partie d'un ensemble.

Lemme : Soit Q un ensemble fini; m une fonction à valeur réelle définie sur l'ensemble P(Q) des parties a de Q ; y compris la partie vide $a = \emptyset$ et le tout $a = Q$). Il y existe une fonction à valeur réelle unique pr définie sur $P(Q)$ et telle que :

$$\forall\, a \subset Q : m(a) = \Sigma\{pr(b) \mid b \subset a\} ;$$

la fonction pr se calcule par la formule :

$$\forall\, a \subset Q : pr(a) = \Sigma\{(-1)^{\mathrm{Card}(a-b)}\, m(b) \mid b \subset a\}.$$

Démonstration : L'existence et l'unicité se démontrent en construisant la fonction pr de proche en proche d'abord pour $a = \emptyset$, puis pour Card $a = 1$; puis pour Card $a = 2$, etc. . On a :

$$m(\emptyset) = pr(\emptyset) ;$$

$$\forall\, q \in Q : m(\{q\}) = pr(\{q\}) + pr(\{\emptyset\}) ; \text{ d'où :}$$

$$\forall\, q \in Q : pr(\{q\}) = m(\{q\}) - m(\emptyset) ;$$

et en général si on suppose la fonction pr construite pour toute partie a de cardinal $\leq p$, on a pour une partie a de cardinal $p + 1$, l'équation :

$$m(a) = \Sigma\{pr(b) \mid b \subset a\}$$

dans laquelle le seul terme inconnu est pr(a) dans le membre de droite ; d'où calcul de pr(a).

L'unicité étant établie on vérifie la formule donnée pour pr(a) ; il faut que :

$$\forall\, a \subset Q : m(a) \stackrel{?}{=} \Sigma\{\Sigma\{(-1)^{\mathrm{Card}(b-c)} m(c) \mid c \subset b\} \mid b \subset a\}.$$

en permutant la sommation il vient :

$$\Sigma\{m(c)\ \Sigma\{(-1)^{\mathrm{Card}(b-c)} \mid c \subset b \subset a\} \mid c \subset a\} ;$$

on peut dire que le coefficient de m(c) est une somme indicée par les parties de $a - c$ et dont chaque terme est (-1) élevée à une puissance égale au cardinal de cette partie : si $(a - c) = \emptyset$, i.e. si $a = c$ cette somme ne comprend qu'un seul terme qui est 1 ; sinon la somme est nulle :

$$h \neq \emptyset \Rightarrow \Sigma\{(-1)^{\mathrm{Card}\, g} \mid g \subset h\} = 0$$

(on y reconnaît en effet le développement de $(1-1)^{\mathrm{Card}\, h}$...). Ceci achève d'établir le lemme.

Enoncé dans le cas d'une fonction m à valeur réelle, le lemme s'applique sans aucune modification au cas d'une fonction m à valeur dans un espace vectoriel E quelconque. Le cas introduit au § 0 est celui où $m(a) = m(a)d^S$ est un élément de l'espace vectoriel R^S des fonctions à valeur réelle sur S. Il résulte alors du lemme qu'on a une décomposition unique en termes $pr(a)d^S$ tels que :

$$\forall\, a \subset Q : m(a)d^S = \Sigma\{pr(b)d^S \mid b \subset a\} ;$$

les $pr(a)d^S$ se calculant par la formule du lemme :

$$\forall\, a \in Q : pr(a)d^S = \Sigma\{(-1)^{\mathrm{Card}(a-b)}\, m(b)d^S \mid b \subset a\}$$

Il est maintenant facile de vérifier que cette décomposition est bien celle introduite au § 0 à partir des systèmes de fonctions orthonormées. Remarquons d'abord qu'on a (en notant $d^{\alpha Q}$ les coefficients de la décomposition de la fonction d^S, comme on a noté $\psi^{\alpha Q}$ ceux de la fonction ψ^S) :

$$m(a)d^S = \Sigma\{d^{\alpha Q} \ \varphi^S_{\alpha Q} | \alpha Q \in AQ \ ; \ q \in Q\text{-}a \Rightarrow \alpha q = 0\}$$

en effet en bref, si on calcule $m(a)d^S$ en effectuant sur d^S une moyenne par rapport à toute coordonnée jq avec $q \in Q-a$, s'annulent les termes contenant un $\varphi^{Jq}_{\alpha q}$ avec $\alpha q = 0$, $q \in Q-a$; les termes en φ^{Jq}_0 fonction constante et égale à 1) subsistant seuls.

Ceci dit si on pose par définition :

$$pr(a)d^S = \Sigma\{d^{\alpha Q} \ \varphi^S_{\alpha Q} | \alpha Q \in AQ \ ; \ q \in Q\text{-}a \Leftrightarrow \alpha q = 0\}$$

on vérifie immédiatement qu'on a , quel que soit $a \subset Q$:

$$m(a)d^S = \Sigma\{pr(b)d^S \ | b \subset a\}.$$

Ce qui de par l'unicité de la décomposition cherchée établit le lien entre la décomposition de $m(a)d^S$ calculée directement par le lemme et celle effectuée en groupant les termes orthonormés d'après celle des variables dont ils dépendent effectivement.

De plus, puisque les $d^{\alpha Q}$ constituent un système de coordonnées orthonormées dans R^S muni du produit scalaire introduit au § 0, il apparaît que l'opérateur noté pr(a) n'est autre qu'une projection orthogonale de R^S sur le sous-espace $E^S(a)$ engendré par les axes dont l'indice αQ satisfait à la condition :

$$\alpha Q = \{\alpha q | q \in Q\} \ ; \quad \alpha q \neq 0 \Leftrightarrow \alpha q \in a.$$

Et c'est en vue de cette propriété qu'on a choisi le sigle pr , initiale de projection. Il est clair d'autre part que les $E^S(a)$ constituent une famille de sous-espaces orthogonaux dont R^S est la somme directe.

2 *Epreuve du χ^2 et décomposition des interactions*

Classiquement, on étudie le cas suivant : la mesure μ_S est la loi de fréquence f_S d'un échantillon d'effectif n issu de la loi de référence (loi produit) p_S. Pour n grand , f_S tend à être distribué normalement autour de p_S dans l'hyperplan H_S de R_S (hyperplan μ_S des mesures de masse totale 1) ; et quel que soit n , la forme quadratique d'inertie de la distribution de f_S est sphérique, avec dans toute direction la variance (1/n) , si la structure euclidienne de référence est la métrique du χ^2 de centre p_S ; il revient au même de dire que la densité d^S a (dans l'hyperplan H^S des fonctions de moyenne 1) une distribution dont le centre de gravité est la fonction constante 1, et la variance dans toute direction est (1/n), pour la structure euclidienne associée au produit scalaire des fonctions, défini au § 1 :

$$<\theta^S, \psi^S> = \Sigma\{\theta^s \psi^s p_s | s \in S\}.$$

Dans ces conditions les coefficients $d^{\alpha Q}$ (mis à part d^0 qui vaut nécessairement 1), fournissent dans H^S un système de coordonnées orthonormées; distribuée chacune avec moyenne zéro et variance (1/n) ; et pour n tendant vers l'infini, les $n^{1/2}\, d^{\alpha Q}$ tendent à être des variables normales centrées de variance 1, indépendantes entre elles. Les $pr(a)d^S$ ($a \neq \emptyset$; $a \subset Q$) sont les projections de d^S sur une famille de sous espaces orthogonaux $E^S(a)$ (cf. *supra*) dont il est facile de calculer la dimension :

$$\dim(a) = \Pi\{(\mathrm{Card}\, Jq) - 1 \mid q \in a\} ;$$

les normes $n\|pr(a)d^S\|^2$, tendent à être distribuées suivant une loi de χ^2 de dimension dim(a) ; elles ont quelque soit n, dim(a) pour moyenne. Puisque le calcul des $pr(a)d^S$ sa fait sans recourir à un choix explicite de base orthonormée, il en est de même pour les normes :

$$N^2(a) = \|pr(a)d^S\|^2 = \Sigma\{(pr(a)d^x)^2\, p_x | x \in X(a)\},$$

où comme au § 0 on a noté $X(a) = \Pi\{Jq \mid q \in a\}$, $p_{X(a)} = \Sigma\{p_{Jq} | q \in a\}$

(loi de référence produit) et ou on a exploité le fait que la composante $pr(a)d^S$ ne dépend que de $x \in X(a)$ et non des autres composantes jq (avec $q \in Q - a$).

Pratiquement en analyse des données, il n'y a pas de modèle de référence d'indépendance $p_S = \Pi\{p_{Jq} | q \in Q\}$, sinon celui obtenu en prenant pour p_{Jq} les lois marginales f_{Jq} de la correspondance f_S étudiée. Dans ce cas (cf. § 0 *in fine*) les termes uninaires pr({q}) (pour a = { q } réduit à un seul élément) sont nécessairement nuls par construction. D'autre part il est exceptionnel qu'on puisse supposer que les données résultent de tirages aléatoires successifs indépendants de points $s \in S$, suivant une quelconque loi p_S (avec ou sans indépendance des composantes jq...). En revanche garde son intérêt le fait que dim(a) fournit pour $N^2(a)$ un ordre de grandeur relatif plausible d'où l'intérêt du quotient $quot(a) = N^2(a)/\dim(a)$. De façon précise si a = { q,q' }, $N^2(a)$ n'est autre que la trace associée à la loi de correspondance rectangulaire $f_{Jq \times Jq'}$ (loi marginale de f_S) ; et dim(q) = (Card Jq-1)(Card Jq'-1); pour a = {q,q',q"}, on a un premier terme d'interaction ternaire dépassant l'analyse des tableaux rectangulaires : il peut être utile de comparer les valeurs typiques :

$$N^2(\{q,q'\})/\dim(\{q,q'\}) = quot(\{q,q'\}) ;$$

$$quot(\{q,q''\}) ; quot(\{q',q''\}) ; quot(\{q,q',q''\})$$

Le calcul de ce dernier quotient n'a rien d'inaccessible, car si $a = \{q,q',q''\}$, on a :

$$\|pr(a)d^S\|^2 = \Sigma\{(pr(a)d^{jj'j''})^2 \; f_j \times f_{j'} \times f_{j''} | j \in Jq, \; j' \in Jq', \; j'' \in Jq''\},$$

avec pour le terme pr(a) la formule

$$pr(a)d^{jj'j''} = d^{jj'j''} - d^{jj'} - d^{j'j''} - d^{j''j} + 2$$

formule qui se simplifie parce que (cf. 0 *in fine*) on a $d^j = d^{j'} = d^{j''} = 1$ du fait du choix de $p_{Jq} = f_{Jq}$ loi marginale de f^S. Quant à dim({q,q',q"}) c'est :

$$(\text{Card } Jq - 1)(\text{Card } Jq' - 1)(\text{Card } Jq'' - 1).$$

L'étude des interactions quaternaires et au-delà, n'offre pas elle même de difficulté particulière. On pourra donc apprécier l'importance des interactions d'ordre supérieur (mesurées par les quotients quot(a) pour Card a ≥ 3) relativement aux interactions binaires quot({q,q'}).

Il faut seulement souligner ici que souvent , comme en analyse de la variance, les sommes que l'on calcule en imaginant une distribution symétrique des interactions proviennent en fait d'un très petit nombre de termes singuliers, qu'il convient d'examiner un à un ; et d'éliminer, s'il se peut, de l'analyse générale.

Remarque : Le calcul de $\|pr(a)d^S\|^2$ ne requiert d'ailleurs pas le calcul explicite de la fonction $pr(a)d^S$ elle-même. On peut ici encore appliquer le lemme du § 1. En effet, de la formule :

$$m(a)d^S = \Sigma\{pr(b)d^S | b \subset a\}$$

et de l'orthogonalité des sous-espaces $E^S(a)$ (sur lesquels les pr(a) effectuent une projection orthogonale) il résulte que :

$$\|m(a)d^S\|^2 = \Sigma\{\|pr(b)d^S\|^2 | b \subset a\} \;;$$

d'où suivant le lemme du § 1 :

$$\|pr(a)d^S\|^2 = \Sigma\{-(1)^{\text{Card}(a-b)} \|m(b)d^S\|^2 \; b \subset a\} \;;$$

formule où interviennent seulement les normes des densités des lois marginales. Parmi celles-ci il faut signaler les termes pour lesquels Card b = 0, 1, 2. Dans le cas présent où d^S est la densité d'une loi de fréquence f_S dont les marginales $f_{Jq} = p_{Jq}$ sont prises comme mesures de référence , on a :

$$\|m(\emptyset)d^S\|^2 = 1 \quad ; \quad \forall\, q \in Q : \quad \|m(\{q\})d^S\|^2 = 1 \;;$$

$$\forall\, q,\, q' \in Q,\; q \neq q' \Rightarrow \|m(\{q,q'\})d^S\|^2 = 1 + N^2(\{q,q'\})$$

où $N^2(\{q,q'\})$ n'est autre que la trace associée à la correspondance binaire (rectangulaire, usuelle) $f_{Jq \times Jq'}$.