P. CAZES

Addendum au § 3.2.2 de [ANA. BLOCS I] sur la minoration de la corrélation entre facteurs calculés sur les individus placés respectivement en lignes et en colonnes supplémentaires d'un sous-tableau de Burt

Les cahiers de l'analyse des données, tome 5, n° 4 (1980), p. 404-406

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1980__5_4_404_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol V 1980 n° 4 p 404-406

ADDENDUM AU § 3.2.2 DE [ANA. BLOCS I] SUR LA MINORATION DE LA CORRÉLATION ENTRE FACTEURS CALCULÉS SUR LES INDIVIDUS PLACÉS RESPECTIVEMENT EN LIGNES ET EN COLONNES SUPPLÉMENTAIRES D'UN SOUS-TABLEAU DE BURT [ADDENDUM ANA. BLOCS I]

par P. Cazes (1)

Soit $C_{LL'}$ un sous-tableau de Burt croisant deux séries de questions posées à un ensemble I d'individus, et F_α^I et G_α^I les facteurs sur I obtenus en adjoignant les tableaux disjonctifs complets $k_{IL'}$ et k_{IL} respectivement associés à L et L' en supplémentaire de $C_{LL'}$. On peut trouver pour la variance de F_α^I et celle de G_α^I des majorations plus précises que celles donnnées dans le théorème 3 du § 3.2.2 de [ANA. BLOCS I] (cf. *Cahiers* Vol V n° 2, p. 158) quand l'on fait $\alpha = \beta$ dans les points 1) et 2) de ce théorème. On en déduit des bornes plus précises pour la corrélation entre F_α^I et G_α^I et pour la valeur propre λ_α.

De façon précise, conservant les mêmes notations que dans [ANA. BLOCS I], et posant :

$$\mu_1 = \mathrm{Sup}\{a_q \sqrt{\lambda_1^{qq}} \mid q \in K\} + ((1 - \mathrm{Inf}\{a_q \mid q \in K\})\ (1 - \Sigma\{a_q^2 \mid q \in K\})\bar{\lambda}^*_{KK})^{1/2}$$

$$\mu'_1 = \mathrm{Sup}\{b_q \sqrt{\lambda_1^{qq}} \mid q \in K'\} + ((1 - \mathrm{Inf}\{b_q \mid q \in K'\})\ (1 - \Sigma\{b_q^2 \mid q \in K'\})\bar{\lambda}^*_{K'K'})^{1/2}$$

$$m_1 = \mathrm{Inf}(\mu_1\ ,\ (\bar{\lambda}_{KK})^{1/2})$$

$$m'_1 = \mathrm{Inf}(\mu'_1\ ,\ (\bar{\lambda}_{K'K'})^{1/2}) \quad (*)$$

$$v = (1/C_K) + (1 - 1/C_K)(\bar{\lambda}^*_{KK})^{1/2}$$

$$v' = (1/C_{K'}) + (1 - 1/C_{K'})(\bar{\lambda}^*_{K'K'})^{1/2}$$

On a le théorème 3' suivant :

Théorème 3' : On a les inégalités suivantes :

1') $\mathrm{Var}(F_\alpha^I) \leq m'_1$

2') $\mathrm{Var}(G_\alpha^I) \leq m_1$

3') $\mathrm{Corr}(F_\alpha^I\ ,\ G_\alpha^I) \geq (\lambda_\alpha/(m_1\ m'_1))^{1/2}$

4') $\lambda_\alpha \leq m_1\ m'_1$

5') Si $\forall\ q \in K'$, p_{JqJq} est diagonal et $b_q = 1/C_{K'}$, on a :

$\mathrm{Var}(F_\alpha^I) \leq v'$

6') Si $\forall\ q \in K$, p_{JqJq} est diagonal et $a_q = 1/C_K$, on a :

$\mathrm{Var}(G_\alpha^I) \leq v$

(*) *On a par construction* $\mu_1 \lessgtr \mu$, $\mu'_1 \lessgtr \mu'$, $m_1 \leq m$, $m'_1 \leq m'$

(1) *Maître-Assistant. Laboratoire de Statistique de l'Université P. & M. Curie (Paris 6)*

7') Dans les conditions de validité des points 5') et 6') on a :

$$\mathrm{Corr}(F^I_\alpha, G^I_\alpha) \geq (\lambda_\alpha/(vv'))^{1/2}$$

$$\lambda_\alpha \leq vv'$$

Pour obtenir l'amélioration de la borne de $\mathrm{Var}(G^I_\alpha)$, il suffit quand on applique l'inégalité de Schwarz au deuxième terme de la formule (54) (cf. [ANA. BLOCS I] p. 160) qui fournit une majoration de la quantité $|P'|$ de remplacer $\Sigma\{a_{q'}(\sigma^\beta_{q'})^2 | q' \in K,\ q' \neq q\}$ par sa valeur $1-a_q(\sigma^\beta_q)^2$ au lieu de majorer cette somme par 1. On a alors, en posant

$$P'_0 = ((1 - \Sigma\{a^2_q | q \in K\})\bar{\lambda}^*_{KK})^{1/2}$$

(P'_0 est la majoration de $|P'|$ fournie par (55) et que l'on va améliorer quand $\alpha = \beta$) :

$$|P'| \leq P'_0(\Sigma\{a_q(\sigma^\alpha_q)^2(1 - a_q(\sigma^\beta_q)^2) | q \in K\})^{1/2}$$

$$= P'_0(1 - \Sigma\{(a_q\sigma^\alpha_q\sigma^\beta_q)^2 | q \in K\})^{1/2} \qquad (1)$$

Quant $\alpha = \beta$, on a :

$$\Sigma\{(a_q\sigma^\alpha_q\sigma^\beta_q)^2 | q \in K\} = \Sigma\{a^2_q(\sigma^\alpha_q)^4 | q \in K\}$$

$$\geq \mathrm{Inf}\{a_q | q \in K\}\Sigma\{a_q(\sigma^\alpha_q)^4 | q \in K\}$$

$$\geq \mathrm{Inf}\{a_q | q \in K\}(\Sigma\{a_q(\sigma^\alpha_q)^2 | q \in K\})^2$$

$$= \mathrm{Inf}\{a_q | q \in K\} \qquad (2)$$

la dernière inégalité résultant de ce que le moment d'ordre 2 des $(\sigma^\alpha_q)^2$ est supérieur ou égal au carré du moment d'ordre 1 des $(\sigma^\alpha_q)^2$ qui vaut 1.

On déduit de (1) et (2) que quand $\alpha = \beta$, on a :

$$|P'| \leq P'_0(1 - \mathrm{Inf}\{a_q | q \in K\})^{1/2} \qquad (3)$$

borne plus précise que la valeur P'_0 adoptée dans le théorème 3. On déduit immédiatement de (3) le point 2') du théorème 3'.

On démontrerait de même le point 1').

Les points 3') et 4') découlent immédiatement des points 1') et 2') et de ce que la covariance entre F^I_α et G^I_α est égale à $\sqrt{\lambda_\alpha}$.

Le point 5') (resp. 6') résulte du fait qu'avec les hypothèses effectuées, on a toujours $\mu'_1 \leq (\bar{\lambda}_{K'K'})^{1/2}$ (resp. $\mu_1 \leq (\bar{\lambda}_{KK})^{1/2}$), comme on le vérifie aisément, et donc $m'_1 = \mu'_1$ (resp. $m_1 = \mu_1$) μ'_1 (resp. μ_1) étant dans ce cas particulier égal à v' (resp. v).

Le point 7 résulte immédiatement des points 5') et 6').

Remarques

1) m_1, m'_1, v et v' étant indépendantes de α, les inégalités données pour λ_α sont vérifiées pour la plus grande valeur propre λ_1 issue de $C_{LL'}$.

2) Si L = L' = J, et si les hypothèses des points 5') et 6') sont vérifiées, auquel cas $C_{LL'}$ est le tableau de Burt usuel B_{JJ}, on a v = v', et l'on retrouve comme majoration v^2 de la plus grande valeur propre λ_1 issue de B_{JJ} la borne donnée par A. Leclerc (cf. C.R.A.S., t. 287 (2-10-78) série A, pp 553-555).

3) Si L = L' = J, on a $m_1 = m'_1$ et $\sqrt{\lambda_1} \leq m_1$ inégalité que l'on peut retrouver à partir des calculs effectués au § 2.4 de [ANA. BLOCS I], où l'on a déjà obtenu la majoration fournie par $(\bar{\lambda}_{KK})^{1/2}$. Pour obtenir la majoration donnée par μ_1 (et donc celle donnée par m_1), il suffit dans l'expression (26) de ce § 2.4, (où K = K', $a_q = b_q$) de séparer les termes carrés des termes rectangles puis d'appliquer l'inégalité de Schwarz, en opérant de la même façon que ci-dessus.