LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

P. CAZES

L'analyse de certains tableaux rectangulaires décomposés en blocs : généralisation des propriétés rencontrées dans l'étude des correspondances multiples. I. Définitions et applications à l'analyse canonique des variables qualitatives

Les cahiers de l'analyse des données, tome 5, n° 2 (1980), p. 145-161

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1980__5_2_145_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. V - 1980 - n° 2 - p. 145-161

L'ANALYSE DE CERTAINS TABLEAUX RECTANGULAIRES DÉCOMPOSÉS EN BLOCS : GÉNÉRALISATION DES PROPRIÉTÉS RENCONTRÉES DANS L'ÉTUDE DES CORRESPONDANCES MULTIPLES. I. DÉFINITIONS ET APPLICATIONS A L'ANALYSE CANONIQUE DES VARIABLES QUALITATIVES [ANA. BLOCS I] (à suivre).

par P. Cazes [1]

1 *Introduction*

Les correspondances étudiées ici peuvent être considérées comme des généralisations du tableau de BURT construit dans l'étude des correspondances multiples : ce sont des tableaux k_{IJ} juxtaposition de tableaux $k_{IqJq'}$ et qui sont tels que pour tout q (resp. q') le centre de gravité du nuage des profils des lignes i de I_q (resp. colonne j de $J_{q'}$) est confondu avec le centre de gravité global. Au § 2 on donne les conditions pour qu'il en soit ainsi, et on étudie les propriétés de la correspondance k_{IJ}. On montre en particulier que l'inertie totale de k_{IJ} est égale à la moyenne des inerties de chaque sous-tableau $k_{IqJq'}$, et que la valeur propre la plus élevée issue de k_{IJ} est inférieure ou égale à la moyenne des valeurs propres les plus élevées $\lambda_1^{qq'}$ issues des tableaux $k_{IqJq'}$.

Au § 3, on examine le cas particulier d'un tableau k_{IJ}, où J est l'union disjointe d'ensembles J_q, I pouvant être un ensemble d'individus ou d'observations, et on étudie les propriétés de ce tableau et des tableaux dérivés obtenus en croisant, comme dans les correspondances multiples, J avec lui-même, ou deux sous-ensembles de J.

Ce dernier cas revêt une grande importance pratique. En effet pour expliquer un ensemble Q de variables qualitatives dont l'ensemble des modalités est L par un autre ensemble Q' de variables qualitatives dont l'ensemble des modalités est L', il est d'usage d'analyser le sous-tableau de Burt L × L' ; (construit d'après un ensemble I d'individus de base). A tout individu nouveau is est alors associée une ligne (description de is par les modalités explicatives L') qui par ses similitudes aux lignes décrivant les individus de base permet de prédire ou d'estimer la colonne inconnue des modalités L des variables à expliquer afférentes à is. Or l'efficacité de ce procédé repose sur l'hypothèse que pour les individus de base au moins, les valeurs des facteurs calculés en les adjoignant au sous-tableau de Burt L×L' soit comme ligne (d'après les variables explicatives) soit comme colonne (d'après les variables à expliquer) sont fortement corrélées entre elles. Au § 3.2.2, nous donnons pour les coefficients de corrélation en cause des bornes précises.

(1) *Maître-assistant, laboratoire de statistique. Univ. P. et M. Curie*

Au § 4, on donne plusieurs généralisations des correspondances multiples, généralisations obtenues soit par codage flou, soit en codant par α_q (et non plus par 1) la présence à une modalité d'une question q (codage pondéré).

On fait des rappels sur le tableau de Burt modifié et sur les contributions d'une question (contributions totales ou sur un facteur) dans un tableau disjonctif complet, un tableau de Burt ou un sous-tableau de ce tableau ; on indique comment égaliser ces contributions à l'aide du codage pondéré. On donne enfin quelques caractéristiques associées aux questions, ce qui permet d'une part de les représenter sur les axes factoriels déterminés par leurs modalités, et d'autre part d'avoir des aides à l'interprétation, analogues à celles données pour les modalités, et utiles pour "nettoyer" un questionnaire comportant beaucoup de questions.

Au § 5, approfondissant une idée de B. Escofier (cf [Qualitatives et quantitatives], *Cahiers* Vol IV n° 2, pp 137-146), on traite de l'étude simultanée de variables qualitatives et quantitatives, généralisant ainsi d'une autre façon les correspondances multiples, tandis qu'au § 6 on étudie quelques cas modèles associés aux tableaux définis aux §§ 4 et 5, ce qui permet en particulier de montrer l'utilité de raisonner sur le tableau de Burt modifié.

2 *Etude de tableaux composés de blocs et tels que le centre de gravité de chaque bloc soit confondu avec le centre de gravité global.*

2.1 *Notations : Conditions pour que le centre de gravité de chaque bloc soit confondu avec le centre de gravité global.*

On considère un tableau de correspondance k_{IJ} sur le produit de deux ensembles finis I et J, et l'on suppose que I (resp. J) est l'union disjointe d'ensembles I_q (resp. $J_{q'}$) :

$$\left.\begin{aligned} I &= \cup\ \{I_q \mid q \in K\} \\ J &= \cup\ \{J_{q'} \mid q' \in K'\} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

On suppose de plus que pour tout couple (q, q') appartenant à K × K', on a une correspondance $(k_{qq'})_{I_qJ_{q'}}$ (on notera aussi $k_{qq'}$ ou $k_{I_qJ_{q'}}$) et que le tableau k_{IJ} est la juxtaposition des $(k_{qq'})_{I_qJ_{q'}}$.

Pour que le nuage des profils des lignes i de I_q, associées au tableau k_{IJ} ait même centre de gravité que le nuage des profils de toutes les lignes i de k_{IJ}, on doit avoir, en désignant par k(i), k(j), respectivement la somme de la ligne i et de la colonne j du tableau k_{IJ} et par k le total des éléments de ce tableau :

$$\forall\ j \in J\ :\ \Sigma\{(k(i)/k)(k(i,j)/k(i)) \mid i \in I_q\}/(\Sigma\{(k(i)/k) \mid i \in I_q\}) = k(j)/k$$

Posant : $a_q = \Sigma\{k(i) \mid i \in I_q\}/k$ (2)

on déduit de la relation précédente que :

$$\forall\ j \in J\ :\quad \Sigma\{k(i,j) \mid i \in I_q\} = a_q\ k(j) \qquad (3)$$

De même pour que le nuage des profils des colonnes j de $J_{q'}$, associées à k_{IJ} ait même centre de gravité que le centre de gravité global, on doit avoir : $\forall\ i \in I : \Sigma\{k(i,j) \mid j \in J_{q'}\} = b_{q'}\ k(i)$ (4)

avec :

$$b_{q'} = \Sigma\{ k(j) | j \in J_{q'} \}/k \qquad (5)$$

Nous supposerons dans tout ce § 2 que pour tout q (resp. q') appartenant à K (resp. K') la relation (3) (resp.(4)) est vérifiée, auquel cas le centre de gravité de tout sous-ensemble I_q de I (resp. $J_{q'}$ de J) est confondu avec le centre de gravité de I (resp. J) ; nous verrons que tous les tableaux considérés aux §§ suivants vérifient ces relations, K (ou K') pouvant se réduire à un élément, ce qui est le cas pour un tableau disjonctif complet.

Remarque : a_q (resp. $b_{q'}$) est le poids du sous-ensemble I_q (resp. $J_{q'}$) de I (resp. J), et l'on a par construction :

$$\Sigma\{a_q | q \in K\} = \Sigma\{b_{q'} | q' \in K'\} = 1 \qquad (6)$$

$a_K = \{a_q | q \in K\}$ (resp. $b_{K'} = \{b_{q'} | q' \in K'\}$) est donc une loi de probabilité sur K (resp. K').

2.2 *Lois marginales - lois conditionnelles - équation des facteurs issus du tableau k_{IJ}.*

Nous noterons respectivement f_{IJ} et $p_{IqJq'}$, les lois de probabilités associées aux tableaux k_{IJ} et à ses blocs $I_q \times J_{q'}$:

$$f_{IJ} = k_{IJ}/k \;;\; p_{IqJq'} = (k_{qq'})_{IqJq'}/k_{qq'} \qquad (7)$$

$k_{qq'}$ étant le total des éléments du tableau $(k_{qq'})_{IqJq'}$, et nous désignerons par f_I, f_J, f^I_J, f^J_I (resp. p_{Iq}, $p_{Jq'}$, $p^{Iq}_{Jq'}$, $p^{Jq'}_{Iq}$) les lois marginales et les lois conditionnelles associées au tableau f_{IJ} (resp. $p_{IqJq'}$).

De (3) et (4) il est facile de déduire que :

$$k_{qq'} = a_q\, b_{q'}\, k \qquad (8)$$

et que si $f_I = \{f_{Iq} | q \in K\}$, $f_J = \{f_{Jq'} | q' \in K'\}$, on a :

$$f_{Iq} = a_q\, p_{Iq} \;;\; f_{Jq'} = b_{q'}\, p_{Jq'} \qquad (9)$$

De même, l'on tire de (7), (8), (9) que les blocs $f^{Jq'}_{Iq}$ et $f^{Iq}_{Jq'}$ de f^J_I et f^I_J s'écrivent :

$$f^{Jq'}_{Iq} = a_q\, p^{Jq'}_{Iq} \;;\; f^{Iq}_{Jq'} = b_{q'}\, p^{Iq}_{Jq'}$$

Si $(\varphi^I = \{\varphi^{Iq} | q \in K\}, \varphi^J = \{\varphi^{Jq'} | q' \in K'\})$ est un couple de facteurs associés issu de k_{IJ}, et relatif à la valeur propre λ, il vérifie donc les relations :

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\{a_q\, \varphi^{Iq} \circ p^{Jq'}_{Iq} | q \in K\} = \sqrt{\lambda}\, \varphi^{Jq'} \\ \Sigma\{b_{q'}\, \varphi^{Jq'} \circ p^{Iq}_{Jq'} | q' \in K'\} = \sqrt{\lambda}\, \varphi^{Iq} \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Notons que du fait des relations (3) et (4), tous les facteurs non triviaux de k_{IJ} sont centrés sur chaque I_q (resp. $J_{q'}$), et que si ψ^K

(resp. $\psi^{K'}$) est une fonction de moyenne nulle sur K (resp. K') muni de la loi a_K (resp. $b_{K'}$), la fonction φ^I (resp. φ^J) constante sur I_q (resp. $J_{q'}$) et égale à ψ^q (resp. $\psi^{q'}$) est un facteur associé à la valeur propre nulle. Il y a donc au plus, en notant C_I (resp. C_K ; C_J ; $C_{K'}$) pour CardI (resp. CardK ; CardJ ; CardK') * $\min(C_I - C_K, C_J - C_{K'})$ facteurs non triviaux issus de k_{IJ}.

2.3 *Décomposition de l'inertie de k_{IJ} en fonction de celle de ses blocs:* L'inertie totale In associée au tableau k_{IJ} s'écrit :

$$\mathrm{In} = \Sigma\{(f_{ij} - f_i f_j)^2/(f_i f_j) | i \in I,\ j \in J\} \tag{11}$$

Or pour $(i,j) \in I_q \times J_{q'}$, on a d'après (7), (8) et (9) :

$$\left.\begin{aligned} f_i f_j &= a_q b_{q'}\ p_{Iq}(i)\ p_{Jq'}(j) \\ f_{ij} &= a_q b_{q'}\ p_{IqJq'}(i,j) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Des relations (11) et (12, l'on déduit que :

$$\mathrm{In} = \Sigma\{a_q b_{q'}\ \mathrm{In}_{qq'} | q \in K,\ q' \in K'\} \tag{13}$$

où $\mathrm{In}_{qq'}$ désigne l'inertie associée au tableau $k_{qq'}$; In est donc la moyenne sur K × K' des $\mathrm{In}_{qq'}$, K × K' étant muni de la loi $a_K \otimes b_{K'}$.

La contribution du bloc $I_q \times J_{q'}$ à In est égale à $a_q\, b_{q'}\, \mathrm{In}_{qq'}$, tandis que les contributions de I_q et $J_{q'}$ à In s'écrivent respectivement :

$$\left.\begin{aligned} CR(I_q) &= a_q\ \Sigma\{b_{q'}\ \mathrm{In}_{qq'} | q' \in K'\} \\ CR(J_{q'}) &= b_{q'}\ \Sigma\{a_q\ \mathrm{In}_{qq'} | q \in K\} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Si $\{\lambda_\alpha | \alpha \in A_{qq'}\}$ désigne l'ensemble des valeurs propres non triviales issues de $k_{qq'}$, la formule (13) s'écrit encore :

$$\mathrm{In} = \Sigma\{a_q b_{q'} \Sigma\{\lambda_\alpha | \alpha \in A_{qq'}\} | q \in K,\ q' \in K'\} \tag{15}$$

Remarques

1) Si l'on pose :

$$\forall\ (i,j) \in I_q \times J_{q'} \ :\ k'(i,j) = \alpha_q\ \beta_{q'}\ k(i,j)$$

où les α_q (resp. $\beta_{q'}$) sont des quantités fixées, le tableau k'_{IJ} ainsi construit vérifie les équations (3) et (4) où k(i,j), k(i), k(j), a_q et $b_{q'}$ sont respectivement remplacés par k'(i,j), k'(i), k'(j), a'_q et $b'_{q'}$, avec :

$$\left.\begin{aligned} a'_q &= \alpha_q\ a_q\ / \Sigma\{\alpha_{q''}\ a_{q''} | q'' \in K\} \\ b'_{q'} &= \beta_{q'}\ b_{q'}\ / \Sigma\{\beta_{q''}\ b_{q''} | q'' \in K'\} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

* *Pour simplifier l'écriture, nous noterons souvent C_A au lieu de Card A pour désigner le cardinal d'un ensemble A.*

Les formules (13) et (14) où a_q et $b_{q'}$ sont respectivement remplacés par a'_q et $b'_{q'}$ donnent alors respectivement la décomposition de l'inertie de k'_{IJ} et les contributions de I_q et $J_{q'}$ à cette inertie. On voit en particulier que si tous les β_q sont égaux à 1, la contribution de I_q est multipliée par $\alpha_q/\Sigma\{\alpha_{q''}\, a_{q''} \mid q'' \in K\}$; il en résulte que si l'on désire que cette contribution soit proportionnelle à une quantité d_q fixée, il suffira de poser $\alpha_q = d_q/CR(I_q)$, auquel cas la contribution de I_q sera égale à

$$d_q/(\Sigma\{a_{q''}\, d_{q''}/CR(I_{q''}) \mid q'' \in K\}).$$

On peut de même en prenant $\alpha_q = 1$, $\beta_{q'} = e_{q'}/CR(J_{q'})$ $(q' \in K')$ rendre la contribution de $J_{q'}$ proportionnelle à la quantité $e_{q'}$, mais l'on ne peut pas par le procédé précédent rendre simultanément les contributions des I_q proportionnelles aux d_q et celles des $J_{q'}$ proportionnelles aux $e_{q'}$.

2) Soit $(F^I_\alpha\ ,\ G^J_\alpha)$ un couple de facteurs associés issus de k_{IJ}, de variance la valeur propre λ_α. Les contributions de $I_q (q \in K)$ et de $J_{q'}$ $(q' \in K')$ à l'inertie de l'axe α s'écrivent respectivement :

$$CTR_\alpha(I_q) = \Sigma\{k(i)\ F^2_\alpha(i) \mid i \in I_q\}/k$$
$$CTR_\alpha(J_{q'}) = \Sigma\{k(j)\ G^2_\alpha(j) \mid j \in J_q\}/k$$

et on a :

$$In = \Sigma\{CTR_\alpha(I_q) \mid \alpha \in A,\ q \in K\} = \Sigma\{CTR_\alpha(J_{q'}) \mid \alpha \in A,\ q' \in K'\}$$

A désignant l'ensemble des facteurs non triviaux issus de k_{IJ}.

On peut rapporter $CTR_\alpha(I_q)$ (resp. $CTR_\alpha(J_{q'})$) soit à λ_α, soit à $CTR(I_q)$ (resp. $CTR(J_{q'})$).

Ces considérations seront explicitées au § 4.5.2 pour définir des aides à l'interprétation basées sur les questions dans le cas de l'analyse des correspondances multiples.

3) Dans le cas où les tableaux $k_{qq'}$ ont le même total, ce qui est en général réalisé, les formules (10), (12) à (15) se simplifient car :

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, q \in K\ :\ a_q = 1/C_K \\ &\forall\, q' \in K'\ :\ b_{q'} = 1/C_{K'} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

où on a noté rappelons-le C_K pour CardK et $C_{K'}$ pour CardK'.

Ce cas est en particulier réalisé si chaque tableau $k_{qq'}$ est le tableau croisant deux variables qualitatives dont l'ensemble des modalités est respectivement I_q et $J_{q'}$, le total de chaque sous-tableau $k_{qq'}$ étant égal au nombre de sujets enquêtés. Dans ce cas $In_{qq'}$ est le ϕ^2(*) entre les variables q et q', que l'on notera $\phi^2_{qq'}$; la formule (13) s'écrit alors :

(*) *rappelons que le ϕ^2 associé à deux variables qualitatives X et Y est la quantité $\Sigma_{i,j}(p_{ij} - p_i p_j)^2/(p_i p_j)$ associée au tableau de correspondance p_{IJ} croisant l'ensemble des modalités I de X avec l'ensemble des modalités J de Y.*

$$In = \Sigma\{\phi^2_{qq'}, q \in K, q' \in K'\}/(C_K\ C_{K'}) \tag{18}$$

formule dajà donnée en terme de chi-deux par A. Leclerc (Thèse 3° cycle, Paris 1973).

Si de plus $K = K'$, et que $\forall\ q \in K : I_q = J_q$, le tableau k_{IJ} qui est symétrique est un tableau de Burt, et la formule précédente s'écrit encore :

$$\left.\begin{aligned} In &= \Sigma\{\phi^2_{qq'} | q \in K, q' \in K\}/(C_K)^2 \\ &= (C_J - C_K + \Sigma\{\phi^2_{qq'} | q \in K, q' \in K, q \neq q'\})/(C_K)^2 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

puisque $\phi^2_{qq} = \mathrm{Card} J_q - 1$.

On retrouve ainsi une formule classique déjà donnée par Saporta (thèse 3° cycle, Paris, 1975).

2.4 *Majoration de la plus grande valeur propre issue de k_{IJ} en fonction des plus grandes valeurs propres issues des sous-tableaux $k_{qq'}$*

Théorème 1 : Soit λ_1 (resp. $\lambda_1^{qq'}$) la valeur propre la plus élevée (autre que la valeur propre triviale) issue du tableau k_{IJ} (resp. du sous-tableau $k_{IqJq'}$), alors on a :

$$\lambda_1 \leq \bar{\lambda}_{KK'} \tag{20}$$

$\bar{\lambda}_{KK'}$ désignant la moyenne des $\lambda_1^{qq'}$ sur $K \times K'$ muni de la loi produit $a_K \otimes b_{K'}$.

$$\bar{\lambda}_{KK'} = \Sigma\{a_q\ b_{q'}\ \lambda_1^{qq'} | q \in K, q' \in K'\} \tag{21}$$

Ce théorème est une conséquence directe du théorème 2 énoncé ci-dessous.

A partir de f_{IJ} (resp. $p_{IqJq'}$) qui est une loi de probabilité sur $I \times J$ (resp. $I_q \times J_{q'}$), on peut définir la covariance et la corrélation entre deux fonctions φ^I et φ^J (resp. φ^{Iq} et $\varphi^{Jq'}$) considérées comme des fonctions sur $I \times J$ (resp. $I_q \times J_{q'}$), la première ne dépendant que de I (resp. I_q) et la seconde que de J (resp. $J_{q'}$). On a alors :

Théorème 2 : Si $\mathrm{Corr}^2(\varphi^I, \varphi^J)$ (resp. $\mathrm{Corr}^2(\varphi^{Iq}, \varphi^{Jq'})$) désigne le carré de la corrélation entre φ^I et φ^J (resp. φ^{Iq} et $\varphi^{Jq'}$), on a :

$$\mathrm{Corr}^2(\varphi^I, \varphi^J) \leq \Sigma\{a_q b_{q'}\ \mathrm{Corr}^2(\varphi^{Iq}, \varphi^{Jq'}) | q \in K, q' \in K'\} \tag{22}$$

φ^{Iq} (resp. $\varphi^{Jq'}$) désignant la restriction de φ^I (resp. φ^J) à I_q (resp. $J_{q'}$).

Si (φ^I, φ^J) désigne le couple de facteurs associés, relatif à la plus grande valeur propre λ_1 de k_{IJ}, on a alors :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \mathrm{Corr}^2(\varphi^I, \varphi^J) &\leq \Sigma\{a_q b_{q'}\ \mathrm{Corr}^2(\varphi^{Iq}, \varphi^{Jq'})\ q \in K, q' \in K'\} \\ &\leq \Sigma\{a_q b_{q'}\ \lambda_1^{qq'}\ q \in K, q' \in K'\} \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de ce que $\lambda_1^{qq'}$ réalise le maximum du carré de la corrélation entre une fonction sur I_q et une fonction sur $J_{q'}$. On obtient ainsi le théorème 1.

Notons qu'il résulte en particulier de (6), (20) et (21) que :

$$\lambda_1 \leq \sup\{\lambda_1^{qq'} \mid (q, q') \in K \times K'\} \tag{23}$$

Il nous reste maintenant à démontrer le théorème 2 ;

Si $\mathrm{Cov}(\varphi^I, \varphi^J)$ désigne la covariance entre φ^I et φ^J, et $\mathrm{moy}(\varphi^I)$ (resp. $\mathrm{moy}(\varphi^J)$) la moyenne de φ^I (resp. φ^J), on a :

$$\mathrm{Cov}(\varphi^I, \varphi^J) = \Sigma\{f_{ij}\ \varphi^i\ \varphi^j \mid i \in I,\ j \in J\} - \mathrm{moy}(\varphi^I)\ \mathrm{moy}(\varphi^J)$$

$$= \Sigma\{(f_{ij} - f_i f_j)\ \varphi^i\ \varphi^j \mid i \in I,\ j \in J\}$$

Compte-tenu de (12), on a :

$$\mathrm{Cov}(\varphi^I, \varphi^J) = \Sigma\{a_q b_{q'}\ \mathrm{Cov}(\varphi^{Iq}, \varphi^{Jq'}) \mid q \in K,\ q' \in K'\} \tag{24}$$

Si $\mathrm{Var}(\varphi^I)$ (resp. $\mathrm{Var}(\varphi^J)$) désigne la variance de φ^I (resp. φ^J) et si σ_q^2 (resp. $\sigma_{q'}^2$) désigne la variance de φ^{Iq} (resp. $\varphi^{Jq'}$), on a de même :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Var}(\varphi^I) &= \Sigma\{a_q\ \sigma_q^2 \mid q \in K\} \\ \mathrm{Var}(\varphi^J) &= \Sigma\{b_{q'}\ \sigma_{q'}^2 \mid q' \in K'\} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

On pourra supposer, sans perte de généralités que φ^I et φ^J sont de variance 1, auquel cas $\mathrm{Cov}(\varphi^I, \varphi^J)$ est égal à $\mathrm{Corr}(\varphi^I, \varphi^J)$. On a alors si $\rho_{qq'}$ désigne la corrélation entre φ^{Iq} et $\varphi^{Jq'}$:

$$\mathrm{Corr}(\varphi^I, \varphi^J) = \Sigma\{a_q b_{q'}\ \sigma_q \sigma_{q'}\ \rho_{qq'} \mid q \in K,\ q' \in K'\} \tag{26}$$

avec

$$\Sigma\{a_q\ \sigma_q^2 \mid q \in K\} = \Sigma\{b_{q'}\ \sigma_{q'}^2 \mid q' \in K'\} = 1 \tag{27}$$

On déduit alors de (26) et (27) en appliquant deux fois l'inégalité de Schwarz, la première fois sur K muni de la loi a_K et la seconde sur K' muni de la loi $b_{K'}$ que:

$$\begin{aligned} |\mathrm{Corr}(\varphi^I, \varphi^J)| &\leq \Sigma\{b_{q'}\sigma_{q'}\Sigma\{a_q\sigma_q|\rho_{qq'}| \mid q \in K\} \mid q' \in K'\} \\ &\leq \Sigma\{b_{q'}\sigma_{q'}(\Sigma\{a_q\ \rho_{qq'}^2 \mid q \in K\})^{1/2} \mid q' \in K'\} \\ &\leq (\Sigma\{b_{q'}\ (\Sigma\{a_q\ \rho_{qq'}^2 \mid q \in K\}) \mid q' \in K'\})^{1/2} \\ &= (\Sigma\{a_q\ b_{q'}\rho_{qq'}^2 \mid q \in K,\ q' \in K'\})^{1/2} \end{aligned}$$

d'où en élevant au carré l'inégalité recherchée.

3 *Application au cas d'un tableau k_{IJ} composé de blocs k_{IJq}, et aux tableaux dérivés croisant deux sous-ensembles de J.*

3.1 *Les tableaux généraux considérés.*

On considère ici un tableau k_{IJ}, et l'on suppose que l'ensemble J est muni d'une partition :

$$J = \cup\ \{J_q \mid q \in Q\} \tag{28}$$

le tableau k_{IJ} étant tel qu'il existe un système $c_Q = \{c_q | q \in Q\}$ de nombres positifs de total 1 :

$$\Sigma\{c_q | q \in Q\} = 1 \tag{29}$$

avec le système des relations :

$$\left.\begin{aligned} \forall\, i \in I \;:\; \Sigma\{k(i,j) | j \in J_q\} &= c_q \Sigma\{k(i,j) | j \in J\} \\ &= c_q k(i) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Le tableau k_{IJ} peut être un tableau dédoublé, auquel cas, $\forall\, q \in Q$, $\mathrm{Card} J_q = 2$; ce peut être un tableau disjonctif complet, ou une généralisation de ce dernier tableau, par exemple si on utilise un codage pondéré ou un codage flou (cf § 4.2).

Le tableau k_{IJ} vérifiant la relation (4) (où b_q est remplacé par c_q), on en déduit que dans l'analyse des correspondances de ce tableau le centre de gravité des éléments de J_q est confondu avec le centre de gravité des éléments de J.

Au tableau k_{IJ} on associe le tableau symétrique B_{JJ} qu'on appellera tableau de Burt et qui est défini par :

$$\forall\, j \in J,\; j' \in J : B(j,j') = \Sigma\{k(i,j)k(i,j')/k(i) | i \in I\} \tag{31}$$

On sait (cf Traité TII B n° 9 § 5) que l'analyse de B_{JJ} est équivalente à celle de k_{IJ} , B_{JJ} et k_{IJ} ayant mêmes facteurs de variance 1 sur J, tandis que les valeurs propres issues de B_{JJ} sont les carrés de celles issues de k_{IJ}. Dans le cas où k_{IJ} est un tableau disjonctif complet, B_{JJ} est au facteur $1/\mathrm{Card}Q(=1/k(i))$ près le tableau de Burt usuel associé à k_{IJ}.

Soit maintenant K et K' deux parties de Q, L (resp. L') l'union disjointe des J_q pour q appartenant à K (resp. K') :

$$L = \cup\{J_q | q \in K\},\; L' = \cup\{J_q | q \in K'\} \tag{32}$$

On considère le tableau $C_{LL'}$ suivant :

$$\begin{aligned} &\forall\, q \in K,\; \forall\, q' \in K',\; \forall\, j \in J_q \;,\; \forall\, j' \in J_{q'} \;: \\ &C(j,j') = \Sigma\{k(i,j)k(i,j')/k(i) | i \in I\} \end{aligned} \tag{33}$$

$C_{LL'}$ est un sous-tableau de B_{JJ} que l'on appellera sous-tableau de Burt.

Si K = K', et donc L = L', $C_{LL'}$ est un tableau de Burt (associé au sous-tableau k_{IL} de k_{IJ}) qui est, si $K = K' = Q$, identique à B_{JJ} . On peut donc considérer que B_{JJ} est un cas particulier de $C_{LL'}$; les propriétés établies ci-dessous pour $C_{LL'}$ sont donc également valables pour B_{JJ}.

De (30) et (33) l'on déduit que :

$$\begin{aligned} \forall\, j \in L,\; \forall\, q' \in K' : \Sigma\{C(j,j') | j' \in J_{q'}\} &= c_{q'} \Sigma\{k(i,j) | i \in I\} \\ &= c_{q'} k(j) \end{aligned} \tag{34}$$

d'où l'on tire, en posant :

$$b_{q'} = c_{q'}/\Sigma\{c_q | q \in K'\}, \tag{35}$$

$$\forall\ j \in L,\ \forall\ q' \in K' : \Sigma\{C(j,j') | j' \in J_{q'}\} = b_{q'}\Sigma\{C(j,j') | j' \in L'\} \tag{36}$$

De même, on a en posant :

$$a_q = c_q / \Sigma\{c_{q'} | q' \in K\} \tag{37}$$

$$\forall\ j' \in L',\ \forall\ q \in K : \Sigma\{C(j,j') | j \in J_q\} = a_q \Sigma\{C(j,j') | j \in L\} \tag{38}$$

Le tableau $C_{LL'}$ vérifie donc (3) et (4) (où k_{IJ} est remplacé par $C_{LL'}$) ; toutes les propriétés données au § 2 (décomposition de l'inertie, majoration de la plus grande valeur propre) s'appliquent donc à $C_{LL'}$; en particulier le centre de gravité des éléments de J_q ($q \in K$) (resp. $J_{q'}$, $q' \in K'$) est confondu avec le centre de gravité global. Nous donnons au § suivant d'autres caractéristiques de l'analyse des correspondances de $C_{LL'}$, caractéristiques traduisant la structure particulière de $C_{LL'}$, et généralisant les propriétés d'un sous-tableau de Burt usuel (i.e. issu d'un questionnaire sous forme disjonctive complète).

Remarques

1) Dans le cas du tableau de Burt ($K = K' = Q$), on déduit de (29), (35) et (37) que $a_q = b_q = c_q$

2) Si $k(i)$ est égal à une constante A, dans les formules (31) et (33) définissant B_{JJ} et $C_{LL'}$, on ne divise pas en général par $k(i)$, ce qui revient à considérer les tableaux $B'_{JJ} = AB_{JJ}$ et $C'_{LL'} = AC_{LL'}$.

3.2 Etude des propriétés de $C_{LL'}$

3.2.1 Propriétés extrémales des facteurs

Les propriétés extrémales des facteurs d'un sous-tableau d'un tableau de Burt données dans [EXTR. FAC.] (cf *Cahiers*, Vol II n° 2, pp 143-160) se généralisent aisément. Nous raisonnerons dans l'espace R^I pour énoncer ces propriétés. A toute fonction φ^{Jq} on associera la fonction φ^I_q de R^I définie par :

$$\varphi^I_q = \varphi^{Jq} \circ p^I_{Jq} \tag{39}$$

p^I_{Jq} étant la transition associée au sous-tableau k_{IJq} de k_{IJ}.

On supposera R^I muni de la métrique définie à partir du tableau k_{IJ}, i.e. de la métrique dont la matrice dans la base canonique de R^I est diagonale et de i-ème terme diagonal $k(i)/k$.

Il est facile de voir que l'on a alors :

$$<\varphi^I_q\,,\ \varphi^I_{q'}> = \Sigma\{p_{JqJq'}(j,j')\ \varphi^j \varphi^{j'} | j \in J_q\,,\ j' \in J_{q'}\}$$

où $p_{JqJq'}$ est le tableau croisant q et q' et dont la somme des éléments vaut 1, tableau qui est proportionnel au sous-tableau $C_{JqJq'}$ de

$C_{LL'}$ et qui pour $q = q'$ n'est pas forcément diagonal.

Nous allons supposer dans un premier temps les tableaux p_{JqJq} $(q \in K \cup K')$ diagonaux pour énoncer les propriétés extrémales, puis verrons dans un deuxième temps comment lever cette hypothèse.

Soit $(\varphi^L, \varphi^{L'})$ un couple de facteurs issus de $C_{LL'}$, et relatif à la valeur propre λ :

$$\varphi^L = \{\varphi^{Jq} | q \in K\} \ ; \ \varphi^{L'} = \{\varphi^{Jq'} | q' \in K'\} \tag{40}$$

Posons :

$$\left.\begin{aligned} \varphi^I_K &= \Sigma\{a_q \ \varphi^I_q \ | q \in K\} \\ \varphi^I_{K'} &= \Sigma\{b_{q'} \varphi^I_{q'} | q' \in K'\} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

a_q et $b_{q'}$ étant donnés par (37) et (35) respectivement, tandis que φ^I_q et $\varphi^I_{q'}$, sont les fonctions sur I associées à φ^{Jq} et $\varphi^{Jq'}$ respectivement et définies à partir de (39).

Il est facile de voir que si φ^L et $\varphi^{L'}$ sont de variance un, φ^I_K et $\varphi^I_{K'}$ sont les facteurs obtenus en adjoignant respectivement les sous-tableaux k_{IL} et $k_{IL'}$ en élément supplémentaire de $C_{LL'}$. Nous étudierons les propriétés de ces facteurs au § 3.2.2.

Posons :

$$T = \langle \varphi^I_K \ , \varphi^I_{K'} \rangle$$

$$R = \Sigma\{a_q \ b_{q'} \|\varphi^I_q \ - \varphi^I_{q'}\|^2 | q \in K, \ q' \in K'\}$$

$$N = \Sigma\{a_q \|\varphi^I_q\|^2 \ | q \in K\}$$

$$N' = \Sigma\{b_{q'} \|\varphi^I_{q'}\|^2 | q' \in K'\}$$

Alors les facteurs φ^L et $\varphi^{L'}$ rendent extrémum R (resp. T) sous les conditions de normalisation a), b), c), d) (resp. a), b)) suivantes :

a) $N = N' = 1$

b) $(N+N')/2 = 1$

c) $N = 1$

d) $N' = 1$

Sous les conditions a) et b), on a : $N = N' = 1$, $R = 2\ (1 - T) = 2(1 - \sqrt{\lambda})$.

Sous la condition c) (resp. d)), on a $N = 1$, $N' = \lambda$ (resp. $N = \lambda$, $N' = 1$), $R = 1 - \lambda$.

Si p_{JqJq} n'est pas diagonal, les résultats précédents restent valables à condition de remplacer N par $\Sigma\{a_q \|\varphi^{Jq}\|^2_{pJq} | q \in K\}$ et N' par $\Sigma\{b_{q'} \|\varphi^{Jq'}\|^2_{pJq'} | q' \in K'\}$, p_{Jq} (resp. $p_{Jq'}$) étant la loi marginale associée à p_{JqJq} (resp. $p_{Jq'Jq'}$).

Nous allons maintenant donner quelques propriétés complémentaires sur l'analyse du tableau $C_{LL'}$ quand les deux hypothèses suivantes sont réalisées :

1) $\forall\, q \in K \cup K'$: p_{JqJq} est diagonal

2) $\forall (q\,,\, q') \in K^2 \cup K'^2,\ q \neq q' \Rightarrow p_{JqJq'} = p_{Jq} \otimes p_{Jq'}$

Dans le cas où les variables q et q' sont qualitatives, l'hypothèse 2) correspond à l'indépendance de q et q'. Si q et q' sont quantitatives (non découpées en classes), cette hypothèse traduit, avec le tableau k_{IJ} étudié au § 5 la non-corrélation entre q et q', tandis que si q est qualitative et q' quantitative, cette hypothèse exprime le fait que la variance interclasse de q' relativement à la partition induite par q est nulle.

Notons que si q est une variable qualitative, l'hypothèse 1) est vérifiée avec le codage disjonctif complet usuel, ou le codage pondéré (§ 4.2.2), mais pas avec le codage flou du § 4.2.3, tandis que si q est quantitative, avec le modèle du § 5, cette hypothèse n'est vérifiée que si q est centrée réduite.

Pour interpréter géométriquement les hypothèses 1) et 2), introduisons quelques notations :

Soit W_q le sous-espace de R^I engendré par les fonctions ne dépendant que de J_q, i.e. par les fonctions $\varphi^I_q = \varphi^{Jq} \circ p^I_{Jq}$ $(\varphi^{Jq} \in R^{Jq})$: cet espace contient la droite des contantes δ^I. Nous désignerons par W^-_q le sous-espace de W_q orthogonal à δ^I.

Alors l'hypothèse 2) est équivalente à la condition suivante :

$$\forall\ (q,q') \in K^2 \cup K'^2,\ q \neq q' \Rightarrow W^-_q \text{ est orthogonal à } W^-_{q'}$$

tandis que l'hypothèse 1) est équivalente à la condition suivante :

$\forall\, q \in Q,\ \forall\, q' \in K \cup K'$: $p^{Jq'}_{Jq}$ est l'opérateur de projection de W_q sur $W_{q'}$.

On a alors le résultat suivant plus général que celui donné dans [Extr. Fac.] (§ 5)mais dont la démonstration est très voisine :

Si les hypothèses 1) et 2) sont vérifiées, l'analyse des correspondances du tableau $C_{LL'}$ ne se ramène à celle du tableau de Burt $B_{L\cup L',L\cup L'}$ croisant l'union disjointe $L \cup L'$ avec elle-même que si :

$$\forall\, q \in K : a_q = 1/C_K\ ,\ \forall\, q' \in K' : b_{q'} = 1/C_{K'}\ .$$

Dans ce cas, ces deux analyses sont respectivement équivalentes à l'analyse canonique des sous-espaces W et W' respectivement engendrés par les W_q $(q \in K)$ et les $W_{q'}$ $(q' \in K')$. A une valeur propre non triviale λ issue de $C_{LL'}$, correspond dans l'analyse canonique de W et W' la valeur propre $\lambda C_K C_{K'}$; il en résulte en particulier que λ est plus petite ou égale à $1/(C_K C_{K'})$ résultat que l'on redémontrera de façon différente au § 3.2.2. Notons que $\lambda C_K C_{K'}$ n'est autre que le carré de la corrélation entre les fonctions φ^I_K et $\varphi^I_{K'}$ définies plus haut (cf e.g. (40) et (41)), et que si $q \in K \cap K'$, auquel cas $W_q \in W \cap W'$, 1 est valeur propre d'ordre $\mathrm{Card} J_q$ de l'analyse canonique de W et W', et donc $1/(C_K C_{K'})$

valeur propre d'ordre $\mathrm{Card}J_q - 1$ (on a retiré la valeur propre triviale associée à δ^I) issue de $C_{LL'}$. Par ailleurs $\sqrt{C_K}\ \varphi^I_K$ et $\sqrt{C_{K'}}\ \varphi^I_{K'}$, qui appartiennent respectivement à W et W' sont les facteurs canoniques sur I, qui sont de variance 1, si les facteurs φ^L et $\varphi^{L'}$ issus de l'analyse des correspondances de $C_{LL'}$ le sont.

L'hypothèse $a_q = 1/C_K$ pour $q \in K$ (resp. $b_{q'} = 1/C_{K'}$ pour $q' \in K'$) qui est équivalente d'après (37) (resp. (35)) à l'égalité des c_q pour $q \in K$ (resp. $c_{q'}$ pour $q' \in K'$) s'obtient en écrivant que les équations des facteurs issus de $C_{LL'}$ et de $B_{L\cup L',L\cup L'}$ (où

$$\forall\ (q,q') \in K^2 \cup K'^2,\ q \neq q' \Rightarrow \varphi^{Jq'} \circ p^{Jq}_{Jq'} = (\varphi^{Jq'} \circ p_{Jq'})\ \delta^{Jq} = 0$$

pour un facteur non trivial) sont compatibles. Notons que les pondérations $c_q(=c)$ pour $q \in K$ et $c_{q'}(=c')$ pour $q' \in K'$ peuvent être différentes. L'équivalence entre l'analyse de $C_{LL'}$ et l'analyse canonique de W et W' résulte de l'équation des facteurs de $C_{LL'}$ et de l'orthogonalité des W^-_q pour $q \in K$ (resp. $q \in K'$).

Remarque : On sait que l'analyse canonique de deux sous-espaces W et W' revient à rechercher les couples de droites (Δ,Δ') avec $\Delta \in W$, $\Delta' \in W'$, faisant un angle θ extrémal, la valeur propre associée μ étant égale à $\cos^2\theta$.

L'analyse canonique de W et W' peut aussi être définie comme la recherche des vecteurs ψ^I et ψ'^I, ψ^I de support Δ, ψ'^I de support Δ', rendant extrémum $R_1 = \|\psi^I - \psi'^I\|^2$ (resp. $T_1 = \langle\psi^I, \psi'^I\rangle$) sous les conditions de normalisation a), b), c), d) (resp. a), b)) où N est remplacé par $N_1 : \|\psi^I\|^2 = 1$, et N' par $N'_1 : \|\psi'^I\|^2 = 1$. Sous les conditions a)et b) on est amené à rendre extrémum $R_1 = 2(1-\cos\theta) = 4\sin^2\theta/2$ (resp. $T_1 = \cos\theta$), tandis que sous les conditions c) et d) on est amené à rendre extrémum $R_1 = \sin^2\theta$, ce qui revient bien dans les deux cas à rendre θ extrémum. Ces propriétés qui se démontrent aisément permettent de retrouver par une voie plus rapide que celle donnée au § 3.2 de [Extr. Fac] les propriétés extrémales des facteurs issus de l'analyse des correspondances du tableau $C_{LL'}$ énoncées ci-dessus : il suffit d'abord de considérer le cas binaire ($Q = K \cup K'$, $C_K = C_{K'} = 1$) où l'analyse des correspondances de $C_{LL'}$ est équivalente à l'analyse canonique de W et W' pour déduire les propriétés extrémales des fonctions φ^I_K et $\varphi^I_{K'}$ définies plus haut, propriétés extrémales que l'on peut traduire uniquement en fonction des facteurs φ^L et $\varphi^{L'}$ du tableau $C_{LL'}$, des éléments de ce tableau et de ses marges. Les propriétés extrémales ainsi trouvées de φ^L et $\varphi^{L'}$ ne dépendant que des éléments du tableau $C_{LL'}$ sont caractéristiques de l'analyse des correspondances de ce tableau, et sont donc valables pour n'importe quel tableau $C_{LL'}$. Il suffit alors dans le cas général ($C_K C_{K'} \neq 1$) d'interpréter dans R^I (à l'aide des fonctions φ^I_K et $\varphi^I_{K'}$) les propriétés extrémales de φ^L et $\varphi^{L'}$ ainsi trouvées pour obtenir les propriétés données.

3.2.2 *Etude des facteurs sur I obtenus en adjoignant k_{IL} et $k_{IL'}$, en supplémentaire de $C_{LL'}$*

Soit :

- $(\varphi_\alpha^L, \varphi_\alpha^{L'})$ un couple de facteurs non triviaux associés, de variance 1 , issu de $C_{LL'}$, et relatif à la valeur propre λ_α

- (F_α^I, G_α^I) les facteurs obtenus en adjoignant respectivement les sous-tableaux $k_{IL'}$ et k_{IL} de k_{IJ} en éléments supplémentaires de $C_{LL'}$ (facteurs notés $\varphi_{K'}^I$ et φ_K^I au § 3.2.1).

On a, en posant :

$$\gamma = \Sigma\{c_q | q \in K\}$$

$$\gamma' = \Sigma\{c_q | q \in K'\},$$

$$\left.\begin{aligned} F_\alpha(i) &= \Sigma\{k(i,j)\, \varphi_\alpha^j | j \in L'\}/(\gamma' k(i)) \\ G_\alpha(i) &= \Sigma\{k(i,j)\, \varphi_\alpha^j | j \in L\}/(\gamma\, k(i)) \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

F_α^I (resp. G_α^I) ayant même moyenne que $\varphi_\alpha^{L'}$ (resp. φ_α^L) comme il est facile de vérifier est donc centré.

Faisons le calcul par exemple pour F_α^I ; on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Moy}(F_\alpha^I) &= \Sigma\{k(i) F_\alpha(i) | i \in I\}/k \\ &= \Sigma\{k(i,j)\, \varphi_\alpha^j | i \in I,\ j \in L'\}/(k\gamma') \\ &= \Sigma\{k(j)\, \varphi_\alpha^j | j \in L'\}/(k\gamma') \\ &= \Sigma\{C(j)\, \varphi_\alpha^j | j \in L'\}/C = \mathrm{Moy}(\varphi_\alpha^{L'}) = 0 \text{ c.q.f.d.} \end{aligned}$$

où $\{C(j) | j \in L'\}$ désigne la loi marginale sur L' de $C_{LL'}$, et C le total de ce tableau (égal à $k\gamma\gamma'$).

Par ailleurs il est facile de vérifier que si $(\varphi_\beta^L, \varphi_\beta^{L'})$ est un autre couple de facteurs issu de $C_{LL'}$ et relatif à la valeur propre λ_β, et si F_β^I et G_β^I sont les facteurs correspondants sur I, on a :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cov}(F_\alpha^I, G_\beta^I) &= \sqrt{\lambda_\alpha}\ \delta_\alpha^\beta \\ &= \sqrt{\lambda_\alpha} \text{ si } \alpha = \beta, \text{ 0 sinon} \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

On a en effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(F_\alpha^I, G_\beta^I) &= \Sigma\{k(i)\ F_\alpha(i)\ G_\beta(i)/k | i \in I\} \\ &= (1/(k\gamma\gamma'))\ \Sigma\{C(j,j')\varphi_\alpha^{j'} \varphi_\beta^j | j \in L,\ j' \in L'\} \\ &= (1/C)(\Sigma\{C(j')\ \varphi_\alpha^{j'}\ \varphi_\beta^{j'} | j' \in L'\})\sqrt{\lambda_\beta} \\ &= \sqrt{\lambda_\beta}\ \ \delta_\alpha^\beta = \sqrt{\lambda_\alpha}\ \ \delta_\alpha^\beta \end{aligned}$$

Dans ces calculs, on a tenu compte de la définition de $C_{LL'}$, et appliqué la formule de transition ; l'on s'est également souvenu de l'orthonormalité des facteurs sur L'.

Nous allons maintenant donner une majoration de la variance de F_α^I ainsi que de celle de G_α^I, d'où résultera une minoration de la corrélation entre F_α^I et G_α^I.

Nous montrerons en particulier que F_α^I et G_α^I sont de variance plus petite ou égale à 1, et donc que la corrélation entre F_α^I et G_α^I est supérieure ou égale à $\sqrt{\lambda_\alpha}$ mais nous donnerons des bornes plus précises pour ces variances et donc pour cette corrélation.

En fait nous donnerons des majorations de la valeur absolue de la covariance entre F_α^I et F_β^I (resp. G_α^I et G_β^I) valables si $\alpha = \beta$, donc pour la variance de F_α^I (resp. G_α^I).

Désignons par $\bar{\lambda}_{KK}$ (resp. $\bar{\lambda}_{K'K'}$) la moyenne pour la loi produit $a_K \otimes a_K$ (resp. $b_{K'} \otimes b_{K'}$) des plus grandes valeurs propres $\lambda_1^{qq'}$ issues des sous-tableaux croisant q et q' pour $(q,q') \in K^2$ (resp. K'^2) ; et par $\bar{\lambda}^*_{KK}$ (resp. $\bar{\lambda}^*_{K'K'}$) la moyenne des $\lambda_1^{qq'}$ pour $q \neq q'$; on a :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{KK} &= \Sigma\{a_q a_{q'}\ \lambda_1^{qq'} \mid q \in K,\ q' \in K\}\ (*) \\ &= \Sigma\{a_q^2\ \lambda_1^{qq} \mid q \in K\} + (1 - \Sigma\{a_q^2 \mid q \in K\})\bar{\lambda}^*_{KK} \qquad (44) \\ \bar{\lambda}_{K'K'} &= \Sigma\{b_q b_{q'}\lambda_1^{qq'} \mid q \in K',\ q' \in K'\} \\ &= \Sigma\{b_q^2\ \lambda_1^{qq} \mid q \in K'\} + (1 - \Sigma\{b_q^2 \mid q \in K'\})\bar{\lambda}^*_{K'K'} \qquad (45) \end{aligned}$$

Si l'on pose :

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \mathrm{Sup}\{a_q \sqrt{\lambda_1^{qq}} \mid q \in K\} + ((1 - \Sigma\{a_q^2 \mid q \in K\})\bar{\lambda}^*_{KK})^{1/2} \\ \mu' &= \mathrm{Sup}\{b_q \sqrt{\lambda_1^{qq}} \mid q \in K'\} + ((1 - \Sigma\{b_q^2 \mid q \in K'\})\bar{\lambda}^*_{K'K'})^{1/2} \end{aligned}\right\} (46)$$

$$\left.\begin{aligned} m &= \mathrm{Inf}(\mu\ ,\ (\bar{\lambda}_{KK})^{1/2}) \\ m' &= \mathrm{Inf}(\mu',\ (\bar{\lambda}_{K'K'})^{1/2}) \end{aligned}\right\} (47)$$

On a le théorème suivant :

Théorème 3 : On a les inégalités suivantes :

1) $|\mathrm{Cov}(F_\alpha^I\ ,\ F_\beta^I)| \leq m'$

2) $|\mathrm{Cov}(G_\alpha^I\ ,\ G_\beta^I)| \leq m$

3) $\mathrm{Corr}(F_\alpha^I\ ,\ G_\alpha^I) \geq (\lambda_\alpha/(mm'))^{1/2}$

4) $\lambda_\alpha \leq m m'$

(*) *λ_1^{qq} est la plus grande valeur propre non triviale issue du tableau p_{JqJq}, qui est égale à 1 si ce tableau est diagonal.*

5) Si $\forall\ q \in K'$, p_{JqJq} est diagonal et $b_q = 1/C_{K'}$, on a pour $\alpha \neq \beta$:

$$|\mathrm{Cov}(F^I_\alpha, F^I_\beta)| \leq ((1 - 1/C_{K'})\bar{\lambda}^*_{K'K'})^{1/2}$$

6) Si de même, $\forall\ q \in K$, p_{JqJq} est diagonal et $a_q = 1/C_K$, on a pour $\alpha \neq \beta$: $|\mathrm{Cov}(G^I_\alpha, G^I_\beta)| \leq ((1 - 1/C_K)\bar{\lambda}^*_{KK})^{1/2}$

m et m' étant indépendantes de α, il résulte du théorème que la plus grande valeur propre λ_1 est inférieure à $m\,m'$ et donc d'après (47) à $(\bar{\lambda}_{KK}\ \bar{\lambda}_{K'K'})^{1/2}$; cette inégalité qui est une sorte d'inégalité de Schwarz généralisée ne fait intervenir que les liaisons entre variables d'un même groupe, contrairement à la majoration de λ_1 donnée par le théorème 1, majoration qui est égale rappelons-le à la moyenne (sur $K \times K'$ muni de la loi $a_K \otimes b_{K'}$) $\bar{\lambda}_{KK'}$ des plus grandes valeur propres $\lambda_1^{qq'}$ pour $q \in K$, $q' \in K'$, et qui ne fait donc intervenir que les liaisons entre les variables de K et celles de K'.

Le point 3) du théorème 3 se déduisant immédiatement des points 1) et 2) où l'on fait $\alpha = \beta$, et de (43), tandis que le point 4) se déduit de façon évidente du point 3), il nous reste pour démontrer ce théorème à vérifier que les points 1), 2), 5), 6) sont exacts. Nous allons raisonner sur $\mathrm{Cov}(G^I_\alpha, G^I_\beta)$, i.e. vérifier les points 2) et 6), les calculs étant analogues dans le cas de $\mathrm{Cov}(F^I_\alpha, F^I_\beta)$.

On a, compte-tenu de (31) et (42) et en procédant de la même façon que pour le calcul de $\mathrm{Cov}(F^I_\alpha, G^I_\beta)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(G^I_\alpha, G^I_\beta) &= \Sigma\{k(i)G_\alpha(i)G_\beta(i)/k \mid i \in I\}\\ &= \Sigma\{B(j,j')\ \varphi^j_\alpha\ \varphi^{j'}_\beta \mid j \in L,\ j' \in L\}/(k\gamma^2)\\ &= \Sigma\{a_q a_{q'} \Sigma\{p_{JqJq'}(j,j')\varphi^j_\alpha\varphi^{j'}_\beta \mid j \in J_q, j' \in J_{q'}\} \mid q \in K,\ q' \in K\}\end{aligned}$$

formule où $\{B(j,j') \mid j \in L,\ j' \in L\}$ n'est autre que le tableau de Burt croisant L avec lui-même, et qui est un sous-tableau du tableau de Burt total B_{JJ}.

Posons :

$$\Sigma\{p_{JqJq'}(j,j')\varphi^j_\alpha\varphi^{j'}_\beta \mid j \in J_q,\ j' \in J_{q'}\} = \sigma^\alpha_q \sigma^\beta_{q'} \rho^{\alpha\beta}_{qq'} \tag{48}$$

$$\text{avec}\quad \left.\begin{aligned}(\sigma^\alpha_q)^2 &= \Sigma\{p_{Jq}(j)\,(\varphi^j_\alpha)^2 \mid j \in J_q\}\\ (\sigma^\beta_{q'})^2 &= \Sigma\{p_{Jq'}(j')\,(\varphi^{j'}_\beta)^2 \mid j' \in J_{q'}\}\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

$\rho^{\alpha\beta}_{qq'}$ (*) n'est autre que la corrélation entre les fonctions φ^{Jq}_{α} et $\varphi^{Jq'}_{\beta}$ restrictions de φ^{L}_{α} et φ^{L}_{β} à J_q et $J_{q'}$ respectivement.

On a alors :

$$\mathrm{Cov}(G^{I}_{\alpha}, G^{I}_{\beta}) = \Sigma\{a_q a_{q'}\ \sigma^{\alpha}_{q}\sigma^{\beta}_{q'}\ \rho^{\alpha\beta}_{qq'} | q \in K,\ q' \in K\} \tag{50}$$

avec les conditions de normalisation exprimant que φ^{L}_{α} et φ^{L}_{β} sont de variance 1 :

$$\Sigma\{a_q(\sigma^{\alpha}_{q})^2 | q \in K\} = \Sigma\{a_q(\sigma^{\beta}_{q})^2 | q \in K\} = 1 \tag{51}$$

Opérant comme dans la démonstration du théorème 2 du § 2.4, en appliquant deux fois l'inégalité de Schwarz à l'expression (50), en tenant compte de (51), et en majorant $|\rho^{\alpha\beta}_{qq'}|$ par $\sqrt{\lambda^{qq'}_{1}}$, on montre que $|\mathrm{Cov}(G^{I}_{\alpha}, G^{I}_{\beta})|$ est majoré par $(\bar{\lambda}_{KK})^{1/2}$.

Il reste à montrer que $|\mathrm{Cov}(G^{I}_{\alpha}, G^{I}_{\beta})|$ est majoré aussi par μ pour démontrer le point 2). Pour cela on isole les termes en a^2_q des termes en $a_q a_{q'}$ $(q \neq q')$ dans (50) :

$$\mathrm{Cov}(G^{I}_{\alpha}, G^{I}_{\beta}) = \Sigma\{a^2_q\ \sigma^{\alpha}_{q}\sigma^{\beta}_{q}\ \rho^{\alpha\beta}_{qq} | q \in K\} + \Sigma\{a_q a_{q'}\sigma^{\alpha}_{q}\sigma^{\beta}_{q'}\ \rho^{\alpha\beta}_{qq'} | q \in K,\ q' \in K,\ q \neq q'\} \tag{52}$$

Nous désignerons par P la première expression du second membre de (52) et par P' la seconde. On a alors

$$|P| \leq \mathrm{Sup}\{a_q\sqrt{\lambda^{qq}_{1}} | q \in K\}\,\Sigma\{a_q\sigma^{\alpha}_{q}\sigma^{\beta}_{q}\} \leq \mathrm{Sup}\{a_q\sqrt{\lambda^{qq}_{1}} | q \in K\} \tag{53}$$

la première inégalité résultant de ce que $|\rho^{\alpha\beta}_{qq}|$ est majoré par $\sqrt{\lambda^{qq}_{1}}$, et $a^2_q\sqrt{\lambda^{qq}_{1}}$ par $\mathrm{Sup}\{a_q\sqrt{\lambda^{qq}_{1}} | q \in K\}a_q$, et la seconde résultant de l'inégalité de Schwarz et de (51). Il nous reste à majorer $|P'|$; on a :

$$|P'| \leq \Sigma\{a_q(1-a_q)\sigma^{\alpha}_{q}(\Sigma\{(a_{q'}/(1-a_q))\sigma^{\beta}_{q'}|\rho^{\alpha\beta}_{qq'}|\ | q' \in K,\ q' \neq q\}) | q \in K\} \tag{54}$$

Appliquant deux fois l'inégalité de Schwarz au terme de droite de (54) (où $\{a_{q'}/(1-a_q) | q' \in K,\ q' \neq q\}$ constitue une loi de probabilité sur $K - \{q\}$), on obtient en observant que $\Sigma\{a_{q'}(\sigma^{\beta}_{q'})^2 | q' \in K,\ q' \neq q\}$ est inférieur ou égal (d'après (51)) à 1, et en majorant $(\rho^{\alpha\beta}_{qq'})^2$ par $\lambda^{qq'}_{1}$:

$$\left.\begin{aligned} |P'| &\leq (\Sigma\{a_q a_{q'}\ \lambda^{qq'}_{1} | q \in K,\ q' \in K,\ q \neq q'\})^{1/2} \\ &= ((1-\Sigma\{a^2_q | q \in K\})\bar{\lambda}^{*}_{KK})^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

De (53) et (55) l'on déduit que $|\mathrm{Cov}(G^{I}_{\alpha}, G^{I}_{\beta})|$ est majoré par μ et donc par m c.q.f.d.

(*) Si p_{JqJq} (qui est toujours symétrique) n'est pas diagonal, et si $\alpha=\beta$, $\rho^{\alpha\alpha}_{qq}$ est la corrélation entre φ^{Jq}_{α} considérée comme fonction sur le premier ensemble J_q et φ^{Jq}_{α} considérée comme fonction sur le deuxième ensemble J_q, et $(\rho^{\alpha\alpha}_{qq})^2$ est plus petit ou égal à la plus grande valeur propre non triviale λ^{qq}_{1} issue de p_{JqJq}. Si p_{JqJq} est diagonal $\rho^{\alpha\alpha}_{qq} = 1$.

Il nous reste à démontrer le point 6). Il résulte immédiatement qu'avec les hypothèses faites, P est nul en raison de l'orthogonalité de φ^L_α et φ^L_β $(\alpha \neq \beta)$. $|Cov(G^I_\alpha, G^I_\beta)|$ qui est alors égale à $|P'|$ est majorée par la borne donnée en (55), borne qui est égale à $((1-1/C_K)\bar{\lambda}^*_{KK})^{1/2}$, puisque tous les a_q sont égaux à $1/C_K$. On obtient bien l'inégalité annoncée.

Remarques

1) Si les hypothèses du point 6) sont vérifiées on a :

$$(\bar{\lambda}_{KK})^{1/2} = (1/C_K + (1-1/C_K)\bar{\lambda}^*_{KK})^{1/2}$$

$$\mu = 1/C_K + ((1-1/C_K)\bar{\lambda}^*_{KK})^{1/2}$$

et la majoration de $Var(G^I_\alpha)$ est fournie par $(\bar{\lambda}_{KK})^{1/2}$ si $\bar{\lambda}^*_{KK} > (1-1/C_K)/4$, et par μ sinon.

On a un résultat analogue sur $Var(F^I_\alpha)$ si les hypothèses du point 5) sont vérifiées.

2) Supposons les hypothèses des points 5) et 6) vérifiées, et que de plus $\bar{\lambda}^*_{KK} = \bar{\lambda}^*_{K'K'} = 0$, auquel cas deux variables quelconques de K sont indépendantes et de même pour deux variables de K'. On déduit alors des équations (44) à (47) que $m = \mu = 1/C_K$ et que $m' = \mu' = 1/C_{K'}$. Les inégalités des points 1) et 2) où $\alpha = \beta$, i.e. les inégalités concernant les variances deviennent des égalités ; de même que les inégalités des points 5) et 6) deviennent aussi des égalités, puisque ces inégalités entraînent la non corrélation d'une part de F^I_α et F^I_β, et d'autre part de G^I_α et G^I_β. On a donc :

$$Var\ F^I_\alpha = 1/C_{K'} \quad ; \quad Var\ G^I_\alpha = 1/C_k \quad ;$$

$$Cov(F^I_\alpha, F^I_\beta) = Cov(G^I_\alpha, G^I_\beta) = 0$$

et l'on retrouve le fait que $\lambda_\alpha C_K C_{K'}$, qui est le carré de la corrélation entre F^I_α et G^I_α est plus petit que 1 (cf § 3.2.1 *in fine*).