LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

P. CAZES

Étude dans un questionnaire d'un modèle de non-réponses

Les cahiers de l'analyse des données, tome 2, nº 2 (1977), p. 161-172

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1977__2_2_161_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Volume II 1977 n° 2 p. 161 172

ÉTUDE DANS UN QUESTIONNAIRE D'UN MODÈLE DE NON-RÉPONSES [NON-RÉPONSES]

par P. Cazes [1]

Pour tenir compte dans un questionnaire des non réponses, on introduit pour chaque question q dont l'ensemble des modalités est J_q, une modalité associée à la non réponse, et l'on propose un modèle de non réponses. Avec ce modèle, l'on obtient d'une part les facteurs que l'on aurait trouvés sans non réponses, facteurs qui sont nuls sur les modalités associées aux non réponses, et d'autre part des facteurs de structure, dus à l'introduction des modalités de non réponses et constants sur chaque J_q. Cette étude est présentée sous la forme d'un problème (*) muni de sa solution détaillée.

1. *Enoncé du problème.*

Un questionnaire est constitué par un ensemble Q de questions dont chacune q admet un ensemble J_q de modalités de réponses. On note :

$$J = \cup \{J_q | q \in Q\};$$

$$\forall j \in J : q(j) = q \Leftrightarrow j \in J_q \quad ,$$

(i.e. q(j) nous dit à quelle question particulière q correspond la modalité j);

$$\text{Card } J = \bar{\bar{J}}; \quad \text{Card } Q = \bar{\bar{Q}}.$$

Un ensemble I de sujets (Card I = n) répond à ce questionnaire. On suppose que les réponses de tous les sujets sont complètes, i.e. qu'à chaque question q chaque sujet i fournit une modalité de réponse rep(i,q)

$$\text{rep}(i,q) \in J_q \subset J.$$

A partir de ces réponses on constitue deux tableaux de contingence : le tableau k_{IJ} et le tableau t_{JJ} définis comme suit :

$$k(i,j) = 1 \text{ si } \text{rep}(i,q(j)) = j$$

$$k(i,j) = 0 \text{ si } \text{rep}(i,q(j)) \neq j;$$

et pour le tableau t :

$$\forall j, j' \in J : t(j,j') = \Sigma \{k(i,j)\ k(i,j') | i \in I\},$$

(*) *Ce problème a été proposé aux étudiants du D.E.A. de statistique de l'Université Pierre et Marie Curie, à la session de Juin 1974.*

(1) *I.S.U.P. - Laboratoire de Statistique - Université Pierre et Marie Curie - Paris.*

(i.e. $t(j,j')$ est le nombre de sujets qui ont fourni à la fois la modalité de réponse j et la modalité de réponse j').

Notons :

$$\forall\ j \in J : t(j) = \Sigma\ \{t(j,j')\,|\,j \in J\} = \bar{\bar{Q}}\ t(j,j)$$

$$\forall\ j,\ j' \in J,\ f^j_{j'} = t(j,j')/t(j) = t^j_{j'}\ ;$$

$$\forall\ j \in J,\ f_j = t(j)/(\bar{\bar{Q}}^2 \times n) = t(j,j)/(n \times \bar{\bar{Q}})$$

On rappelle les faits suivants relatifs à l'analyse des correspondances k_{IJ} et t_{JJ}. Les facteurs sur J issus de la correspondance k_{IJ} se divisent en deux groupes. D'une part le facteur trivial (constant et égal à 1) et $(\bar{\bar{Q}} - 1)$ facteurs relatifs à la valeur propre zéro, qui sont constants sur chacun des J_q. D'autre part $(\bar{\bar{J}} - \bar{\bar{Q}})$ facteurs qui ont moyenne nulle sur chacun des J_q (i.e. tels que $\Sigma\ \{\varphi^j\ k(j)\,|\,j \in J_q\} = 0$) (*). Soit φ^J une fonction de variance 1 sur J muni de la loi de probabilité f_J et satisfaisant à l'équation :

$$\varphi^J \circ f^J_J = \lambda\varphi^J\ , \quad \text{i.e.}$$

$$\forall\ j \in J : \Sigma\ \{\varphi^{j'}\ f^j_{j'}\,|\,j' \in J\} = \lambda\varphi^j\ ;$$

alors φ^J est un facteur normalisé issu de la correspondance k_{IJ} et relatif à la valeur propre λ.

Ceci posé l'objet du problème est d'étudier en quoi sont modifiés les résultats de l'analyse du questionnaire si on admet la possibilité de ne pas répondre à certaines questions, les non-réponses étant distribuées avec une certaine régularité, que l'énoncé précisera.

A partir du tableau t_{JJ} , on construit un tableau modifié t_{1MM} suivant les règles suivantes :

$$\forall\ q \in Q : M_q = J_q \cup \{q°\},\ (q° = \text{non-réponse à la question } q);$$

$$M = \cup\ \{M_q\,|\,q \in Q\};$$

$$\forall\ q \in Q,\ \forall\ j \in J_q : t_1(j,j) = (1 - \gamma)\ t(j,j)\ ;$$

$$\forall\ q \in Q,\ \forall\ j,j' \in J_q : j \neq j' \Rightarrow t_1(j,j') = 0\ ;$$

$$\forall\ q,\ q' \in Q,\ \forall\ j \in J_q\ ,\ \forall\ j' \in J_{q'} : q' \neq q \Rightarrow t_1(j,j') = (1-\zeta)\ t(j,j')$$

$$\forall\ q,\ q' \in Q,\ \forall\ j \in J_q : q' \neq q \Rightarrow t_1(j,q'°) = \beta t(j,j)\ ;$$

$$\forall\ q \in Q,\ \forall\ j \in J_q : t_1(j,q°) = 0\ ;$$

$$\forall\ q \in Q : t_1(q°,\ q°) = \varepsilon\ n\ ;$$

$$\forall\ q,\ q' \in Q : q \neq q' \Rightarrow t_1(q°,\ q'°) = \alpha\ n\ ;$$

pour la commodité du lecteur, ces règles de transformation sont résumées sur la figure 1.

(*) $k(j) = \Sigma\ \{k(i,j)\,|\,i = 1,\ n\}$

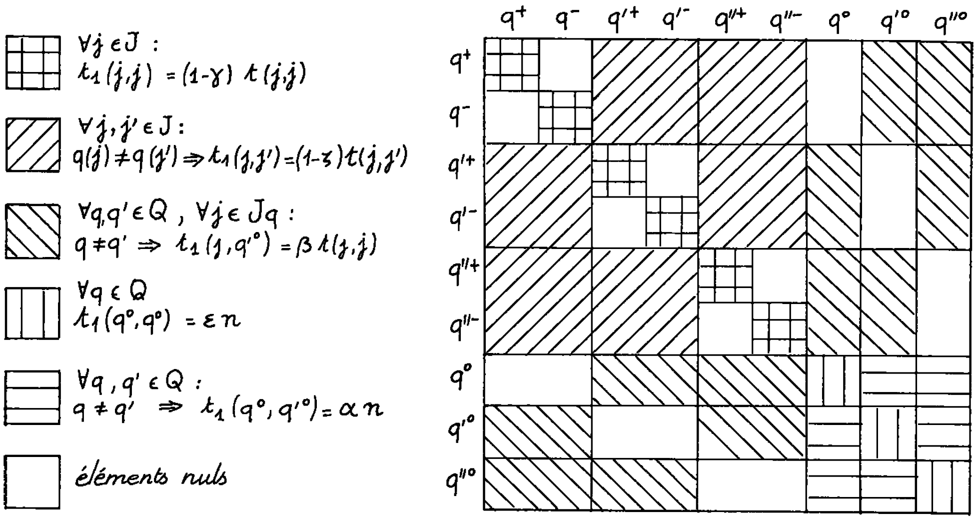

Figure 1 Exemple de construction d'un tableau t_1 à partir d'un tableau t
$Q = \{q, q', q''\}$, chaque ensemble J_q ne comporte que deux modalités

	q^+	q^-	q'^+	q'^-	q°	q'°
q^+	40	0	7	28		5
q^-	0	40	28	7		5
q'^+	7	28	40	0	5	
q'^-	28	7	0	40	5	
q°			5	5	20	10
q'°	5	5			10	20

Figure 2 . Exemple numérique de tableau t_1 :
$Q = \{q, q'\}$; $J_q = \{q^+, q^-\}$; $J_{q'} = \{q'^+, q'^-\}$.

1.1° A quelles relations doivent satisfaire les paramètres numériques α, β, γ, ε, ζ, pour que le tableau t_{1MM} puisse être le tableau issu des réponses de n sujets à un questionnaire (avec Q, ensemble des questions; M_q ensemble des modalités de réponses à la question q). On se souviendra des conditions :

$$\forall\ r \in M_q\ ,\ \forall\ q' \in Q : \Sigma\ \{t_1(r,r')|r' \in M_{q'}\} = t_1(r,r)$$

$$\forall\ q \in Q : \Sigma\ \{t_1(r,r)|r \in M_q\} = n.$$

On exprimera γ, ε, ζ en fonction de α et β (on supposera n très grand; et on ne se souciera pas des conditions pour que les $t_1(r, r')$ soient exactement des nombres entiers).

1.2° On suppose ε donné : quelle est la valeur de α (et de β) dans le cas extrême où toutes les non-réponses (réponses q°) proviennent d'un sous-ensemble de sujets i qui n'ont répondu à aucune question ? Quelle est en fonction de ϵ et n le nombre de ces sujets.

Quelle est la valeur de α (et de β), en fonction de ε, sous l'hypothèse (plus réaliste) que les non-réponses sont distribuées uniformément sur l'ensemble des sujets et des questions du questionnaire.

1.3° Sur la figure 2 est proposé un exemple de tableau t_1, correspondant au cas : $Q = \{q,q'\}$; $J_q = \{q^+, q^-\}$; $J_{q'} = \{q'^+, q'^-\}$. Ecrire le tableau t_{JJ} d'où provient le tableau t_{1MM}; et donner les valeurs de n, α, β, γ, ε, ζ.

1.4° Soit φ^J un facteur issu de t_{JJ} relatif à la valeur propre λ:

$$\varphi^J \circ t_J^J = \lambda\varphi^J;$$

on suppose φ^J de moyenne nulle sur chacun des J_q. Montrer que φ^J définit un facteur φ^M issu de t_1 et relatif à une valeur propre μ que l'on précisera :

$$\varphi^M \circ t_{1M}^M = \mu\varphi^M$$

(les notations sont celles de l'introduction :

$$\forall\ r, r' \in M : \ t1_{r'}^{r} = t_1(r,r')/(t_1(r,r) \times \bar{\bar{Q}})).$$

On exprimera μ en fonction de λ, $\bar{\bar{Q}}$, α et β (ou mieux : ε et ζ).

1.5° On sait (cf introduction) que la correspondance t admet $(\bar{\bar{J}} - \bar{\bar{Q}})$ facteurs tels que celui considéré en 4°). Quelle est la somme des valeurs propres λ auxquelles ces facteurs sont relatifs ? Quelle est la somme des valeurs propres μ correspondantes ?

1.6° Montrer qu'il existe un facteur φ^M (de moyenne nulle) tel que :

$$\forall\ j \in J : \varphi^j = a\ ;\ \forall\ q \in Q : \varphi^{q°} = b$$

$$\varphi^M \circ t_{1M}^M = \rho\varphi^M$$

on calculera (b/a) en fonction de ε ; et on exprimera la valeur propre ρ en fonction de $\bar{\bar{Q}}$, ε et β.

1.7° Soit $\psi^Q = \{\psi^q|q \in Q\}$ une fonction de moyenne nulle sur Q (i.e. $\Sigma\ \{\psi^q|q \in Q\} = 0$). Montrer qu'il existe un facteur φ^M défini par deux nombres u v et tel que :

$$\forall\ q \in Q,\ \forall\ j \in J_q \ : \varphi^j = u\ \psi^q$$
$$\forall\ q \in Q \ : \varphi^{q^\circ} = v\ \psi^q$$
$$\varphi^M \circ t^M_{1M} = \sigma\varphi^M$$

(on distinguera le cas trivial $u = v$, du cas $u \neq v$; et on exprimera la valeur propre σ en fonction de $\bar{\bar{Q}}$; β et ε).

1.8° Faire le bilan de l'ensemble des facteurs que nous avons trouvés (dans les questions ci-dessus) pour t^M_{1M}. Quel en est le nombre ? Quelle est la somme des valeurs propres : la comparer à la trace de t^M_{1M}.

1.9° D'après les résultats généraux obtenus ci-dessus, faire l'analyse de la correspondance définie par le tableau t_1 de la figure 2.

N.B. On supposera dans tout le problème, de façon à simplifier les calculs que α, β, γ, ε et ζ vérifient les relations trouvées en 1°).

2. *Solution du problème*.

2.1. L'équation $\Sigma\ \{t_1(r,r') | r' \in M_{q'}\} = t_1(r,r)$ qui est identiquement vérifiée si $r \in M_{q'}$ implique :

a) si $r \in J_q$, $q \neq q'$:

$$(1 - \zeta)\ \Sigma\ \{t(r,r') | r' \in J_{q'}\} + \beta\ t(r,r) = (1 - \gamma)\ t(r,r)$$

soit, puisque le terme en facteur de $(1 - \zeta)$ vaut $t(r,r)$:

$$\beta + \gamma = \zeta \qquad (1)$$

b) si $r = q^\circ$, $q \neq q'$:

$$\beta\Sigma\ \{t(r',r') | r' \in J_{q'}\} + \alpha n = \varepsilon n$$

soit, puisque le terme en facteur de β vaut n :

$$\alpha + \beta = \varepsilon \qquad (2)$$

De même l'équation $\Sigma\ \{t_1(r,r) | r \in M_q\} = n$

implique :

$$(1 - \gamma)\ \Sigma\ \{t(r,r) | r \in J_q\} + \varepsilon n = n$$

soit, puisque le terme en facteur de $(1 - \gamma)$ vaut n :

$$\gamma = \varepsilon \qquad (3)$$

Les égalités (1), (2), (3) sont équivalentes à :

$$\left.\begin{array}{l}\gamma = \varepsilon = \alpha + \beta \\ \zeta = \alpha + 2\beta\end{array}\right\} \qquad (4)$$

2.2. Supposons que les non-réponses proviennent d'un groupe de s sujets n'ayant répondu à aucune question, on a :

$$\forall\ (q, q') \in Q^2 \ : t_1(q^\circ, q^\circ) = t_1(q^\circ, q'^\circ) = s$$

soit : $\alpha = \varepsilon = s/n$

on a alors :

$$\alpha = \gamma = \zeta = \varepsilon$$
$$\beta = 0$$

Si maintenant on suppose que les non-réponses sont distribuées uniformément, ε étant la proportion de non-réponses à une question ($\varepsilon = t_1(q°,\ q°)/n$), la proportion de non-réponses simultanées à deux questions différentes q et q' , i.e. $t_1(q°, q'°)/n$ vaut ε^2. On a donc dans ce cas :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon^2 \\ \beta &= \varepsilon\ (1 - \varepsilon) \\ \gamma &= \varepsilon \\ \zeta &= \beta + \gamma = \varepsilon\ (2 - \varepsilon) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

2.3° L'équation :

$$\Sigma\ \{t_1(r,r) \mid r \in M_q\} = \Sigma\ \{t_1(r,r) \mid r \in M_{q'}\} = n$$

implique que n est égal à 100. On en déduit puisque :

$$t_1(q°,\ q°) = t_1(q'°,\ q'°) = \varepsilon n = 20$$
$$t_1(q°,\ q'°) = \alpha n = 10$$

que :

$$\varepsilon = 0{,}2;\ \alpha = 0{,}1;\ \gamma = \varepsilon = 0{,}2;$$
$$\beta = \varepsilon - \alpha = 0{,}1;\ \zeta = \beta + \gamma = 0{,}3$$

Le tableau t_{JJ} s'écrit alors :

	q^+	q^-	q'^+	q'^-
q^+	50	0	10	40
q^-	0	50	40	10
q'^+	10	40	50	0
q'^-	40	10	0	50

2.4° Si $\varphi^J = \{\varphi^{J_q} \mid q \in Q\}$ est un facteur de t_{JJ} relatif à la valeur propre λ, il vérifie l'équation :

$$\varphi^J \circ t_J^J = \lambda \varphi^J$$

soit :

$$\forall\ q \in Q : \Sigma\ \{\varphi^{J_{q'}} \circ t_{J_{q'}}^{J_q} \mid q' \in Q - \{q\}\} = (\lambda - 1/\bar{\bar{Q}})\varphi^{J_q} \qquad (6)$$

Les facteurs φ^M de t_{1MM} vérifiant l'équation :

$$\varphi^M \circ t_{1M}^{\ M} = \mu \varphi^M\ ,$$

calculons les éléments :

$$t_{1r'}^{\ r} = t_1(r,r')/(\bar{\bar{Q}}\ t_1(r,r))$$

de la transition t_{1M}^{M} :

a) $\forall\, r, r' \in M_q : r \neq r' \Rightarrow t_{1\,r'}^{\,r} = 0$

$\forall\, j \in J_q : t_{1\,j}^{\,j} = t_j^j = 1/\bar{\bar{Q}} = t_{1\,q^\circ}^{\,q^\circ}$

b) $\forall\, q, q' \in Q,\ q \neq q'$,

$$\forall\, j \in J_q\ ,\ \forall\, j' \in J_{q'} : t_{1\,j'}^{\,j} = (1-\zeta)t(j,j')/((1-\gamma)t(j,j)\bar{\bar{Q}})$$
$$= ((1-\zeta)/(1-\gamma))\ t_{j'}^{j}$$
$$t_{1\,j'}^{\,q^\circ} = \beta\ t(j',j')/(\varepsilon n\bar{\bar{Q}})$$
$$t_{1\,q'^\circ}^{\,j} = \beta\ t(j,j)/((1-\gamma)\ t(j,j)\bar{\bar{Q}})$$
$$= \beta\ /((1-\gamma)\bar{\bar{Q}})$$
$$t_{1\,q'^\circ}^{\,q^\circ} = \alpha n/(\varepsilon n\bar{\bar{Q}}) = \alpha/(\varepsilon\bar{\bar{Q}}) = t_{1\,q^\circ}^{\,q'^\circ}$$

Soit $\varphi^M = \{\varphi^{M_q} | q \in Q\}$ un facteur de t_{1MM} relatif à la valeur propre μ. On posera $\varphi^{M_q} = \{\varphi^{J_q}\ ,\ \varphi^{q^\circ}\}$, $\varphi^J = \{\varphi^{J_q} | q \in Q\}$, $\varphi^Q = \{\varphi^{q^\circ} | q \in Q\}$, et l'on écrira aussi φ^M sous la forme (φ^J, φ^Q). Les équations vérifiées par φ^M s'écrivent :

$\forall\, q \in Q$:

$$\left.\begin{aligned}
&((1-\zeta)/(1-\gamma))\Sigma\{\varphi^{J_{q'}} \circ t_{J_{q'}}^{J_q} | q' \in Q-\{q\}\} + (\beta/((1-\gamma)\bar{\bar{Q}}))(\Sigma\{\varphi^{q'^\circ} | q' \in Q-\{q\}\})\,\delta^{J_q} \\
&\qquad = (\mu - 1/\bar{\bar{Q}})\varphi^{J_q} \\
&(\beta/(\varepsilon n\bar{\bar{Q}}^2))\Sigma\{\varphi^{J_{q'}} \circ t_{J_{q'}} | q' \in Q-\{q\}\} + (\alpha/(\varepsilon\bar{\bar{Q}}))\Sigma\{\varphi^{q'^\circ} | q' \in Q-\{q\}\} = (\mu - 1/\bar{\bar{Q}})\varphi^{q^\circ}
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

où δ^{J_q} désigne la fonction constante et égale à 1 sur J_q , et où l'on a posé :

$$t_{J_{q'}} = \{t(j) | j \in J_{q'}\},\ \text{avec}\ t(j) = \bar{\bar{Q}}\ t(j,j).$$

Soit $\varphi^J = \{\varphi^{J_q} | q \in Q\}$ un facteur non trivial (i.e. centré sur chaque J_q) de t_{JJ}. Outre les relations (6), φ^J vérifie donc les relations :

$$\forall\ q \in Q : \varphi^{J_q} \circ t_{J_q} = 0 \qquad (8)$$

De (6) et (8), l'on déduit que $\varphi^M = \{\varphi^J\ ,\ 0^Q\}$ où 0^Q désigne la fonction nulle sur Q, vérifie les équations (7) avec :

$$\mu = (1/\bar{\bar{Q}}) + (1-\zeta)\ (\lambda - 1/\bar{\bar{Q}})/(1-\gamma) \qquad (8\ \text{bis})$$

soit en tenant compte de (4) :

$$\mu = ((1-\zeta)\lambda + (\zeta - \varepsilon)/\bar{\bar{Q}})/(1-\varepsilon) \qquad (9)$$
$$= ((1 - \alpha - 2\beta)\lambda + \beta/\bar{\bar{Q}})/(1 - \alpha - \beta)$$

φ^M est donc facteur de t_{1MM} relatif à la valeur propre μ.

Pour obtenir un facteur de variance 1, il suffit, si φ^J est de variance 1, et puisque $t_1(j) = \Sigma\{t_1(j,r)|r \in M\} = \bar{\bar{Q}}\, t_1(j,j) = (1-\gamma)\, t(j)$, de multiplier φ^M par $(1-\gamma)^{-1/2}$.

2.5° On sait (cf. [Bin. Mult] CAD, Vol. II n° 1 § 3.2) que la somme des valeurs propres λ associées au tableau t_{JJ}, somme qui se réduit en fait aux valeurs propres correspondant aux $\bar{\bar{J}} - \bar{\bar{Q}}$ facteurs non triviaux (i.e. centrés sur chaque J_q) est égale à $(\bar{\bar{J}} - \bar{\bar{Q}})/\bar{\bar{Q}}$. La somme des valeurs propres μ associées aux $\bar{\bar{J}} - \bar{\bar{Q}}$ facteurs non triviaux de t_{JJ} vaut donc encore d'après (8 bis) $(\bar{\bar{J}} - \bar{\bar{Q}})/\bar{\bar{Q}}$.

2.6° Nous allons montrer qu'il existe un couple (a,b) ($a \neq b$; si $a = b$, on a affaire au facteur trivial constant δ^M) tel que $\varphi^M = (a\delta^J, b\delta^Q)$ est un facteur de t_{1MM} relatif à la valeur propre ρ, i.e. vérifie les relations (7) où l'on a remplacé μ par ρ.

Compte tenu de ce que :

$$\left.\begin{aligned} \delta^{J_{q'}} \circ t_{J_{q'}}^{J_q} &= \delta^{J_q}/\bar{\bar{Q}} \\ \delta^{J_{q'}} \circ t_{J_{q'}} &= n\bar{\bar{Q}} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

a et b doivent vêfifier les équations :

$$((\bar{\bar{Q}} - 1)/(\bar{\bar{Q}}(1-\gamma)))\ ((1-\zeta)a + \beta b) = (\rho - 1/\bar{\bar{Q}})a$$

$$((\bar{\bar{Q}} - 1)/(\bar{\bar{Q}}\varepsilon))\qquad (\beta a + \alpha b) = (\rho - 1/\bar{\bar{Q}})b$$

(a, b) est donc vecteur propre d'une matrice A que nous n'expliciterons pas, relativement à la valeur propre $\rho - 1/\bar{\bar{Q}}$.

Comme l'on sait que (1,1) ($a = b$) est vecteur propre de cette matrice relativement à la valeur propre $1 - 1/\bar{\bar{Q}}$ ($\rho = 1$), la valeur propre non triviale ρ sera telle que :

$$\begin{aligned} \rho - 1/\bar{\bar{Q}} &= \text{trace } A - (1 - 1/\bar{\bar{Q}}) \\ &= (1 - 1/\bar{\bar{Q}})(((1-\zeta)/(1-\gamma)) + (\alpha/\varepsilon) - 1) \qquad (11) \\ &= (1 - 1/\bar{\bar{Q}})(((\gamma-\zeta)/(1-\gamma)) + \alpha/\varepsilon) \end{aligned}$$

soit en tenant compte des relations (1) à (3) :

$$\begin{aligned} \rho - 1/\bar{\bar{Q}} &= (1 - 1/\bar{\bar{Q}})(-(\beta/(1-\varepsilon)) + (\varepsilon - \beta)/\varepsilon) \\ &= (1 - 1/\bar{\bar{Q}})(1 - (\beta/(\varepsilon(1-\varepsilon)))) \qquad (12) \end{aligned}$$

d'où :

$$\rho = 1 - (1 - 1/\bar{\bar{Q}})\ \beta/(\varepsilon(1-\varepsilon)) \qquad (13)$$

Quand les non-réponses sont distribuées uniformément sur l'ensemble des sujets et des questions, $\alpha = \varepsilon^2$, $\beta = \varepsilon(1-\varepsilon)$, et ρ est donc égal à $1/\bar{\bar{Q}}$.

Pour déterminer a et b, il suffit d'écrire que le facteur associé φ^M qui est un facteur non trivial, puisque non constant sur chaque M_q ($a \neq b$), est de moyenne nulle sur chaque M_q :

$$a\ \Sigma\ \{t_1(j) \mid j \in J_q\} + b\ t_1(q°)\,(*) = 0 \tag{14}$$

comme :

$$t_1(j) = t_1(j,j)\bar{\bar{Q}} = (1 - \gamma)\ t(j,j)\bar{\bar{Q}} = (1 - \gamma)\ t(j)$$

$$t_1(q°) = t_1(q°,\ q°)\bar{\bar{Q}} = \varepsilon n \bar{\bar{Q}}$$

et compte tenu de la seconde relation (10), on doit avoir :

$$a(1 - \gamma) + b\varepsilon = 0$$

soit puisque $\gamma = \varepsilon$:

$$b/a = -\ (1 - \varepsilon)/\varepsilon \tag{15}$$

φ^M sera de variance 1 si :

$$a = -\ (\varepsilon/(1 - \varepsilon))^{1/2}\ ; \quad b = ((1 - \varepsilon)/\varepsilon)^{1/2} \tag{16}$$

2.7° Soit $\psi^Q = \{\psi^q \mid q \in Q\}$ une fonction de moyenne nulle sur Q : $\Sigma\ \{\psi^q \mid q \in Q\} = 0$. Nous allons montrer qu'il existe un couple (u, v) ($u \neq v$; si $u = v$, on a affaire à un facteur trivial, car constant sur chaque M_q) tel que $\varphi^M = (\{u\psi^q\delta^{J_q} \mid q \in Q\},\ v\ \psi^Q)$ est un facteur de $t_{1_{MM}}$ relatif à la valeur propre σ, i.e. vérifie les relations (7) où l'on a remplacé μ par σ.

Compte tenu des relations (10) et du fait que ψ^Q est de moyenne nulle u et v doivent vérifier les équations :

$$-\ ((1 - \zeta)u + \beta v)/((1 - \gamma)\bar{\bar{Q}}) = (\sigma - 1/\bar{\bar{Q}})u$$

$$-\ \ (\beta u + \alpha v)/(\varepsilon\bar{\bar{Q}}) = (\sigma - 1/\bar{\bar{Q}})v\ .$$

(u, v) est donc vecteur propre d'une matrice B que nous n'expliciterons pas, relativement à la valeur propre $\sigma - 1/\bar{\bar{Q}}$. Comme l'on sait que (1,1) (u = v) est vecteur propre de cette matrice relativement à la valeur propre $-\ 1/\bar{\bar{Q}}(\sigma = 0)$, la valeur propre non triviale σ sera-t-elle que :

$$\sigma - 1/\bar{\bar{Q}} = \text{trace } B + 1/\bar{\bar{Q}} = (-((1 - \zeta)/(1 - \gamma)) - (\alpha/\varepsilon) + 1)/\bar{\bar{Q}}$$

d'où l'on déduit d'après (11) que :

$$\sigma - 1/\bar{\bar{Q}} = -\ (\rho - 1/\bar{\bar{Q}})/(\bar{\bar{Q}} - 1) \tag{17}$$

de (12), l'on tire alors :

$$\sigma = \beta/(\varepsilon(1 - \varepsilon)\bar{\bar{Q}}) \tag{18}$$

(*) $t_1(q°) = \Sigma\ \{t_1(r,q°) \mid r \in M\} = t_1(q°,\ q°)\bar{\bar{Q}}$

Dans le cas où les non-réponses sont distribuées uniformément, $\beta = \varepsilon(1 - \varepsilon)$, et l'on a $\sigma = 1/\bar{\bar{Q}}$.

Pour déterminer u et v, il suffit d'écrire que le facteur associé φ^M qui est un facteur non trivial puisque non constant sur chaque M_q ($u \neq v$) est de moyenne nulle sur chaque M_q :

$$u\, \Sigma\, \{t_1(j) | j \in J_q\} + v\, t_1(q°) = 0$$

(u,v) vérifie donc la même relation (14) que (a,b); on a donc d'après (15) :

$$v/u = -(1 - \varepsilon)/\varepsilon$$

Si ψ^Q est de variance 1 $((1/\bar{\bar{Q}})\, \Sigma\, \{(\psi^q)^2 | q \in Q\} = 1)$, φ^M sera de variance 1 si :

$$u = -(\varepsilon/(1 - \varepsilon))^{1/2}\ ; \quad v = ((1 - \varepsilon)/\varepsilon)^{1/2}. \tag{19}$$

2.8° Choisissant un système de $(\bar{\bar{Q}} - 1)$ fonctions sur Q de moyenne nulle, et non corrélées, on obtient d'après 2.7° $(\bar{\bar{Q}} - 1)$ facteurs non triviaux de t_{1MM} relatifs à la valeur propre multiple d'ordre $\bar{\bar{Q}} - 1$, σ donnée par (18). Rajoutant à ces $\bar{\bar{Q}} - 1$ facteurs non triviaux, les $(\bar{\bar{J}} - \bar{\bar{Q}})$ facteurs non triviaux calculés à partir des facteurs non triviaux de t_{JJ} (cf. § 2.4°), et le facteur non trivial calculé au § 2.6° on obtient (en posant $\bar{\bar{M}}$ = Card M) les $\bar{\bar{M}} - \bar{\bar{Q}} = \bar{\bar{J}}$ facteurs non triviaux de t_{1MM}.

La somme des valeurs propres associées à ces facteurs non triviaux doit être égale à $(\bar{\bar{M}} - \bar{\bar{Q}})/\bar{\bar{Q}} = \bar{\bar{J}}/\bar{\bar{Q}} = 1 + (\bar{\bar{J}} - \bar{\bar{Q}})/\bar{\bar{Q}}$, comme on peut le vérifier à partir des résultats du § 2.5° et du fait que l'on déduit de (17) que $\rho + (\bar{\bar{Q}} - 1)\sigma = 1$. Rajoutant la valeur propre triviale et égale à 1 à la somme précédente, l'on obtient la trace de $t_{1M}^{\ M}$ qui est égale à $\bar{\bar{M}}/\bar{\bar{Q}}$.

Remarques : 1) Soit H^M le sous espace de dimension $\bar{\bar{J}} - \bar{\bar{Q}}$ de R^M, engendré par les facteurs $\varphi^M = (\varphi^J, 0^Q)$ de t_{1MM} calculés à partir des facteurs non triviaux φ^J de t_{JJ} et K^M le sous-espace de dimension $\bar{\bar{Q}}$ engendré par les facteurs triviaux de t_{1MM} (sous-espace formé d'une part du facteur trivial δ^M relatif à la valeur propre 1, et d'autre part du sous-espace de dimension $\bar{\bar{Q}} - 1$ engendré par les facteurs de moyenne nulle et constants sur chaque M_q, sous-espace relatif à la valeur propre zéro). Les facteurs restants de t_{1MM} en nombre égal à $\bar{\bar{Q}}$, doivent être orthogonaux à H^M et K^M. Ecrivant qu'ils sont orthogonaux à H^M, on obtient des facteurs de la forme : $\varphi^M = (\{u^q\, \delta^{J}{}_q | q \in Q\}, v^Q)$ où $u^Q = \{u^q | q \in Q\}$ et v^Q sont des fonctions sur Q. Ecrivant que ces facteurs sont orthogonaux à K^M, i.e. de moyenne nulle sur chaque M_q, on obtient :

$$v^q/u^q = -(1 - \varepsilon)/\varepsilon$$

Le rapport v^q/u^q étant indépendant de q, nous poserons :

$v^q = v\psi^q$

$u^q = u\psi^q$

ψ^Q étant une fonction quelconque sur Q, et le rapport v/u étant égal à $-(1-\varepsilon)/\varepsilon$. Si ψ^Q est de norme 1$((1/\bar{\bar{Q}})\ \Sigma\ \{(\psi^q)^2 | q \in Q\} = 1)$ φ^M sera de variance 1 si u et v vérifient (19).

On obtient ainsi à partir d'un système $\{\psi^Q_\alpha | \alpha = 1,\bar{\bar{Q}}\}$ de fonctions orthonormées sur Q, dont la première est la fonction constante, les facteurs calculés au § 2.6° (où $\psi^Q = \psi^Q_1 = \delta^Q$) et au § 2.7° (où les fonctions ψ^Q sont centrées).

2) Si les relations (1) à (4) ne sont pas vérifiées, on peut encore obtenir tous les facteurs du tableau $t_{1_{MM}}$ à partir de constructions analogues à celles effectuées aux § 2.4°, 2.6° et 2.7°. Il faut alors noter que par la méthode du § 2.7°, on obtient deux couples (u_1, v_1) et (u_2, v_2) relatifs à des valeurs propres σ_1 et σ_2, qui sont des valeurs propres multiples d'ordre $\bar{\bar{Q}} - 1$ chacunes, et qu'en général, $u_1 \neq v_1$ et $\sigma_1 \neq 0$, sauf si les relations (1) à (4) sont vérifiées.

2.9° Pour déterminer les facteurs non triviaux de t_1 , commençons par calculer les deux facteurs non triviaux du tableau t associé, donné au § 2.3°.

Soit $\varphi^J = (\varphi^{J_q}, \varphi^{J_{q'}})$ un facteur de t, on a d'après (6) :

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{J_{q'}} \circ t^{J_q}_{J_{q'}} &= (\lambda - 1/2)\ \varphi^{J_q} \\ \varphi^{J_q} \circ t^{J_{q'}}_{J_q} &= (\lambda - 1/2)\ \varphi^{J_{q'}} \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

De plus φ^{J_q} et $\varphi^{J_{q'}}$ étant de moyenne nulle sur J_q et $J_{q'}$, on a puisque $t(q^+) = t(q^-) = t(q'^+) = t(q'^-) = 100$:

$$\varphi^{q^+} + \varphi^{q^-} = 0\ ; \qquad \varphi^{q'^+} + \varphi^{q'^-} = 0$$

φ^J est donc tel que :

$$\varphi^{q^+} = -\ \varphi^{q^-} = a\ ; \qquad \varphi^{q'^+} = -\ \varphi^{q'^-} = b \qquad (21)$$

Comme :

$$t^{J_q}_{J_{q'}}\left(\begin{smallmatrix} q^+ \\ q',+ \end{smallmatrix}\right) = t^{J_{q'}}_{J_q}\left(\begin{smallmatrix} q'^+ \\ q+ \end{smallmatrix}\right) = t^{J_q}_{J_{q'}}\left(\begin{smallmatrix} q^- \\ q',- \end{smallmatrix}\right) = t^{J_{q'}}_{J_q}\left(\begin{smallmatrix} q'^- \\ q- \end{smallmatrix}\right) = 1/10$$

$$t^{J_q}_{J_{q'}}\left(\begin{smallmatrix} q^+ \\ q',- \end{smallmatrix}\right) = t^{J_q}_{J_{q'}}\left(\begin{smallmatrix} q^- \\ q',+ \end{smallmatrix}\right) = t^{J_{q'}}_{J_q}\left(\begin{smallmatrix} q'^+ \\ q- \end{smallmatrix}\right) = t^{J_{q'}}_{J_q}\left(\begin{smallmatrix} q'^- \\ q+ \end{smallmatrix}\right) = 4/10$$

l'on déduit de (20) et (21) que :

$$(-\ 3/10)a = (\lambda - 1/2)b$$

$$(-\ 3/10)b = (\lambda - 1/2)a$$

d'où l'on tire :

$$a^2 = b^2$$

$$(\lambda - 1/2)^2 = (3/10)^2$$

On obtient ainsi pour facteurs de variance 1 de t :

si $a = -\ b = 1$: $\varphi_1^J = (\varphi_1^{q^+}, \varphi_1^{q^-}, \varphi_1^{q'^+}, \varphi_1^{q'^-}) = (1, -1, -1, 1)$
associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1/2-(-3/10) = 4/5$

si $a = b = 1$; $\varphi_2^J = (1, -1, 1, -1)$
associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1/2 - 3/10 = 1/5$

Calcul des facteurs de t_1.

Nous poserons : $\varphi^M = (\varphi^{q^+}, \varphi^{q^-}, \varphi^{q'^+}, \varphi^{q'^-}, \varphi^{q^\circ}, \varphi^{q'^\circ})$.

La loi marginale associée à t_1 est :

$$f_M = (1/10)\ (2, 2, 2, 2, 1, 1)$$

Facteurs construits à partir de ceux de t.

Ayant $\alpha = \beta = 0{,}1$; $\gamma = \varepsilon = 0{,}2$; $\zeta = 0{,}3$, $\bar{\bar{Q}} = 2$, ces facteurs sont d'après (9) relatifs à la valeur propre :

$$\mu = (14\ \lambda + 1)/16$$

d'où les deux facteurs de variance 1, et les valeurs propres associées

$$\varphi_1^M = (5/4)^{1/2}\ (1, -1, -1, 1, 0, 0)\ ; \qquad \mu_1 = 61/80$$

$$\varphi_2^M = (5/4)^{1/2}\ (1, -1, 1, -1, 0, 0)\ ; \qquad \mu_2 = 19/80$$

Facteur construit par la méthode du § 2.6°.

D'après (13) et (16), ce facteur s'écrit puisque $\varepsilon = 0{,}2$:

$\varphi^M = (1/2)(-1, -1, -1, -1, 4, 4)$, avec puisque $\bar{\bar{Q}} = 2$: $\rho = 11/16$.

Facteur construit par la méthode du § 2.7° ($\bar{\bar{Q}} - 1 = 1$) :

Prenant $\psi^q = -\ \psi^{q'} = 1$, on obtient d'après (17) et (19) :

$\varphi^M = (1/2)(-1, -1, 1, 1, 4, -4)$ avec $\sigma = 1 - \rho = 5/16$.

On a ainsi obtenu les $\bar{\bar{M}} - \bar{\bar{Q}} = 6 - 2 = 4$ facteurs non triviaux du tableau t_1.