

J. P. BENZÉCRI

La vision des couleurs. III. L'équivalence chromatique

Les cahiers de l'analyse des données, tome 6, n° 3 (1981),
p. 319-344

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1981__6_3_319_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA VISION DES COULEURS

III. L'ÉQUIVALENCE CHROMATIQUE

[COULEURS III]

(à suivre)

par J.P. Benzécri ⁽¹⁾

4.2 L'équivalence chromatique : L'équivalence lumineuse des stimuli rayonnants n'est pas l'équivalence sensorielle absolue : deux stimuli \mathcal{L} -équivalents peuvent différer par la couleur et la saturation. Mais, d'une part, il n'existe pas de situation expérimentale, où (comme c'est le cas pour l'intensité lumineuse dans la photométrie par papillotage) la couleur (ou la saturation), jouerait seule à l'exclusion des autres qualités sensibles du stimulus ; d'autre part, les impressions de couleurs et de saturation dépendent non seulement du stimulus même, mais aussi de l'état d'adaptation du sujet. Au contraire la relation \mathcal{C} d'équivalence chromatique qui est stable, et satisfait à plusieurs axiomes avec une excellente approximation, fournit un cadre mathématique à l'étude simultanée des 3 dimensions psychophysiologiques des stimuli rayonnants : nous l'étudierons donc ici. Au § 4.3, on dira comment le ton, l'intensité et la saturation sont fonction de position dans $\mathcal{C}(\mathcal{M}^+)$ de la classe d'équivalence d'un stimulus.

4.2.1 Définition expérimentale de la \mathcal{C} -équivalence : Pour réaliser des stimuli colorés, on peut avoir recours à des sources diffusantes : éclairer un écran blanc diffusant (écran au SO_4Ba , $d(\lambda) \approx 1$) avec un rayonnement de composition spectrale variable, ou éclairer des écrans colorés (des écrans dont le facteur de diffusion $d(\lambda)$ n'est pas constant) avec un rayonnement blanc ; (éventuellement on peut utiliser un écran circulaire tournant partagé en secteurs dont les diverses couleurs se mêlent dans l'oeil en proportion des angles des secteurs) ces méthodes, qui remonte à Newton, demeurent intéressantes, celle-ci par sa simplicité, celle-là par sa précision ; mais on fixe peut-être le plus parfaitement l'état de stimulation de l'observateur, en utilisant un dispositif dioptrique qui conduise presque à la pupille un mélange parfaitement déterminé de radiations. Dans ce sens, les expériences les plus complètes sur l'équivalence chromatique sont à notre connaissance, celles du *National Physical Laboratory Britannique* de Teddington. W. S. Stiles, qui en est l'organisateur, en donne le programme en une phrase que nous reproduisons ici parce qu'elle est concise, et peut initier le lecteur à la terminologie anglo-saxonne. W. S. Stiles écrit (cf. 1955 p. 325) : "*Maxwell, using a very modest apparatus made a first approximate determination of the colour matching functions by finding various mixtures of spectral stimuli which matched white. In subsequent determinations including the present one the apparatus used provides*

(1) Professeur de statistique. Université P. et M. Curie

means, firstly, for illuminating one half of the matching field with monochromatic light, secondly, for illuminating the other half with a mixture in controllable amount of three primary stimuli and, finally, for adding to the first half a suitable amount of a desaturating stimulus, usually identical in color with one of the mixture primaries". Ce que nous paraphraserons ainsi en français : " Ce fut Maxwell, qui le premier, donna une détermination approchée des coordonnées de l'équivalence chromatique : disposant d'un appareillage très modeste il réalisait des mélanges de couleurs spectrales équivalents au blanc. Dans les études ultérieures, et la nôtre ne fait pas exception, le dispositif expérimental permet : 1° d'éclairer une moitié du champ de comparaison en lumière monochromatique de longueur d'onde variable ; 2° d'éclairer l'autre moitié du champ avec un mélange dosé de trois radiations choisies pour être les stimuli de base ; 3° d'ajouter dans la première moitié du champ un stimulus désaturant, qui est, généralement, l'un des stimuli de base" (sur le terme de saturation, cf. §4.3.1.3.

Précisons ce schéma par des détails empruntés à l'article de Stiles (1955).

Dans les expériences de Stiles, le champ éclairé est un champ central (i.e. dont le centre correspond au centre de la rétine) de 14° de diamètre. Au milieu est un disque, de 10° ou de 2° de diamètre, le champ de comparaison, divisé par un diamètre en deux moitiés, chacune éclairée par l'une des deux brillances énergétiques que l'on compare. La périphérie annulaire sert de fond lumineux. Notons que si deux brillances $B_1(\lambda)d\lambda$ et $B_2(\lambda)d\lambda$, ($B_1 \neq B_2$), produisent même impression sensible dans presque tout le champ de comparaison (de 10° de diamètre), l'égalité n'est pas réalisée au centre : une petite plage, d'un demi ° à 1° de diamètre, se détache, séparée en deux parties distinctes entre elles et distinctes du reste du champ (cf. Stiles, 1951, p. 391). D'où l'intérêt de disposer de deux champs de comparaison : l'un (10°) pour définir l'équivalence chromatique, l'autre (2°) pour étudier séparément le centre de la rétine.

Il est clair que l'axiome (D₃), (cf. § 3.3 et 3.5), est à la base des expériences de Stiles : le but est de déterminer les fonctions $t^1[\lambda]$, (i.e., cf. § 3.5, les \mathcal{C} -coordonnées d'un stimulus monochromatique de longueur d'onde λ), dans une \mathcal{C} -base formée de trois stimuli monochromatiques de longueur d'onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (445, 526, 649 milimicrons, $\mu\mu$). L'appareillage permet de réaliser trois faisceaux :

1°) un faisceau monochromatique de longueur d'onde λ et de brillance variable.

2°) deux faisceaux trichromatiques, chacun somme de trois composants de longueur d'onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dont les brillances varient indépendamment (généralement, l'une au moins de ces brillances est nulle...).

Le sujet compare deux stimuli, dont l'un est un premier faisceau trichromatique, et l'autre la somme du faisceau monochromatique et du deuxième faisceau trichromatique.

Les précisions techniques que nous donnons maintenant (à la fin de ce § 4.2.1) ne seront guère reprises dans la suite : mais nous avons tenu à montrer l'ingéniosité et la complexité du dispositif expérimental de Stiles.

À l'origine de chaque faisceau est une lampe, à large filament incandescent. Le rayonnement issu de la source traverse un système

optique symétrique : il y a décomposition, sélection, et recombinaison. Un spectre, suite continue d'images réelles de la source en les différentes couleurs (longueurs d'onde) est formé, grâce à des lentilles, entre deux prismes (en fait deux paires de prismes). Si on se bornait aux prismes et lentilles, le pinceau émergent serait identique au pinceau incident : il y aurait exacte recombinaison par le deuxième prisme après la décomposition par le premier. Mais, dans le plan du spectre, un écran percé de fentes opère une sélection : on peut ainsi choisir des bandes étroites (quasi-monochromatiques) et éliminer le reste du rayonnement. (Eventuellement, on peut supprimer toute sélection, et avoir pour stimulus le rayonnement même de la source...).

La brillance de chaque bande $\lambda_i - \epsilon$, $\lambda_i + \epsilon$ dépend de la largeur de la fente f_i correspondante. On ne peut faire varier la brillance dans le flux d'un rayon (δ, λ) correspondant à un λ donné : mais, (cf *infra*), on modifie la puissance rayonnante totale reçue par la rétine dans la bande $(\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon)$ et cela revient au même. De plus des filtres, (formés de deux prismes mobiles qui, en glissant l'un sur l'autre, permettent de réaliser une lame de verre d'épaisseur continûment variable) sont disposés immédiatement après chacune des fentes f_i de l'écran, pour parfaire le réglage de la brillance des bandes ; nous désignerons par t_i le pouvoir de transmission de ces filtres.

Pour mélanger le faisceau monochromatique à un faisceau trichromatique, on utilise une glace sans tain : les deux faisceaux, qui se coupent orthogonalement, rencontrent à 45° cette glace, qui transmet et réfléchit une partie de chacun ; d'où, (dans chaque direction), un mélange des deux (il importe ici de noter qu'on ne réalise pas l'addition des deux faisceaux, mais l'addition de deux fractions de chacun d'eux : si on pouvait additionner des faisceaux on aurait ainsi, cf. § 2.4.4, des rayons de température supérieure à celle de la source : on conçoit que cela est contraire aux principes de la thermodynamique...).

C'est par un dispositif analogue que les deux stimuli sont délimités et placés dans le champ visuel du sujet : mais cette fois on utilise non une glace sans tain, mais une couche réfléchissante disposée à 45° dans une partie de la section d'un faisceau pour y substituer le faisceau orthogonal. De plus, à ce niveau se trouve un diaphragme circulaire qui délimitera le champ, et un filtre gris annulaire qui permet d'éclairer la périphérie du champ (entre 10° ou 2° , et 14°) d'un des deux stimuli atténué.

Décrivons maintenant le flux reçu par l'oeil. D'une part, les diverses portions du champ sont délimitées par des diaphragmes virtuels, images, formées à l'infini par l'oculaire de l'appareil, du diaphragme de la couche réfléchissante etc. situés au niveau où les deux stimuli prennent le même chemin. D'autre part le filament incandescent de la source ainsi que les diverses fentes interposées sur le trajet des rayons, ont leur image dans le plan de la pupille de l'oeil. D'où un système complexe de pupilles artificielles : si l'image de la source et celle f'' , de la fente f_0 d'entrée qui délimite une portion rectangulaire de la source sont bien définies indépendamment de la longueur d'onde des rayons considérés (on dit que le système est achromatique...) il n'en est pas de même d'une fente intermédiaire f_1 placée dans le plan du spectre. Dans ce plan, il y a une infinité continue d'images $f'_0(\lambda)$ de f_0 , correspondant aux diverses longueurs d'onde λ ; et la fente f_1 est au niveau de l'image $f'_0(\lambda_i)$, (f_1 et $f'_0(\lambda_i)$

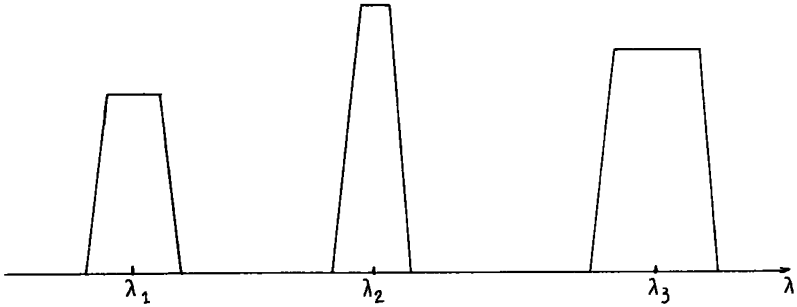


Figure 4 : courbe représentative, en créneaux, de l'aire $\mathcal{Q}(\lambda)$ de la pupille fictive.

sont au même niveau du spectre ; et elles coïncident si elles ont même largeur). Dans le plan de la pupille de l'oeil, au contraire, il y a une image f''_0 et une infinité continue d'images $f''_i(\lambda)$ de la fente f_i ; mais aux deux niveaux, f_0 et f_i ont même centre pour la longueur d'onde λ_i . Ainsi, la pupille artificielle f'' a une aire fonction de la longueur d'onde ; on peut écrire :

$$f''(\lambda) = f''_0 \cap (U_i f_i(\lambda)) ,$$

formule où les signes d'intersection et de réunion s'expliquent parce que le rayonnement doit passer par f_0 et (\cap) par l'une des (U) fentes f_i . Il faut encore tenir compte du coefficient de transmission t_i (du filtre associé à la fente f_i et de celui, t , des dispositifs ultérieurs). D'où pour l'aire ($\mathcal{Q}(\lambda)$) de la pupille fictive une courbe représentative en créneaux ; créneaux dont la largeur dépend de celle des f_i , et la hauteur du coefficient $t_i \times t$ (cf. fig. 4). Et si l'on désigne par $B(\lambda) d\lambda$ la brillance énergétique de la source, tout se passe pour le sujet comme s'il recevait par une pupille fictive d'aire constante unité un flux de brillance énergétique :

$$B'(\lambda) d\lambda = \mathcal{Q}(\lambda) B(\lambda) d\lambda ;$$

brillance "en créneaux" que, selon l'axiome de continuité (cf. § 5.4 et *infra* § 4.2.2), l'on peut assimiler à une combinaison de radiations monochromatiques

$$B'(\lambda) d\lambda \approx \sum k_i \delta(\lambda - \lambda_i) d\lambda$$

$$\text{où : } k_i = \int_{\lambda_i - \epsilon_i}^{\lambda_i + \epsilon_i} \mathcal{Q}(\lambda) B(\lambda) d\lambda$$

($2 \epsilon_i$ représente la largeur de la bande $\lambda_i \dots$).

Voilà le schéma théorique de la production des stimuli combinaison de quelques radiations monochromatiques. Mais l'expérimentateur n'a pas à calculer les k_i par cette théorie complexe. Il obture toutes

les fentes f_i sauf une, e.g. f_1 ; il met à la place de l'oeil une lunette dont le champ $d\Omega$ est étroit (diaphragmé à $1^\circ,7 \times 1^\circ,1$ dit Stiles p. 390) et dont la pupille d'entrée a le diamètre de la pupille naturelle de l'oeil ; il recueille sur une cellule pour le mesurer, à la sortie de cette lunette, un flux dont la puissance est $k_1 d\Omega$. La lunette, en effet, a la même pupille fictive complexe que l'oeil...

Comme nous l'avons annoncé, on ne reviendra pas dans la suite du § 4 sur les difficultés évoquées ci-dessus : on fera que les stimuli sont des combinaisons finies de radiations monochromatiques, et que l'aire de la pupille ne dépend pas de Ω .

4.2.2 *La \mathcal{E} -équivalence et les axiomes* : La relation \mathcal{E} satisfait sur un vaste domaine, aux axiomes (A), (H), (S), (D₃), (C) (énoncés au § 3). Moyennant les retouches expliquées au § 3.5, l'ensemble des classes d'équivalence de stimuli est donc un cône convexe $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ dans un espace vectoriel tridimensionnel \mathcal{M}/\mathcal{E} . Au § 4.2.3, on décrit le quotient \mathcal{M}/\mathcal{E} ; au § 4.2.2, on passe préalablement en revue les différents axiomes (sauf (C) et (S) qui sont des postulats implicites dont on ne dit rien dans la littérature...) et on compare les deux relations \mathcal{E} et \mathcal{L} .

L'axiome (A) d'additivité et l'axiome (H) d'homogénéité sont associés au nom de Grassman (cf. Judd, 1951, p. 821, et Stiles, 1955, p. 383) qui paraît avoir, le premier, (Grassman (1853)) donné un énoncé formalisé équivalent à ces axiomes. Toutefois le caractère linéaire de la \mathcal{E} -équivalence est vu implicitement dès le fameux traité d'optique où Newton (1704) pose les bases physiques de la théorie des couleurs. Les axiomes (A) et (H) semblent être bien vérifiés dans un domaine assez vaste. Précisons ici avec Judd (1951 p. 822 sqq) que stabilité de l'équivalence ne signifie pas constance des apparences perceptives associées aux stimuli. Un mélange de rouge (640 m μ) et de jaune (550 m μ) et un orange (590 m μ), \mathcal{E} -équivalent au mélange, peuvent paraître jaunes après que l'oeil a été exposé à une intense lumière rouge, mais ils demeurent équivalents. "*The eye thus cannot be trusted to yield the same color perception from a given stimulus ; simultaneous and successive induction affect it profoundly. But it is still a satisfactory null-instrument, and it obeys Grassman's laws*", en bref : la perception d'un stimulus dépend fortement des états de stimulation antérieurs ou concomitants ; mais l'oeil est un bon instrument de zéro (il permet de repérer fidèlement une équivalence) et cet instrument suit les lois de Grassman". Ceci dit, le domaine de validité des axiomes exclut les stimuli trop intenses, ainsi que les stimuli trop faibles : il est limité supérieurement par le seuil de douleur de l'oeil, et inférieurement par le seuil de vision des cônes. Cette dernière limitation est essentielle : un stimulus de brillance inférieure à ce seuil peut être perçu du fait de la sensibilité des bâtonnets mais il ne produit aucune impression de couleur : c'est la vision crépusculaire, dont on a déjà parlé au § 4.1.2, à propos de l'effet Purkinje. De plus Stiles signale (p. 393) que des recherches récentes (Blottiau, Trezona) ont révélé à l'extrémité violette du spectre des anomalies qui, selon lui, offrent plus d'intérêt théorique (pour la physiologie) qu'elles ne posent de difficultés pratiques (pour la colorimétrie, la définition du quotient \mathcal{M}/\mathcal{E}). Les extrémités rouge et violette du spectre posent de toutes façons des difficultés : si Judd (1951, p. 811) peut citer des auteurs qui ont expérimenté avec des stimuli dont la longueur d'onde dépassait 1 μ dans l'ultra-violet et descendait au-dessous de 0,32 μ dans l'infra-rouge, on ne peut, sans détruire l'oeil, étudier en détail de tels stimuli qui ne sont perçus qu'à des distances considérables. Nous avons plus haut, pour des commodités de notation, posé l'intervalle (0,3 ; 0,8), en précisant (cf. § 3.5), que les axiomes (A) et (H) ne peuvent

être pratiquement vérifiés que dans un intervalle plus étroit, e. g. (0,39 ; 0,75).

Comme on l'a dit, (§ 4.2.1) les études expérimentales récentes, (notamment celles de Stiles) reposent toutes sur l'axiome (D₃) : on postule l'existence d'une \mathcal{E} -base formée, (e.g.) de trois stimuli monochromatiques de longueur d'onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Stiles (1955 § 2) appelle (D₃) la forme faible de l'hypothèse thermodynamique : il entend par là opposer (D₃) aux théories physiologiques qui expliquent par cônes et bâtonnets le détail des impressions sensibles produites par le rayonnement des diverses longueurs d'onde, ainsi qu'aux systèmes axiomatiques plus complets (qui comportent, outre (D₃), les axiomes (A) et (H) de Grassman, axiomes qu'on ne peut supposer qu'approximativement vérifiés). Il est vrai que l'axiome (D₃) suffit à assurer qu'on peut déterminer pour chaque stimulus un système de 3 \mathcal{E} -coordonnées : cependant, si (A) et (H) sont imparfaitement vérifiés (cf. § 3.3) deux stimuli qui ont mêmes coordonnées (non toutes positives) ne sont pas nécessairement \mathcal{E} -équivalents. Au § 4.2.3.4, on suggère un plan expérimental pour étudier l'écart entre \mathcal{E} et la linéarité, et on tentera de donner de la tridimensionnalité une condition axiomatique qui, à l'encontre de (D₃), soit indépendante de la linéarité.

Notons une particularité : selon l'axiome (D₃) (cf. § 3.5) un stimulus peut avoir soit zéro, soit une, soit deux \mathcal{E} -coordonnées négatives. Mais si on choisit comme Stiles une \mathcal{E} -base formée de stimuli monochromatiques, tout stimulus a au plus une coordonnée négative; et tout stimulus monochromatique λ (qui ne coïncide avec aucun des 3 stimuli de base...) a exactement une coordonnée $t^i[\lambda]$ non-positive ; i.e. il faut ajouter à la radiation λ une part de la radiation de base λ' (le stimulus désaturant, cf. *supra* § 4.2.1) pour obtenir un mélange équivalent à une combinaison des deux autres stimuli-base. Cette propriété qui résulte de la position des stimuli monochromatiques, à la frontière du cône convexe $\mathcal{C}(\mathcal{M}^+)$ apparaîtra au § 4.2.3.5 avec l'étude de ce cône.

Il est évident que la relation d'équivalence \mathcal{E} est plus fine que \mathcal{L} : deux stimuli \mathcal{E} -équivalents (stimuli que le sujet ne distingue pas) sont, *ipso facto*, \mathcal{L} -équivalents (ont même brillance lumineuse); une classe d'équivalence pour \mathcal{L} est réunion de classes d'équivalence pour \mathcal{E} . Mais la relation d'équivalence que \mathcal{L} définit ainsi sur le quotient \mathcal{M}/\mathcal{E} n'est pas *a priori* linéaire (cf. § 3.2). Selon Stiles (1955, § 6) il s'en faut de beaucoup qu'elle le soit : les surfaces de \mathcal{L} -équivalence ne sont pas des plans dans \mathcal{M}/\mathcal{E} ; la relation \mathcal{L} s'écarte beaucoup plus que \mathcal{E} des axiomes (A) et (H). Les prédécesseurs qui ont pris la brillance photométrique pour l'une des coordonnées linéaires de \mathcal{M}/\mathcal{E} ont inutilement introduit dans ce quotient des distorsions inhérentes à \mathcal{L} . La démarche était la suivante : 1° déterminer expérimentalement la brillance photométrique $t[\lambda_0]$ du stimulus $\delta(\lambda - \lambda_0)d\lambda$; 2° déterminer expérimentalement les proportions relatives des radiations $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ à ajouter à λ_0 ou à mélanger entre elles pour réaliser l'égalité chromatique ; i.e. déterminer à un coefficient près les \mathcal{E} -coordonnées $t^i[\lambda_0]$; 3° calculer les $t^i[\lambda_0]$ en sorte que :

$$\sum_i t^i[\lambda_0] b[\lambda_i] = b[\lambda_0].$$

En fait les données photométriques et les données chromatométriques

utilisées par cette méthode provenaient de laboratoire différents ; cf. Stiles § 1. Stiles propose, tout au contraire, de déterminer d'abord, indépendamment de \mathcal{L} , les \mathcal{E} -coordonnées $t^i[\lambda]$; puis de chercher des coefficients β_i tels que $\sum \beta_i t^i[\lambda]$ soit une aussi bonne approximation que possible de la brillance photométrique $b[\lambda]$ (mesurée selon l'une ou l'autre des deux méthodes de photométrie). Ainsi c'est la structure mathématique la moins exacte (celle du quotient \mathcal{M}/\mathcal{L}) qui est subordonnée à la plus exacte (\mathcal{M}/\mathcal{E}), et non l'inverse.

4.2.3 Le quotient \mathcal{M}/\mathcal{E} ; étude géométrique

4.2.3.1 Dans ce §, on substitue à la relation d'équivalence expérimentale (qui n'est qu'approximation linéaire), une relation d'équivalence linéaire (notée aussi \mathcal{E}) ; et on étudie le quotient \mathcal{M}/\mathcal{E} . Ainsi on se place dans un cadre mathématique régulier, qui est en même temps une approximation acceptable de la structure des phénomènes.

Supposons que l'on a fixé un système de trois fonctions $t^i[\lambda]$ donnant les \mathcal{E} -coordonnées des stimuli monochromatiques de brillance énergétique unité, dans une base formée de trois d'entre eux, de longueurs d'onde respectives $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, (cf. § 3.5). On pose pour tout stimulus un $B(\lambda)d\lambda$:

$$t^i(B) = \int_{0,3}^{0,8} t^i[\lambda] B(\lambda) d\lambda,$$

(expression intégrale qui ne fournit les coordonnées expérimentales de B dans la base $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, que si (A) et (H) sont rigoureusement vérifiés). Et l'on pose que deux stimuli B_1 et B_2 sont équivalents si, et seulement si la formule intégrale leur assigne les mêmes coordonnées. En ce sens, selon le mot de Stiles (1955, § 2), le système des 3 fonctions $t^i[\lambda]$ "contains the whole facts" comme toute information relative à l'équivalence chromatique (réserve faite des problèmes de seuil différentiel dont on parlera plus bas au § 4.2.4.4). De même, la brillance photométrique est représentée comme :

$$b(B) = \beta_1 t^1(B) + \beta_2 t^2(B) + \beta_3 t^3(B),$$

et deux stimuli B_1, B_2 sont dits \mathcal{L} -équivalents si la formule leur assigne la même brillance b .

Au choix initial de la base expérimentale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, correspond dans l'espace vectoriel \mathcal{M}/\mathcal{E} le choix d'un système de coordonnées particulier t^1, t^2, t^3 . Mais il est loisible d'une part de munir \mathcal{M}/\mathcal{E} de plusieurs systèmes de coordonnées linéaires intéressants à divers titres ; d'autre part d'étudier géométriquement \mathcal{M}/\mathcal{E} comme un espace vectoriel muni : 1°) d'un cône convexe $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$. (Il importe de souligner ici que, tandis qu'en géométrie élémentaire on appelle cône une surface lieu de demi-droites concourantes, il s'agit ici avec $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ d'une portion d'intérieur non vide!) 2°) d'une forme linéaire b (la brillance photométrique) 3°) d'une courbe

$$\mathcal{E}[\lambda] = \mathcal{E}(\delta(\lambda' - \lambda)d\lambda),$$

paramétrée en λ , ($\lambda \in (0,3 ; 0,8)$), qui est le lieu des classes de stimuli monochromatiques de brillance énergétique totale unité. Nous commencerons par cette étude géométrique.

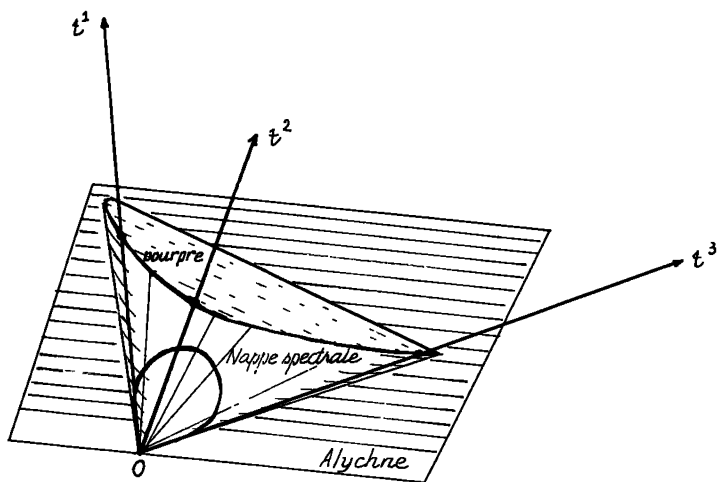


Figure 5: le cône $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ et l'alychne.

4.2.3.2 Pour représenter le cône convexe $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$, il est commode de le limiter à un plan dans lequel $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ ait une base compacte (i.e. à un plan qui ne soit parallèle à aucune génératrice du cône $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ qui est un cône strict fermé, cf. *infra*). Pour représenter la forme linéaire b , il nous suffit du plan $\{b = 0\}$; comme, dans la terminologie usuelle, on appelle alychne ("sans lumière") la droite intersection du plan $\{b = 0\}$, avec un plan de base du cône, nous appellerons le plan $\{b = 0\}$, plan alychne. Sur la figure 5, on a dessiné le cône $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ (limité à une base compacte), le plan alychne et la courbe paramétrique $\mathcal{E}[\lambda]$.

A l'intérieur du cône $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ sont toutes les classes de stimuli visibles physiquement réalisables (i.e. les classes $\mathcal{E}(x)$ où x est une mesure positive, notamment le blanc solaire...); à l'extérieur de $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ sont les classes des stimuli virtuels, non équivalents à des stimuli réels (i.e. classes ne comprenant aucune mesure positive). Le cône $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ a pour frontière d'une part la nappe spectrale, nappe convexe lieu des droites de vecteur directeur $\mathcal{E}[\lambda]$ (où $\lambda \in (0,3; 0,8)$); d'autre part le secteur plan des pourpres (teintes entre le rouge et le violet...) qui s'étend entre les deux rayons extrêmes de la nappe spectrale. Comme on l'a annoncé plus haut (§ 3.5) il est difficile de définir ces rayons extrêmes (que nous notons IR, infrarouge et UV, ultra-violet). Si on se restreint aux stimuli de \mathcal{M}_0^+ (i.e. dont la brillance $B(\lambda)d\lambda$ a son support dans $(0,39; 0,75)$), on a un cône convexe fermé $\mathcal{E}(\mathcal{M}_0^+)$, dont la frontière se compose de la nappe spectrale (restreinte à $(0,39; 0,75)$) et du secteur plan qui s'étend entre les deux rayons extrêmes, bien définis de cette nappe. Mais il est intéressant d'extrapoler. Quand λ tend vers l'infrarouge (vers 0,8) ou vers l'ultra-violet (vers 0,3) le vecteur $\mathcal{E}[\lambda]$ tend vers zéro (car le rayonnement cesse d'être visible) et les données expérimentales certes fort imprécises dans ces zones extrêmes, font apparaître que quand λ tend vers 0,3 (resp. 0,8) la direction de $\mathcal{E}[\lambda]$ tend vers une limite; autrement dit, la courbe $\mathcal{E}[\lambda]$ qui part de zéro pour rejoindre

zéro a une tangente à ses deux extrémités. On a ainsi un cône $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ qui est fermé, comme $\mathcal{E}(\mathcal{M}^{1+})$ dont il déborde fort peu. De plus, il apparaît que $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ est aussi un cône strict (ne contenant pas de droite), ce qui n'est pas une conséquence immédiate de l'axiome (S), axiome qu'il n'est naturel de postuler que dans \mathcal{M}^{1+} (chaque demi-droite de \mathcal{M}^{1+} contient un stimulus sûrement perçu, donc non-équivalent à zéro ; il n'en est pas de même pour \mathcal{M}). Parce que $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ est un cône convexe fermé strict il existe des plans dans lesquels $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ a une base compacte, propriété que nous avons utilisée dans le dessin.

Le plan alychne, plan des classes de stimuli de brillance photométrique nulle, ne peut contenir aucune classe de stimulus visible :

l'alychne est donc extérieur au cône $\mathcal{E}(\mathcal{M}^{1+})$. Cependant, à la limite ultra-violet du spectre, la nappe spectrale tend à rejoindre le plan alychne et semble même s'y raccorder tangentiellement, suivant une génératrice que nous notons UV (ultra-violet) : géométriquement, cela équivaut à dire que la branche violette de la courbe $\mathcal{E}[\lambda]$ est, à l'origine, tangente, et même osculatrice, au plan alychne.

Nous reproduisons plus bas (tableau 3) une table des coordonnées des points $\mathcal{E}[\lambda]$, dans un système d'axes particulier : on remarque que le premier point qui y figure, $\mathcal{E}[0,38]$, est distinct de l'origine et pourtant situé dans le plan alychne. Il semble paradoxal qu'un stimulus de brillance nulle puisse être vu, et qu'on lui assigne des coordonnées non-nulles. Cela correspond à la situation suivante : seul, le stimulus $\delta(\lambda - 0,38)d\lambda$ n'est pas visible ; mais mélangé à un autre stimulus (ordinaire visible... e.g. un blanc) ; il modifie l'impression produite par celui-ci. Nous reviendrons sur ce point au § 4.3...

Parce que la génératrice UV est contenue dans l'alychne, le cône $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ n'a pas de base compacte dans un plan $b = \text{cte}$ (plan parallèle à l'alychne). La base s'étire à l'infini vers l'UV ; elle a pour frontière une courbe à branche infinie parabolique de direction asymptotique UV (intersection avec la branche spectrale) et une demi-droite de direction UV (intersection avec le secteur plan des pourpres). La figure 10 représente cette base (rapportée à un système d'axes défini plus bas).

La section de $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ par un plan de brillance photométrique constante ($b = \text{cte}$), semblerait *a priori* devoir donner une bonne description du cône... : son infinitude lui laisse peu d'intérêt pratique.

Du jaune au rouge (à partir e.g. de $0,55\mu$), la nappe spectrale peut être supposée rigoureusement plane ; la génératrice IR, limite dans l'infrarouge, est nettement détachée de l'alychne (autrement dit, quand λ tend vers $0,8$ $\mathcal{E}[\lambda]$ rejoint l'origine avec une tangente non contenue dans l'alychne).

Dans la théorie des cônes convexes, on appelle génératrice extrême une génératrice qui est à la frontière du cône et n'est intérieure à aucune facette plane. On peut montrer que toute génératrice extrême de l'image d'un cône convexe \mathcal{P} par une application linéaire ℓ est l'image par ℓ d'au moins une génératrice extrême de \mathcal{P} . Toute génératrice extrême de $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ appartient donc à la nappe spectrale, image par \mathcal{E} de l'ensemble des génératrices extrêmes de \mathcal{M}^+ . En fait si on délimite sur la nappe spectrale une facette plane de $\lambda = 0,55\mu$ à l'IR, on peut dire que les génératrices extrêmes de $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ sont la génératrice rouge limite IR, et les génératrices de la nappe spectrale pour lesquelles $\lambda \leq 0,55$.

4.2.3.3 On peut expliquer ici la particularité, notée plus haut (§ 4.2.2) à propos de l'axiome (D_3) , qu'un point de $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ a au plus une seule de ses coordonnées t' qui soit négative. Plus généralement, soit un cône convexe fermé strict \mathcal{E}^+ dans un espace vectoriel E de dimension 3. Supposons E rapporté à un système de coordonnées dont les 3 axes Ou, Ov, Ow , sont des génératrices de la frontière de \mathcal{E}^+ (par exemple, pour $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$, trois génératrices de la nappe spectrale ou du secteur plan des pourpres). On va montrer qu'un point de \mathcal{E}^+ a au plus une de ses coordonnées négatives. Les plans de coordonnées séparent l'espace en huit trièdres ; à l'intérieur de chacun de ces trièdres, les trois coordonnées u, v, w ont un signe constant ce qui permet de désigner chaque trièdre par une suite de trois signes $(+, +, +)$, $(+, +, -)$, $(+, -, +)$ etc. Et l'espace E est subdivisé en 27 (i.e. $3 \times 3 \times 3$) régions sur chacune desquelles les trois coordonnées ont un comportement constant (est soit nulle, soit positive, soit négative) : e.g. $(0, 0, 0)$ est l'origine ; $(0, +, 0)$ l'axe Ov ; $(+, 0, +)$ le secteur plan ouvert (Ou, Ow) etc. . Nous disons que ce sont les régions de signature constante.

Soit H un plan dans lequel \mathcal{E}^+ ait une base compacte : une région de signature constante autre que $(0, 0, 0)$... contient un point de \mathcal{E}^+ si et seulement si elle contient un point de la base de \mathcal{E}^+ dans H . Or on voit maintenant sur la figure 6 que la base du cône ne peut avoir de point M dans une région où deux coordonnées soient négatives, e.g. dans $(-, -, +)$; car alors la base, étant convexe, contiendrait le triangle de sommets le point M et les points d'intersection $(0, +, 0)$, $(+, 0, +)$ de Ov et Ou avec le plan H ; et l'axe Ow , $(0, 0, +)$, ne serait pas sur la frontière de \mathcal{E}^+ , il lui serait intérieur.

A titre d'exercice, on va reprendre la démonstration sous une autre forme, plus puissante mais sans doute plus difficile à suivre et à découvrir que la première. On suppose seulement que \mathcal{E}^+ est un cône convexe de sommet l'origine, qui contient Ou, Ov, Ow dans sa frontière (on ne suppose pas que \mathcal{E}^+ soit strict, ni qu'il soit fermé...). On va montrer par l'absurde qu'il n'y a pas de point de \mathcal{E}^+ dont deux coordonnées au moins soient négatives. En effet, supposons qu'appartienne à \mathcal{E}^+ le point $A = (a, -b, -c)$ (où $b > 0, c > 0$; a réel quelconque) ; considérons les trois demi-droites de vecteurs directeurs :

$$\begin{aligned} &(a, -b, -c) \\ &(1, b, 0) \\ &(|c|, 0, c) \end{aligned}$$

toutes trois appartiennent à \mathcal{E}^+ (parce que \mathcal{E}^+ est un cône convexe qui contient A, Ou, Ov, Ow). Ces demi-droites sont non-coplanaires et définissent un trièdre \mathcal{E}^+ qui est inclus dans \mathcal{E}^+ (par raison de convexité). Or \mathcal{E}^+ (donc *a fortiori* \mathcal{E}^+) contient à son intérieur le vecteur $\alpha = (1 + a + |a|, 0, 0)$ somme des vecteurs directeurs des trois arêtes ; mais alors \mathcal{E}^+ contiendrait à son intérieur l'axe Ou (dont α est un vecteur directeur) ce qui est contraire à l'hypothèse faite que Ou appartient à la frontière de \mathcal{E}^+ .

4.2.3.4 On a supposé jusqu'ici la relation d'équivalence \mathcal{E} rigoureusement linéaire ; et cette hypothèse donne certainement une très bonne approximation du quotient $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$. On peut donc prendre la représentation géométrique déjà obtenue comme une base pour concevoir une étude de la \mathcal{E} -équivalence indépendante de l'hypothèse de linéarité.

Répétons (cf. § 2, § 4.2.2) que sans les axiomes (A) et (H) l'égalité des \mathcal{E} -coordonnées de deux stimuli B_1 et B_2 n'équivaut à ($\mathcal{E}(B_1) = \mathcal{E}(B_2)$), que si les 3 \mathcal{E} -coordonnées sont non-négatives. La comparaison à des mélanges de trois primaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ne donne un exact tableau de l'équivalence chromatique qu'à l'intérieur du triangle d'arêtes les trois génératrices $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, de la nappe spectrale. Mais sur la figure 7 on voit qu'un heptagone remplit presque entièrement la base de $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$: par combinaison linéaire positive de 7 primaires monochromatiques on peut donc réaliser un mélange équivalent à n'importe quel stimulus donné, ou peu s'en faut. Ceci suggère d'une part un schéma d'expérience pour étudier quantitativement les défauts de linéarité de \mathcal{E} ; d'autre part une nouvelle construction axiomatique qui (à la différence de (D_3)), implique la tridimensionnalité de $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ indépendamment de (A) et de (M).

Supposons qu'on expérimente avec quatre primaires monochromatiques, e.g. les primaires 1, 3, 5, 7 de la figure 7. Selon l'hypothèse linéaire on peut trouver quatre stimuli monochromatiques B_1, B_3, B_5, B_7 , (de ces longueurs d'onde) tels que $\mathcal{E}(B_1 + B_5)$ et $\mathcal{E}(B_3 + B_7)$ soient égaux, et tous deux sur la droite intersection des plans définis par les paires génératrices spectrales (1,5) et (3,7). Sans qu'il y ait linéarité absolue de \mathcal{E} , on peut toujours supposer l'existence de B_1, B_3, B_5, B_7 avec entre eux la relation $\mathcal{E}(B_1 + B_5) = \mathcal{E}(B_3 + B_7)$. Selon l'hypothèse linéaire deux combinaisons à coefficients positifs :

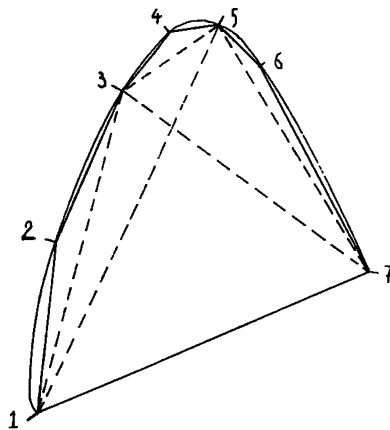


Figure 7 : un heptagone remplit presque exactement la base du cône $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$

$$B = t^1 B_{-1} + t^3 B_3 + t^5 B_5 + t^7 B_7$$

$$B' = t'^1 B_1 + t'^3 B_3 + t'^5 B_5 + t'^7 B_7$$

sont \mathcal{C} -équivalentes, si et seulement si :

$$t^1 - t'^1 = t^3 - t'^3 = t^5 - t'^5 = t^7 - t'^7 ;$$

autrement dit, dans R^{+4} (espace des suites de 4 nombres non négatifs) la classe des (t^1, t^3, t^5, t^7) équivalents à un (t^1, t^3, t^5, t^7) donné est un segment de droite d'équation paramétrique :

$$t'^1 = t^1 + t$$

$$t'^3 = t^3 - t$$

$$t'^5 = t^5 + t$$

$$t'^7 = t^7 - t$$

équations où (afin que les t' soient tous non négatifs) le paramètre t est un nombre de l'intervalle :

$$[-\inf(t^1, t^5), \inf(t^3, t^7)].$$

S'il n'y a pas linéarité absolue, les points (t^1, t^3, t^5, t^7) représentatifs des combinaisons équivalentes à (t^1, t^3, t^5, t^7) décriront certes encore une ligne bornée : mais ce sera une ligne courbe. Il doit être possible de suivre expérimentalement ces lignes, ces fibres d'équivalence. Toutefois si l'écart à la linéarité est très faible, le choix d'une relation d'équivalence non linéaire sur R^{+4} , s'ajoutant aux données expérimentales, sera un problème statistique délicat. De plus, comme il s'agit d'un effet du second ordre, il serait essentiel de tracer les lignes d'équivalence pour chaque sujet individuellement, avant de considérer s'il existe une tendance non linéaire commune à tous.

Mais quelle qu'en puisse être la difficulté, l'intérêt de semblables expériences est, selon nous, qu'avec une connaissance plus précise de l'équivalence chromatique elles pourraient apporter des exemples d'interaction quadratique entre impressions sensibles.

Suggérons maintenant quelques axiomes : (D'_3) : Soit B_1, \dots, B_n des stimuli en nombre fini : sur R^{+n} la relation d'équivalence :

$$(\{t^i\} \approx \{t'^i\}) \Leftrightarrow (\sum t^i B_i \approx \sum t'^i B_i)$$

est difféomorphe à une relation d'équivalence linéaire : i.e. on peut trouver un automorphisme différentiable φ de R^{+n} et une relation d'équivalence linéaire \mathcal{R} sur R^n telle que :

$$(\{t^i\} \approx \{t'^i\}) \Leftrightarrow (\mathcal{R}(\varphi(\{t^i\})) = \mathcal{R}(\varphi(\{t'^i\}))) ;$$

de plus, le quotient R^n/\mathcal{R} est de dimension 3.

(G') , (axiome de génération finie) : on peut trouver un système fini $\{B_i\}$ de n stimuli tel que tout stimulus B soit, dans les limites de précision des jugements d'égalité chromatique, \mathcal{C} -équivalent à une combinaison linéaire positive des B_i .

(Q') axiome de quasi-linéarité) : il existe une application linéaire (continue au sens de l'axiome (C)...) de \mathcal{M}_0 dans R^n qui à tout

stimulus $B \in \mathcal{M}^+ \subset \mathcal{M}$ fait correspondre un $\{t^i\}$ tel que :

$$\text{On a : } \mathcal{E}(B) = \mathcal{E}(\sum t^i B_i)$$

$$t^i(B) = \int_{0,3}^{0,8} t^i[\lambda] B(\lambda) d\lambda,$$

où $t^i[\lambda]$ est une fonction qui ne diffère de zéro qu'au voisinage de la longueur d'onde λ_i de B_i .

Moyennant ces trois axiomes, on peut, e.g. définir trois fonctions différentiables (non rigoureusement linéaires, comportant des termes quadratiques...) X, Y, Z de n variables telles que deux stimuli soient \mathcal{E} -équivalents si et seulement si coïncident leurs 3 coordonnées données par les formules :

$$X(B) = X(t^1(B), \dots, t^n(B))$$

$$Y(B) = Y(t^1(B), \dots, t^n(B))$$

$$Z(B) = Z(t^1(B), \dots, t^n(B)).$$

Faute de données expérimentales, nous ne reviendrons pas dans la suite, sur les structures non linéaires envisagées dans ce §.

4.2.4 Systèmes de coordonnées sur le quotient \mathcal{M}/\mathcal{E} :

4.2.4.1 : Avant d'examiner en détail des systèmes de coordonnées particuliers sur \mathcal{M}/\mathcal{E} , présentons quelques généralités et précisons les notations.

Les trois vecteurs de base d'un système de coordonnées sont appelés les primaires, (ou classes de stimuli primaires) ; dans le système des t^i , les primaires sont les trois classes $\mathcal{E}[\lambda_i]$ de stimuli monochromatiques ; mais les primaires peuvent aussi bien être des classes de stimuli quelconques réels, ou virtuels (extérieurs au cône $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$). Quoique les mesures expérimentales soient faites avec des primaires particuliers on peut, par le calcul, passer à une base quelconque, formée de trois autres stimuli dont chacun est défini comme la classe $\mathcal{E}(B)$ d'une mesure $B(\lambda)d\lambda$, ou encore est donné par les coordonnées dans le système considéré d'abord ; ce n'est là pour nous qu'un changement de coordonnées dans l'espace vectoriel \mathcal{M}/\mathcal{E} ... Quant à savoir si les coordonnées calculées pour $\mathcal{E}(B)$ dans la base $\mathcal{E}(B_1), \mathcal{E}(B_2), \mathcal{E}(B_3)$ sont celles que l'on obtiendrait en expérimentant sur B, B_1, B_2, B_3 (à supposer que l'on ait pris des primaires réels), cela dépend de l'exactitude avec laquelle l'équivalence chromatique satisfait aux axiomes de linéarité : quoiqu'il en soit, nous avons posé au début du § 4.2.3, que l'on étudiait ici non l'équivalence expérimentale, mais une équivalence \mathcal{E} qui en est une approximation définie par une formule intégrale linéaire.

Appelons u, v, w, les trois coordonnées d'un système ; nous notons u(B) la valeur de la coordonnée u au point $\mathcal{E}(B) \in \mathcal{M}/\mathcal{E}$; nous notons $u[\lambda] = u(\mathcal{E}[\lambda])$. Dans les exemples étudiés $\{u + v + w = 1\}$ est l'équation d'un plan qui coupe le cône $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ suivant une base compacte d'où l'intérêt des notations suivantes : $\bar{u}(B)$ (resp. $\bar{u}[\lambda]$) désigne le quotient de la coordonnée u $[\lambda]$ de $\mathcal{E}[\lambda]$ (resp. u(B) de $\mathcal{E}(B)$) par la somme des trois coordonnées ; et le point $(\bar{u}(B), \bar{v}(B), \bar{w}(B))$, dont les trois coordonnées sont réduites à avoir pour somme 1, est l'intersection du plan $\{u + v + w = 1\}$ et de la demi-droite $O \mathcal{E}(B)$.

4.2.4.2 Le système W.D.W., dont nous noterons θ^i les trois coordonnées est caractérisé à un coefficient de proportionnalité près, par les conditions suivantes :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\} : (i \neq j) \Rightarrow \theta^i[\lambda_j] = 0$$

$$\theta^1[\lambda_4] = \theta^2[\lambda_4]$$

$$\theta^2[\lambda_5] = \theta^3[\lambda_5],$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les trois primaires des expériences de Judd ; $\lambda_4 = 4878 \times 10^{-4} \mu$; $\lambda_5 = 5797 \times 10^{-4} \mu$. La première condition exprime que les axes de coordonnées sont les génératrices $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de la nappe spectrale ; les deux dernières conditions expriment que la droite intersection des deux plans définis l'un par les génératrices λ_3 et λ_4 , l'autre par les génératrices λ_1 et λ_5 , est le lieu des vecteurs dont les trois composantes sont égales. Ainsi sont déterminés sur les axes (à un coefficient près) les trois vecteurs de base. Et le choix du coefficient de proportionnalité importe peu, si, avec Stiles, on se borne à utiliser le système W.D.W. pour étudier la forme du cône $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ d'après sa base dans le plan Π d'équation $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ en traçant les courbes représentatives des trois fonctions $\theta^i[\lambda]$ (coordonnées de l'intersection du plan Π avec la génératrice λ).

Le système W.D.W. permet de comparer deux relations d'équivalence \mathcal{E} et \mathcal{E}' (e.g. les relations d'équivalence chromatique définies, soit sur le champ de diamètre 10° , soit sur celui de diamètre 2°) du point de vue de l'hypothèse suivante : il existe une fonction $f(\lambda)$ continue et strictement positive sur l'intervalle $(0,3 ; 0,8)$, telle que :

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{M}^+ : \mathcal{E}'(B_1(\lambda)d\lambda) = \mathcal{E}'(B_2(\lambda)d\lambda) \Leftrightarrow \dots$$

$$\dots \Leftrightarrow \mathcal{E}(f(\lambda) B_1(\lambda)d\lambda) = \mathcal{E}(f(\lambda) B_2(\lambda)d\lambda) ;$$

hypothèse que nous noterons de façon concise ;

$$\exists f : \mathcal{E}' = \mathcal{E} \circ f.$$

Comme le remarque Stiles (1951, p. 396) (à supposer que \mathcal{E} et \mathcal{E}' satisfassent toutes deux aux axiomes (A), (H), (D_3) , (C)... cette hypothèse est vérifiée si et seulement si sont égales deux à deux les fonctions $\bar{\theta}^i[\lambda]$ et $\bar{\theta}'^i[\lambda]$ définies à partir des deux relations d'équivalence \mathcal{E} et \mathcal{E}' , (ce qui, notons-le, n'implique nullement que :

$$\forall B \in \mathcal{M}^+, \forall i \in \{1, 2, 3\} : \bar{\theta}^i(B) = \bar{\theta}'^i(B) ;$$

cette dernière condition, très forte, exprime que les θ^i et θ'^i sont dans un rapport constant et donc que les deux relations d'équivalence \mathcal{E} et \mathcal{E}' coïncident...).

Avant de démontrer ce résultat, faisons voir l'intérêt de la condition ($\mathcal{E}' = \mathcal{E} \circ f$), en en donnant une traduction physique. Si ($\forall \lambda f(\lambda) \leq 1$), ($\mathcal{E}' = \mathcal{E} \circ f$) exprime que B_1 et B_2 sont \mathcal{E}' -équivalents si et seulement si ils sont \mathcal{E} -équivalents après traversée d'un filtre de coefficient de transmission $f(\lambda)$. Si $f(\lambda)$ prend des valeurs supérieures à 1, on peut diviser f par son maximum M et remarquer que, les relations \mathcal{E} et \mathcal{E}' étant linéaires, ($\mathcal{E}' = \mathcal{E} \circ f$) équivaut à ($\mathcal{E}' = \mathcal{E} \circ g$) où $g = f/M$. On peut encore noter que si $t(\lambda)$ est une fonction inférieure à 1 ainsi que son produit par $f(\lambda)$, la condition ($\mathcal{E}' = \mathcal{E} \circ f$) peut s'énoncer plus symétriquement : il existe une relation d'équivalence linéaire \mathcal{E}'' telle que :

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C}'' \circ t ; \mathcal{C} = \mathcal{C}'' \circ ft$$

Ce qui anatomiquement laisse la place à l'hypothèse suivante : le rayonnement traverse soit le filtre $t(\lambda)$, soit le filtre $f(\lambda)$ $t(\lambda)$, puis il parvient à la même couche sensible qui par elle-même définit l'équivalence \mathcal{C}'' et qui, couplée avec l'un ou l'autre filtre, définit encore les deux équivalences \mathcal{C} et \mathcal{C}' . Certes, $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \circ f$, n'est qu'une condition nécessaire à l'existence d'une telle structure, ce n'est pas une condition suffisante : toutefois on prend volontiers le nécessaire pour suffisant lorsqu'on n'envisage qu'une seule cause simple possible d'un phénomène qui autrement serait l'effet d'une coïncidence! Mais qu'il en soit de ce point de méthode, en traçant les courbes $\bar{\theta}^i[\lambda]$, $\theta^i[\lambda]$ correspondant au champ de 10° et au champ de 2° , on constate qu'une différence de pigmentation ne suffit pas à expliquer les particularités du centre de la rétine ; (nous reproduisons en figure 8 la figure 12 du mémoire de Stiles).

Reste à démontrer que la condition :

$$\forall \lambda \in (0,3 ; 0,8), \forall i \in \{1,2,3\} : \bar{\theta}^i[\lambda] = \theta^i[\lambda]$$

équivalait à :

$$\exists f : \mathcal{C}' = \mathcal{C} \circ f.$$

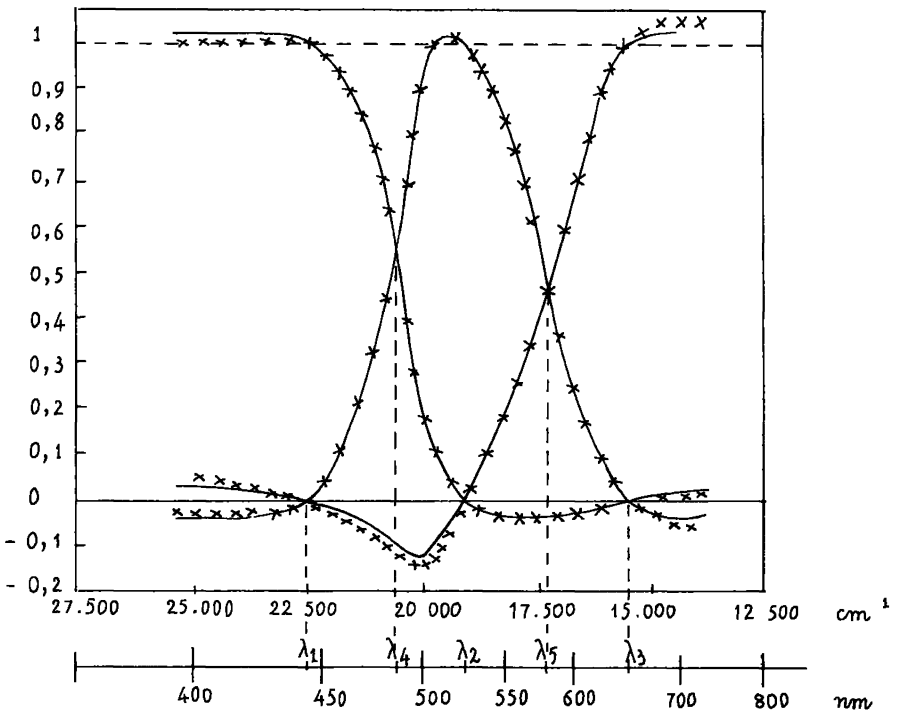


Figure 8 : les fonctions $\bar{\theta}^i[\lambda]$ pour le champ de 10° (courbes pleines) et celui de 2° (points isolés, notés d'une croix) ; d'après Stiles (1955).

En effet, la première condition équivaut à :

$$\forall \lambda \in (0,3;0,8), \forall i \in \{1,2,3\} : \frac{\theta^{i,1}[\lambda]}{\theta^{1,1}[\lambda] + \theta^{2,2}[\lambda] + \theta^{3,3}[\lambda]} = \frac{\theta^{i,1}[\lambda]}{\theta^1[\lambda] + \theta^2[\lambda] + \theta^3[\lambda]}$$

ou encore à : $\forall \lambda \in (0,3;0,8) : \frac{\theta^{1,1}[\lambda]}{\theta^1[\lambda]} = \frac{\theta^{2,2}[\lambda]}{\theta^2[\lambda]} = \frac{\theta^{3,3}[\lambda]}{\theta^3[\lambda]}$

$$= \frac{\theta^{1,1}[\lambda] + \theta^{2,2}[\lambda] + \theta^{3,3}[\lambda]}{\theta^1[\lambda] + \theta^2[\lambda] + \theta^3[\lambda]}$$

ce qui, en notant $f(\lambda)$ ce quotient, implique $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \circ f$, car :

$$\int \theta^{i,1}[\lambda] B_1(\lambda) d\lambda = \int \theta^{i,1}[\lambda] B_2(\lambda) d\lambda$$

si et seulement si :

$$\int \theta^1[\lambda] f(\lambda) B_1(\lambda) d\lambda = \int \theta^1[\lambda] f(\lambda) B_2(\lambda) d\lambda.$$

(B_1 et B_2 ont pour \mathcal{C}' -coordonnées $\theta^{i,1}$ les \mathcal{C} -coordonnées θ^i de fB_1 et de fB_2).

Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \circ f$: les fonctions $\theta^{i,1}$ définies par :

$$\theta^{i,1}(B(\lambda)d\lambda) = \theta^i(f(\lambda) B(\lambda)d\lambda)$$

sont des \mathcal{C}' -coordonnées satisfaisant aux conditions imposées à un système W.D.W. . Or on a en particulier :

$$\theta^{i,1}[\lambda] = \theta^i(f(\lambda) \delta(\lambda - \lambda')) d\lambda = f(\lambda') \theta^i[\lambda']$$

(car $f(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') d\lambda = f(\lambda') (\lambda - \lambda') d\lambda$: le produit d'une mesure ponctuelle par une fonction, est égal au produit de cette mesure par la valeur de la fonction en ce point). On a donc aussi :

$$\overline{\theta^{i,1}[\lambda]} = \frac{f(\lambda) \theta^i[\lambda]}{f(\lambda) (\theta^1[\lambda] + \theta^2[\lambda] + \theta^3[\lambda])} = \overline{\theta^i[\lambda]}$$

C.Q.F.D. .

Remarquons pour en terminer avec le système W.D.W. que, si ($\overline{\theta^{i,1}} = \overline{\theta^i}$) est une expression analytique aisément vérifiable de $\{f, \mathcal{C}' = \mathcal{C} \circ f\}$, ces deux conditions se traduisent géométriquement par ceci : il existe entre \mathcal{M}/\mathcal{E} et \mathcal{M}/\mathcal{E}' un isomorphisme d'espace vectoriel qui met en correspondance biunivoque les nappes spectrales, en associant deux à deux les génératrices correspondant à une même longueur d'onde. (Ou encore : il existe entre le plan projectif des droites de \mathcal{M}/\mathcal{E} et celui des droites de \mathcal{M}/\mathcal{E}' un isomorphisme qui fait correspondre biunivoquement les deux courbes spectrales en respectant le paramètre λ).

4.2.4.3 Le système de coordonnées (x, y, z) de la Commission Internationale de l'Eclairage (C. I. E.) est d'un usage général. Dans ce système, les stimuli primaires (vecteurs de base) sont virtuels : le cône \mathcal{EM}^+ est tout entier à l'intérieur du trièdre des points dont les 3

λ	$x[\lambda]$	$y[\lambda]$	$z[\lambda]$	λ	$x[\lambda]$	$y[\lambda]$	$z[\lambda]$
380	0,0014	0,0000	0,0000	654	0,1734	0,5113	0,0014
385	0,0022	0,0001	0,0101	660	1,0113	0,7570	0,0011
390	0,0042	0,0001	0,0201	665	1,0117	0,6949	0,0010
395	0,0073	0,0002	0,0302	670	1,0122	0,6310	0,0008
400	0,0143	0,0004	0,0679	605	1,0410	0,5168	0,0006
405	0,0232	0,0006	0,1107	610	1,0026	0,4030	0,0003
410	0,0435	0,0012	0,2074	615	0,9384	0,4412	0,0002
415	0,0777	0,0022	0,3713	620	0,8544	0,3610	0,0002
420	0,1344	0,0040	0,6450	625	0,7514	0,2210	0,0001
425	0,2148	0,0073	1,0391	630	0,624	0,2610	0,0000
430	0,2839	0,011	1,3846	635	0,5419	0,3170	0,0000
435	0,3285	0,0168	1,5130	640	0,4479	0,1750	0,0000
440	0,3443	0,0130	1,7471	645	0,3603	0,1382	0,0000
445	0,3481	0,0098	1,7823	650	0,2639	0,1070	0,0000
450	0,3362	0,0380	1,7721	655	0,2187	0,0610	0,0000
455	0,3187	0,0480	1,7441	660	0,1649	0,0510	0,0000
460	0,2908	0,0600	1,6692	665	0,1212	0,0446	0,0000
465	0,2511	0,0739	1,5281	670	0,0874	0,0320	0,0000
470	0,1954	0,0910	1,2874	675	0,0636	0,0232	0,0000
475	0,1421	0,1126	1,0419	680	0,0468	0,0170	0,0000
480	0,0956	0,1390	0,6130	685	0,0329	0,0119	0,0000
485	0,0580	0,1693	0,6162	690	0,0227	0,0082	0,0000
490	0,0320	0,2080	0,4652	695	0,0158	0,0057	0,0000
495	0,0147	0,2586	0,3433	700	0,0114	0,0041	0,0000
500	0,0049	0,3230	0,2720	705	0,0081	0,0029	0,0000
505	0,0024	0,4073	0,2123	710	0,0056	0,0021	0,0000
510	0,0093	0,5030	0,1562	715	0,0041	0,0015	0,0000
515	0,0291	0,6082	0,1117	720	0,0029	0,0010	0,0000
520	0,0633	0,7100	1,0782	725	0,0020	0,0007	0,0000
525	0,1096	0,7932	0,0573	730	0,0014	0,0005	0,0000
530	0,1655	0,8620	0,0422	735	0,0010	0,0004	0,0000
535	0,2257	0,9149	0,0298	740	0,0007	0,0003	0,0000
540	0,2904	0,9540	0,0203	745	0,0005	0,0002	0,0000
545	0,3597	0,9803	0,0134	750	0,0003	0,0001	0,0000
550	0,4334	0,9950	0,0087	755	0,0002	0,0001	0,0000
555	0,5121	1,0002	0,0057	760	0,0002	0,0001	0,0000
560	0,5945	0,9950	0,0039	765	0,0001	0,0000	0,0000
565	0,6784	0,9786	0,0027	770	0,0001	0,0000	0,0000
570	0,7621	0,9520	0,0021	775	0,0000	0,0000	0,0000
575	0,8425	0,9154	0,0018	780	0,0000	0,0000	0,0000
580	0,9163	0,8700	0,0017				
					21,3713	21,3714	21,3715

Tableau 3 : Coordonnées, dans le système de la C. I. E., de stimuli monochromatiques d'égale énergie.

λ	$x[\lambda]$	$y[\lambda]$	$z[\lambda]$	λ	$\bar{x}[\lambda]$	$\bar{y}[\lambda]$	$\bar{z}[\lambda]$
380	0,1741	0,0050	0,8209	550	0,3016	0,6923	0,0061
385	0,1740	0,0050	0,8210	555	0,3373	0,6589	0,0038
390	0,1738	0,0049	0,8213	560	0,3731	0,6245	0,0024
395	0,1736	0,0049	0,8215	565	0,4087	0,5896	0,0017
				570	0,4441	0,5547	0,0012
400	0,1733	0,0048	0,8219				
405	0,1730	0,0048	0,8222	575	0,4788	0,5202	0,0010
410	0,1726	0,0048	0,8226	580	0,5125	0,4866	0,0009
415	0,1721	0,0048	0,8231	585	0,5448	0,4544	0,0008
420	0,1714	0,0051	0,8235	590	0,5752	0,4242	0,0006
				595	0,6029	0,3965	0,0006
425	0,1703	0,0058	0,8239				
430	0,1689	0,0069	0,8242	600	0,6270	0,3725	0,0005
435	0,1669	0,0086	0,8245	605	0,6482	0,3514	0,0004
440	0,1644	0,0109	0,8247	610	0,6658	0,3340	0,0002
445	0,1611	0,0138	0,8251	615	0,6801	0,3197	0,0002
				620	0,6915	0,3083	0,0002
450	0,1566	0,0177	0,8257				
455	0,1510	0,0227	0,8263	625	0,7006	0,2993	0,0001
460	0,1440	0,0297	0,8263	630	0,7079	0,2920	0,0001
465	0,1355	0,0399	0,8246	635	0,7140	0,2859	0,0001
470	0,1241	0,0578	0,8181	640	0,7190	0,2809	0,0001
				645	0,7230	0,2770	0,0000
475	0,1096	0,0868	0,8036				
480	0,0913	0,1327	0,7760	650	0,7260	0,2740	0,0000
485	0,0687	0,2007	0,7306	655	0,7283	0,2717	0,0000
490	0,0454	0,2950	0,6596	660	0,7300	0,2700	0,0000
495	0,0235	0,4127	0,5638	665	0,7311	0,2689	0,0000
				670	0,7320	0,2680	0,0000
500	0,0082	0,5384	0,4534				
505	0,0039	0,6548	0,3413	675	0,7327	0,2673	0,0000
510	0,0139	0,7502	0,2359	680	0,7334	0,2666	0,0000
515	0,0389	0,8120	0,1491	685	0,7340	0,2660	0,0000
520	0,0743	0,8338	0,0919	690	0,7344	0,2656	0,0000
				695	0,7346	0,2654	0,0000
525	0,1142	0,8262	0,0596				
530	0,1547	0,8059	0,0394	700	0,7347	0,2653	0,0000
535	0,1929	0,7816	0,0255	705	0,7347	0,2653	0,0000
540	0,2296	0,7543	0,0161	710	0,7347	0,2653	0,0000
545	0,2658	0,7243	0,0099	715	0,7347	0,2653	0,0000

Tableau 4 : Base du cône $\mathcal{C}(M^+)$ dans le plan $\{x + y + z = 1\}$,
(système de la C. I. E.).

coordonnées sont positives. A un multiplicateur près, le système (x, y, z) de la C. I. E. peut être défini par les conditions suivantes :

- 1°) Le plan $y = 0$ est l'alychne.
- 2°) La partie plane de la nappe spectrale ($\lambda > 0,55 \mu$) est dans le plan $z = 0$.
- 3°) Le plan $x = 0$ est tangent à la nappe spectrale suivant la génératrice $\lambda = 0,504 \mu$.
- 4°) Si $d\lambda$ désigne le stimulus dont la densité de brillance énergétique spectrale est constante ($B(\lambda) \equiv 1$), (le blanc de densité uniforme) on a :

$$0 < x(d\lambda) = y(d\lambda) = z(d\lambda).$$

(le blanc a ses trois coordonnées égales et positives).

Les trois premières conditions fixent les plans de coordonnées : chacun d'eux est un plan d'appui de $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$, i.e. est tel que le cône convexe strict $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ soit situé tout entier dans l'un des deux demi-espaces que le plan délimite. Il en résulte que $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ est tout entier contenu dans l'un des huit trièdres délimités par les plans de coordonnées ; et, d'après la quatrième condition, $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ s'inscrit dans le trièdre des points de coordonnées positives. De plus les trois axes étant extérieurs à $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$, les primaires (vecteurs directeurs des axes) sont virtuels, ne correspondent à aucun stimulus physiquement réalisable.

Les trois premières conditions fixent chacune des coordonnées (x, y, z) à un facteur de proportionnalité près ; voyons comment la 4° condition permet de fixer l'ensemble des 3 coordonnées à un même facteur près. Soit x', y', z' choisies d'après 1°, 2°, 3° ; on a :

$$x'(d\lambda) = \int_{0,3}^{0,8} x'[\lambda] d\lambda$$

$$y'(d\lambda) = \int_{0,3}^{0,8} y'[\lambda] d\lambda$$

$$z'(d\lambda) = \int_{0,3}^{0,8} z'[\lambda] d\lambda$$

Les systèmes de coordonnées qui satisfont à 1°, 2°, 3°, 4° sont tous de la forme $(kx'/x'(d\lambda) ; ky'/y'(d\lambda) ; kz'/z'(d\lambda))$, où k est une constante positive quelconque.

On peut définir complètement les coordonnées en demandant que y soit la brillance photométrique, mesurée, e.g. en lamberts : mais, dans le tableau 3 que nous reproduisons d'après Judd (p. 823, table 6) les fonctions $x[\lambda], y[\lambda], z[\lambda]$ sont exprimées (sic) "dans un système arbitraire d'unités".

Les mesures de Stiles s'écartent un peu des valeurs proposées par Judd ou par la C.I.E., (Stiles utilise un autre système de coordonnées mais il est facile de changer d'axes pour comparer les diverses données, cf. *supra* § 4.2.4.1), notamment à l'extrémité violette du spectre, (cf. Stiles 1955 §§ 5, 6) ; toutefois dans ces longueurs d'onde les mesures sont difficiles, et les divergences sont grandes entre sujets normaux. Et Stiles croit pouvoir conclure de ses premières expériences que "there are no big surprises", il n'y a pas grande surprise...

Quand on veut figurer la base de $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$ dans un plan H (e.g. dans le plan $\{x + y + z = 1\}$) une ambiguïté se présente : l'espace vectoriel

\mathcal{M}/\mathcal{E} n'a pas été muni d'une métrique ; le dessin d'une section plane n'est déterminé qu'à une affinité près ; on est libre de choisir dans le plan du dessin les images de deux vecteurs de base de H (les longueurs des deux vecteurs et l'angle qu'ils forment...). Le triangle dont les sommets sont les points d'intersection des axes avec le plan $\{x+y+z=1\}$, peut donc recevoir une forme quelconque. Maxwell avait choisi un triangle équilatéral ; l'usage est aujourd'hui en faveur d'un triangle isocèle et rectangle. C'est ainsi que sur la figure 9, dessinée d'après Judd (fig. 11, p. 843) et Rabkin (fig. 6, pp 14-15), on a représenté un point (x, y, z) du plan $\{x+y+z=1\}$ par le point de coordonnées (x, y) dans un système d'axes orthogonaux : à la base de la nappe spectrale correspond la courbe d'équation paramétrique :

$$x = \bar{x}[\lambda] ; \quad y = \bar{y}[\lambda].$$

au triangle, base du trièdre de coordonnées, le triangle isocèle et rectangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

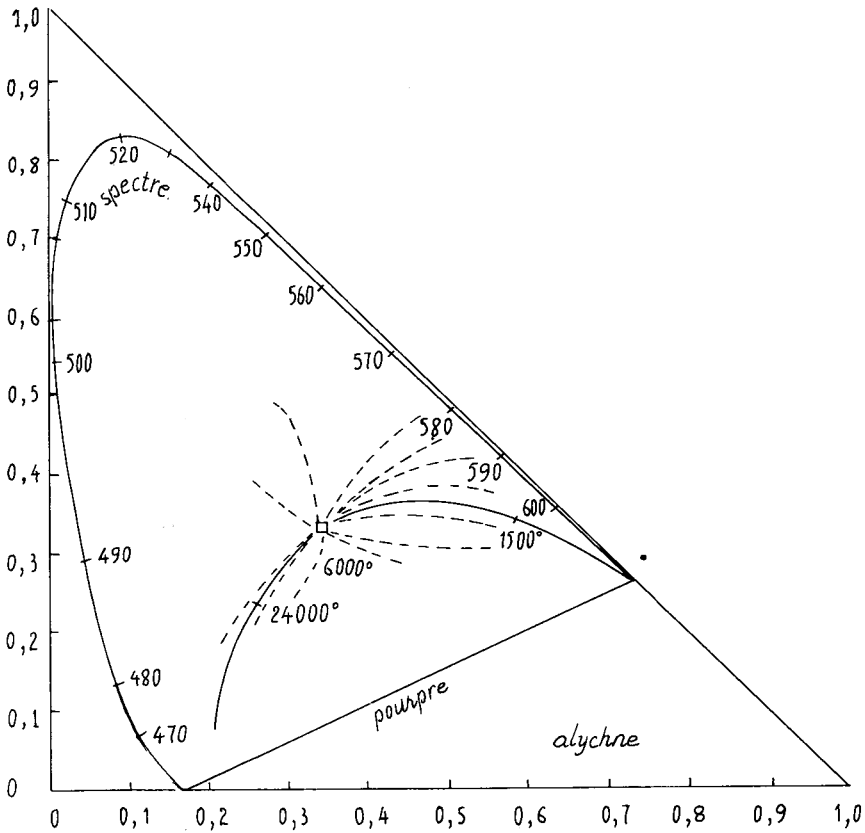


Figure 9 : la base de $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ rapportée aux coordonnées de la C.I.E. - On a marqué : le point (□) représentatif du blanc d'égal énergie ; la courbe (en trait plein) des stimuli dont la composition spectrale est celle du rayonnement du corps noir aux diverses températures ; les courbes (en tireté) correspondant aux planches de couleurs de l'atlas de Rabkin (cf infra § 4.3.2).

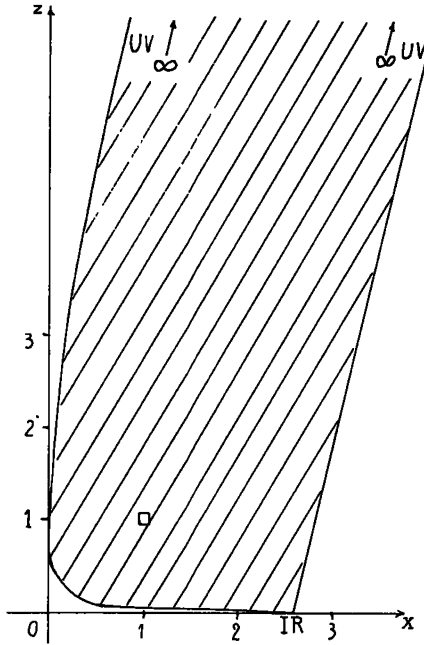


Figure 10 base non compacte du cône $\mathcal{C}(M^+)$ dans un plan de brillance photométrique constante ($\{y=1\}$). On a une demi droite des pourpres et une courbe spectrale qui se rejoignent à l'infini ; le blanc est marqué: \square .

La figure 10 représente approximativement la base du cône $\mathcal{C}(M^+)$ dans le plan $y = 1$; (au point $(x, 1, z)$ correspond un point de coordonnées rectangulaires (x, z)). Cette base, comme on l'a dit ci-dessus (§ 4.2.3.2) est non compacte. Notons que la courbe spectrale a pour équation paramétrique :

$$x = x[\lambda]/y[\lambda]$$

$$z = z[\lambda]/y[\lambda]$$

le point à l'infini est dans la direction :

$$x/z = x[0,38]/z[0,38] ;$$

le blanc a pour coordonnées $(1,1)$.

4.2.4.4 : Les trois coordonnées R, G, B, (*red, green, blue* ; rouge , vert, bleu) du système U.C.S. de Judd (1935) sont définies à partir des trois coordonnées x, y, z de la C.I.E. par les formules :

$$R = 3,1956 x + 2,4478 y - 0,1434 z$$

$$G = -2,5455 x + 7,0492 y + 0,9963 z$$

$$B = \quad \quad \quad 1, \quad \quad z$$

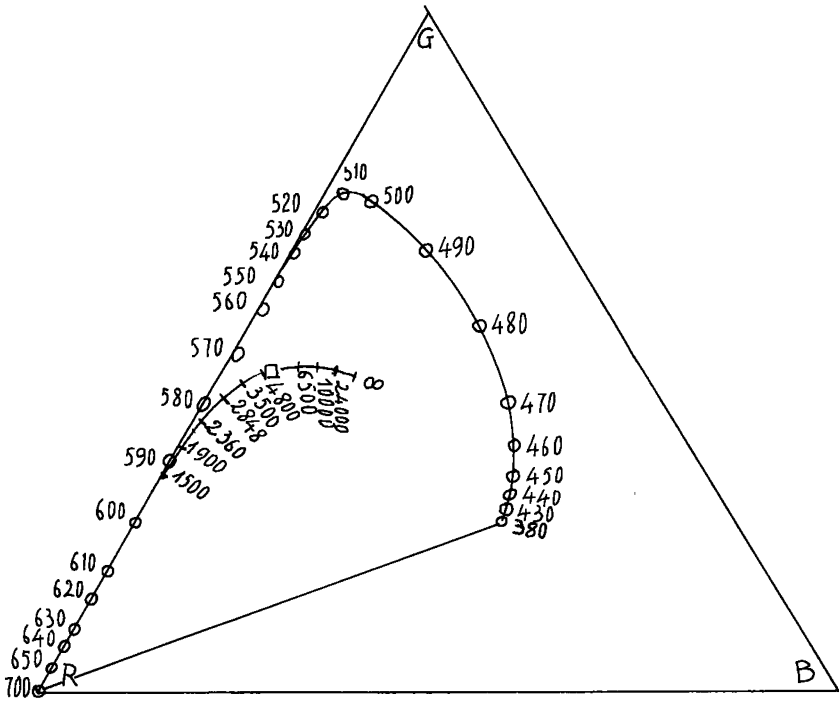


Figure 10' : base du cône $\mathcal{E}(M^+)$ dans le plan $\{R+G+B=1\}$; la base du trièdre de coordonnées est représentée suivant un triangle équilatéral, afin que les distances mesurées sur la figure correspondent à des nombres de seuils différentiels.

Si on représente la section du cône $\mathcal{E}(M^+)$ par le plan $\{(R+G+B)=1\}$ en plaçant au sommet d'un triangle équilatéral ("triangle de Maxwell" dit Judd) les trois points d'impact des axes, on a la figure 10 (reproduite d'après Judd, 1951, fig. 13). Selon Judd, cette représentation fournit une échelle chromatique uniforme (*a uniform chromaticity scale*, d'où les initiales U.G.S.) en un sens qu'on va préciser. Considérons l'ensemble des stimuli d'une brillance photométrique donnée (e.g. 10 milli-lamberts) et supposons que ces stimuli sont présentés à un sujet sur un fond gris de même brillance (e.g. on réalise un disque central coloré sur un fond gris, comme dans les expériences de Stiles, cf. § 4.2.1). On pourra étudier la discriminabilité des stimuli, définir des seuils différentiels (suivant l'une des procédures expérimentales usuelles) : mais ici il s'agit d'un ensemble bidimensionnel de stimuli, (en correspondance biunivoque avec la base du cône $\mathcal{E}(M^+)$ dessinée sur la fig. 10'). Convenons e. g. de dire qu'un

stimulus B_1 est à une distance de B_0 inférieure à un seuil si B_1 a une chance sur deux au moins d'être confondu avec B_0 ; on définira un voisinage $V(B_0)$ de B_0 qui sera l'ensemble de tous les B_1 séparés de B_0 par moins d'un seuil.

A priori, on ne peut rien dire de la forme de $V(B_0)$; sinon que mathématiquement, des habitudes de géométrie différentielle nous amènent à poser que si on fait choix d'un système de coordonnées locales (u, v) dans l'espace des stimuli, $V(B_0)$ sera défini par une équation du type :

$$V(B_0) = \{ B | a(u_B - u_{B_0})^2 + 2b(u_B - u_{B_0})(v_B - v_{B_0}) + c(v_B - v_{B_0})^2 \leq 1 \}$$

(où $u_{B_0}, v_{B_0}, u_B, v_B$ sont les coordonnées de B et B_0). En fait, selon Judd, si on représente sur la figure 10' chaque stimulus B par le point d'intersection de sa génératrice avec la base, les voisinages $V(B_0)$ associés aux divers points B_0 sont des disques égaux entre eux. On dira donc que la distance entre deux points mesurée sur la figure 10' est proportionnelle au nombre de seuils qui séparent les stimuli correspondants.

Un mathématicien doit s'interroger sur le rôle réel que jouent ici les trois coordonnées R, G, B , et le triangle équilatéral. En fait on veut définir une distance entre des droites issues de l'origine ; pour cela on caractérise chaque droite par son point d'impact dans le plan $\{R + G + B = 1\}$ et sur ce plan affine on met une distance euclidienne (celle qui rend équilatéral le triangle des points sur les axes)...Autrement dit de l'espace projectif des droites issues de 0, on enlève la sous-variété linéaire (la "droite") des droites contenues dans le plan $\{R+G+B=0\}$; il reste un espace affine (un "plan" affine) de droites, sur lequel on met une métrique euclidienne.

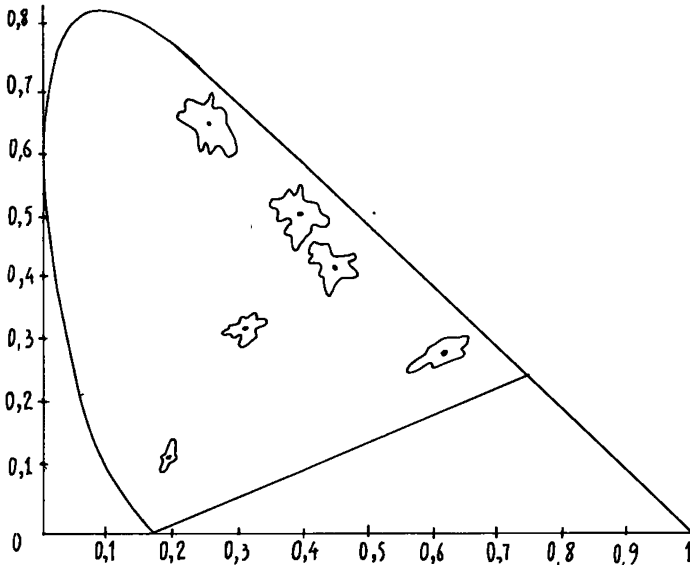


Figure 10' : étude des seuils sans champ de contours ; sur le diagramme triangulaire de la CIE, on a représenté approximativement les courbes d'égalité de discriminabilité à partir de six primaires ; (d'après Parra, thèse, fig 8)

4.2.4.5 Métrique non quadratique et expériences de F. Parra :

L'échelle U.C.S. a ses lettres de noblesse puisque, avant Judd, l'illustre Schrödinger a défini une métrique quadratique sur l'ensemble des couleurs. Au § 4.3.2.2, nous ferons nous-mêmes usage de cette échelle pour tracer l'épure du corps chromatique. Mais il convient de souligner ici que la métrique quadratique ne peut donner des seuils qu'un ordre de grandeur, non les valeurs, même approchées. C'est ce qu'ont établi les remarquables expériences de F. Parra (1966).

Cet auteur a d'abord réalisé un ingénieux appareil. Grâce à cet appareil, d'une part l'expérimentateur peut, par des manipulations assez simples, fixer un stimulus de référence B_0 , et un ensemble Δ de stimuli de comparaison ; tel que dans \mathcal{M}^+ Δ est une droite passant par B_0 , dont chaque stimulus est un mélange de primaires, le mélange gardant même luminance que B_0 , et dépendant linéairement d'un paramètre ; et dans $\mathcal{E}(\mathcal{M}^+)$, la droite $\mathcal{E}(\Delta)$ est une droite de direction quelconque passant par la couleur $\mathcal{E}(B_0)$. D'autre part le sujet, par simple manipulation d'un seul levier, peut parcourir à son gré la droite Δ des stimuli de référence (cf. *loc. cit.* p. 38). Une moitié du champ est illuminée par B_0 , l'autre par un stimulus de Δ ; éventuellement on peut disposer d'un champ de contour. Partant d'un champ uniforme on guette l'apparition d'une ligne de séparation ; puis revenant au champ uniforme on fait de même dans le sens opposé (cf. *loc. cit.* p. 14).

Les expériences principales ont porté sur un seul sujet ; on a étudié les seuils chromatiques au voisinage de six stimuli de référence, explorant à partir de chacun de ceux-ci, huit, puis treize droites de comparaison, en effectuant, au total plus de 30.000 égalisations. Sur la figure 10", nous avons reproduit approximativement les six voisinages $V(B_0)$ (cf. *supra*) obtenus en expérimentant sans champ de contour (avec un champ de contour, F. Parra a obtenu des résultats non identiques, mais analogues).

Une remarque s'impose : quelle que puisse être la difficulté des mesures de seuil, il est établi que les voisinages $V(B_0)$ ne sont pas des ellipses : ces voisinages ne sont même pas convexes. Quant à l'interprétation, considérons d'abord une figure (fig. 10"') qui donne, d'après R.N. Shepard (1964) quatre contours susceptibles de représenter l'ensemble des stimuli également semblables à un stimulus de référence S. Les cas A et C correspondent aux formules de distance :

$$(A) : \Delta s^2 = (\Delta x/a)^2 + (\Delta y/b)^2$$

$$(C) : \Delta s = |\Delta x/a| + |\Delta y/b| ;$$

le cas B est intermédiaire entre A et C. Le cas D offre un contour non convexe. Il ne s'agit plus alors d'une distance, car l'inégalité du triangle cesse d'être vérifiée. En effet, considérons les quatre stimuli S, S', S'', S''' : si l'écart (nous évitons à dessein le terme de distance) entre S et un point du contour, est mesuré par 1, les écarts |S S''|, |S' S''|, |S S'''|, |S' S'''| valent 2/3, tandis que l'écart |S S'| vaut 2 ; d'où les inégalités :

$$2 = |S S'| > |S S''| + |S'' S'| = 4/3$$

$$2 = |S S'| > |S S'''| + |S''' S'| = 4/3.$$

Or, dans ses expériences sur des stimuli bidimensionnels, R.N. Shepard a découvert des exemples du cas (D).

Pour reprendre en termes de psychologie nos considérations géométriques, disons que chacune des variations $S S''$ (suivant la dimension x du stimulus) et $S S'$ (suivant la dimension y du stimulus) peut correspondre à moins d'un seuil, tandis que la variation $S S'$ (qui n'est autre que les deux variations précédentes réalisées simultanément) correspond à deux seuils. Tout se passe comme si l'égalité rigoureuse de l'une des coordonnées (x pour S et S'' , y pour S et S') mettait entre deux stimuli une ressemblance profonde, masquant la variation de l'autre coordonnée.

Selon Shepard, de telles découvertes (*loc. cit.* p. 80) "appear to justify the maintenance of a distinction between two types of stimuli: those that are reacted to as homogeneous, unitary wholes, and those that tend to be analyzed into perceptually distinct components or properties". Des stimuli tels que ceux de Shepard, (des disques de taille variable munis d'une aiguille de dimension variable), sont en effet manifestement hétérogènes. Mais, comme exemple de stimuli multidimensionnels homogènes, Shepard croit pouvoir citer les couleurs; non sans noter prudemment qu'entre l'homogénéité parfaite et l'hétérogénéité manifeste, on peut concevoir des degrés intermédiaires. Les expériences de Parra nous apprennent justement à considérer les couleurs comme des stimuli plus hétérogènes qu'il ne paraît *a priori*. L'interprétation précise des courbes de Parra, courbes analogues au type D de Shepard, mais plus complexes, demandera une expérimentation très poussée. Il n'en est pas moins permis de dire que les stimuli colorés se décomposent précisément suivant des dimensions correspondant à deux (ou trois) distinctions dont la disparition sélective entraîne les types bien connus de vision anormale des couleurs (cf. *infra* § 4.3.3). Et Parra de conclure en citant Walraven (1966) : "Le sujet normal, au point de vue de la vision des couleurs, est un "double dichromate" plutôt qu'un trichromate".

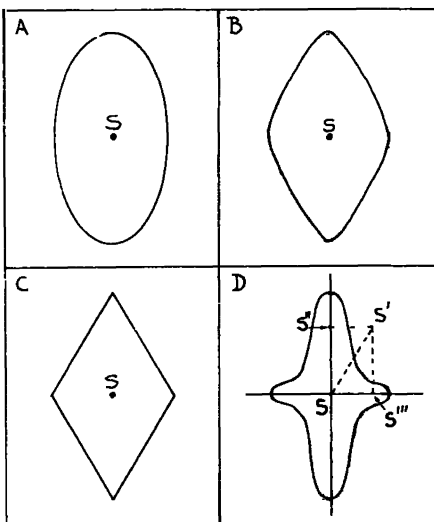


Figure 10'' : quatre contours susceptibles de représenter l'ensemble des stimuli également semblables à un stimulus de référence S . D'après R. N. Shepard (1964) : "Four contours, representing possible sets of stimuli that are equally similar to a given standard stimulus, S , in a physically defined space". (Nous avons quelque peu modifié le secteur D).