J.-P. BENZÉCRI

Certitude mathématique et connaissance de la nature

Les cahiers de l'analyse des données, tome 6, n° 4 (1981), p. 477-484

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1981__6_4_477_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. VI - 1981 - n° 4 - p. 477-484

CERTITUDE MATHÉMATIQUE ET CONNAISSANCE DE LA NATURE [MATH. NAT.]

par J.-P. Benzécri (1)

Pour tenir les promesses d'un tel titre, il faudrait être Platon arbitrant entre Aristote et Bourbaki ; et composer un long traité . Mais je n'habite pas sur l'Olympe, et n'entreprends que d'écrire un bref essai : au lecteur qui ne traverse pas quotidiennement le chantier des sciences, j'offre d'y faire une promenade, un aperçu.

1 *Les rigueurs des mathématiques* : Dans la langue française, un même mot peut avoir deux sens : ainsi on parle de châtiment rigoureux et de démonstration rigoureuse. Pour la plupart des élèves les deux sens se confondent en un seul ; tandis que pour quelques privilégiés, les mathématiques sont un jeu. Permettez-moi de vous confier un souvenir de jeunesse.

Le curé de la paroisse où je fus étudiant, m'adressa un jour, entre de prudents conseils, cette apostrophe courtoise "Vous qui avez été formé par la science à la probité..." Je ne lui permis pas de terminer ; avec l'impertinence qu'à défaut d'esprit critique nous donnent les mathématiques, je me récriai aussitôt : " Je ne sais de quelle science vous parlez, qui forme à la probité , mais quant aux maths..."

Jusqu'alors en effet, les maths m'étaient plutôt apparues comme une jonglerie, que comme une ascèse ; avançant avec facilité,je ne m'embarrassais pas des "problèmes" : je glissais, je comprenais à demi-mots les allusions dont sont tissés les énoncés, et cela me suffisait à composer une solution à laquelle le correcteur accordait une bonne note, non sans déplorer ma mauvaise présentation ; par quoi il flattait ma désinvolture bien plus qu'il ne me mortifiait.

Or lorsque j'eus avec mon curé cet entretien mémorable, la "belle époque" touchait à sa fin : je devais en effet rédiger une thèse sous la direction de mon Maître Henri Cartan ; maître éminemment compétent, et aussi singulièrement consciencieux et exigeant. Les problèmes qui faisaient l'objet de mes recherches n'étaient pas d'une éblouissante nouveauté : cependant personne ne les avait résolus avant moi ; aucun énoncé ne me fournissait le plan de la solution ; pour que mon texte fût lisible, je devais condenser sous le nom de lemmes,de théorèmes l'ensemble des résultats obtenus dans une partie et destinés à être utilisés dans une autre ; bien plus, pour ne pas répéter de longues suites d'hypothèses, de conditions, il fallait donner un nom à des notions nouvelles, dont il m'appartenait de choisir les définitions. Je ne crois pas que les plus belles nouveautés mathématiques soient des créations de l'homme : je pense au contraire qu'elles sont des découvertes que l'homme fait dans la nature que Dieu a créée. Mais les systèmes formels où nous captons quelque chose des conceptions divines

---

(1) *Professeur de statistique. Université P. et M. Curie.*

Le présent article a paru dans le Magazine Littéraire *nos 172-173 pp 31 sqq ; 1981.*

sont notre oeuvre : c'est nous qui par la rigueur assurons la solidité des échafaudages conceptuels : tandis que l'étudiant se faufile dans une charpente déjà fixée, le chercheur a la responsabilité d'une construction.

2 Les anciens et les modernes : *"Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration ; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstrations au sens précis que ce mot a reçu des Grecs et qu'on entend lui donner ici. On a le droit de dire que ce sens n'a pas varié, car ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux ; et, aux époques où la notion a menacé de s'en perdre et où de ce fait la mathématique s'est trouvée en danger, c'est chez les Grecs qu'on en a recherché les modèles. Mais à ce vénérable héritage sont venues s'ajouter depuis un siècle d'importantes conquêtes".*

Ainsi débute l'introduction au premier livre des éléments de Mathématiques de N. Bourbaki ; livre consacré à la théorie des ensembles. Voilà donc affirmé le respect des anciens, sous un nom qui est devenu pour tous le symbole de ce qui se fait de plus moderne. Mais que sont ces *importantes conquêtes*, et qu'y a-t-on gagné de certitude? Examinons la nature et la portée de la méthode axiomatique.

Tous ceux qui pratiquent peu ou prou les mathématiques auront noté l'extrême stéréotypie à laquelle peut atteindre la rédaction des définitions et des démonstrations : les mêmes mots reviennent sans cesse dans les mêmes formules. Depuis longtemps (ne citons que les noms de Raymond Lulle au début du XIV-ème siècle ; et de Leibnitz à la fin du XVII-ème) le projet flottait donc d'une langue complète, qui serait aussi stricte que les calculs eux-mêmes ; et servirait d'abord aux mathématiques puis à toutes les sciences. Désormais une telle langue existe.

A quoi sert-elle? En fait-on seulement usage? Pas plus que le mètre en platine iridié légendaire ne sert à mesurer les étoffes, la langue de la logique formelle (dans telle ou telle de ses versions) ne sert quotidiennement aux mathématiciens : Bourbaki (dans la préface citée) dit que la conviction est acquise, lorsque la formalisation parfaite du texte semble pouvoir s'achever sans autre travail que l'application scrupuleuse des règles ; travail immense toutefois et qu'on n'accomplit donc jamais.

Conviction avons-nous dit ; non certitude. Telle est bien en effet l'impression qu'on reçoit à la lecture de N. Bourbaki ou d'autres auteurs qui pourtant ne s'accordent pas en tout. *"Il faudrait... que la non-contradiction d'un langage formalisé pût être "démontrée" dans un langage moins riche et pourtant plus digne de confiance ; or un théorème célèbre... dû à Goedel* dit en substance que cela est impossible si par *"langage formalisé"* on entend "langage assez riche pour formuler l'arithmétique classique".

Ainsi la mathématique démontre qu'elle ne peut se légitimer elle-même. Et si Bourbaki affirme qu'il la croit *destinée à survivre*, c'est sans prétendre *que cette opinion repose sur autre chose que l'expérience.*

3 Abstraction : Dans l'usage contemporain, le verbe "abstraire" a rarement un sens actif. On dit parfois "s'abstraire" pour s'isoler, se retirer... Et ce nom d'abstraction désigne l'état de ce qui est séparé de la matière et parfaitement ordonné en soi-même. Pourtant dans son étymologie latine le verbe *abstrahere* est plein de vigueur rapace : il veut dire tirer, arracher... En effet, les structures abstraites objet des mathématiques n'ont pas été créées en fermant les yeux au monde : elles sont plutôt une épure de la rationalité du monde. Si comme le

dit N. Bourbaki *"les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie"*, c'est parce qu'en dehors de nous règne un ordre dont l'existence du monde est la preuve matérielle qu'il n'est pas contradictoire... ; et qu'en dedans de nous le reflet de cet ordre n'est pas reçu comme un message indéchiffrable.

Comme *abstraction*, *axiome* a dérivé de son premier sens : chez Euclide un axiome est une propriété évidente qui ne requiert pas de démonstration ; aujourd'hui c'est plutôt une règle d'un jeu librement inventé. En fait la contradiction n'est pas si vive. Chez Euclide les évidences sont choisies pour se prêter à un jeu ; chez nous le jeu ne vaut la peine d'être joué que parce que ses règles sont des réminiscences plutôt que de pures inventions.

Saint Augustin écrit (*De libero arbitrio* ; II, X, 31) :

"... quoniam de corporibus facile judicamus, tanquam de rebus quae infra nos ordinatae sunt, quibus impressos numeros infra nos esse cernimus ; et eos propterea vilius habemus. Sed cum ceperimus tanquam sursum versus recurrere, invenimus eos etiam nostras mentes transcendere, atque incommutabiles in ipsa manere veritate"

"Parce que nous formons facilement un jugement sur les corps, comme sur des choses qui nous sont inférieures, et où nous voyons l'empreinte des nombres ; à cause de cela nous faisons peu de cas des nombres aussi. Mais si nous élevons la course de notre pensée, nous trouvons que les nombres dépassent nos esprits, et qu'ils demeurent immuables dans la Vérité même".

En effet les nombres peuvent être considérés dans les choses, dans notre esprit, dans l'Être. Des mathématiciens qui collaborent à un même ouvrage, diffèrent quant aux lieux, quant aux voies, quant au sens de parcours. Pour ceux-ci, un jeu gratuit ; pour ces autres, une conquête de la nature matérielle ; pour certains une ascèse morale ; pour quelques uns la rencontre avec l'Etre, pur, immuable et vivant qu'ils ne se satisfont pas de trouver ailleurs. Il est vrai que l'abstraction a des étapes... mais si l'une d'elle était désertée, le flux s'interromprait bientôt.

4 *Calcul* : Nous l'avons dit : dans ce qu'on appelle mathématiques modernes, joue un grand rôle le projet de donner au discours logique luimême la forme d'un calcul. Or par un paradoxe souvent remarqué, ces tendances modernes ont produit dès le niveau élémentaire des écoles, l'ignorance, voire le mépris du calcul : comme si l'engrenage des opérations, naguère employé au concassage des nombres, ne servait plus que dans l'immatérielle horloge de quelques démonstrations. Assurémment on hésite à se fier à un échafaudage de définitions au sein duquel ne s'élève aucune construction tangible. Un illustre physicien, R.P. Feynman, vénéré comme l'un des plus féconds théoriciens d'aujourd'hui, mais plus encore habile à trancher le noeud gordien (à donner aux spéculations une conclusion précipitée mais vérifiable), avertit en ces termes les étudiants : *"The whole purpose of physics is to find a number, with decimal points, etc.! Otherwise you haven't done anything* " Oui, un nombre avec des décimales, ou vous n'avez rien fait...

Cependant, nouveau paradoxe, ces logiciens aux formules creuses, qui ont ôté des lèvres des enfants jusqu'à la musique de la table de multiplication, ont inspiré les ingénieurs qui ont conçu les machines à calculer. Ainsi le mal est réparé : tout un chacun a dans sa poche le moyen de compenser son ignorance et sa paresse.

Mais il y a plus : les machines n'effectuent pas seulement des opérations isolées, elles exécutent des programmes : c'est-à-dire, en bref, des suites d'opérations dont le nombre et l'enchaînement varient selon les résultats intermédiaires qui se présentent dans l'exécution des calculs. Or pour être exécuté par la machine, le programme doit être écrit dans un langage complètement formalisé où aucune incorrection n'est permise. Ainsi le programme accomplit quotidiennement une tâche dont N. Bourbaki lui-même (cf. *supra*) laisse entendre qu'il suffit de l'esquisser !

Prononcerons-nous une troisième fois le mot de paradoxe ? Certes un programme est parfaitement formalisé, mais il n'est pas une démonstration : son but n'est pas de conduire des prémisses aux conclusions, mais des données au résultat. Cependant dans les démonstrations mathématiques les constructions jouent un rôle essentiel (ceux qui ont résolu des problèmes de géométrie dans la tradition d'Euclide , se souviennent au moins que quelques lignes ajoutées à une figure , peuvent être la clef d'une démonstration) ; certains mathématiciens soutiennent même que seules valent les démonstrations dans lesquelles l' existence d'un être mathématique (d'une fonction telle que...) n'est jamais invoquée sans construction explicite. Pratiquement les difficultés que l'on rencontre dans la conception et l'écriture d'un algorithme, diffèrent peu de celles auxquelles est en butte une démonstration classique. Mais tandis que selon N. Bourbaki (*op. laud.*) la formalisation d'un texte mathématique ne se poursuit que "jusqu'à ce que, de l'avis général des mathématiciens, il soit devenu superflu de pousser ce travail plus loin", le programmeur affronte une machine fulgurante mais stupide et têtue, inaccessible à la conviction, ne répondant qu'à la correction formelle absolue.

L'utilisation des machines pour trouver et démontrer des théorèmes, n'est qu'un projet qu'on explore . Le secours prêté par le calculateur électronique aux recherches du mathématicien est une réalité d'ampleur encore limitée. L'ascèse de la programmation est une pénitence quotidienne sans doute bien plus propre à donner aux étudiants le respect de la vérité et les joies de la certitude, que ne le peuvent les exercices scolaires où au "démontrez-que" de son maître , le disciple répond par un discours embarrassé parfois volubile, mais toujours incorrect et cependant corrigé avec une nécessaire indulgence.

5 Langage : On dit que les mathématiques sont le langage obligé de toute science qui se respecte. Mais d'une part, il n'est pas vraisemblable que toute vérité gagne a être énoncée en termes mathématiques; d'autre part il est assez facile d'exprimer en de tels termes n'importe quel raisonnement sophistique ou insignifiant, qui n'est pas pour autant changé en or pur. Il y a neuf siècles déjà l'Imam Ghazali s'indignait qu'on proposât aux croyants des thèses théologiques frelatées, sous le couvert d'une dialectique qui avait conquis ses lettres de noblesse dans le domaine des mathématiques ou de l'astronomie. L'économétrie ou la psychologie mathématiques contemporaines sont encombrées d'un verbiage de formules qui ne sont que la paraphrase scholastique d'erreurs ou de banalités ; à moins qu'il ne s'agisse de thèses intéressantes mais camouflées (car si un subordonné n'a pas le droit de faire à son supérieur une réflexion qui relève du sens commun ; il a pour tâche de rédiger de pesants rapports, qu'il peut discrètement conduire aux conclusions de son choix).

Scholastique ! c'est ainsi en effet qu'on qualifie parfois la mathématique moderne et plus encore ses applications. Pour moi qui vénère Avicenne, Saint Thomas et Bourbaki, il y a là une similitude profonde qui ne mérite pas une condamnation sans appel. Ici comme là , une construction minutieuse, plus facile à imiter qu'à conduire, comme le font les maîtres, à un résultat tangible ; et où le néophyte se grise en toute innocence.

Une logorrhée de formules : est-ce donc tout ce que les élèves non mathématiciens de vocation - c'est-à-dire la plupart des élèves - peuvent retenir de l'enseignement moderne ?

Les ouvrages mathématiques anciens se développent généralement sans formules dans une langue où le discours ordinaire est seulement illustré de quelques figures ou tableaux. Ainsi pour le calcul du sinus de la somme de deux angles, objet de la formule de trigonométrie que chacun connaît (au moins de vue...) :

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad ,$$

l'astronome arabe Al Battani ($\approx$ 900) donne sa méthode en cinq lignes d'une prose qui ne se distingue de celle d'un casuiste ou d'un historien que par la fréquence des mots *arc*, *corde*, *produit*, *diamètre*...On trouve encore dans l'*Essai philosophique sur les probabilités* de Laplace ($\approx$ *1800)* les formules les plus complexes décrites, en quelque sorte, par des mots. De tels textes témoignent de la parfaite maîtrise de la langue à laquelle s'étaient élevés les âges classiques.

On n'en est plus là aujourd'hui : l'habitude s'est hélas prise de ne confier au discours ordinaire que des généralités imprécises : et le lecteur n'y cherche plus rien d'autre. Les formules mathématiques sont donc devenues indispensables, même quand un autre langage suffirait en principe.

A ceux que l'aridité d'une telle expression attriste il reste cette consolante perspective que, comme l'écrit Laplace (dans l'essai déjà cité) : "... *la langue de l'Analyse, la plus parfaite de toutes , étant par elle-même un puissant instrument de découvertes, ses notations, lorsqu'elles sont nécessaires et heureusement imaginées sont autant de germes de nouveaux calculs*".

6 Modèles : Traduire dans la langue de l'Analyse, c'est faire ce qu'on appelle présentement un modèle. Par modèle on entend : représentation de réalités d'un certain ordre par des réalités d'un autre ordre , de telle sorte que des opérations faites sur celles-ci, on puisse tirer des conclusions valables pour celles-là. Parce qu'elles se prêtent à une infinité de constructions, les mathématiques sont une source inépuisables de modèles pour les sciences humaines, pour la physique et pour elles-mêmes. Nous nous bornerons ici à deux exemples.

Dans la préface d'un mémorable ouvrage consacré aux *Fondements mathématiques de la mécanique quantique* J. Von Neumann justifie ainsi son projet :

"*Dirac... a donné de la mécanique quantique une présentation qui ne peut guère être surpassée quant à la brièveté et à l'élégance... [Mais cet exposé] ne satisfait aucunement aux exigences de la rigueur mathématique, même si celles-ci sont ramenées au niveau raisonnablement admis ailleurs en physique théorique. Par exemple, la méthode ... requiert l'introduction de fonctions "impropres" aux propriétés contradictoires*"...

Il n'y a pas lieu ici d'expliquer même vaguement ce que sont ces fonctions "impropres". Mais il est facile et instructif d'en schématiser l'histoire. A l'époque où écrivent P.A.M. Dirac et J. Von Neumann (vers 1930), ces fonctions sont déjà implicites dans les travaux de d'ingénieur Heaviside. Bientôt leur construction mathématique se précise chez Sobolev (1936) ; mais on considère que la pleine légitimité leur est donnée par Laurent Schwartz dans sa *Théorie des distributions* (1950).

Que fait Dirac ? En bref, il ordonne selon son intuition de physicien, des termes et des formules enchaînées en suivant les règles du langage des mathématiques. Que fait L. Schwartz : il associe à ces termes un contenu ; c'est-à-dire des objets mathématiques précis pour lesquels les opérations effectuées par Dirac sont en effet valides. Ainsi les formules sont un modèle de la réalité physique ; et les objets mathématiques sont un modèle pour les formules qui flottaient en quelque sorte sans reposer sur rien de spécifié. (On voit en quel sens les mathématiques peuvent être un modèle, pour elles-mêmes).

Flotter, tel est bien le mot qui vient à l'esprit quand on tente de caractériser la pensée des grands théoriciens de la physique. Tandis que depuis Euclide, les mathématiciens se sont fait une loi d'édifier sur des bases axiomatiques, les physiciens construisent plutôt des passerelles, assemblées certes selon les règles du calcul, mais légères et transportables (donc à la fois caduques et impérissables...). Voici comment (dans *La Science et l'Hypothèse*), Henri Poincaré présente les travaux de Maxwell sur l'Optique et l'Electricité :

..."le savant anglais ne cherche pas à construire un édifice unique, définitif et bien ordonné, il semble plutôt qu'il élève un grand nombre de constructions provisoires et indépendantes, entre lesquelles les communications sont difficiles et quelquefois impossibles".

Il est surprenant que J. Von Neumann, qui est à la fois très grand dans les mathématiques, la logique formelle et la physique, ait préféré éviter l'usage des fonctions "improres" de Dirac, plutôt que d'en légitimer le système formel par un modèle mathématique (éventualité qu'il envisage, mais juge inutile ; contrairement à ce qu'on a conclu depuis).

Voici un exemple plus divertissant. Entreprenant l'*application des Probabilités aux sciences morales*, Laplace a traité *de la Probabilité des témoignages, des choix et des décisions des assemblées, de la Probabilité des Jugements des tribunaux* (titre et sous-titre sont de Laplace lui-même dans son *Essai* déjà cité). Sans s'abandonner aveuglément à l'illusion de contribuer au progrès moral, l'illustre géomètre avait foi en ses calculs pensant qu' *"Une approximation de ce genre quand elle est bien conduite est toujours préférable aux raisonnements les plus spécieux"*. C'est pourtant parmi ces *raisonnements* que certains critiques n'hésitent pas à ranger les approximations de Laplace. Et Joseph Bertrand (dans son Calcul des Probabilités : 1889) , leur trouve chez Rabelais ce précédent :

"Cela fait, comment sentenciez-vous mon ami ?

" Comme vous autres, messieurs, répondit Bridoye, pour celuy je donne sentence duquel la chance livrée par le sort des dez judiciaires premier advient".

En faisant de Bridoye, juge de Myrelingues, le précurseur de la théorie mathématique de la décision, J. Bertrand nous avertit que dans l'usage des modèles, les plus grands ne sont pas toujours heureux !

7 *Imagination* : Dans le calcul, comme dans la démonstration, la démarche du mathématicien est déductive : de données ou de prémisses, il passe à des résultats ou à des conclusions : lesquelles sont potentiellement contenues dans ce dont il est parti ; même si elles n'y sont pas visibles. Pour inventer il faut induire ; s'élever du particulier au général ; entre ce que nous voyons, et ce que Dieu voit, deviner une idée.

Laplace, Maxwell et Dirac nous le suggèrent : de même que le kaléidoscope, en semant des perles entre trois miroirs engendre des images, ainsi l'analyse par l'automatisme de ses calculs et l'analogie de ses notations fait germer des théories. Alors s'élargissent et s'élèvent les mathématiques et la physique.

Statisticien de profession, nous rencontrons souvent la biologie et les sciences humaines. Dans ce domaine, les calculs déductifs sont le plus souvent stériles. En forme de boutade, J. Bertrand a dit pour nous, ce qu'il faut attendre de calculs qui partant de prémisses rigoureuses mais fausses, s'avancent paisiblement vers des conclusions illusoires. Comment est-il possible, se basant sur les effets cancérigènes de fortes doses de certains produits, appliqués sur la peu de souris ou de singes, de calculer les doses infimes de ces mêmes produits qui ont chez l'homme une chance sur un million de produire un cancer ? On s'adonne pourtant à de tels calculs...

Selon nous la validité et la fécondité de la statistique sont ailleurs. Transformer par le calcul, dont l'ordinateur électronique est l'outil indispensable, le plus banal objet statistique - un tableau rectangulaire de nombres - révèle entre les lignes et les colonnes de celui-ci des similitudes et des associations suggestives que présentent des figures dont les points ont mêmes noms que ces lignes et colonnes. Ainsi des groupes d'individus apparaissent, superposés à des groupes de qualités : une définition s'ébauche suggérée à la fois en extension (individus) et en compréhension (qualités). Tout l'art est de savoir quels tableaux construire ; comment traduire les quantités en qualités et réciproquement ; entre quels ordres de phénomènes rechercher des rapports soit ordonnés (de cause à effet) soit réciproques...

Au terme d'un exposé déjà long, nous ne tenterons pas d'enseigner cet art en une page. Nous donnerons seulement le dernier mot de la découverte et de la certitude.

Le raisonnement le plus simple est le suivant :

ou bien A, ou bien B, ou bien C.
or ni A ni B ne sont vrais
donc C est vrai.

A ce schéma disjonctif les plus hautes spéculations ne se ramènent-elles pas ? Mais toute la question est de savoir s'il n'y a vraiment que A, B et C ; si tous les possibles ont été envisagés.

Tertium non datur (vel quartum) : il n'y a pas de troisième (ou de quatrième) dit le logicien scholastique. C'est faute d'avoir conçu qu'il pût en être autrement, que tant de théories rigoureuses se sont fourvoyées ; c'est par la conception d'une possibilité inaperçue, que tant de fois la science s'est élargie.

La plus haute fonction des nombres n'est pas l'énumération , mais l'imagination.

8 *Post Scriptum : Logique formelle et analyse des données* : Ici s'achève le texte paru dans le n° de Mai 1981 du *Magazine Littéraire*. Ce numéro spécial, consacré aux *Enjeux de la Science*, offre aussi sous le titre *La science, enjeu de la philosophie* (ne serait-il pas plus juste de dire que celle-ci est l'enjeu de celle-là?) une introduction de Dominique Lecourt aux pensées de Bertrand Russel, du Cercle de Vienne et de Karl Propper. C'est l'occasion pour nous de préciser les rapports entre l'Empirisme Logique, diversement conçu par ces auteurs, et l'Analyse des Données, à laquelle le § 7 ci-dessus fait allusion.

Voici d'abord une thèse que propose D. Lecourt :

"Si tous les énoncés doués de sens se répartissent en "analytiques" (tautologies et contradictions qui ne nous apprennent rien sur

sur le réel) et "synthétiques" qui nous apprennent quelque chose..., alors en vertu du principe de vérification, ces derniers énoncés doivent pouvoir être mis en correspondance avec un donné empirique immédiat". Et de donner cet exemple :

"Carnap...[construit] un système général de tous les concepts scientifiques,qui repose en définitive sur la possibilité de "réduire" tous les objets de la connaissance scientifique aux "simples" objets de la perception sensible". Puis cette remarque :

"Ce projet, ce rêve dirait-on, d'une unification des sciences, marque certains textes d'un souffle militant qui confine parfois au prophétisme ; mais l'important n'est-il pas de remarquer [que]... Ce n'est pas tellement l'unification de ces sciences et de ce qu'en France nous appelons les sciences humaines...".

Or pour l'analyse des données la réduction de *tous ces objets de la connaissance scientifique* aux *simples objets de la perception sensible* n'est pas une pure opération de calcul logique : c'est une synthèse géométrique qui du niveau où sont recensés les "*objets*" et surtout leurs rencontres, s'élève à celui de gradations et d'oppositions : alors seulement les énoncés acquièrent sur des fondations solides un sens précis qui offre matière à vérification.

Cependant l'*art de savoir quels tableaux construire* et d'abord la définition précise elle-même de ces tableaux (k(j,j') = nombre de fois que etc.) relève des techniques ensemblistes élémentaires ; techniques dont Carnap a particulièrement affirmé la valeur méthodologique, et qui au gré des réformes de l'enseignement, ont remplacé le boulier parmi les instruments de l'école élémentaire. Et il faut reconnaître que même si l'élaboration des corpus de données que recueillent les sciences de la nature requiert aujourd'hui une synthèse géométrique, c'est bien dans les *sciences humaines*, que le besoin de fondations et vérifications est le plus sensible.

Ainsi sans tenter de reprendre un *projet* enlisé depuis un demi-siècle, sans oser poursuivre un *rêve* déçu, nous confions au formalisme logique les préparatifs d'une exploration géométrique ; d'un envol que l'ordinateur a rendu possible, même si la navigation en est encore mal assurée.

Et c'est pourquoi dans les pages qui suivent, nous présentons aux lecteurs des *Cahiers*, les observations d'Yvon L'Hospitalier,sur l'apprentissage du langage des Mathématiques (entendez *langage formel* : dont nous disions au § 5 "qu'il est devenu indispensable, même quand un autre langage suffirait en principe").