LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

C. DENIAU
G. OPPENHEIM
J. P. BENZÉCRI

Effet de l'affinement d'une partition sur les valeurs propres issues d'un tableau de correspondance

Les cahiers de l'analyse des données, tome 4, nº 3 (1979), p. 289-297
<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1979__4_3_289_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. IV - 1979 - n° 3 - p. 289-297

EFFET DE L'AFFINEMENT D'UNE PARTITION SUR LES VALEURS PROPRES ISSUES D'UN TABLEAU DE CORRESPONDANCE [PARTITION ET V. PROPRE]

par C. Deniau, G. Oppenheim [1]
et J. P. Benzécri [2]

On rencontre très souvent dans la pratique des tableaux de données, tels que le tableau k_{CQ} défini ci-dessous :

C : ensemble des 22 régions-programme.

Q : ensemble de 14 catégories socioprofessionnelles.

k(c,q) : nombre des actifs métropolitains résidant dans c et rentrant dans la catégorie q.

A côté d'un tel tableau, on pourra disposer d'un autre k_{IJ} défini comme k_{CQ}, mais avec des partitions plus fines : e.g. I = ensemble des départements ; J = ensemble de catégories socioprofessionnelles telles que chacune des catégories q de Q soit réunion d'un certain nombre de catégories j de J.

Nous pouvons alors affirmer ceci : les valeurs propres λ_1, λ_2,..., issues de l'analyse du tableau k_{IJ} ne peuvent être inférieures aux valeurs propres de même rang μ_1, μ_2,..., issues du tableau k_{CQ} : $\mu_1 \leq \lambda_1$; $\mu_2 \leq \lambda_2$; ... .

Il est clair qu'il suffit de faire la démonstration dans le cas où l'on affine une seule des partitions : e.g. $C \neq I$ mais $J = Q$. D'autre part le résultat, relatif à l'analyse des correspondances, qui nous intéresse n'est qu'un cas particulier du résultat suivant :

Soit $N(I) = \{(M^i, m_i) | i \in I\}$ un nuage de points d'un espace euclidien ; et soit C une partition de I en classes : on note M^c le centre de gravité du système des points M^i de la classe c (i.e. $M^c = \Sigma\{(m_i/m_c)M^i | i \in c\}$; avec $m_c = \Sigma\{m_i | i \in c\}$, masse de la classe c). Alors les moments principaux d'inertie du nuage $N(C) = \{(M^c, m_c) | c \in C\}$ sont inférieurs ou égaux aux moments principaux d'inertie de même rang du nuage N(I).

Dans le cas de l'analyse des correspondances, on a évidemment pour espace euclidien ambiant, l'espace des profils sur J muni de la distance du χ^2 de centre f_J ; et pour nuage N(I) le nuage usuel des f_J^i.

A la demande de la rédaction des *Cahiers*, cette démonstration a été modifiée, détaillée et mise sous forme de problème. Une extension à l'analyse canonique des résultats présentés ici, a été établie (Chen[1], Deniau-Oppenheim [4]), à l'origine de ces problèmes se trouvent en particulier Laha [6], Chen [1] .

(1) *"Scénario original de Deniau C. et Oppenheim G. d'après une idée de Laha R.G. [6] et de Chen C.W. [1] .*

(2) *Mise en scène de J.P. Benzécri".*

D'autres démonstrations orientées par des travaux d'analyse numérique de Davis [2] et de Davis-Kahan [3] ont permis à B. Escofier et B. Le Roux [5] d'obtenir, par d'autres voies, les résultats présentés ici ainsi que des majorations de la variation des valeurs propres et des facteurs. On trouve dans ce même cahier un abrégé de ces résultats.

Les questions 1.1 et 1.4 sont un rappel des propriétés bien connues de la variance intraclasse et interclasse.

La question 1.5 constitue une légère régression par rapport au développement principal. Dans les questions 1.6 et 1.7 est démontré le résultat visé.

1 *Enoncé du problème*

L'objet de ce problème est de comparer les propriétés d'inertie d'un nuage N(I) à celle du nuage N(C) des centres de gravité des classes définies par une partition C de I.

Notations : dans tout le problème on note :

$J = \{1, 2, \ldots, n\}$: l'ensemble des nombres entiers de 1 à $n = \operatorname{Card} J$;

R_J : l'espace vectoriel des suites de nombres réels indicées par $j \in J$.

$x_J = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x_j \mid j \in J\}$: un élément de R_J ; x_J pourra être appelé suivant les cas un point, ou un vecteur.

$\|x_J\|^2 = \Sigma\{x_j^2 \mid j \in J\}$: la norme (au carré) de x_J définie par la formule euclidienne usuelle la plus simple.

$\langle x_J, y_J \rangle = \Sigma\{x_j\, y_j \mid j \in J\}$: le produit scalaire des deux vecteurs x_J, y_J ; (produit scalaire associé à la norme usuelle).

I : un ensemble fini (non vide!)

C : une partition de I ; de façon précise, C est un ensemble fini de parties non vides c de I, deux à deux d'intersection vide et dont la réunion est I ; ce qui s'écrit en formules :

$$\forall\, c \in C : c \subset I \quad ; \quad c \neq \emptyset$$

$$\forall\, c, c' \in C : c \neq c' \Rightarrow c \cap c' = \emptyset \quad ;$$

$$\cup\{c \mid c \in C\} = I \ ;$$

Puisque tout élément i de I appartient à une classe c et une seule celle-ci sera désormais notée c(i).

$N(I) = \{(M^i_J, m_i) \mid i \in I\}$: un nuage de points de R_J , indicés par I; on suppose toujours que la masse m_i du point M^i_J est un nombre réel positif ; et de plus que la somme des m_i , ou masse totale du nuage vaut 1.

$$\Sigma\{m_i \mid i \in I\} = 1$$

$N(C) = \{(M^c_J, m_c) \mid c \in C\}$: le nuage des centres de gravité des classes associées à la partition C de I ; de façon précise :

$m_c = \Sigma\{m_i \mid i \in c\}$;

$M^c_J = \Sigma\{(m_i/m_c)M^i_J \mid i \in c\}$

$S(I)_{jj'} = \Sigma\{m_i\ M^i_j M^i_{j'} \mid i \in I\}$; (dans cette somme, M^i_j désigne la j-ème coordonnée du point M^i_J).

$S(C)_{jj'} = \Sigma\{m_c\ M^c_j\ M^c_{j'} \mid c \in C\}$;

$S(I-C)_{jj'} = \Sigma\{m_i(M^i_j - M^{c(i)}_j)(M^i_{j'} - M^{c(i)}_{j'}) \mid i \in I\}$; (dans cette formule, $M^{c(i)}_j$ désigne la j-ème coordonnée du centre de la classe c(i) à laquelle appartient l'élément i).

1.1 a) Calculer les coordonnées du centre de gravité $g_J(I)$ du nuage N(I) et celles du centre de gravité $g_J(C)$ du nuage N(C).

b) Exprimer la condition pour que $g_J(I)$ soit à l'origine. Où est dans ce cas $g_J(C)$?

Dans la suite on supposera toujours que $g_J(I)$ est à l'origine.

1.2 a) On note : $S(c)_{jj'} = \Sigma\{m_i(M^i_j - M^c_j)(M^i_{j'} - M^c_{j'}) \mid i \in c\}$; exprimer $S(I-C)_{jj'}$ en fonction de l'ensemble des $S(c)_{jj'}$ pour $c \in C$.

b) Quelle relation y-a-t'il entre $S(I)_{jj'}$, $S(C)_{jj'}$ et $S(I-C)_{jj'}$?

1.3 Soit u_J un vecteur unitaire de R_J (i.e. tel que $\Sigma\{u^2_j \mid j \in J\} = 1$);

On note $\Delta(u_J)$ la droite de R_J, de direction u_J, passant par l'origine :

$\Delta(u_J) = \{x\,u_J \mid x \in R\}$.

On note $pr(u_J)x_J$ la projection orthogonale sur la droite $\Delta(u_J)$ du point x_J de R_J : cette projection est caractérisée par la propriété d'être un point de $\Delta(u_J)$ tel que le vecteur différence $(x_J - pr(u_J)x_J)$ a avec u_J un produit scalaire nul ; i.e. en formules :

$pr(u_J)x_J \in \Delta(u_J)$; $<(x_J - pr(u_J)x_J), u_J> = 0$

a) Exprimer en fonction des coordonnées des vecteurs u_J et x_J le produit scalaire $<u_J, pr(u_J)x_J>$

b) Exprimer (en fonction des coordonnées des vecteurs u_J et x_J), les coordonnées du vecteur $pr(u_J)x_J$ ainsi que le carré de la norme de ce vecteur.

1.4 Dans cette question, comme dans la précédente, u_J désigne un vecteur unitaire ; on convient de noter :

$P^i_J = pr(u_J)M^i_J$; $P^c_J = pr(u_J)M^c_J$;

et l'on définit les sommes suivantes :

$S(I\ ;\ u_J) = \Sigma\{m_i \|P^i_J\|^2 \mid i \in I\}$;

$S(C\ ;\ u_J) = \Sigma\{m_c \|P^c_J\|^2 \mid c \in C\}$;

$S(I-C;u_J) = \Sigma\{m_i \|P^i_J - P^{c(i)}_J\|^2 \mid i \in I\}$.

a) Quelle relation y-a-t'il entre $S(I;u_J)$, $S(C;u_J)$ et $S(I-C;u_J)$?

b) Exprimer $S(I;u_J)$ en fonction des $S(I)_{jj'}$ et des composantes u_j de u_J ; même question pour $S(C;u_J)$ en fonction des $S(C)_{jj'}$ et u_j ;et pour $S(I-C;u_J)$ en fonction des $S(I-C)_{jj'}$ et u_j.

1.5 Dans cette question on suppose donnés deux nuages N(A) et N(B) ayant chacun pour masse totale 1, et pour centre de gravité l'origine :

$$N(A) = \{(M_J^a , m_a) | a \in A\} ;$$
$$N(B) = \{(M_J^b , m_b) | b \in B\} .$$

On note I l'ensemble produit $A \times B$ et l'on définit un nuage N(I) en posant, quel que soit $i = (a,b) = ab$:

$$m_i = m_{ab} = m_a \times m_b \quad ; \quad M_J^i = M_J^{ab} = M_J^a + M_J^b .$$

On considère sur I la partition C suivante :

$$C = \{c_a | a \in A\} \quad ; \quad \forall\, a \in A : c_a = \{(a,b) | b \in B\} .$$

(il est clair, en effet que quel que soit a, c_a est une partie de $I=A\times B$, et que les c_a définissent bien une partition de I).

a) Quel est le centre de gravité du nuage N(I) défini ci-dessus ; quel est le centre de gravité de la classe c_a ; quelle est la masse m_{ca} de cette classe ?

b) Exprimer en fonction des sommes $S(A)_{jj'}$ et $S(B)_{jj'}$ relatives respectivement aux nuages N(A) et N(B) les sommes $S(I)_{jj'}$, $S(C)_{jj'}$ et $S(I-C)_{jj'}$ relatives au nuage N(I) et à la partition C de I.

1.6 On suppose dans cette question que le nuage N(I) admet pour axes principaux d'inertie les axes de coordonnées de R_J ; et que si l'on note :

$$S(I ; \delta_J^j) = \lambda_j ,$$

on a : $\lambda_n < \lambda_{n-1} < \ldots\ldots < \lambda_2 < \lambda_1$;

(dans ces formules, δ_J^j désigne le vecteur unitaire de R_J dont toutes les composantes sont nulles sauf la j-ème qui vaut 1 ; et comme on l'a posé dès le début, $n = \text{Card}\, J$ est la dimension de l'espace R_J).

a) Exprimer en fonction des n nombres λ_j les sommes $S(I)_{jj'}$ (pour j et j' quelconques : on distinguera les cas $j = j'$ et $j \neq j'$).

b) on note :

$E(p\leq)$: le sous-espace de R_J engendré par les $(n+1-p)$ vecteurs δ_J^j pour $j = p,\ldots, n$.

$E(\leq p)$: le sous-espace de R_J engendré par les p vecteurs δ_J^j pour $j = 1,\ldots, p$.

On demande de calculer (en fonction des λ_j) le maximum M(p) de

$S(I;u_J)$ pour un vecteur unitaire $u_J \in E(p\leq)$:

$$M(p) = \text{Sup}\{S(I;u_J) \mid u_J \in E(p\leq)\} \quad ;$$

et de calculer le minimum $m(p)$ de $S(I;u_J)$ pour $u_J \in E(\leq p)$:

$$m(p) = \text{Inf}\{S(I;u_J) \mid u_J \in E(\leq p)\} \quad .$$

c) Peut-on donner une borne supérieure à $S(C;u_J)$ quand $u_J \in E(p\leq)$?

Peut-on donner une borne inférieure (autre que zéro) à $S(C;u_J)$ quand $u_J \in E(\leq p)$?

1.7 On suppose (pour simplifier les notations) que les moments principaux d'inertie des nuages N(I) et N(C) sont tous distincts ; et l'on note :

pour le nuage N(I) :

suite des moments principaux d'inertie : $\lambda_n < \ldots < \lambda_h < \ldots < \lambda_2 < \lambda_1$;

suite des vecteurs unitaires des axes : $u_{nJ}, \ldots, u_{hJ}, \ldots, u_{2J}, u_{1J}$;

pour le nuage N(C) :

suite des moments principaux d'inertie : $\mu_n < \ldots < \mu_h < \ldots < \mu_2 < \mu_1$;

suite des vecteurs unitaires des axes : $v_{nJ}, \ldots, v_{hJ}, \ldots, v_{2J}, v_{1J}$

On définit de plus, étant donné un nombre réel positif ρ, certains sous-espaces de R_J :

$\text{Esp}(I;\leq\rho)$: sous-espace de R_J engendré par les vecteurs axiaux u_{hJ} de N(I) tels que le moment d'inertie correspondant λ_h est inférieur ou égal à ρ.

$\text{Esp}(C;\rho\leq)$: sous-espace de R_J engendré par les vecteurs axiaux v_{hJ} de N(C) tels que le moment d'inertie correspondant est supérieur ou égal à ρ.

a) Quelle est la dimension du sous-espace $\text{Esp}(I;\leq\lambda_p)$? Calculer $\text{Max}(\lambda_p)$ défini par :

$$\text{Max}(\lambda_p) = \text{Sup}\{S(I;u_J) \mid u_J \in \text{Esp}(I;\leq\lambda_p) \quad ; \quad \|u_J\| = 1\}$$

Que peut-on dire de $S(C;u_J)$ pour u_J unitaire et dans $\text{Esp}(I;\leq\lambda_p)$?

b) Quelle est la dimension du sous-espace $\text{Esp}(C;\mu_p\leq)$? Calculer $\min(\mu_p)$ défini par :

$$\min(\mu_p) = \inf\{S(C;u_J) \mid u_J \in \text{Esp}(C;\mu_p\leq) \quad ; \quad \|u_J\| = 1\} \quad .$$

c) Que peut-on dire de l'intersection Int définie ci-dessous :

$$\text{Int} = \text{Esp}(I;\leq\lambda_p) \cap \text{Esp}(C;\mu_p\leq),$$

compte-tenu des dimensions des deux sous-espaces (calculées en a et b)

d) Notons u_J un vecteur unitaire de Int ; placer $S(C;u_J)$ relativement à λ_p et μ_p. Qu'en déduit-on relativement aux deux suites des moments d'inertie principaux des nuages N(I) et N(C) ? Adapter les raisonnements qui précèdent au cas où il y a des valeurs propres multiples.

2 Solution du problème

2.1 a) $g_J(I) = \Sigma\{m_i\ M^i_J\ |i \in I\}$

$$g_J(C) = \Sigma\{m_c\ M^c_J\ |c \in C\} = \Sigma\{m_c\ \Sigma\{(m_i/m_c)M^i_J\ |i \in c\}|c \in C\}$$
$$= \Sigma\{m_i\ M^i_J\ |i \in I\} = g_J(I)$$

b) $g_J(I)$ sera à l'origine, si $\Sigma\{m_i M^i_J\ |i \in I\} = 0$, auquel cas $g_J(C)$ est aussi à l'origine.

2.2 a) $S(I-C)_{jj'} = \Sigma\{S(c)_{jj'}|c \in C\}$

b) $S(I)_{jj'} = S(C)_{jj'} + S(I-C)_{jj'}$

Cette relation classique qui correspond à la décomposition de la variance en variance interclasse et variance intraclasse s'obtient en écrivant $S(I)_{jj'}$ sous la forme :

$$\Sigma\{\Sigma\{m_i\ M^i_j M^i_{j'}\ |i \in c\}|c \in C\}$$

et en appliquant le théorème de Huyghens à chacune des Card C sommes $\Sigma\{m_i\ M^i_j M^i_{j'}\ |i \in c\}$

2.3 a) $\langle u_J, pr(u_J)x_J\rangle = \langle u_J, x_J\rangle = \Sigma\{u_j\ x_j|j \in J\}$

b) $pr(u_J)x_J = \langle u_J, x_J\rangle\ u_J$

donc la j-ème composante de $pr(u_J)x_J$ s'écrit :

$$\Sigma\{u_{j'}\ x_{j'}|j' \in J\}\ u_j$$

tandis que le carré de la norme de $pr(u_J)x_J$ vaut puisque u_J est de norme 1 :

$$\langle u_J, x_J\rangle^2 = (\Sigma\{u_j x_j|j \in J\})^2$$

2.4 a) $S(I;u_J) = S(C;u_J) + S(I-C;u_J)$

b) $S(I;u_J) = \Sigma\{m_i(\ \Sigma\{\ u_j M^i_j\ |j \in J\ )^2|i \in I\}$

$$= \Sigma\{S(I)_{jj'}\ u_j u_{j'}|j \in J,\ j' \in J\}$$

de même :

$$S(C\ ;\ u_J) = \Sigma\{S(C)_{jj'}\ u_j u_{j'}|j \in J,\ j' \in J\}$$
$$S(I-C;u_J) = \Sigma\{S(I-C)_{jj'}\ u_j u_{j'}|j \in J,\ j' \in J\}$$

2.5 a) Le centre de gravité $g_J(I)$ s'écrit puisque la somme des m_i est encore égale à 1 :

$$g_J(I) = \Sigma\{m_i M^i_J\ |i \in I\} = \Sigma\{m_a m_b(M^a_J + M^b_J)\ |(a,b) \in A \times B\}$$
$$= \Sigma\{m_a M^a_J\ |a \in A\} + \Sigma\{m_b M^b_J\ |b \in B\} = 0$$

puisque le centre de gravité de N(A) (resp. N(B)) est à l'origine.

La masse m_{ca} de la classe c_a est égale à $\Sigma\{m_a m_b|b \in B\} = m_a$, tandis que son centre de gravité s'écrit :

$$(1/m_a)\Sigma\{m_a m_b(M^a_J + M^b_J)|\ b \in B\} = M^a_J$$

puisque le centre de gravité de N(B) est à l'origine.

b) $S(I)_{jj'} = \Sigma\{m_a m_b(M^a_j + M^b_j)(M^a_{j'} + M^b_{j'})|\ (a,b) \in A \times B\}$
$= S(A)_{jj'} + S(B)_{jj'}$

les termes rectangles étant nuls puisque N(A) et N(B) sont centrés à l'origine.

$$S(C)_{jj'} = \Sigma\{m_a M^a_j M^a_{j'}\ |a \in A\} = S(A)_{jj'}$$
$$S(I-C)_{jj'} = S(I)_{jj'} - S(C)_{jj'} = S(B)_{jj'}$$

2.6 a) $S(I)_{jj'} = \lambda_j\ \delta^{j'}_j = \lambda_j$ si $j' = j$, 0 sinon, puisque $S(I)_{jj}$ est l'inertie de la projection du nuage sur le j-ème axe factoriel δ^j_J , $S(I)_{jj'}$ pour $j' \neq j$ étant nul puisqu'égal au produit d'inertie associé à deux axes factoriels différents, et que les facteurs associés sont non corrélés.

b) $M(p) = \text{Sup}\{S(I;u_J)\ |u_J \in E(p\leq)\} = \lambda_p$

$m(p) = \text{Inf}\{S(I;u_J)\ |u_J \in E(\leq p)\} = \lambda_p$

En effet, l'on a d'après 2.4 b) :

$$S(I;u_J) = \Sigma\{S(I)_{jj'}\ u_j u_{j'}|j \in J,\ j' \in J\}$$
$$= \Sigma\{\lambda_j (u_j)^2 | j \in J\}$$

avec $\|u_J\|^2 = \Sigma\{(u_j)^2|j \in J\} = 1$

Pour u_J appartenant à $E(p\leq)$, on a $\forall\ j \leq p-1$: $u_j = 0$, et donc

$$S(I;u_J) = \Sigma\{\lambda_j(u_j)^2|j = p,n\}$$
$$\leq \lambda_p \Sigma\{(u_j)^2|j = p,n\} = \lambda_p$$

la borne λ_p étant atteinte pour $u_J = \delta^p_J$.

De même pour u_J appartenant à $E(\leq p)$, on a $\forall\ j \geq p+1$: $u_j = 0$, et donc

$$S(I;u_J) = \Sigma\{\lambda_j(u_j)^2|j = 1,p\}$$
$$\geq \lambda_p \Sigma\{(u_j)^2|j = 1,p\} = \lambda_p$$

la borne λ_p étant atteinte pour $u_J = \delta^p_J$

c) D'après 2.4 a), $S(C;u_J)$ est toujours inférieur ou égal à $S(I;u_J)$. Pour u_J appartenant à $E(p\leq)$, cette dernière quantité étant inférieure ou égale à λ_p , $S(C;u_J)$ admet λ_p comme borne supérieure quand u_J appartient à $E(p\leq)$.

On ne peut donc donner *a priori* de borne inférieure autre que zéro pour $S(C;u_J)$ quand $u_J \in E(\leq p)$. En effet il suffit que les centres de gravité M^c_J aient leurs projections confondues sur $E(\leq p)$ pour que

$S(C;u_J) = 0$, cette propriété étant indépendante des moments principaux d'inertie λ_α de $N(I)$.

2.7 a) Le sous-espace $Esp(I;\leq\lambda_p)$ est engendré par $u_{pJ}, u_{p+1J}, \dots, u_{nJ}$. Il est donc de dimension $n-p+1$, et $Max(\lambda_p)$ est égale à λ_p valeur atteinte pour $u_J = u_{pJ}$. $S(C;u_J)$ étant inférieur ou égal à $S(I;u_J)$ est donc, pour u_J unitaire et appartenant à $Esp(I;\leqslant\lambda_p)$, plus petit ou égal à λ_p.

b) $Esp(C;\mu_p\leq)$ étant engendré par $v_{1J}, \dots, v_{pJ}$, est de dimension p, et $min(\mu_p)$ vaut μ_p valeur atteinte pour $u_J = v_{pJ}$

c)
$$\begin{aligned} \dim(Esp(I;\leq\lambda_p)) + \dim(Esp(C;\mu_p\leq)) &= n-p+1+p \\ &= n+1 \end{aligned}$$

On en déduit que Int est au moins de dimension 1.

d) D'après c), il existe un vecteur u_J non-nul (de norme 1) appartenant à Int. On a alors d'après 2.7 a), 2.7 b) et 2.4 a) :

$$\mu_p \leq S(C;u_J) \leq S(I;u_J) \leq \lambda_p \qquad (1)$$

On en déduit que $\forall$ p ($1\leq p\leq n$) le p-ème moment principal d'inertie μ_p de $N(C)$ est inférieur ou égal au p-ème moment principal d'inertie de $N(I)$. Ce résultat est encore valable, même s'il existe des valeurs propres multiples pour $N(I)$ ou $N(C)$.

Supposons en effet que λ_p (resp. μ_p) soit d'ordre $r+q+1$ (resp. $s+t+1$) avec :

$$\lambda_{p-q} = \lambda_{p-q+1} = \dots = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_{p+r}$$
$$\mu_{p-s} = \mu_{p-s+1} = \dots = \mu_p = \mu_{p+1} = \dots = \mu_{p+t}$$

où q, r, s, t sont des entiers positifs ou nuls tels que : $q \leq p$; $s \leq p$; $p+r \leq n$; $p+t \leq n$.

Alors : $Esp(I;\leq\lambda_p) = Esp(I;\leqslant\lambda_{p-q})$ est de dimension $n-p+q+1$

$Esp(C;\mu_p\leq) = Esp(C;\mu_{p+t}\leqslant)$ est de dimension $p + t$

Il en résulte que Int est de dimension supérieure ou égale à $q + t + 1$. On a toujours $Max(\lambda_p) = \lambda_p$, $min(\mu_p) = \mu_p$, et donc le système d'inégalités (1) reste valable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEN C.W. (1971) :*On some problems in canonical correlation analysis*. Biometrika, 58, pp 399-400.

[2] DAVIS C. (1963 & 1965):*The rotation of eigen vectors by a perturbation I et II. J. Math. Anal. Appl.*, 1963-6-pp 159-173,1965-11 - pp 20-27.

[3] DAVIS C. - KAHAN W.M. (1970) : *The rotation of eigen vectors by a perturbation III : Siam J. Numer. Anal.* - 7 - 1 - pp 1-46.

[4] DENIAU C. & OPPENHEIM (1977) : *A New proof of CHEN's theorem (addition of variables in canonical analysis and applications) Sankhyà* - Vol. 39 - Série B - 1 - pp 97-101.

[5] ESCOFIER B. & Le ROUX B. (1976) : Etude de trois problèmes de stabilité en analyse factorielle. Pub. Inst. Stat. Vol XXI Fasc. 3-4 (1972 paru 1976).

[6] LAHA R.G. (1954) :*On some problems in Canonical Correlation Sankhyà* Vol 13 pp 61-66.