LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

J. P. BENZÉCRI

Sur l'analyse des tableaux binaires associés à une correspondance multiple

Les cahiers de l'analyse des données, tome 2, nº 1 (1977), p. 55-71

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1977__2_1_55_0>

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. II - 1977 - n° 1 - p. 55-71

SUR L'ANALYSE DES TABLEAUX BINAIRES ASSOCIÉS A UNE CORRESPONDANCE MULTIPLE

[BIN. MULT.]

par J. P. Benzécri [1]

Par tableau multiple de nombres, on désigne communément la donnée d'une fonction numérique sur un produit fini d'ensembles finis. Sur un produit de deux ensembles seulement, on a le tableau rectangulaire, dit encore tableau binaire. On sait que l'analyse des correspondances extrait de façon ordonnée l'information contenue dans un tableau binaire de nombres positifs. Au delà du cas binaire, les tableaux multiples, ou tableaux n-aires (ternaires, quaternaires, etc.), se prêtent à divers traitements, dont aucun toutefois ne semble en épuiser l'analyse. L'objet de la présente note est d'exposer pour ces tableaux une nouvelle méthode découverte par L. Lebart à partir de cette remarque qu'à un questionnaire à Q questions mis sous forme disjonctive complète sont associés à la fois un tableau brut, qui est un tableau Q-aire, et un tableau binaire qui en est la traduction. La même règle de traduction donne à partir de tout tableau multiple un tableau de correspondance binaire dont l'analyse fournit des facteurs susceptibles de diverses interprétations qu'après L. Lebart nous exposerons ci-dessous.

1. *Forme disjonctive complète et produit fini d'ensembles finis* :

Soit $\{J_q \mid q \in Q\}$ une famille finie d'ensembles finis J_q, indicée par $q \in Q$. On note :

$$\cup \{J_q \mid q \in Q\} = J \quad ; \quad \Pi\{J_q \mid q \in Q\} = I.$$

Si certains des ensembles J_q coïncident entre eux, ou seulement s'ils ont des éléments en commun, il convient de préciser que J est une union disjointe où les ensembles J_q se retrouvent juxtaposés sans intersection chaque élément étant pris dans J autant de fois qu'il figure dans des ensembles J_q distincts. (De façon précise il convient de dire qu'on a des applications injectives ι_J^{Jq} de J_q dans J ; et que les $\iota_J^{Jq}(J_q)$ constituent une partition de J ; toutefois cette écriture ne sera que peu employée dans la suite).

Soit $j \in J$: on note $q(j)$ l'indice q de celui des J_q (ou des $\iota_J^{Jq}(J_q)$) auquel appartient j. On a donc : $j \in J_{q(j)}$. Soit $i \in I$: i est une suite, indicée par q, d'éléments des divers J_q ; on écrit $i(q)$ la q-ème coordonnée de i ; on a donc :

$$i = \{i(q) \mid q \in Q\} \quad ; \quad \forall q \in Q : i(q) \in J_q.$$

Au produit fini I est associé un tableau logique, ou tableau booléen, rectangulaire λ_{IJ}, défini comme suit :

$$\lambda(i,j) = \delta_{i(q(j))}{}^{j} \quad ;$$

en d'autres termes $\lambda(i,j) = 1$ si j est l'une des coordonnées (dont le rang est donc $q(j)$) de i ; et sinon $\lambda(i,j) = 0$. Voici par exemple le tableau λ_{IJ} correspondant au

(1) *Professeur, Laboratoire de Statistique. Université Pierre et Marie Curie, Paris.*

cas particulier suivant :

$$Q = \{1,2,3\} \; ; \; J_1 = \{1,2,3\} \; ; \; J_2 = \{1,2\} \; ; \; J_3 = \{1,2,3,4\} \; ;$$

dans la figure 1, on a disposé les lignes i dans l'ordre lexicographique des trois indices i(1), i(2), i(3) (i.e. d'abord les i tels que i(1) = 1, puis ceux tels que i(1) = 2...; et parmi les i tels que i(1)=1 d'abord ceux tels que i(2) = 1 etc. On a mis un blanc pour zéro.

J

J_1			J_2		J_3			
1			1		1			
1			1			1		
1			1				1	
1			1					1
1				1	1			
1				1		1		
1				1			1	
1				1				1
	1		1		1			
	1		1			1		
	1		1				1	
	1		1					1
	1			1	1			
	1			1		1		
	1			1			1	
	1			1				1
		1	1		1			
		1	1			1		
		1	1				1	
		1	1					1
		1		1	1			
		1		1		1		
		1		1			1	
		1		1				1

Figure 1 : Tableau logique λ_{IJ} associé à un produit fini d'ensembles finis.

On voit que toute ligne i a un poids total $\lambda(i) = \text{Card}\,Q$; tandis que le poids de la colonne j est :

$$\lambda(j) = \Pi\{\text{Card}\,J_q \mid q \in Q \; ; \; q \neq q(j)\}.$$

Supposons maintenant, pour fixer les idées sur une situation bien connue, que Q est l'ensemble des questions d'un questionnaire clos, J_q étant l'ensemble des seules attitudes possibles en face de la question q (réponses explicites, ou non-réponses).

Soit S un ensemble de sujets auxquels est soumis le questionnaire. Notons $\rho(s;q)$ l'élément de l'ensemble J_q qui est la réponse du sujet s à la question q ; le système des réponses fournies par le sujet s est un élément $\rho(s)$ du produit fini I :

$$\rho(s;q) \in J_q \; ; \; \{\rho(s,q) \mid q \in Q\} = \rho(s) \in I.$$

Aussi bien que par l'application ρ de S dans I, l'ensemble des réponses fournies par tous les sujets à toutes les questions peut être donné par un tableau de description logique k'_{SJ} :

$$\forall s \in S, \forall j \in J : k'(s,j) = \delta_{\rho(s;q(j))}{}^{j} \in \{0,1\}.$$

La ligne s du tableau k'_{SJ} , n'est autre que la ligne $i = \rho(s)$ du tableau λ_{IJ}. De par le principe d'équivalence distributionnelle, il est possible de grouper les lignes du tableau k'_{SJ} identiques entre elles, d'additionner en une seule ligne les lignes des sujets s ayant fourni un même système de réponse $\rho(s)$. Ainsi on passe du tableau k'_{SJ} à un tableau k'_{IJ} ainsi défini :

$$k(i) = \text{Card}\{s \mid s \in S \; ; \; \rho(s) = i\} \quad : \quad k'(i,j) = k(i) \times \lambda(i,j) \quad ;$$

La ligne i du tableau k'_{IJ} , n'est autre que la somme des k(i) lignes identiques qui dans k'_{SJ} portent les réponses des sujets s pour lesquels $\rho(s) = i$; éventuellement, pour certains i, $k(i) = 0$. L'analyse factorielle du tableau k'_{IJ} fournit les mêmes résultats que celle du tableau k'_{SJ} : valeurs propres λ_α et facteurs φ_α^J coïncident ; et les facteurs sur I et S s'identifient suivant la loi : $\varphi_\alpha^I(\rho(s)) = \varphi_\alpha^S(s)$.

La fonction à valeurs entières $k_I = \{k(i) \mid i \in I\}$, peut être considérée comme un tableau de contingence sur l'ensemble I produit des Card Q ensembles J_q ; donc comme un tableau multiple. Le tableau rectangulaire k'_{IJ} contient évidemment la même information que k_I : car k'_{IJ} est construit en multipliant les lignes de λ_{IJ} (tableau logique qui décrit seulement la structure produit de I) par les valeurs k(i), valeurs qui se retrouvent dans la loi marginale de k'_{IJ} :

$$\forall\, i \in I : k'_I(i) = \Sigma\{k'(i,j) \mid j \in J\} = \mathrm{Card}\, Q\, k_I(i).$$

(c'est pour éviter de confondre la donnée $k_I(i)$ et la loi marginale $k'_I(i)$ qu'on fait ici usage de l'indice prime). Donc, analyser le tableau rectangulaire k'_{IJ}, c'est analyser le tableau multiple k_I. Mais on doit prendre garde que pour appliquer à k'_{IJ} la formule de reconstitution des données à partir des facteurs, il faut, outre ceux-ci, connaître la loi marginale k'_I (ou k_I) : ainsi, pour la reconstitution des données, les facteurs ne servent à rien puisque toutes les données elles-mêmes (les k(i)) interviennent dans la formule! Cette remarque ne signifie pas que l'analyse d'un tableau mis sous forme disjonctive complète n'apporte rien que d'illusoire : la pratique quotidienne nous convainc du contraire! Mais elle nous avertit que l'analyse d'un tableau rectangulaire tel que k'_{IJ} n'épuise pas la structure du tableau multiple k_I. De façon précise on verra au § 2 que les facteurs mêmes issus de k'_{IJ} sont complètement déterminés par les lois marginales rectangulaires du tableau k_I : ils ne rendent donc aucun compte de ce qu'on peut appeler les interrelations d'ordre supérieur ou égal à 3 entre les ensembles J_q.

2. *Juxtaposition des lois marginales rectangulaires ; le tableau de C. Burt* :

Soit K une partie de Q ; $I_K = \Pi\{J_q \mid q \in K\}$; on note un élément de I_K comme : $i_K = \{i_K(q) \mid q \in K\}$. Le tableau k_{IK}, tableau projeté de k_I sur I_K, dit encore tableau marginal, est défini par :

$$\forall\, i_K \in I_K : k_{IK}(i_K) = \Sigma\{k_I(i) \mid i \in I \;;\; \forall\, q \in K : i(q) = i_K(q)\}$$

En particulier, dans l'exemple considéré, on a pour tout q dans Q un tableau marginal k_{Jq} qui, récapitule les réponses à la question q :

$$\forall\, j \in J_q : k_{Jq}(j) = \mathrm{Card}\{s \mid s \in S \;;\; \rho(s;q) = j\} \;;$$

et pour tout couple de questions q,q' on a le tableau des réponses conjointes :

$$\begin{aligned}\forall\, j \in J_q,\ \forall\, j' \in J_{q'} : k_{Jq \times Jq'}(j,j') &= \mathrm{Card}\{s \mid s \in S \;; \rho(s;q) = j \;;\; \rho(s;q') = j'\}\\ &= \Sigma\{k(i) \mid i \in I \;;\; i(q) = j \;;\; i(q') = j'\}\end{aligned}$$

Par juxtaposition(*) de tous ces tableaux rectangulaires on a le tableau carré k'_{JJ} défini ci-dessous :

$$\begin{aligned}\forall\, j,\ j' \in J : k'_{JJ}(j,j') &= \mathrm{Card}\{s \mid s \in S \;;\; \rho(s;q(j)) = j \;;\; \rho(s;q(j')) = j'\}\\ &= \Sigma\{k(i) \mid i \in I \;;\; i(q(j)) = j \;;\; i(q(j')) = j'\};\end{aligned}$$

L. Lebart propose d'appeler ce tableau : tableau de Burt, en hommage à un statisticien qui l'a considéré avant nous. On notera que dans ce tableau les blocs diagonaux $J_q \times J_q$ n'ont d'éléments non-nuls que sur la diagonale (car nul sujet s ne peut à la même question q répondre à la fois j et $j' \neq j$) et que $k'_{JJ}(j,j) = k_{Jq(j)}(j)$.

[Disons en bref que C. Burt construit le tableau k'_{JJ} et propose d'appeler facteurs les vecteurs propres de la matrice S_{JJ} de terme général $S_{jj'} = k'_{jj'}(k'_{jj}k'_{j'j'})^{-1/2}$ il obtient ainsi des facteurs ψ^J qui ne diffèrent des facteurs φ^J issus de

(*) *Sur l'analyse des tableaux de correspondances, carrés ou rectangulaires, construits par juxtaposition de tableaux de contingence, cf. Mme A. Leclerc (A. Brunet). Note INSERM. Bureau des études n° 151 ; (1971).*

l'analyse de correspondance, que par la transformation : $\psi^j = \varphi^j (k'_{jj})^{1/2}$; différence essentielle toutefois, puisque le facteur trivial constant et égal à 1, φ_o^J devient une fonction $\psi_o^j = (k'_{jj})^{1/2}$; et que le principe d'équivalence distributionnelle n'est plus satisfait].

Rappelons maintenant comment les facteurs issus de k'_{JJ} coïncident avec ceux issus de k'_{SJ} ou k'_{IJ}. Pour cela donnons de k'_{JJ} une nouvelle définition en fonction de k'_{SJ} ou k'_{IJ}.

$$\begin{aligned} k'_{JJ}(j,j') &= \mathrm{Card}\{s \mid s \in S \;;\; k'(s,j) = k'(s,j') = 1\} \\ &= \Sigma\{k'(s,j)\, k'(s,j') \mid s \in S\} \\ &= \Sigma\{k'(i,j)\, k'(i,j')/k(i) \mid i \in I\} \quad ; \end{aligned}$$

puis, afin de retrouver la définition des facteurs substituons aux divers tableaux de contingence les lois de probabilité p'_{SJ}, p'_{IJ}, p'_{JJ} qui leur sont proportionnelles :

$$p'_{sj} = \delta_{\rho(s;q(j))}{}^{j} / (\mathrm{Card}\, S \times \mathrm{Card}\, Q) \quad ; \quad p_i = p'_i = k(i)/\mathrm{Card}\, S \;;$$

$$p'_{ij} = k(i)\, \delta_{i(q(j))}{}^{j} / (\mathrm{Card}\, S \times \mathrm{Card}\, Q) = p_i\, \lambda(i,j)/\mathrm{Card}\, Q \qquad ;$$

$$\begin{aligned} p'_{jj'} &= \Sigma\{k'(s,j)\, k'(s,j') \mid s \in S\}/((\mathrm{Card}\, Q)^2 \mathrm{Card}\, S) \\ &= \Sigma\{p'_{sj}\, p'_{sj'}/p'_s \mid s \in S\} \\ &= \Sigma\{p'_{ij}\, p'_{ij'}/p'_i \mid i \in I\} = \Sigma\{p_i\, \lambda(i,j)\, \lambda(i,j')/(\mathrm{Card}\, Q)^2 \mid i \in I\} \;; \end{aligned}$$

(ici p'_I, loi marginale de p'_{SJ} ou de p'_{IJ} coïncide avec p_I loi sur l'ensemble produit définie par k_I ; mais on conserve l'indice prime pour distinguer entre $p_{JqJq'}$, loi marginale rectangulaire de p_I, et $p'_{JqJq'}$ sous-tableau de p'_{JJ} ; en effet $p_{JqJq'}$, a pour masse totale 1, tandis que chacun des $(\mathrm{Card}\, Q)^2$ blocs de p'_{JJ} a pour masse $1/(\mathrm{Card}\, Q)^2$; de même p_{Jq}, loi marginale de p_I est à distinguer de p'_{Jq}, sous-tableau issu de p'_J loi marginale de p'_{JJ} : p_{Jq} a pour masse totale 1, tandis que chacun des p'_{Jq} a pour masse $1/\mathrm{Card}\, Q$; voir figure 2).

Dans ces formules, on voit que p'_{IJ} et p'_{JJ} sont complètement déterminés à partir de la loi multiple p_I et du tableau logique λ_{IJ} associé au produit J. C'est pourquoi, comme nous l'avons annoncé d'abord les constructions introduites ici à partir d'un questionnaire et d'un ensemble S de sujets valent pour toute loi p_I donnée sur un produit I (ou plus généralement pour tout tableau k_I de nombres positifs ; lequel divisé par sa masse totale, donne une loi p_I). Aux réserves près formulées à la fin du § 1, on a dans l'analyse du tableau binaire p'_{JJ} une méthode d'analyse pour toute correspondance multiple p_I.

Les équations des facteurs s'écrivent par les calculs de transition usuels, (cf [Dis. χ^2 Corr.] TII B n° 5).

$$p'^{I}_{J} = \{p'^{i}_{j} \mid i \in I,\ j \in J\} \quad ; \quad p'^{i}_{j} = p'_{ij}/p'_i \;;$$

$$p'^{J}_{I} = \{p'^{j}_{i} \mid i \in I,\ j \in J\} \quad ; \quad p'^{j}_{i} = p'_{ij}/p'_j \;;$$

$$p'^{J}_{J} = \{p'^{j}_{j'} \mid j \in J,\ j' \in J\} \quad ; \quad p'^{j}_{j'} = p'_{jj'}/p'_j \;;$$

On voit d'après cette dernière formule que l'on a : $p'^{J}_{J} = p'^{I}_{J} \circ p'^{J}_{I}$, car :

$$p'^{j}_{j'} = \Sigma\{p'_{ij}\, p'_{ij'}/(p'_j\, p'_i) \mid i \in I\} = \Sigma\{p'^{i}_{j'}\, p'^{j}_{i} \mid i \in I\}.$$

L'identité des facteurs issus de p'_{JJ} et de p'_{IJ} est maintenant claire. En effet soit φ'^{J}_{α} un facteur issu de p'_{IJ} relatif à la valeur propre λ'_{α} : on a par définition :

$$\varphi'^{J}_{\alpha} \circ p'^{I}_{J} \circ p'^{J}_{I} = \lambda'_{\alpha}\, \varphi'^{J}_{\alpha} = \varphi'^{J}_{\alpha} \circ p'^{J}_{J} \quad ;$$

φ'^{J}_{α} est donc facteur de p'_{JJ} relatif à la valeur propre λ'^{2}_{α} car :

$$\varphi'^{J}_{\alpha} \circ p'^{J}_{J} \circ p'^{J}_{J} = (\lambda'_{\alpha})^{2}\varphi'^{J}_{\alpha}.$$

et on a ainsi tous les facteurs issus de p'_{JJ} puisque les facteurs issus de p'_{IJ} (en y comprenant éventuellement ceux relatifs à $\lambda = 0$) forment sur J un système complet de fonctions orthonormées.

2' NOTE : Analyse du tableau de *Burt*, et analyse du tableau rectangulaire :

Si on applique au tableau de contingence p'_{JJ} un programme usuel d'analyse de correspondance on aura sur les listes les valeurs propres $\Lambda'_{\alpha} = (\lambda'_{\alpha})^{2}$ et le facteur F'^{J}_{α} :

$$\forall\, j \in J : F'^{J}_{\alpha}(j) = \lambda'_{\alpha}\, \varphi'^{J}_{\alpha}(j).$$

L'analyse factorielle du tableau p'_{IJ} conduirait à des triples $(F'^{I}_{\alpha}, G'^{J}_{\alpha}, \lambda'_{\alpha})$ qu'il est facile de calculer en fonction des résultats figurant sur les listes issues de p'_{JJ} :

$$\lambda'_{\alpha} = \Lambda'^{1/2}_{\alpha} ;\ G'^{J}_{\alpha}(j) = \lambda'^{-1/2}_{\alpha}\, F'^{J}_{\alpha}(j) \ ;$$

$$F'^{I}_{\alpha}(i) = \Sigma\{p'^{i}_{j}\, G'^{J}_{\alpha}(j)\ \lambda'^{-1/2}_{\alpha} \mid j \in J\} = \lambda'^{-1/2}_{\alpha}\ \mathrm{Card}\,Q^{-1}\ \Sigma\{G'^{J}_{\alpha}(i(q)) \mid q \in Q\}.$$

Quand dans la suite nous traiterons des facteurs issus du tableau p'_{JJ}, il s'agira toujours des facteurs de variance 1, φ'^{J}_{α}, qui sont les mêmes pour p'_{JJ} et p'_{IJ} ; mais par valeur propre nous entendrons λ'_{α} telle que : $\varphi'^{J}_{\alpha} p'^{J}_{J} = \lambda'_{\alpha}\, \varphi'^{J}_{\alpha}$; ainsi, nous éviterons d'écrire en maintes places l'exposant fractionnaire 1/2 ou − 1/2 .

Il importe toutefois de noter que du point de vue de l'interprétation on doit se référer aux valeurs propres Λ'_{α} (données par l'analyse du tableau carré de Burt cf supra), plutôt qu'aux λ'_{α} (issues de l'analyse du tableau rectangulaire p'_{IJ}). En particulier les pourcentages d'inertie significatifs ne sont pas les $\tau'_{\alpha} = \lambda'_{\alpha} / (\Sigma \lambda'_{\beta})$ mais les $T'_{\alpha} = \Lambda'_{\alpha} / (\Sigma \Lambda'_{\beta})$. Comme la suite des Λ'_{α} décroît plus vite que celle des $\lambda'_{\alpha} = \Lambda'^{1/2}_{\alpha}$, les pourcentages T'_{α} ,calculés sur le tableau de Burt sont supérieurs aux τ'_{α} , calculés sur le tableau rectangulaire p'_{IJ} ; la considération des τ'_{α} donnerait une sous-estimation systématique de l'importance relative des facteurs interprétés ; donc une appréciation pessimiste de la qualité de l'analyse.

Reste à justifier notre préférence pour les Λ'_{α} ! Nous le ferons par référence au cas limite des correspondances continues. Dans beaucoup d'études pratiques en effet, le nombre de modalités des réponses à une question q résulte d'un choix arbitraire soit dans la manière dont les questions ont été posées soit souvent dans le codage sous forme disjonctive complète des données effectivement recueillies (sur ce codage, cf dans ce cahier l'article de B. Ghermani et C. & M. Roux , pp.115-118 ; le § 3.7.3 du texte Histoire, 5° partie, pp 30 - 31 ; et de nombreux exemples d'application). Il est clair qu'au lieu de demander à un sujet s'il approuve *tout à fait*, *en partie* , ou *nullement* telle thèse, on aurait pu lui demander s'il l'approuve *absolument*, *en général*, *en partie* ou *nullement* ; et *a fortiori* rien n'impose de considérer quatre modalités successives de la taille d'un pétale, plutôt que cinq ou six. Donc nous considérerons le cas modèle où les données de bases sont des grandeurs continues ; i.e. dans les notations posées au § 1, pour chaque question q, l'ensemble des réponses n'est pas un ensemble fini J_q ; mais un espace Y_q (par exemple un intervalle de la droite réelle) ; et la réponse $\rho(s,q)$ de chaque sujet s est un point de cet espace :

$\rho(s,q) \in Y_q$; $\rho(s) \in X = \Pi\{Y_q \mid q \in Q\}$, X généralisant I.

On peut maintenant reprendre les constructions faites ordinairement dans l'étude des correspondances continues (cf [Corr. Esp.] TII B n° 7 ; et la thèse de J. Ch. Naouri, citée là) en les complétant pour l'étude des correspondances multiples (comme il est fait dans la thèse de I. H. Kamal). Il reste possible de construire un tableau de Burt, avec au lieu d'un ensemble J union des J_q, un espace Y union des Y_q.

En pratique, à condition d'avoir un échantillon infini de sujets, il est avantageux de subdiviser chacun des Y_q en un ensemble J_q de cellules aussi fines que possible : on aboutit alors, à la limite, à des facteurs arbitrairement proches de ceux que donnerait l'analyse fonctionnelle (espaces de Hilbert etc ; cf [Corr. Esp.]) appliquée au tableau de Burt continu (sur $Y \times Y$). L'analyse du tableau de Burt passe bien à la limite, à la fois quant aux facteurs et quant aux valeurs propres.

Qu'en est-il pour le tableau p'_{IJ} ? Il y a certes passage à la limite pour les facteurs (qui ne diffèrent pas essentiellement de ceux issus du tableau de Burt) et les valeurs propres λ'_α (qui sont les racines carrées des Λ'_α); mais les taux τ'_α tendent systématiquement vers zéro ! car la trace $\Sigma \lambda'_\alpha$, qui comme on le démontre ci-dessous (§ 3.2) vaut (Card J/Card Q) - 1, tend vers l'infini quand s'affinent indéfiniment les subdivisions J_q (Card J = Σ_q Card $J_q \to \infty$). Le codage par classes infiniment fines entraîne l'existence d'une suite infinie de facteurs dont seuls les premiers sont interprétables, mais dont les derniers n'en cumulent pas moins une inertie infinie, si toutefois celle-ci est mesurée par $\Sigma \lambda'_\alpha$; d'où pour le quotient λ'_α/ trace une limite nulle.

Nous conclurons donc que quant aux facteurs il est dans la pratique indifférent d'analyser le tableau de Burt, ou le tableau p'_{IJ} : seule est modifiée l'échelle sur les axes. Mais les pourcentages d'inertie τ'_α calculés sur p'_{IJ} sont dépourvus de sens et sous-estiment indûment l'importance des facteurs interprétables ; il faut calculer les taux T'_α sur le tableau de Burt ($T'_\alpha = \Lambda'_\alpha/(\Sigma\Lambda'_\beta)$).

3. *Etude des facteurs d'après le tableau de Burt* :

A l'instar du tableau p'_{JJ}, formé de $(\mathrm{Card}\, Q)^2$ blocs $p'_{JqJq'}$, juxtaposés, un facteur φ'^J issu de p'_{JJ} peut être considéré comme une suite de fonctions φ'^{Jq} définies sur chacun des ensembles J_q. Et, puisque l'analyse d'une correspondance binaire $p_{J1 \times J2}$ fournit des couples de facteurs $(\varphi^{J1}, \varphi^{J2})$ de moyenne nulle et de variance 1, on est conduit à chercher si le système $\{\varphi'^{Jq} | q \in Q\}$, qui provient au fond de la correspondance multiple p_I, donnée sur le produit des J_q, ne possède pas des propriétés analogues. Nous verrons en suivant L. Lebart, dans quelle mesure cette conjoncture se réalise.

3.1 *Le rang du tableau de Burt* : l'ensemble des lignes (ou des colonnes) du tableau p'_{JJ} satisfait à des relations linéaires, conséquences faciles de la structure de blocs de p'_{JJ}. On a :

$$\forall\, q \in Q : \Sigma\{p'_{Jj} | j \in J_q\} = (\mathrm{Card}\, Q)^{-1}\, p'_J$$

(où p'_J n'est autre, on l'a dit, que la suite des p_{Jq} juxtaposés divisés par Card Q) ; soit un système de (Card Q -1) relations linéaires et homogènes indépendantes entre les colonnes. Le rang du tableau p'_{JJ} est donc au plus égal à Card J - (Card Q -1) ; et la valeur propre zéro a une multiplicité au moins égale à Card Q -1. Ce fait, joint à l'existence du facteur trivial relatif à la valeur propre 1 explique que L. LEBART puisse réduire l'analyse du tableau p'_{JJ} de dimension Card J x Card J, à la diagonalisation d'un tableau carré (Card J - Card Q) (Card J - Card Q) ; nous y reviendrons.

Les relations entre colonnes de p'_{JJ} se retrouvent entre colonnes de p'^{J}_{J} ; de $p'^{j}_{J} = p'_{Jj}/p'_{j}$ et $p'_{j} = p_{j}/\mathrm{Card}\,Q$, il vient :

$$\forall q \in Q : \Sigma\{p_j\, p'^{j}_{J} \mid j \in J_q\} = p'_J .$$

Ce qui en termes géométriques s'exprime ainsi : dans le nuage J associé à la correspondance p'_{JJ}, le sous-nuage J_q affecté du système des masses p'_{Jq} (ou, du système p_{Jq} qui lui est proportionnel) a pour centre de gravité le centre même p'_J du nuage tout entier. On a donc pour tout facteur F'_α (coordonnée du nuage dans le système des axes principaux d'inertie) autre que le facteur trivial :

$$\forall q \in Q : \Sigma\{p_j\, F'_\alpha(j) \mid j \in J_q\} = 0 = \lambda'_\alpha\, \Sigma\{p_j\, \varphi'^{J}_\alpha(j) \mid j \in J_q\}.$$

$$p'_{JJ} = (\mathrm{Card}\,Q)^{-2} \times \begin{array}{c|c|c|c} J_1 & J_2 & J_3 & \cdots \\ \hline p_{J_1J_1} & p_{J_1J_2} & p_{J_1J_3} & \cdots \\ p_{J_2J_1} & p_{J_2J_2} & p_{J_2J_3} & \cdots \\ p_{J_3J_1} & p_{J_3J_2} & p_{J_3J_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \quad ; \quad p'^{J}_{J} = (\mathrm{Card}\,Q)^{-1} \times \begin{array}{c|c|c|c} J_1 & J_2 & J_3 & \cdots \\ \hline \delta^{J_1}_{J_1} & p^{J_2}_{J_1} & p^{J_3}_{J_1} & \cdots \\ p^{J_1}_{J_2} & \delta^{J_2}_{J_2} & p^{J_3}_{J_2} & \cdots \\ p^{J_1}_{J_3} & p^{J_2}_{J_3} & \delta^{J_3}_{J_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Figure 2: la structure de blocs du tableau de C. Burt et du tableau de transition associé à celui-ci.

Le facteur φ'^{Jq}_α (facteur de variance 1 restreint à J_q) est lui-même centré (de moyenne nulle pour le système des poids p_j) à la condition que λ'_α soit non-nul: On trouve ainsi pour les systèmes de fonctions $\{\varphi'^{Jq}_\alpha \mid q \in Q\}$ l'une des propriétés des couples de fonctions $\{\varphi^{J1}_\alpha, \varphi^{J2}_\alpha\}$ qu'on extrait d'ordinaire d'une correspondance binaire. En revanche les φ'^{Jq}_α ne sont pas en général de variance 1 ; excepté si $\mathrm{Card}\,Q = 2$, cas où l'analyse de p'_{JJ} fournit, on le verra au § 3.3, les mêmes facteurs que celle du tableau rectangulaire $p_{J1J2} = p_I$.

3.2 *Structure de bloc du tableau de transition* p'^{J}_{J} : à un coefficient $\mathrm{Card}\,Q^{-1}$ près, les blocs $p'^{Jq'}_{Jq}$ du tableau p'^{J}_{J} ne sont autres que les transitions $p^{Jq'}_{Jq}$ associées aux lois marginales rectangulaires $p_{JqxJq'}$; les blocs diagonaux étant les matrices identité δ^{Jq}_{Jq}. On voit donc que le tableau p'^{J}_{J} a pour trace (somme des éléments diagonaux) $\mathrm{Card}\,J/\mathrm{Card}\,Q$; si on retranche la valeur propre 1 relative au facteur trivial il reste pour somme des autres valeurs propres $(\mathrm{Card}\,J/\mathrm{Card}\,Q) - 1$. Plus précisément, on peut montrer, cf [Corr. Esp.] TII B n° 7 § 5.8, que chaque réponse j apporte à l'inertie du tableau p'_{SJ} ou p'_{IJ} une contribution $((1/\mathrm{Card}\,Q) - p'_j)$; d'où il résulte que l'ensemble J_q des issues à une question q apporte une contribution totale

$(\mathrm{Card}\, J_q - 1)/\mathrm{Card}\, Q$; d'où pour l'ensemble J tout entier la contribution globale $(\mathrm{Card}\, J/\mathrm{Card}\, Q)-1$, apparue ici comme trace de p'^{J}_{J}). L'équation des facteurs $\varphi'^{J}_{\alpha} \circ p'^{J}_{J} = \lambda'_{\alpha}\, \varphi'^{J}_{\alpha}$ peut s'écrire en distinguant les blocs de p'^{J}_{J} et les segments successifs φ'^{Jq}_{α} de φ'^{J}_{α} :

$$\forall\, q \in Q : \ (\mathrm{Card}\, Q \times \lambda'_{\alpha} - 1)\ \varphi'^{Jq}_{\alpha} = \Sigma\{\varphi'^{Jq'}_{\alpha}\ p^{Jq}_{Jq'} \mid q' \in Q\ ;\ q' \neq q\} \ ;$$

formule où on a pris garde que $p'^{Jq}_{Jq} = (\mathrm{Card}\, Q)^{-1}\ \delta^{Jq}_{Jq}$.

On a dit plus haut que les facteurs non-triviaux φ'^{J}_{α} sont centrés (i.e. de moyenne nulle) sur chacun des J_q. Les autres facteurs, au contraire, sont constants sur chacun des J_q. On a d'une part le facteur trivial φ'^{J}_{o} constant et égal à 1 sur J ; d'autre part le sous-espace propre, de dimension $\mathrm{Card}\, Q - 1$, relatif à la valeur propre zéro. On vérifie sur l'équation qu'un facteur φ'^{J} de ce sous-espace est défini par la donnée d'une fonction φ'^{Q} sur Q de moyenne nulle et variance 1 :

$$\varphi'^{Q} = \{\varphi'^{q} \mid q \in Q\} \ ;\ \Sigma\{\varphi'^{q} \mid q \in Q\} = 0\ ; \Sigma\{(\varphi'^{q})^2 \mid q \in Q\} = \mathrm{Card}\, Q \ ;$$

$$\forall\, j \in J : \varphi'^{J}(j) = \varphi'^{q(j)} .$$

Ainsi l'espace R^J des fonctions sur J est scindé en deux sous-espaces orthogonaux : l'un, le sous-espace des fonctions constantes sur chacun des J_q ne contient que des facteurs triviaux ; l'autre, sous-espace H^J des fonctionc centrées sur chacun des J_q , contient les facteurs proprement dits. Imposer *a priori* la contrainte $\varphi^J \in H^J$ permettra, en faisant choix d'une base dans H^J, de mettre en oeuvre l'idée annoncée plus haut (cf § 3.5) : réduire l'analyse factorielle à la diagonalisation d'une matrice carrée $(\mathrm{Card}\, J - \mathrm{Card}\, Q)(\mathrm{Card}\, J - \mathrm{Card}\, Q)$.

3.3 *Réduction du cas binaire à l'analyse de correspondance* : considérons le cas particulier où $\mathrm{Card}\, Q = 2$; $I = J_1 \times J_2$. On a pour les facteurs le système suivant :

$$(2\lambda' - 1)\ \varphi'^{J1} = \varphi'^{J2} \circ p^{J1}_{J2}$$

$$(2\lambda' - 1)\ \varphi'^{J2} = \varphi'^{J1} \circ p^{J2}_{J1} \quad ;$$

Si donc $(2\lambda' - 1)$ est strictement positif, $(\varphi'^{J1}, \varphi'^{J2})$ est un couple de facteurs associés issus du tableau rectangulaire p_{J1xJ2} et relatif à la valeur propre $\lambda = (2\lambda' - 1)^2$; si $(2\lambda' - 1)$ est négatif, $(\varphi'^{J1}\ ,\ -\ \varphi'^{J2})$ est un couple de facteurs associés issus de p_{J1xJ2} et relatif à la valeur propre $\lambda = (2\lambda' - 1)^2$. Ainsi à un facteur $(\varphi^{J1}_{\alpha}, \varphi^{J2}_{\alpha})$ issu de p_{J1xJ2} et relatif à λ_{α} correspondent pour p'_{JJ} deux facteurs $\varphi'^{J}_{\alpha+}$ et $\varphi'^{J}_{\alpha-}$:

$$\varphi'^{J}_{\alpha+} : \varphi'^{J1}_{\alpha+} = \varphi^{J1}_{\alpha} \ ;\ \varphi'^{J2}_{\alpha+} = \varphi^{J2}_{\alpha} \quad ;\quad \lambda'_{\alpha+} = (1 + (\lambda_{\alpha})^{1/2})/2$$

$$\varphi'^{J}_{\alpha-} : \varphi'^{J1}_{\alpha-} = \varphi^{J1}_{\alpha} \ ;\ \varphi'^{J2}_{\alpha-} = -\varphi^{J2}_{\alpha} \quad ;\quad \lambda'_{\alpha-} = (1 - (\lambda_{\alpha})^{1/2})/2$$

($\varphi'^{J}_{\alpha+}$ et $\varphi'^{J}_{\alpha-}$ sont, comme d'usage, chacun déterminés au signe près).

Appliquons-nous à dénombrer complètement les facteurs issus de p'_{JJ} . Supposons pour fixer les notations que $\mathrm{Card}\, J_1 < \mathrm{Card}\, J_2$. De p_{J1xJ2} sont issus $\mathrm{Card}\, J_1$ facteurs ; parmi lesquels le facteur constant et égal à 1, φ_o . Ces facteurs donnent 2 $\mathrm{Card}\, J_1$ facteurs $\varphi'^{J}_{\alpha+}$ et $\varphi'^{J}_{\alpha-}$ issus de p'_{JxJ} ; parmi ceux-ci, φ'^{J}_{o+} est le facteur trivial constant et égal à 1 ; tandis que φ'^{J}_{o-}, qui vaut +1 sur J_1 et -1 sur J_2, est le facteur trivial relatif à $\lambda'_{o-} = 0$ associé selon les notations du & 3.2, à $\varphi'^{Q} = \{1, -1\}$. Reste à trouver $(\mathrm{Card}\, J_2 - \mathrm{Card}\, J_1)$ facteurs issus de p'_{JJ} : ceux-ci nous sont fournis par les fonctions sur J_2 orthogonales à tous les facteurs φ^{J2}_{α} ; i.e. par les fonctions φ^{J2} telles que $\varphi^{J2} \circ p^{J1}_{J2} = 0$. A une telle fonction correspond sur J une fonction φ'^{J} définie par $\varphi'^{J1} = 0$, $\varphi'^{J2} = \varphi^{J2}$; on vérifie que φ'^{J} est un facteur issu de p'_{JJ} relatif à la valeur propre (1/2).

3.4 *Un cas de réduction d'une correspondance multiple à une correspondance binaire* : Soit p_I une correspondance ternaire : $Q = \{1,2,3\}$. Supposons qu'il y ait indépendance entre J_1 et J_2 (autrement dit entre les questions 1 et 2) au sens suivant : $p_{J1xJ2} = p_{J1} \times p_{J2}$. Alors l'analyse du tableau de Burt p'_{JxJ} issu de p_I équivaut à l' analyse du tableau pr'_{JxJ} issu d'une certaine loi binaire pr_{Ir} décrite ci-dessous : Notons :

$$J_{12} = J_1 \cup J_2 \; ; \; I_r = J_{12} \times J_3 \; ; \; J = J_1 \cup J_2 \cup J_3 = J_{12} \cup J_3 \; ;$$

$$\forall\, j \in J_1 \; , \; \forall\, y \in J_3 : pr_{Ir}(j,y) = (1/2)\; p_{J1xJ3}(j,y) \; ;$$

$$\forall\, j \in J_2 \; , \; \forall\, y \in J_3 : pr_{Ir}(j,y) = (1/2)\; p_{J2xJ3}(j,y) \; ;$$

Autrement dit, le tableau pr_{Ir} est construit en superposant les deux lois marginales rectangulaires p_{J1J3} et p_{J2J3}, le coefficient (1/2) étant nécessaire pour que pr_{Ir} ait masse totale 1. Soit $\varphi'^{J} = (\varphi'^{J1} \; ; \; \varphi'^{J2} \; ; \; \varphi'^{J3})$ un facteur non-trivial (i.e. centré sur chacun des J_q) issu de p'_{JJ} relatif à λ' ; alors pr'_{JJ} admet $\varphi r'^{J}$:

$$\varphi r'^{J} = (\alpha\varphi'^{J1} \; ; \alpha\varphi'^{J2} \; ; \; \beta\varphi'^{J3}) \quad ; \; \alpha = (4/3)^{1/2}; \quad \beta = (2/3)^{1/2} \, ,$$

pour facteur relatif à la valeur propre $\lambda r'$: $(2\lambda r' - 1) = 2^{-1/2}(3\lambda' - 1)$.

On peut en se guidant sur la figure 3, vérifier ce que nous venons d'annoncer. Ci-dessous, nous démontrerons un résultat plus général : ce nous sera un exercice dans l'emploi de notations descriptives complètes, exercice précieux pour la conception des algorithmes.

Soit K une partition de Q en C_K classes k à l'intérieur desquelles les questions soient deux à deux indépendantes c'est à dire que l'on ait, en notant k(q) la classe dans K d'un élément q de Q :

$$Q = \cup \{k \in K\} \; ; \; k \neq k' \Leftrightarrow k \cap k' = \emptyset \; ; \; \mathrm{Card}\, K = C_K \; ; \; \mathrm{Card}\, k = C_k \; ;$$

$$\forall\, q, q' \in Q : \; ((k(q) = k(q')) \wedge (q \neq q')) \Rightarrow \; p_{JqJq'} = p_{Jq}\, p_{Jq'} \; .$$

Alors sous l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :

1°) $C_K = 2$; 2°) $\forall\, k, k' \in K \; : \; C_k = C_{k'}$,

l'analyse du tableau de Burt p'_{JJ} associé à p_I équivaut à celle du tableau de Burt pr'_{JJ} associé à une loi réduite pr_{IK} sur un produit de C_K ensembles J_k.

De façon précise notons :

$$\forall\, k \in K : J_k = \cup\,\{J_q \mid q \in k\} \;;\; P = \Pi\{C_k \mid k \in K\} = \mathrm{Card}\, Q_K \;;$$

$$Q_K = \Pi\{k \mid k \in K\} \;;\; q_K = \{q_K(k) \mid k \in K\} \in Q_K \;;\; q_K(k) \in k \;;$$

$$I_K = \Pi\{J_k \mid k \in K\} \;;\; i_K = \{i_K(k) \mid k \in K\} \in I_K \;;\; i_K(k) \in J_k .$$

Le tableau pr_{IK} est construit par juxtaposition des lois marginales d'ordre C_K de la loi p_I (lois projetées de p_I sur un produit I_{qK} de C_K des ensembles J_q appartenant chacun à une classe différente) :

$$\forall\, i_K \in I_K : pr_{IK}(i_K) = (1/P)\; p_{qK(i_K)}(i_K) \;;$$

$$q_K(i_K) = \{q(i_K(k)) \mid k \in K\} \in Q_K \;;$$

$$p_{qK(i_K)} = \text{projetée de } p_I \text{ sur } \Pi\{J_{q(i_K(k))} \mid k \in K\} :$$

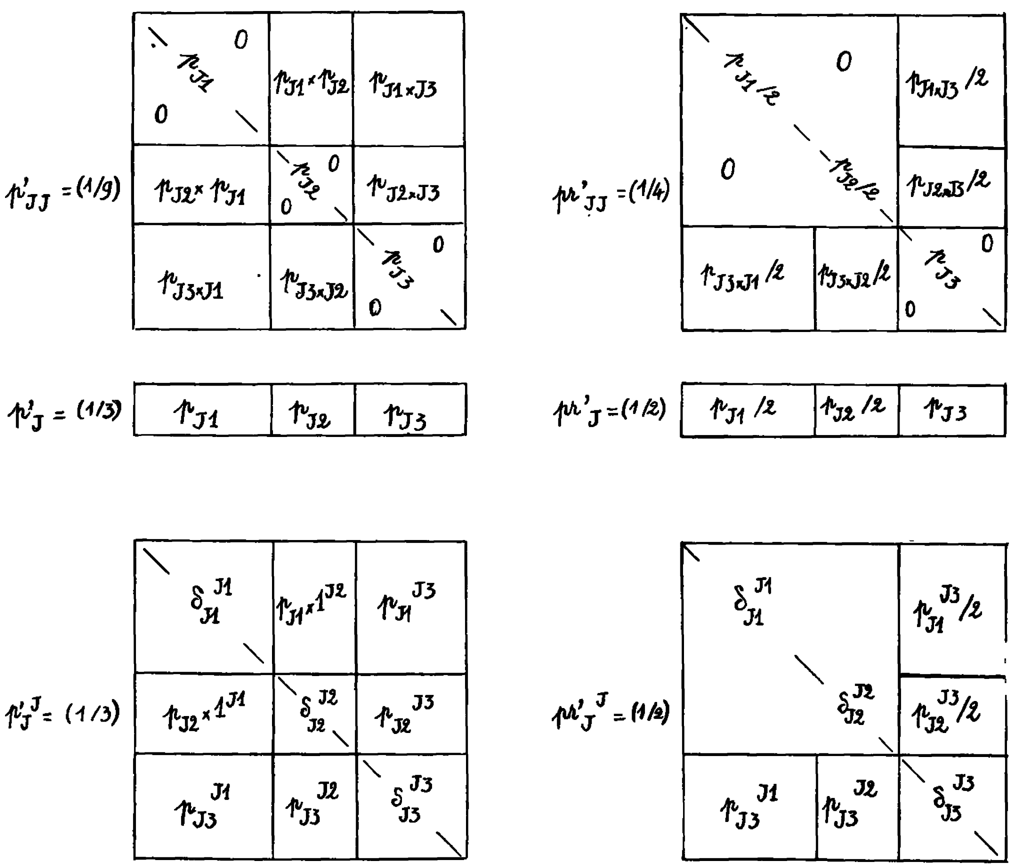

Figure 3. La structure de blocs des tableaux p'_{JJ}, pr'_{JJ} et des tableaux de transition à eux associés

Dans cette formule, le facteur $(1/P)$ est introduit pour que pr_{IK} ait masse totale 1 : en effet, le produit I_K est formé d'un ensemble, indicé par Q_K , de P blocs, car suivant chaque facteur J_k se juxtaposent C_k ensembles J_q $(q \in k)$.

Comparons maintenant l'équation à laquelle satisfait un facteur φ'^{J} non trivial (i.e. de moyenne nulle sur chacun des J_q) relatif à λ', issu de p'_{JJ} à l'équation d'un facteur non trivial $\varphi r'^{J}$ issu de pr'_{JJ} (tableau de Burt issu de pr_{IK}) et relatif à $\lambda r'$. Chacun de ces facteurs est une juxtaposition de segments successifs fonctions définies sur les J_q (ou les J_k qui sont des sommes de J_q), ce que nous noterons comme une somme directe ; (si Q était infini, il serait juste de distinguer entre R^J, espace de fonctions, qui est un produit direct de R^{Jq} et R_J espace de mesure qui est une somme directe des R_{Jq} ; mais ici, il est possible sans risque d'erreur, de n'user que du seul signe $\oplus$ de la somme directe) :

$$\varphi'^{J} = \oplus\{\varphi'^{Jq} \mid q \in Q\} \quad ; \quad \varphi r'^{J} = \oplus\{\varphi'^{Jk} \mid k \in K\}$$

$$\varphi r'^{Jk} = \oplus\{\varphi r'^{Jq} \mid q \in k\}.$$

Les composantes de φ'^{J} satisfont au système suivant :

$$\forall q \in Q : (C_Q \lambda' - 1)\ \varphi'^{Jq} = \Sigma\{\varphi'^{Jq'}\ p_{Jq'}{}^{Jq} \mid q' \in Q \ ; \ q' \neq q\} \ ;$$

$$\forall q \in Q : (C_Q \lambda' - 1)\ \varphi'^{Jq} = \Sigma\{\Sigma\{\varphi'^{Jq'}\ p_{Jq'}{}^{Jq} \mid q' \in k'\} \mid k' \in K \ ; \ k' \neq k(q)\} \ ;$$

Dans le dernier système on a supprimé les termes $\varphi'^{Jq'} p_{Jq'}{}^{Jq}$, pour $q' \in k(q)$, parce que ces termes sont nuls pour un facteur non trivial : en effet, q et q' étant indépendants on a :

$$\forall j \in Jq \ , \ \forall j' \in Jq' : p_{JqJq'}(j,j') = p_{Jq}(j)\ p_{Jq'}(j') \ ;$$

$$p_{Jq'}{}^{Jq}(j',j) = p_{JqJq'}(j,j') / p_{Jq}(j)$$

$$= p_{Jq'}(j') \ ;$$

ce qu'on peut écrire : $p_{Jq'}{}^{Jq} = p_{Jq'} \otimes 1^{Jq}$ (où 1^{Jq} est la fonction constante 1 sur Jq) ; et $\varphi'^{Jq'} p_{Jq'}{}^{Jq}$ est nul parce que $\varphi'^{Jq'}$ est de moyenne nulle.

Les composantes de $\varphi r'^{J}$ satisfont au système suivant :

$$\forall k \in K : (C_K \lambda r' - 1)\ \varphi r'^{Jk} = \Sigma\{\varphi r'^{Jk'} pr_{Jk'}{}^{Jk} \mid k' \in K \ ; \ k' \neq k\} \ ;$$

$$\forall q \in Q : (C_K \lambda r' - 1)\ \varphi r'^{Jq} = \Sigma\{\Sigma\{\varphi r'^{Jq'} pr_{Jq'}{}^{Jq} \mid q' \in k'\} \mid k' \in K \ ; \ k' \neq k(q)\} \ ;$$

Dans le dernier système on a tenu compte de la structure de bloc des transitions $pr_{Jk'}{}^{Jk}$. On a :

$$pr_{JkJk'} = \oplus \ \{(C_k\ C_{k'})^{-1}\ p_{JqJq'} \mid q \in k, \ q' \in k'\} \ ;$$

$$pr_{Jk} = \oplus \ \{(C_k)^{-1}\ p_{Jq} \mid q \in k\} \ ;$$

$$pr_{Jk'}{}^{Jk} = \oplus \ \{(C_{k'})^{-1} p_{Jq'}{}^{Jq} \mid q \in k, \ q' \in k'\} = \{pr_{Jq'}{}^{Jq} \mid q' \in k', \ q \in k\} \ ;$$

formules où pr_{Jk} et $pr_{JkJk'}$ désignent respectivement les lois marginales simples et rectangulaires de la loi produit pr_{IK}. Une fois calculés les blocs $pr_{Jq'}{}^{Jq}$ des $pr_{Jk'}{}^{Jk}$, le système devient :

$$\forall q \in Q : (C_K \lambda r' - 1)\varphi r'^{Jq} = \Sigma\{\Sigma\{(C_{k(q')})^{-1} \varphi r'^{Jq'} p_{Jq'}{}^{Jq} \mid q' \in k'\} \mid k' \in K ; k' \neq k(q)\}.$$

On peut maintenant tenter d'identifier les fonctions $\varphi r'^{J}$ et φ'^{J} d'après les systèmes auxquels elles satisfont, en supposant que sur chacun des J_K, $\varphi r'^{J}$ et φ'^{J} sont proportionnelles, i.e. qu'on a un système de nombres $\{\beta_k | k \in K\}$ et que : $\forall q \in Q : \varphi r'^{Jq} = \beta_{k(q)} \varphi'^{Jq}$. Il vient :

$$\forall k, k' \in K : (k' \neq k) \Rightarrow \beta_k (C_K \lambda r' - 1)/(C_Q \lambda' - 1) = \beta_{k'}/C_{k'}$$

Si $(3 \leq C_K)$, il résulte de ce système que :

$$\forall k \in K : \beta_k (C_K \lambda r' - 1)/(C_Q \lambda' - 1) = \beta_k/C_k$$

Le système ne peut donc être satisfait que si tous les C_k sont égaux entre eux (2° condition ci-dessus), donc égaux à C_Q/C_K ; et il l'est en effet en choisissant $\lambda r'$ d'après l'équation :

$$(C_K \lambda r' - 1)/(C_Q \lambda' - 1) = C_K/C_Q.$$

et prenant tous les β_k égaux à 1 : $\varphi r'^{J}$ coïncide alors avec φ'^{J}.

Si $C_K = 2$, $k = \{1,2\}$, le système peut être satisfait quels que soient C_1 et C_2 en posant :

$$(2 \lambda r' - 1) = (C_Q \lambda' - 1)/(C_1 C_2)^{1/2} \quad ; \quad \beta_k = (2 C_k / C_Q)^{1/2} \quad ;$$

dans ces formules, β_1 et β_2, qui doivent être proportionnels respectivement à $C_1^{1/2}$ et $C_2^{1/2}$, ont été normalisés afin que $\varphi r'^{J} = (\beta_1 \varphi'^{J1} \oplus \beta_2 \varphi'^{J2})$ ait pour variance 1.

On notera qu'outre les facteurs venus des facteurs non triviaux de p'_{JJ}, pr'_{JJ} possède des facteurs qui sont constants sur chacun des J_q. Ce sont :

a) le facteur constant 1, relatif à la valeur propre 1

b) les $C_K - 1$ facteurs relatifs à la valeur propre O, définis par une fonction φ^K de moyenne nulle sur K : $\forall j \in J_k : \varphi r'^{J}(j) = \varphi^K(k)$.

c) C_K groupes, chacun de $C_k - 1$ facteurs, relatifs à la valeur propre $1/C_K$, et définis chacún par une fonction φ^k de moyenne nulle sur l'une des classes k :

$$\forall q \in k, \forall j \in J_q : \varphi r'^{J}(j) = \varphi^k(q) \quad ; \quad \forall j \in J - J_k : \varphi r'^{J}(j) = 0.$$

Il va sans dire que le cas d'une correspondance ternaire, signalé au début du § 3.4 d'après L. Lebart, est celui où : $K = \{1,2\}$; $C_1 = 2$; $C_2 = 1$.

3.5 <u>*Analyse par diagonalisation d'une matrice de rang (Card J - Card Q)*</u> :

La transition p'^{J}_{J} définit un endomorphisme de l'espace vectoriel R^J des fonctions sur J. A la recherche des facteurs, seule importe la restriction de cet endomorphisme au sous-espace H^J des fonctions sur J qui ont moyenne nulle sur chacun des J_q. Pour étudier cette restriction, on fait choix dans H^J, muni de la norme associée à la loi p'_J, d'une base orthonormée $\{\theta^J_\mu | \mu \in M\}$ (où M est un ensemble d'indices : $\mathrm{Card}\,M = \mathrm{Card}\,J - \mathrm{Card}\,Q$) ; on calcule les produits scalaires $s_{\mu\mu'} = \langle \theta^J_\mu\, p'^{J}_{J}, \theta^{J}_{\mu'} \rangle = s_{\mu'\mu}$; on diagonalise la matrice s_{MM} ; à un vecteur propre $\{u_\mu | \mu \in M\}$ relatif à la valeur propre λ correspond le facteur $\varphi^J = \Sigma\{u_\mu\, \theta^J_\mu | \mu \in M\}$ relatif à la même valeur propre.

Soient θ^J, ψ^J deux fonctions sur J ; on a :

$$< \theta^J \, p'^J_J \, , \, \psi^J >_{p'J} = \Sigma\{\Sigma\{\theta^j \, p'^{j'}_j \, | j \in J\} \, p'_{j'} \, \psi^{j'} | j' \in J\} \quad ;$$
$$= \Sigma\{\theta^j \, p'_{jj'} \, \psi^{j'} \, | \, j \in J, \, j' \in J\} \quad ;$$
$$= < \theta^J \circledast 1^J, 1^J \circledast \psi^J >_{p'JJ} \quad ;$$

où on a noté $\alpha^J \circledast \beta^J$ la fonction de deux variables γ^{JJ} : $\gamma^{jj'} = \alpha^j \; \beta^{j'}$ et où 1^J est la fonction constante et égale à 1 sur J.

Supposons maintenant que θ^J et ψ^J aient chacune leur support restreint à un seul bloc, J_q pour θ^J et $J_{q'}$ pour ψ^J (i.e. $q(j) \neq q \Rightarrow \theta^j = 0$; $q(j) \neq q' \Rightarrow \psi^j = 0$); il vient :

$$< \theta^J \, p'^J_J \, , \psi^J >_{p'J} = (\mathrm{Card}\, Q)^{-2} \, \Sigma\{\varphi^j \, \psi^{j'} \, p_{jj'} \, | \, j \in J_q \, , \, j' \in J_{q'}\}$$

où $p_{jj'} = p_{JqJq'}(j,j')$ est la probabilité de la paire (j,j') selon la loi marginale projetée de p_I sur $J_q \times J_{q'}$, et où on a fait usage des valeurs des blocs de p'_{JJ} portées sur la figure 2. Si les fonctions θ^J et ψ^J ont variance 1 sur J tout entier, elles ont variance Card Q sur leur support respectif :

$$\Sigma\{(\theta^j)^2 \, p_j \, | j \in J_q\} = \mathrm{Card}\, Q \, \| \theta^J \|^2_{p'J}$$

$$\Sigma\{(\psi^j)^2 \, p_j \, | j \in J_{q'}\} = \mathrm{Card}\, Q \, \| \psi^J \|^2_{p'J}$$

L'élément de matrice apparaît donc proportionnel à un coefficient de corrélation :

$$<\theta^J \, p'^J_J, \, \psi^J>_{p'J} = (\mathrm{Card}\, Q)^{-1} \|\theta^J\|_{p'J} \| \psi^J\|_{p'J} \quad \mathrm{Corr}(\theta^{Jq}, \, \psi^{Jq'})_{JqxJq'} \; ;$$

le coefficient de corrélation étant calculé sur $J_q \times J_{q'}$ suivant la loi marginale $p_{JqJq'}$.

On choisira donc dans H^J une base formée de fonctions θ^J_μ dont le support est restreint à un seul des J_q : le calcul des $s_{\mu\mu'}$ en sera facilité. Sur chaque J_q on prendra (Card $J_q - 1$) fonctions de base de moyenne nulle. Pour un tableau dédoublé (ce cas nous a été signalé par plusieurs statisticiens ; e.g. par S. Blumenthal, & Mme M.-F. Bara), où pour tout q : Card $J_q = 2$; $J_q = \{q_+ \, , \, q_-\}$, on aura une fonction θ^J_q par question avec :

$$\forall \, q' \in Q - \{q\} : \;\; \theta_q^{q'+} = \theta_q^{q'-} = 0 \quad ;$$

$$\theta_q^{q+} = r_q \, p_{q-} \quad ; \quad \theta_q^{q-} = - \, r_q \, p_{q+} \quad ;$$

où le coefficient de normalisation r_q est choisi tel que $\|\theta^J_q\|_{p'J} = 1$:

$$r_q = (p_{q+} \, p_{q-}/\mathrm{Card}\, Q)^{-1/2} \; ;$$

et p_{q+}, p_{q-} sont les probabilités de répondre oui et non à la question q. Le coefficient $s_{qq'} = < \theta^J_q \; p'^J_J \; , \theta^J_{q'} >$ est donné par la formule :

$$s_{qq'} = (\mathrm{Card}\, Q)^{-1} \Sigma\{p_{-\varepsilon} \, p'_{-\varepsilon'} \varepsilon \, \varepsilon' \, p_{\varepsilon\varepsilon'} | \varepsilon, \varepsilon' \in \{+,-\}\}/(p_+ p_- p'_+ p'_-)^{1/2} \quad ;$$

où on a noté : $p_\varepsilon = p_{q\varepsilon}$, $p'_\varepsilon = p_{q'\varepsilon}$, $p_{\varepsilon\varepsilon'} = p_{JqJq'}(q\varepsilon \, , \, q' \, \varepsilon')$.

Un autre cas usuel et qui mériterait de faire l'objet d'un programme, est celui des questions à trois issues oui, non, abstention : $J_q = \{q_+, q_-, q_o\}$; on a alors deux fonctions indépendantes ayant pour support J_q et pour moyenne 0 ; par exemple :

$$\theta_q^J : \theta_q^{q+} = r_q\, p_{q-} \;;\; \theta_q^{q-} = -\, r_q\, p_{q+} \;;\; \theta_q^{q_o} = 0 \;;$$

$$\theta_{q_o}^J : \theta_{q_o}^{q+} = \theta_{q_o}^{q-} = r_{q_o}\, p_{q_o} \;;\; \theta_{q_o}^{q_o} = -\, r_{q_o}(1 - p_{q_o}) \;,$$

où les coefficients de normalisation r_q et r_{q_o} sont donnés par les formules :

$$r_q = (p_{q+}\, p_{q-}(1-p_{q_o})/\mathrm{Card}\,Q)^{-1/2} \;;\; r_{q_o} = (p_{q_o}(1-p_{q_o})/\mathrm{Card}\,Q)^{-1/2} .$$

Remarque : les calculs qui précèdent ne requièrent pas qu'on traite un tableau de Burt, c'est à dire un tableau de correspondance carré issu d'un tableau p_{IJ} ou p_{SJ} mis sous forme disjonctive complète. Seule importe l'hypothèse qu'il y ait dégénérescence du rang. De façon précise, soit p_{SJ} un tableau de correspondance dont les colonnes se groupent en blocs complémentaires :

$$J = \cup \{J_q \mid q \in Q\} \;;$$

$$\forall s \in S, \forall q \in Q : \Sigma\{p_{sj} \mid j \in J_q\} = p_s\, \Sigma\{p_j \mid j \in J_q\}$$

(c'est le cas d'un tableau de notes avec leur complémentaire : $J_q = \{q+, q-\}$; cf [Liban 60], [Colombie], TII C n° 4, 6). Les facteurs non triviaux sont de moyenne nul- sur chacun des J_q :

$$\forall q \in Q : \Sigma\{\varphi_\alpha^j\, p_j \mid j \in J_q\} = 0$$

On peut dans l'espace H^J des fonctions satisfaisant à ce système de conditions choisir une base orthonormée de fonctions θ^J dont le support est restreint à un seul des J_q. En particulier si $J_q = \{q+, q-\}$ on posera :

$$\theta_q^J : \theta_q^{q+} = r_q\, p_{q-} \;;\; \theta_q^{q-} = -r_q\, p_{q+} \;;\; \theta_q^J(J - J_q) = 0$$

$$r_q = ((p_{q-} + p_{q+})\, p_{q+}\, p_{q-})^{-1/2}.$$

On prendra garde qu'ici, à l'encontre de ce qui était noté au début du § 3.5, les probabilités p_{q+}, p_{q-} sont relatives à J tout entier (non à J_q) et n'ont donc pas pour somme 1. Notons :

$$p_J^J = p_J^S \circ p_S^J \;;\; p_j^{j'} = p'_{jj'}/p_{j'} \;;$$

$$p'_{jj'} = \Sigma\{p_{sj}\, p_{sj'}/p_s \mid s \in S\} \;;\; p'_{JJ} = \{p'_{jj'} \mid j, j' \in J\}.$$

on a comme plus haut pour tout couple de fonctions θ^J, ψ^J :

$$\langle \theta^J p_J^J, \psi^J \rangle = \Sigma\{p'_{jj'}\, \theta^j\, \psi^{j'} \mid j, j' \in J\} .$$

A partir d'une base orthonormée $\{\theta_\mu^J \mid \mu \in M\}$, (norme $\Sigma\{(\theta_\mu^j)^2\, p_j \mid j \in J\} = 1$), on construit la matrice s_{MM} (qui n'admet pas pour les fonctions à support restreint J_q, $J_{q'}$ la même interprétation de corrélation que ci-dessus) : $s_{\mu\mu'} = \langle \theta_\mu^J p_J^J, \theta_{\mu'}^J \rangle$; et à un vecteur propre de s_{MM}, $u_M = \{u_\mu \mid \mu \in M\}$, $\Sigma\{|u_\mu|^2 \mid \mu \in M\} = 1$, correspond un facteur $\varphi^J = \Sigma\{u_\mu\, \theta_\mu^J \mid \mu \in M\}$.

4. *Propriétés extrémales des facteurs* : (*)

On sait que les facteurs issus d'une correspondance binaire usuelle p_{J1J2} peuvent être définis comme des couples de fonctions $(\varphi^{J1}, \varphi^{J2})$ le plus corrélées entre elles (cf Corr. Esp. TII B n° 7). On doit pour cela considérer les fonctions d'une variable φ^{J1} et φ^{J2} comme des fonctions de deux variables particulières, lesquelles peuvent s'écrire comme les composées $\varphi^{J1} \circ \pi_{J1}^{J1xJ2}$ et $\varphi^{J2} \circ \pi_{J2}^{J1xJ2}$ des fonctions données avec les applications projections du produit $J_1 \times J_2$ sur ses facteurs. On a alors, sous les conditions $\|\varphi^{J1}\|^2_{pJ1} = \|\varphi^{J2}\|^2_{pJ2} = 1$:

$$\mathrm{Corr}(\varphi^{J1}, \varphi^{J2}) = \langle \varphi^{J1} \circ \pi^{J1J2}_{J1}, \varphi^{J2} \circ \pi^{J1J2} \rangle_{pJ1J2} = \lambda^{1/2}$$

Au lieu de ce produit scalaire, on peut se proposer de rendre maxima la norme de la fonction moyenne des $\varphi \circ \pi$ car :

$$\|(\varphi^{J1} \circ \pi_{J1}^{J1J2} + \varphi^{J2} \circ \pi_{J2}^{J1J2})/2\|^2 = (1 + \mathrm{Corr}(\varphi^{J1}, \varphi^{J2}))/2.$$

Dans la recherche de ce maximum enfin, on peut affaiblir la condition que φ^{J1} et φ^{J2} aient variance 1, pour demander seulement que :

$$(\|\varphi^{J1}\|^2_{pJ1} + \|\varphi^{J2}\|^2_{pJ2})/2 = 1 \quad :$$

en effet, sous cette contrainte, le maximum de la norme de $(\varphi^{J1} \circ \pi + \varphi^{J2} \circ \pi)/2$ est atteint quand φ^{J1} et φ^{J2} ont même variance. Ainsi nous avons substitué à l'analyse factorielle d'une correspondance binaire, un problème extrémal qui se généralise immédiatement au cas d'une correspondance multiple quelconque, et fournit alors, comme l'a montré L. Lebart, les facteurs mêmes issus du tableau de Burt.

Reprenons les notations des §§ 1, 2, 3.1, 3.2. Rappelons que ι_J^{Jq} est l'application inclusion de J_q dans la somme directe J (cf § 1) et notons, de plus π_{Jq}^{I} la projection du produit I sur Jq. Soient $\varphi^J \in R^J$: les blocs successifs dont est composé φ^J peuvent s'écrire $\varphi^{Jq} = \varphi^J \circ \iota_J^{Jq}$. Chacune de ces fonctions d'une variable peut être considérée comme une fonction de Card Q variables, ou fonction sur I : $\varphi^J \circ \iota_J^{Jq} \circ \pi_{Jq}^I$. La moyenne de ces fonctions sur I est une fonction que nous noterons $\varphi \circ \iota_J^I$:

$$\varphi^J \circ \iota_J^I = \mathrm{Card}\, Q^{-1} \; \Sigma\{\varphi^J \circ \iota_J^{Jq} \circ \pi_{Jq}^I \mid q \in Q\} \;;$$

Si on considère les applications $\iota \circ \pi$ comme des transitions probabilistes particulières (cas déterministe cf Note Lim. TII B n° 1 § 5) on peut écrire que ι_J^I est également une transition, moyenne de celles-là :

$$\iota_J^I = \mathrm{Card}\, Q^{-1} \; \Sigma\{\iota_J^{Jq} \circ \pi_{Jq}^I \mid q \in Q\} \;;$$

cette transition associe au point i de I une mesure probabiliste sur J, ι_J^i , qui est faite de Card Q masses ponctuelles égales chacune à $\mathrm{Card}Q^{-1}$; (le total des masses étant bien 1) ; et placées aux points i(q) coordonnées de i :

$$\forall\, i \in I : \iota_J^i = \mathrm{Card}\, Q^{-1} \; \Sigma\{\delta_J^{i(q)} \mid q \in Q\}.$$

(*) *Les résultats de ce § ont été grandement généralisés par P. Cazes ; cf* [ ]

Quoiqu'il en soit de cet exercice de notations, la définition de la fonction $\varphi^J \iota_J^I$ doit être claire !

$$\forall i \in I : \varphi^J \iota_J^I (i) = \mathrm{Card}\, Q^{-1} \Sigma\{\varphi^J(i(q)) \mid q \in Q\}.$$

Le problème extrémal, proposé ci-dessus dans le cas binaire, peut s'énoncer maintenant dans le cas général d'une correspondance multiple p_I : maximiser $\|\varphi^J \iota_J^I\|^2_{pI}$ sous la contrainte $\|\varphi^J\|^2_{p'J} = 1$. C'est un problème classique dont nous rappellerons la solution avec d'autres notations:

Soit R^J muni de deux formes quadratiques, dont l'une ρ_{JJ} est définie positive et l'autre σ_{JJ} est quelconque. On note comme d'usage :

$$\rho_{JJ}(\varphi^J,\varphi^J) = \Sigma\{\rho_{jj'}\varphi^j\varphi^{j'} \mid j,j' \in J\};\ \sigma_{JJ}(\varphi^J,\varphi^J) = \Sigma\{\sigma_{jj'}\ \varphi^j\varphi^{j'} \mid j,j' \in J\}$$

La recherche du maximum de $\sigma(\varphi,\varphi)$ sous la contrainte $\rho(\varphi,\varphi) = 1$ équivaut à la recherche des vecteurs propres (de norme $\rho(\varphi,\varphi) = 1$ de la transition ω_J^J, ci-dessous ; les maximas de $\sigma(\varphi,\varphi)$ étant les valeurs propres λ :

$$\omega_J^J = \sigma_{JJ}\ (\rho^{-1})^{JJ}\ ;\quad \varphi^J \circ \omega_J^J = \lambda\varphi^J$$

(où on a noté $(\rho^{-1})^{JJ}$ la forme quadratique sur R_J dont la matrice est inverse de celle de ρ_{JJ} ; forme qui existe puisque ρ_{JJ} est définie).

Revenons aux notations propres à l'analyse de la correspondance multiple p_J. On a :

$$\rho_{JJ}(\varphi^J,\ \varphi^J) = \Sigma\{(\varphi^j)^2\ p'_j \mid j \in J\}\ ;\quad \rho_{jj'} = \delta_{jj'}\ p'_j$$

$$(\rho^{-1})^{JJ} = \{(\rho^{-1})^{jj'} \mid j,j' \in J\}\ ;\quad (\rho^{-1})^{jj'} = \delta_{jj'}/p'_j$$

$$\sigma_{JJ}(\varphi^J,\ \varphi^J) = \mathrm{Card}\, Q^{-2} \|\Sigma\{\varphi^{Jq} \circ \pi_{Jq}^{\ I} \mid q \in Q\}\|^2_{pI}\ .$$

$$= \mathrm{Card}\, Q^{-2}\Sigma\{\langle\varphi^{Jq}\ \pi_{Jq}^{\ I},\ \varphi^{Jq'}\ \pi_{Jq'}^{\ I}\rangle_{pI} \mid q,\ q' \in Q\}$$

Les produits scalaires partiels se calculent aisément d'après la loi marginale $p_{JqJq'}$ de p_I :

$$\langle\varphi^{Jq}\ \pi_{Jq}^{\ I},\ \varphi^{Jq'}\ \pi_{Jq'}^{\ I}\rangle_{pI} = p_{JqJq'}(\varphi^{Jq},\ \varphi^{Jq'})$$

$$= \Sigma\{\varphi^j\varphi^{j'}\ p_{JqJq'}(j,j') \mid j \in J_q\ ,\ j' \in J_{q'}\}.$$

On reconnaît alors dans σ_{JJ} la structure de blocs de p'_{JJ}. On a donc :

$$\omega_J^J = \sigma_{JJ} \circ (\rho^{-1})^{JJ} = p'_{JJ} \circ (\rho^{-1})^{JJ} = p'^{\,J}_J\ .$$

Ainsi comme nous l'avions annoncé, on retrouve à partir d'une définition extrémale l'équation même des facteurs étudiée au § 3 : $\varphi'^J \circ p'^{\,J}_J = \lambda'\ \varphi'^J$.

5. *Nuage associé à une correspondance multiple* :

Dans la leçon [Dis. χ^2 Corr.] TII B n° 5) on définit les facteurs par la recherche des axes principaux d'inertie d'un nuage : soit $N(I)$, nuage associé à I dans R_J ; soit $N(J)$, nuage associé à J dans R_I. Au § 7 de cette leçon on considère un nuage de couples $N(I \times J)$ qui conduit aux mêmes facteurs. Cette construction de $N(I \times J)$ ne peut toutefois être généralisée à une correspondance multiple sur $I = \Pi\{J_q | q \in Q\}$, parce que chacun des ensembles du cas binaire y étant représenté par un nuage de lois de probabilités sur l'autre, le fait qu'il y a deux espaces joue un rôle essentiel. Mais il s'offre une autre voie, d'ailleurs plus simple, qui à partir d'un nuage $N(I)$ nous rendra l'équation déjà vue : $\varphi^J \circ p'^J_J = \lambda \varphi^J$: c'est tout simplement de construire dans R_J le nuage associé à la correspondance p'_{IJ}. Décrivons brièvement ce que produit ici la construction usuelle ([Dis. χ^2 Corr.] § 2.3).

Le nuage $N(I) = \{(p'^i_J, p'_i) | i \in I\} \subset R_J$ est construit en associant à chaque point i du produit I une loi de probabilité p'^i_J sur J ; cette loi étant considérée comme un point affecté à la masse p_i ($p_I = p'_I$ loi marginale de p'_{IJ}). Il vient :

$$\forall i \in I, \forall j \in J : p'^i_j = (\mathrm{Card}\, Q)^{-1} \delta^{i(q(j))}_j \quad ;$$

autrement dit p'^i_J est fait de Card Q masses égales placées au point i(q) de chacun des J_q :

$$\forall i \in I : p'^i_J = (\mathrm{Card}\, Q)^{-1} \Sigma\{\delta^{i(q)}_J | q \in Q\}.$$

La matrice d'inertie σ_{JJ} de ce nuage relativement à l'origine, n'est autre que p'_{JJ} :

$$\forall j, j' \in J : \sigma_{jj'} = \Sigma\{p_i \, p'^i_j \, p'^i_{j'} | i \in I\} \quad ;$$

$$\sigma_{jj'} = (\mathrm{Card}\, Q)^{-2} \Sigma\{p_i | i \in I \; ; \; i(q(j)) = j \; ; i(q(j')) = j'\}$$

$$\sigma_{jj'} = (\mathrm{Card}\, Q)^{-2} \, p_{Jq(j)Jq(j')}(j,j') = p'_{jj'}$$

La matrice d'inertie relativement au centre de gravité p_J du nuage est $\tau_{JJ} = \sigma_{JJ} - p_J \otimes p_J$ (cf [Dis. χ^2 Corr.] § 3). L'espace R_J des mesures sur J est muni de la métrique du χ^2 de centre p'_J :

$$\| x_J - y_J \|^2_{p'J} = \Sigma\{(x_j - y_j)^2 / p'_j \mid j \in J\} \quad ;$$

$$m^{JJ} = \{m^{jj'} | j, j' \in J\} : m^{jj'} = \delta^{jj'} / p'_j \; ;$$

L'équation des facteurs est (cf [Repr. Eucl.] TII B n°2 § 4 & 7) :

$$\varphi^J \, \tau_{JJ} \, m^{JJ} = \lambda \varphi^J \; ;$$

cette première équation ne diffère on le sait (cf [Dis. χ^2 Corr.] § 3) de la suivante qu'en ce que celle-ci admet la fonction constante pour facteur relatif à $\lambda = 1$, alors que pour celle-là c'est un facteur relatif à $\lambda = 0$:

$$\varphi^J \, \sigma_{JJ} \, m^{JJ} = \lambda \varphi^J \; ; \text{ i.e. : } \varphi^J \, p'^J_J = \lambda \varphi^J.$$

C'est de nouveau l'équation considérée au § 3 et déjà retrouvée au § 4.