LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

J. P. BENZÉCRI

Sur le codage réduit d'un vecteur de description en analyse des correspondances

Les cahiers de l'analyse des données, tome 1, n° 2 (1976), p. 127-136

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1976__1_2_127_0>

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol I 1976 n° 2 p 127 136

SUR LE CODAGE RÉDUIT D'UN VECTEUR DE DESCRIPTION EN ANALYSE DES CORRESPONDANCES [COD. RED.]

par J. P. Benzécri [1]

Soit donné un tableau de correspondance k_{IJ} sur I x J; où on suppose que I est un ensemble d'individus, et que chaque ligne k_{iJ} est la description d'un individu i suivant une suite J d'attributs, (qualités ou quantités) notés par des nombres positifs ou nuls. Si un tableau k_{IY} fournit pour l'ensemble I un nuage égal (ou homothétique) à celui que fournit k_{IJ}, les facteurs et les valeurs propres issus de l'analyse de k_{IY} sont égaux (ou proportionnels) à ceux issus de l'analyse de k_{IJ}. L'on peut alors dire que les k_{iY} sont des descriptions des i équivalentes aux k_{iJ}; et, si le cardinal de Y est notablement inférieur à celui de J, on dira que k_{IY} est un codage simplifié de k_{IJ}. Ce codage peut valoir en dehors de l'ensemble I, pour tout ensemble X décrit par un tableau k_{XJ} suivant les mêmes attributs que I, s'il existe une formule simple donnant la description k_{iY} en fonction de la description k_{iJ}. Au tableau k_{XJ} on substituera un tableau codé plus simple que celui-ci : le tableau k_{XY} dont les lignes k_{xY} sont obtenues à partir des k_{xJ} par la même formule qui conduit des k_{iJ} aux k_{iY}.

La présente note se compose de trois parties. Au § 1, nous considérons un problème inverse, en un certain sens, de celui de l'analyse des correspondances : étant donné un nuage I (ensemble muni de masses et de distances) trouver un tableau de correspondance k_{IJ} qui redonne ce nuage. Au § 2 on reprend les constructions du § 1, passer d'un tableau k_{IJ} donné à un tableau k_{IY} qui redonne le nuage correspondant à k_{IJ} : on voit que c'est là une méthode de codage, utile si Y est plus simple que J. Le § 3 est un exemple d'application : un ensemble J de 7 notes d'appréciation (Excellent, très bon, bon, moyen, mauvais, ne sait pas, ne connaît pas) est codé suivant un ensemble Y de trois attitudes fondamentales (Approuve, rejette, ignore) d'après les notes attribuées par 400 sujets à 13 émissions de télévision.

1. *Un problème inverse de l'analyse des correspondances* :

Supposons donné un ensemble I, muni d'un système de masses positives f_I (tel que $\Sigma f_i = 1$), et d'un système de distances. On se propose de

(1) *Laboratoire de Statistique. Université Pierre et Marie Curie. Paris.*

trouver un ensemble J et une correspondance f_{IJ}, (ou loi de probabilité sur le produit f_{IJ}), telle que la loi marginale de f_{IJ} soit le système de masses donné sur I, et que les distances distributionnelles entre éléments de I, soient les distances données d'abord. Plus particulièrement, on cherche à quelles conditions doivent satisfaire les distances données, pour qu'existe une correspondance f_{IJ} ayant les propriétés demandées; et, ces conditions étant satisfaites, on cherche à trouver un J aussi simple que possible.

Effectuons d'abord l'analyse du système de masses et distances donné sur I. On a un système de facteurs F^I_α, relatifs à des valeurs propres, (ou moments principaux d'inertie) λ_α; et, sauf valeurs propres multiples, le système $\{F^I_\alpha | \alpha \in A\}$ des facteurs est unique, i.e. il n'existe pas d'autre système de fonctions sur I satisfaisant aux propriétés caractéristiques bien connues :

Moyenne nulle :

$$\forall\, \alpha \in A : \Sigma_i\, f_i\, F^i_\alpha = 0$$

Orthogonalité :

$$\forall\, \alpha, \alpha' \in A : \alpha \neq \alpha' \Rightarrow \Sigma_i\, f_i\, F^i_\alpha\, F^i_{\alpha'} = 0$$

Normalisation :

$$\forall\, \alpha \in A : \Sigma_i\, f_i (F^i_\alpha)^2 = \lambda_\alpha$$

Reconstitution des distances :

$$\forall\, i, i' \in I : \Sigma_{\alpha \in A}\ (F^i_\alpha - F^{i'}_\alpha)^2 = d(i, i');$$

(où d(i, i') est le carré de la distance donnée).

Immédiatement, apparaît une condition nécessaire à l'existence de f_{IJ} : toutes les valeurs propres λ_α doivent être comprises entre 0 et 1. D'autre part, s'il n'y a qu'un seul facteur F^I_1 relatif à la valeur propre $\lambda = 1$, ce facteur doit, d'après un théorème d'analyse des correspondances, définir une partition de I en deux classes sur chacune desquelles le facteur est constant. Ces conditions, d'inégale importance, ne sont données ici que comme exemples : on va les retrouver dans une étude générale.

Supposons qu'il existe une correspondance f_{IJ} conduisant au nuage donné. On a la formule de reconstitution du tableau à partir des facteurs :

$$f_{ij} = f_i . f_j (1 + \Sigma_\alpha\, F^i_\alpha\, \varphi^j_\alpha);$$

ici, on a pris d'une part sur l'ensemble I les facteurs F^I de variance λ_α, d'autre part sur J les facteurs φ^J de variance 1 : cette expression, commode par la suite, équivaut à celles plus usitées car on a :

$$F^i_\alpha\, \varphi^j_\alpha = \lambda_\alpha^{1/2}\, \varphi^i_\alpha\, \varphi^j_\alpha = \lambda_\alpha^{-1/2} F^i_\alpha\, G^j_\alpha .$$

Dans cette formule, seuls les F_α^I et f_I sont connus de nous, le reste est à construire. En fait, nous cherchons un ensemble J muni d'une loi de probabilité f_J (système de masses positives de somme 1) et d'un système $\{\varphi_\alpha^J | \alpha \in A\}$ de fonctions orthonormées de moyenne nulle (i.e. : $\forall \alpha : \Sigma_j \varphi_\alpha^j f_j = 0;\ \forall \alpha, \alpha' : \Sigma_j \varphi_\alpha^j \varphi_{\alpha'}^j f_j = \delta_{\alpha\alpha'}$), satisfaisant à la condition de positivité :

$$\forall i, j : 1 + \Sigma_\alpha F_\alpha^i \varphi_\alpha^j \geq 0;$$

Cette condition est nécessaire et suffisante pour que les f_{ij} composent un tableau de correspondance conduisant au nuage I donné.

Donnons forme géométrique au problème de la construction de J, f_J et $\{\varphi_\alpha^J | \alpha \in A\}$. On peut identifier un élément j de J avec le point $\{\varphi_\alpha^j | \alpha \in A\} \in R_A$, c'est-à-dire (à des coefficients $\lambda^{1/2}$ près) à la place qu'occupera cet élément sur la carte (de dimension card A) issue de l'analyse de la correspondance f_{IJ}; aussi noterons-nous :

$$j_A = \{j_\alpha | \alpha \in A\} \in R_A;\ j_\alpha = \varphi_\alpha^j$$

Ceci posé le problème s'énonce ainsi : dans R_A trouver un nuage $J_A = \{j_A\}$ muni de masses positives f_j de somme 1 et tel que :

1°) Le centre de gravité du nuage est à l'origine : c'est la condition pour les φ_α^J d'avoir moyenne nulle :

$$\forall \alpha \in A : \Sigma_j f_j j_\alpha = 0$$

2°) Les moments et produits d'inertie du nuage sont les $\delta_{\alpha\alpha'}$: c'est la condition d'orthonormalité des φ_α^J :

$$\forall \alpha, \alpha' \in A : \Sigma_j f_j j_\alpha j_{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}$$

3°) Le nuage est inclus dans le domaine convexe $C_A(I)$ que définit la condition de positivité :

$$C_A(I) = \{y_A | y_A \in R_A;\ \forall i \in I : (1 + \Sigma_\alpha F_\alpha^i y_\alpha) \geq 0\}$$

2. *Le codage des vecteurs de description* :

Dans ce § comme au § 1, on suppose que les tableaux sont remplis de nombres positifs dont la somme est 1 et, pour cette raison, on utilise la lettre f, initiale de fréquence (loi de fréquence).

On part d'un tableau f_{IJ} dont (comme au § 1) on note les facteurs et valeurs propres : F_α^I, φ_α^J, λ_α; les F_α^I étant de variance λ_α et les φ_α^J de variance 1. On a donc la formule de reconstitution :

$$\forall i \in I, \forall j \in J : f_{ij} = f_i f_j (1 + \Sigma_{\alpha \in A} F_\alpha^i \varphi_\alpha^j),$$

et la formule de transfert des facteurs :

$$\forall i \in I, \forall \alpha \in A : F_\alpha^i = \Sigma_j (f_{ij}/f_i) \varphi_\alpha^j ,$$

(formule où les valeurs propres λ_α ne figurent pas explicitement, parce que F^I_α et φ^J_α ne sont pas de même variance).

Soit de plus un ensemble Y, muni d'une loi de probabilité f_Y et soit une famille $\{\varphi^Y_\alpha | \alpha \in A\}$, (indicée par $\alpha \in A$), de fonctions sur Y orthonormées et de moyennes nulles relativement à f_Y. Considérons le tableau f_{IY} défini par :

$$f_{iy} = f_i\ f_y(1 + u\ \Sigma_{\alpha \in A}\quad F^i_\alpha\ \varphi^y_\alpha),$$

où u est une constante réelle positive, comprise entre 0 et 1, dont l'introduction peut s'avérer nécessaire afin que f_{IY} soit un tableau de nombres positifs. Le nuage I issu du tableau f_{IY} est le même, à une homothétie près, que le nuage I issu de f_{IJ}. Les facteurs issus de l'analyse de f_{IY} ne sont autres que les φ^Y_α, facteurs sur Y de variance 1; et les uF^I_α, facteur sur I ayant pour variance les valeurs propres nouvelles qui sont les $u^2\lambda_\alpha$.

Ainsi le tableau f_{IY} comme un tableau codé de f_{IJ}, au sens de l'introduction au présent travail. Reste à préciser quel codage conduit de f_{IJ} à f_{IY}; et à voir sous quelle condition on a un codage utile.

Il résulte de la formule de transfert des facteurs (de φ^J_α à F^I_α) que l'on a :

$$f_{iy} = f_i\ f_y(1 + u\ \Sigma_\alpha\ \Sigma_j(f_{ij}/f_i)\varphi^j_\alpha\ \varphi^y_\alpha);$$

$$f_{iy} = f_y(f_i + u\ \Sigma_j\ f_{ij}\ \Sigma_\alpha\ \varphi^j_\alpha\ \varphi^y_\alpha);$$

$$f_{iy} = f_y(\Sigma_j\ f_{ij}(1 + u\ \Sigma_\alpha\ \varphi^j_\alpha\ \varphi^y_\alpha)).$$

Ce que l'on peut écrire comme une transition probabiliste :
$f_{IY} = t^J_Y\ f_{IJ}$,

$$\forall\, i \in I,\ \forall\, y \in Y\ :\ f_{iy} = \Sigma_{j\, \in\, J}\ t^j_y\ f_{ij}\ ,$$

si l'on note :

$$\forall\, y \in Y,\ \ \forall\, j \in J\ :\ t^j_y = f_y(1 + u\ \Sigma\ \{\varphi^j_\alpha\ \varphi^y_\alpha | \alpha \in A\}).$$

Le tableau t^J_Y donne une formule universelle de codage : pour un ensemble quelconque X d'individus décrit par un tableau k_{XJ} (suivant les mêmes attributs $j \in J$, que les $i \in I$), on aura un tableau codé k_{XY} défini par :

$$k_{xy} = \Sigma_{j\, \in\, J}\ t^j_y\ k_{xj}.$$

Le poids k_x de chaque ligne x, est conservé par le codage car on a :

$$\forall\, j \in J\ :\ \Sigma_y\ t^j_y = 1 \text{ (car les } \varphi^y_\alpha \text{ ont moyenne nulle)};$$

mais il faut s'assurer que les t^j_y sont tous positifs, d'une part pour que t_Y^J soit une véritable transition probabiliste de J vers Y; d'autre part pour que le codage fournisse quel que soit le tableau k_{XJ} de nombres positifs un tableau k_{XY} de nombres positifs ou nuls).

On remarque d'abord que, quels que soient l'ensemble Y, la loi de probabilité f_Y et le système $\{\varphi_\alpha^Y | \alpha \in A\}$ de fonctions orthonormées de moyenne nulle, on peut trouver u assez petit (mais strictement positif) tel que tous les coefficients t_y^i soient positifs ou nuls. De plus Y étant donné de cardinal supérieur ou égal à (card A + 1), on peut, quelle que soit la mesure f_Y choisie sur Y (avec en tout point y une masse f_y non nulle), trouver un système convenable $\{\varphi_\alpha^Y | \alpha \in A\}$. Ces premières remarques font déjà voir la simplicité et l'universalité des codages possibles. Nous préciserons dans la suite le choix de Y, f_Y et $\{\varphi_\alpha^Y | \alpha \in A\}$, en sorte que u soit aussi grand que possible (ce afin que le tableau codé f_{IY} présente des contrastes de profils aussi marqués que f_{IJ} : ces contrastes étant mesurés par les valeurs propres $u^2\lambda_a$). Pour cela on va reprendre dans l'espace R_A les considérations géométriques du § 1.

Notons :

$$y_A = \varphi_A^y = \{\varphi_\alpha^y | \alpha \in A\} \in R_A;$$

$$j_A = \varphi_A^j = \{\varphi_\alpha^j | \alpha \in A\} \in R_A.$$

Ainsi Y et J apparaissent comme des ensembles finis de points de R_A. Montrons que le tableau t_Y^J nous fournit (quels que soient les signes des t_y^j), une expression des points uj_A, comme barycentres des points y_A. En effet on a, de par l'orthonormalité des φ_α^Y :

$$\forall j \in J, \ \forall \beta \in A : \Sigma \{\varphi_\beta^y \, t_y^j | y \in Y\} = \ldots$$

$$\Sigma_y \, f_y(1 + u \, \Sigma_\alpha \, \varphi_\alpha^j \, \varphi_\alpha^y)\varphi_\beta^y = u_\beta^j;$$

ce qu'on écrira :

$$\forall j \in J, \ \forall \alpha \in A : uj_\alpha = \Sigma_{y \in Y} \, t_y^j \, y_\alpha.$$

(ou encore, dans le langage des transitions : $u\varphi_A^J = \varphi_A^Y . t_Y^J$).

Considérons en particulier le cas simple où card Y = card X + 1. Il existe alors une seule expression de tout point de R_A, donc en particulier des points uj_A, en combinaison barycentrique des points y_A; et le tableau t_Y^J des coordonnées barycentriques des uj_A est positif si et seulement si les points uj_A (homothétiques des j_A dans l'homothétie de centre l'origine de R_A, et de rapport u) sont tous intérieurs au simplexe ayant pour sommets les points y_A.

Maintenant le problème de la recherche d'un codage optimum peut s'énoncer ainsi. Dans l'espace R_A, trouver un simplexe $Y = \{y_A\}$ muni d'une distribution de masse f_Y (positive de masse totale 1) tel que :

1°) Y ait l'inertie d'une sphère centrée à l'origine au sens suivant :

$$\forall \alpha \in A : \Sigma_y \, f_y \, y_\alpha = 0$$

$$\forall \alpha, \alpha' \in A : \Sigma_y \, f_y \, y_\alpha \, y_{\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}$$

2°) Le simplexe Y contienne à son intérieur un homothétique $\{uj_A\}$ du nuage J dans un rapport u aussi grand que possible; la formule de codage sera alors donnée par le tableau t_Y^J des coordonnées barycentriques des points uj_A relativement au simplexe Y.

Pratiquement, il n'est pas utile de chercher un nuage $\{y_A\}$, f_Y qui assure à u la valeur maxima; ni de prendre pour t_Y^J les coordonnées barycentriques précises. On procèdera au contraire ainsi. Supposons que l'analyse d'un tableau f_{IJ} révèle que l'ensemble A des p premiers facteurs extrait un pourcentage élevé de l'inertie (e.g. 90 % de l'inertie par deux facteurs) : dans l'espace R_A (de dimension p) on placera un simplexe Y à p + 1 sommets disposé pour contenir au mieux un homothétique du nuage des points j_A (dont les coordonnées sont, répétons-le, les facteurs φ_α^j) ; et on prendra pour coefficients de la transition de codage t_Y^J des valeurs approchées simples des coordonnées barycentriques des points j_A (relativement à Y). Au numéro suivant nous donnons un exemple d'une telle construction.

3. *Application au codage d'un ensemble d'appréciations* :

Les données traités proviennent d'une enquête effectuée en février 1969 par Monsieur Souchon et le service des Etudes de Marchés de l'O.R.T.F. Répondant à la question 5 de cette enquête, 400 sujets donnent sur 13 émissions de variétés (telles que Sacha Show etc ...) l'une des 7 appréciations suivantes :

excellent (X); très bien (T); bien (B); moyen (M); mauvais (N); sans opinion (S); ne connait pas (I).

On construit le tableau 13 x 7 donnant pour chacune des 13 émissions le nombre de fois que lui a été attribuée chacune des appréciations : e.g. k(5,M) = 111 sujets (sur 400) ont jugé "Moyenne" l'émission n° 5.

Emission \ Note	X	T	B	M	N	S	I
1	9	28	89	124	51	19	71
2	31	87	165	63	24	4	17
3	7	21	65	103	83	8	103
4	3	26	121	142	45	11	43
5	17	40	117	111	83	16	7
6	8	35	115	119	78	6	28
7	4	22	73	56	77	12	147
8	15	44	102	83	32	25	90
9	5	18	63	61	15	9	219
10	8	15	40	37	8	12	271
11	5	16	64	54	15	17	220
12	29	87	140	62	24	9	40
13	12	18	89	95	41	9	127

Les deux premiers facteurs issus de ce tableau extraient 92,4 % de l'inertie. On se bornera donc à une représentation bidimensionnelle. Dans le plan rapporté aux deux premiers axes, on a figuré chaque émission par son n°, i, qui a pour coordonnées $F_1(i)$ et $F_2(i)$. Mais, contrairement à l'usage, une note j reçoit pour coordonnées ses facteurs $\varphi_1(j)$, $\varphi_2(j)$, normalisés pour avoir variance 1 ($\varphi_\alpha(j) = \lambda_\alpha^{-1/2} G_\alpha(j)$). Ainsi chaque émission est exactement (sans facteur correctif $\lambda^{-1/2}$) au centre de gravité des notes qui lui ont été attribuées.

L'interprétation des facteurs nous semble s'imposer. Sur le premier axe le point I (ne connaît pas) s'oppose à tous les points qui de X (excellent) à N (mauvais) expriment une opinion proprement dite. Sur le deuxième axe, on a une échelle de valeur de X à N, et I se place au centre. Le point S (sans opinion) est, lui, presque confondu avec l'origine. Quant aux émissions, bornons-nous à dire - diagramme n'est pas pilori !- que les deux émissions les plus appréciées sont : Sacha Show (n° 2) et Show Salvador (n° 12); tandis que l'émission la moins connue (n° 10) n'est au programme qu'une fois par mois.

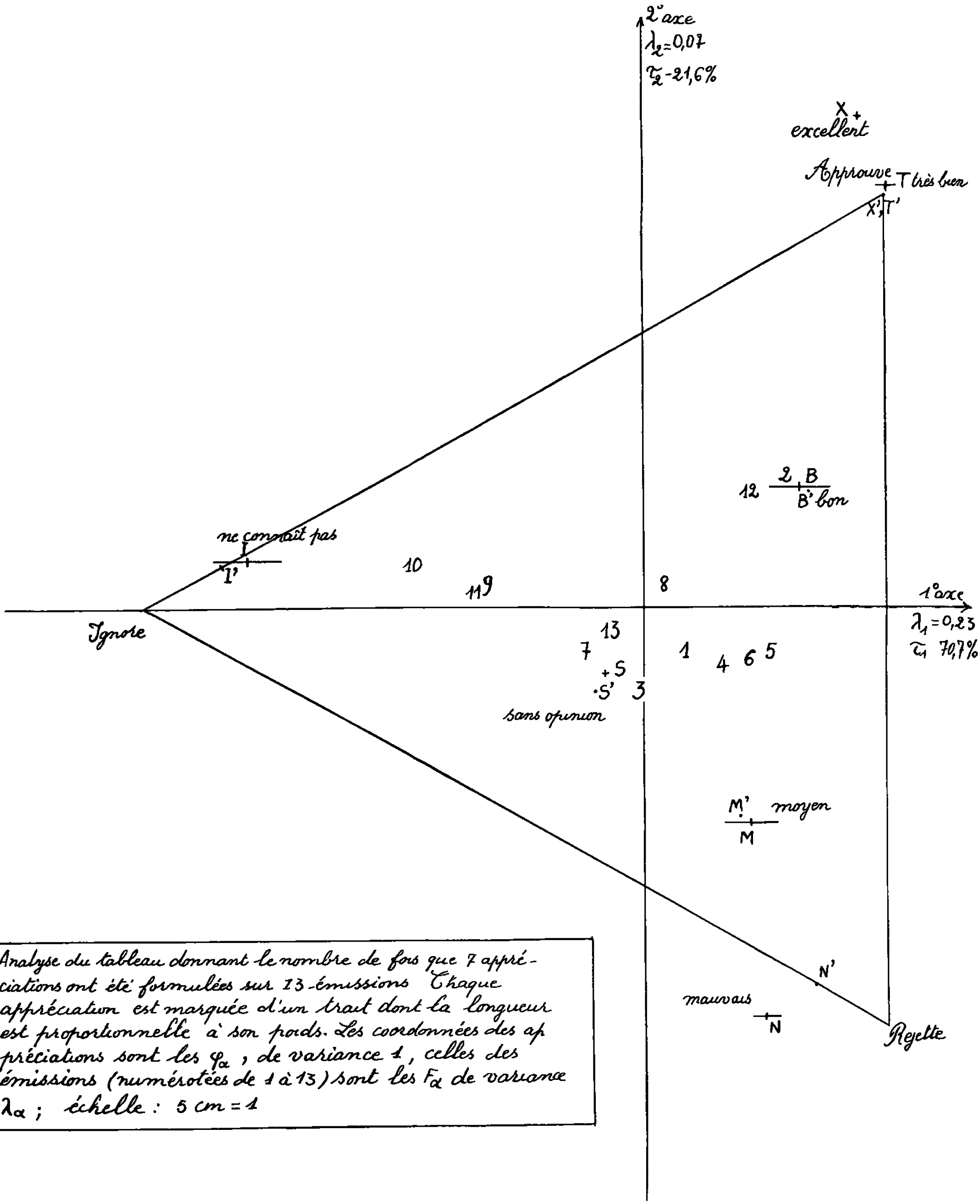
Ceci posé, reprenons sur ce cas particulier les considérations générales du n° 2. L'ensemble J des points j_A, (ici l'ensemble {X, T, B, M, N, S, I} de la figure tracée dans le plan des deux premiers axes), s'inscrit approximativement dans un triangle équilatéral centré à l'origine, symétrique par rapport au premier axe et ayant un sommet voisin de I. C'est donc un tel triangle qu'on prend pour simplexe Y. Afin que Y ait l'inertie d'une sphère (d'un disque) centré à l'origine il faut que ses trois sommets soient les points de coordonnées respectives :

$$y^+ = (2^{-1/2},\ (3/2)^{1/2});\ y^0 = (2^{1/2},\ 0);\ y^- = (2^{-1/2}, -(3/2)^{1/2}).$$

On voit alors que si l'on pose $u = 2^{-1/2}$, le nuage uJ s'inscrit presque exactement dans le triangle Y : sur la figure on a placé les points $u^{-1}y$ (dénommés respectivement : $u^{-1}y^+$; Approuve; $u^{-1}y^0$; Ignore; $u^{-1}y^-$ Rejette) et on voit que J s'inscrit dans $u^{-1}y$:

$$u^{-1}y^+ = (1, 3^{1/2});\ u^{-1}y^0 = (-2,\ 0);\ u^{-1}y^- = (1,\ -3^{1/2}).$$

Avec un coefficient u plus faible, uJ serait inclus dans Y; mais il y a avantage, nous semble-t-il, à prendre u aussi voisin de 1 que possible, afin que la formule de codage conserve des profils contrastés (que les j



Analyse du tableau donnant le nombre de fois que 7 appré-ciations ont été formulées sur 13 émissions. Chaque appréciation est marquée d'un trait dont la longueur est proportionnelle à son poids. Les coordonnées des ap-préciations sont les φ_α, de variance 1, celles des émissions (numérotées de 1 à 13) sont les F_α de variance λ_α ; échelle : 5 cm = 1 remplissent les triangle $u^{-1}Y$ jusqu'aux sommets ...).

On sait que les coordonnées barycentriques d'un point M relativement à un triangle ABC se peuvent mesurer ainsi : la coordonnée de M en A est le rapport de la distance de M au côté BC, à la hauteur issue de A. D'après cette règle, on trouve au prix de quelques tatonnements un tableau t_Y^J de coefficients de codage; i.e. pour chacun des points {X, T, B, M, N, S, I}, les coordonnées barycentriques, dans le triangle $u^{-1}Y$, $(u^{-1}y^+, u^{-1}y^0, u^{-1}y^-)$, d'un point approché {X', T', B', M', N', S', I'}. Pour les commodités de l'écriture on donne des coordonnées barycentriques de somme 100 (et non 1).

X' = T' = (100, 0, 0); B' = (60, 10, 30); M' = (15, 20, 65);

N' = (0, 10, 90); S' = (20, 40, 40); I' = (10, 90, 0).

La formule de codage d'un tableau k_{WJ} (où W est un ensemble quelconque, et J l'ensemble des 7 appréciations) suivant un tableau $k_{WY}(Y = \{y^+, y^0, y^-\})$ est donc :

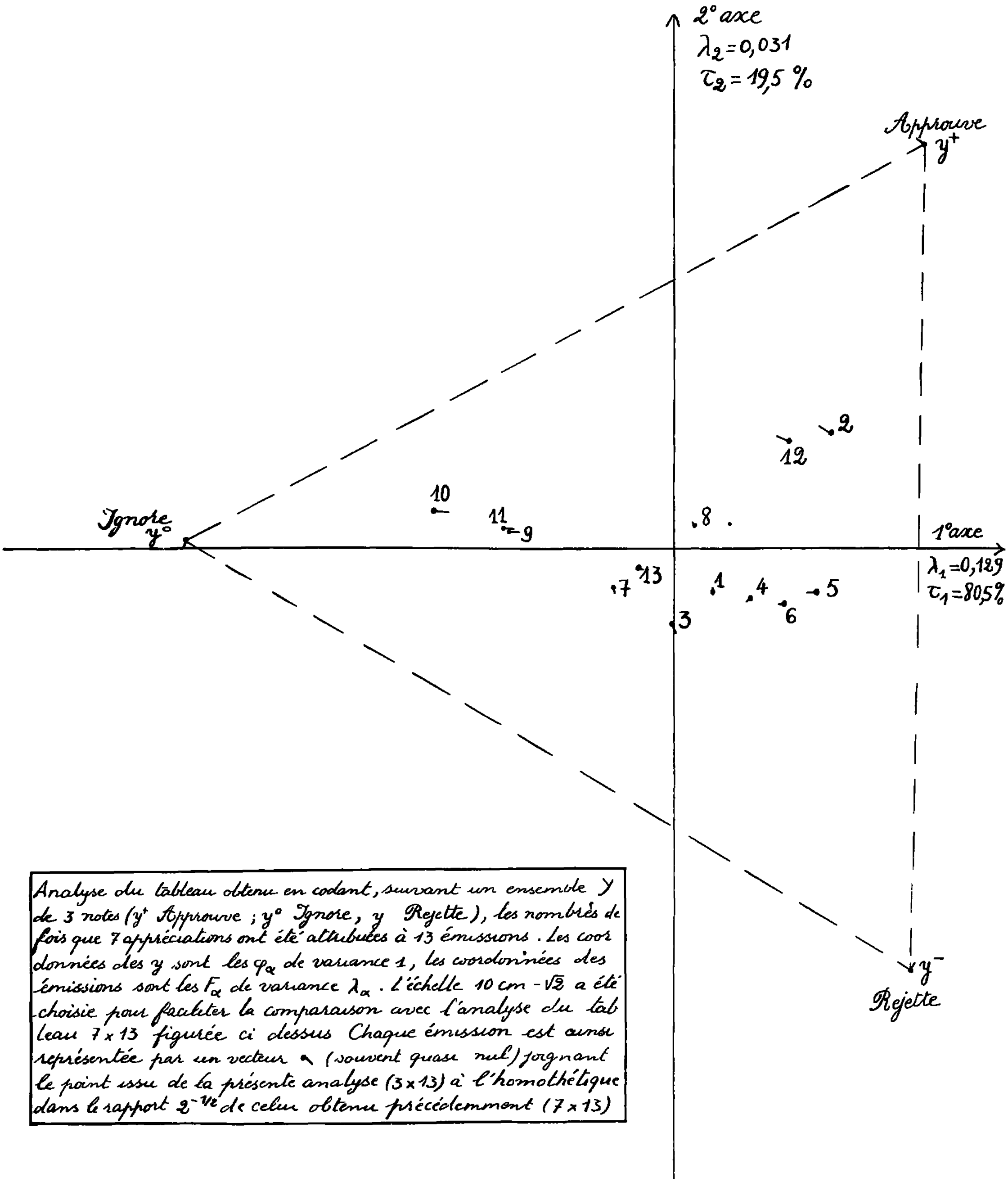
$$100\ k(w,y^+) = 100\ k(w,X) + 100\ k(w,T) + 60\ k(w,B) + 15\ k(w,M) + 20\ k(w,S) + 10\ k(w,I);$$

$$100\ k(w,y^0) = 10\ k(w,B) + 20\ k(w,M) + 10\ k(w,N) + 40\ k(w,S) + 90\ k(w,I);$$

$$100\ k(w,y^-) = 30\ k(w,B) + 65\ k(w,M) + 90\ k(w,N) + 40\ k(w,S).$$

Appliquons en particulier cette formule de codage au tableau k_{IJ}, (13 x 7), analysé ci-dessus. On obtient un tableau k_{IY} (13 x 3) dont l'analyse ne fournit que deux facteurs. A une homothétie près de rapport $u = 2^{-1/2}$, la représentation de I dans le plan des deux facteurs issus de k_{IY}, diffère très peu de la représentation plane issue de k_{IJ}; et l'ensemble Y, si l'on donne à ses points des coordonnées factorielles de variance 1, est presque exactement un triangle équilatéral de côté $6^{1/2}$ symétrique par rapport au premier axe. Les écarts mêmes sont interprétables.

En plaçant X' confondu avec T' et déplaçant N vers une position N' moins écartée sur le deuxième axe nous avons réduit l'importance du deuxième facteur relativement à celle du premier. Ce qui apparaît tant sur les mouvements des points de I que sur les valeurs propres : soit (λ_1, λ_2) et (λ_1', λ_2') les valeurs propres issues respectivement de k_{IJ} et de k_{IY} : on a $\lambda_1' > (\lambda_1/2)$, mais $\lambda_2' < (\lambda_2/2)$. Somme toute, la théorie faite au § 2 se trouve parfaitement illustrée par la présente analyse.



Analyse du tableau obtenu en codant, suivant un ensemble Y de 3 notes (y^+ Approuve ; y° Ignore, y^- Rejette), les nombres de fois que 7 appréciations ont été attribuées à 13 émissions. Les coordonnées des y sont les φ_α de variance 1, les coordonnées des émissions sont les F_α de variance λ_α. L'échelle 10 cm - $\sqrt{2}$ a été choisie pour faciliter la comparaison avec l'analyse du tableau 7×13 figurée ci dessus. Chaque émission est ainsi représentée par un vecteur (souvent quasi nul) joignant le point issu de la présente analyse (3×13) à l'homothétique dans le rapport $2^{-1/2}$ de celui obtenu précédemment (7×13)