

# CAHIERS DU BURO

P. CAZES

## **Correspondances hiérarchiques et ensembles associés**

*Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.*

*Série Recherche*, tome 43-44 (1984), p. 43-142

[http://www.numdam.org/item?id=BURO\\_1984\\_\\_43-44\\_\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BURO_1984__43-44__43_0)

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCES HIERARCHIQUES

ET

ENSEMBLES ASSOCIES

P. CAZES\*

\* CEREMADE (*Université Paris Dauphine*)

0 . Introduction.

I . Définitions et propriétés des correspondances hiérarchiques.

I.1 Rappel du modèle. Notations.

I.2 Lois marginales. Liens entre les tableaux  $P, P^n$  et  $Q^n$ .

I.2.1 Lois marginales.

I.2.2 Liens entre les tableaux  $P, P^n, Q^n$ .

I.3 Etude des facteurs et des valeurs propres.

I.3.1 Facteurs de  $P^n$  obtenus à partir des facteurs de  $P^m$  ( $m \in S_n$ ).

I.3.2 Facteurs issus de  $Q^n$  ( $n \in \text{Nod } A$ ).

I.3.3 Détermination des facteurs de  $P$  à partir des facteurs de  $P^t$  ( $t \in \text{Ter } A$ ) et de  $Q^n$  ( $n \in \text{Nod } A$ ).

I.4 Détermination de  $Q^n$  en fonction des facteurs et des valeurs propres issus de l'A.F.C. de  $P$ .

I.5 Généralisation du modèle précédent.

II . Caractérisation des correspondances hiérarchiques.

II.1 Introduction.

II.2 Ensemble caractéristique. Théorème 1.

II.2.1 Définition d'un ensemble caractéristique associé à  $P$ .

II.2.2 Énoncé du théorème 1.

II.2.3 Lemme.

II.2.4 Démonstration du théorème 1.

II.2.5 Conséquences du théorème 1.

- II.3 Cas où les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées avec deux ensembles caractéristiques  $S$  et  $S'$ .
  - II.3.1 Introduction.
  - II.3.2 Théorème 2.
  - II.3.3 Recherche d'autres arbres associés à  $P$  quand les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées.
- II.4 Théorème 6 : une autre caractérisation des correspondances hiérarchiques.
  - II.4.1 Théorème 6.
  - II.4.2 Démonstration.
  - II.4.3 Remarques.

### III . Ensembles associés.

- III.1 Définition et structure des ensembles associés.
  - III.1.1 Définition.
  - III.1.2 Caractérisation des ensembles associés et premières propriétés.
  - III.1.3 Recherche des ensembles  $J_m$  associés à un ensemble  $I_m$  donné.
  - III.1.4 Structure des ensembles associés.
    - III.1.4.1 Théorème 9.
    - III.1.4.2 Théorème 10.
    - III.1.4.3 Généralisation.
  - III.1.5 Tableau de Burt et ensembles associés.
- III.2 Ensembles associés et facteurs.
  - III.2.1 Propriétés des facteurs quand  $P$  possède un ou plusieurs couples d'ensembles associés.
  - III.2.2 Une autre caractérisation des ensembles associés à l'aide des facteurs.

III.3 Réduction de l'A.F.C. de  $P$  .

III.3.1 Hiérarchies associées à  $P$  quand on a des ensembles associés et réduction de l'A.F.C. de  $P$  .

III.3.2 Cas particuliers.

ANNEXE

BIBLIOGRAPHIE

## 0. Introduction

Il apparaît quelquefois que les premiers facteurs issus d'une analyse de correspondance révèlent des dichotomies associées à une classification hiérarchique. Les valeurs propres associées à ces facteurs sont en général relativement élevées (supérieures à 0,5) et ne prennent souvent en compte qu'une faible part de l'inertie totale ; les facteurs suivants restent interprétables, et traduisent les liaisons entre les sous-ensembles obtenus par dichotomisation lors de l'étude des premiers facteurs.

De tels résultats ont en particulier été obtenus lors de l'établissement de nomenclatures économiques et ont permis de bâtir des nomenclatures satisfaisantes (cf. [0]).

Un autre exemple est\* fourni par l'étude de la structure des échanges commerciaux de 25 pays européens (cf. tableau et résultats en annexe). Le tableau analysé est un tableau carré  $k_{II}$  où  $I$  est l'ensemble des pays considérés et  $k(i, i')$  le total des exportations du pays  $i$  vers le pays  $i'$ . Le premier facteur oppose les pays de l'Europe de l'Ouest aux pays de l'Europe de l'Est qui sont très regroupés (sauf la Yougoslavie). Le second facteur permet de voir la dispersion des pays de l'Europe de l'Est, tandis que les facteurs suivants traduisent les échanges des pays de l'Europe de l'Ouest.

Benzecri (cf. [1b]) a modélisé les situations précédentes. Le modèle introduit par Benzecri comprend en particulier le cas d'un tableau diagonal par blocs, ainsi que le cas plus général où les blocs non diagonaux sont des blocs produits (i.e. des blocs dont toutes les lignes ou toutes les colonnes sont proportionnelles). On généralise ici ce modèle qui est relatif à la construction d'une série de tableaux

---

\* Nous remercions J.P. Pagès qui nous a fourni cet exemple pour illustrer le modèle étudié dans cet article.

de probabilité (ou tableaux de correspondance), en liaison avec les noeuds d'un arbre connexe  $A$  : pour chaque noeud  $n$  de  $A$ , on se donne un tableau de correspondance  $Q^n$  défini sur  $S_n \times S_n$ ,  $S_n$  étant l'ensemble des successeurs immédiats de  $n$  dans  $A$ ; de même, pour chaque élément terminal  $t$  de  $A$ , on se donne un tableau de probabilité  $P^t$ , défini sur le produit  $I_t \times J_t$  de deux ensembles finis. A partir de ces données, le modèle associe à chaque noeud  $n$  de  $A$  un tableau  $P^n$  défini à partir de  $Q^n$  et des tableaux  $P^m$  ( $m \in S_n$ ). La construction culmine au sommet  $s$  de l'arbre, avec un tableau  $P^s$ , noté aussi  $P$ , et on dit que  $P$  est une correspondance hiérarchique.

Dans le § I, on rappelle le modèle et on précise les liens entre les tableaux  $P$ ,  $P^n$ ,  $Q^n$  ainsi qu'entre leurs lois marginales. On montre en particulier comment on peut obtenir les tableaux  $P^n$  et  $Q^n$ , connaissant  $P$ . On précise ensuite les liens entre les facteurs issus de l'analyse factorielle des correspondances (A.F.C.) des tableaux  $P^t$  ( $t$  étant un terminal de  $A$ ),  $Q^n$  ( $n$  étant un noeud de  $A$ ) qui ont servi à construire le modèle et les facteurs issus de l'A.F.C. de  $P$ . On détermine en particulier les éléments de  $Q^n$  à partir des facteurs issus de l'A.F.C. de  $P$ . Les résultats généraux établis dans ce § I donnent comme cas particuliers la solution des exercices proposés dans [16]. On termine ce paragraphe en généralisant le modèle précédent au cas où certains ensembles  $I_t$  ou  $J_t$  peuvent être vides ( $t$  étant un terminal de  $A$ ).

Au § II, on donne, à partir de la notion d'ensemble caractéristique des caractérisations des correspondances  $P$  obéissant au schéma précédent. Une première caractérisation est basée sur les propriétés des facteurs issus de l'A.F.C. de  $P$  (§ II.2), tandis qu'une seconde caractérisation (§ II.4) conduit à la notion d'ensembles associés qui sera étudiée au § III. On montre également (§ II.3) comment dans certains cas, on peut construire plusieurs modèles de décomposition hiérarchique de  $P$ .

Comme on vient de le dire, le § III est consacré à l'étude des couples d'ensembles associés dans un tableau de correspondance  $P$ .

La structure et les propriétés de ces ensembles sont étudiées au § III.1 , tandis que les liaisons entre ensembles associés et facteurs issus de l'A.F.C. de P sont établies au § III.2. Enfin au § III.3, on construit plusieurs modèles de correspondances hiérarchiques connaissant plusieurs couples d'ensembles associés dans P .

Il importe de noter que, comme il est de règle en analyse des données, et comme on l'a déjà dit au début, le modèle de correspondance hiérarchique a été conçu comme une schématisation de structures rencontrées lors d'études concrètes. La voie descendante suivie au § I pour découvrir les  $Q^n$  et les  $P^t$  à partir du tableau P , ainsi que les caractérisations basées sur les facteurs et données au § II, correspondent à la démarche du statisticien découvrant les éléments d'une structure d'après les résultats de l'analyse du tableau global ; avec cette différence toutefois, qu'on suppose que les résultats sont exactement conformes au modèle, alors que dans la pratique l'accord n'est qu'approché.



I . Définition et propriétés des correspondances hiérarchiques.

I.1 Rappel du modèle. Notations.

On considère un arbre connexe  $A$  (i.e. ayant un sommet unique), non nécessairement binaire. On désignera par :

- $s$  : le sommet de  $A$  .
- $\text{Nod } A$  : l'ensemble des noeuds de  $A$  .
- $S_n$  ou  $S_n$  : l'ensemble des successeurs immédiats d'un noeud  $n \in \text{Nod } A$  .
- $\text{Ter } A$  : l'ensemble des éléments terminaux de  $A$  .
- $\text{pr}(n)$  : le prédécesseur immédiat de  $n$  ( $n \in A$  ,  $n \neq s$ ) , i.e. l'élément de  $A$  situé juste au dessus de  $n$  .
- $\text{Pred}(n)$  : l'ensemble des prédécesseurs de  $n$ , y compris  $n$  , i.e. l'ensemble formé de  $n$  et des noeuds situés au dessus de  $n$  .

Ces conventions sont résumées sur la figure 1 :

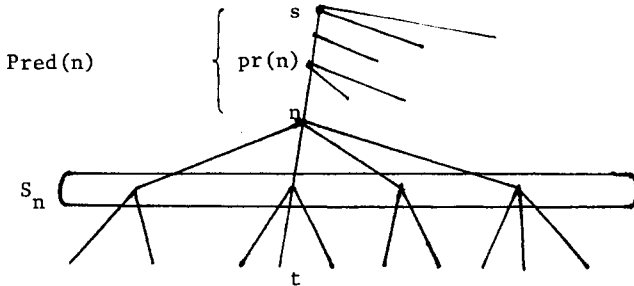


Figure 1.

A tout élément terminal  $t \in \text{Ter } A$  est associée une loi de probabilité (ou tableau de correspondance)  $P^t$  sur le produit de deux ensembles finis  $I_t$  (ou  $I_t$ ) et  $J_t$  (ou  $J_t$ )<sup>★</sup> :

$$P^t = \{p_{ij}^t \mid i \in I_t, j \in J_t\}$$

A tout noeud  $n \in \text{Nod } A$  est associé une loi de probabilité (non nécessairement symétrique)  $Q^n$  sur le produit  $S_n \times S_n$  :

$$Q^n = \{q_{mm'}^n \mid m \in S_n, m' \in S_n\}$$

A partir de ces données, on associe à tout noeud  $n$  une loi de probabilité  $P^n$  sur le produit de deux ensembles finis  $I_n$  et  $J_n$ . La construction est ascendante : la loi  $P^n$  est définie à partir de  $Q^n$  et des tableaux  $\{P^m \mid m \in S_n\}$  par les formules suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} I_n = \cup \{I_m \mid m \in S_n\} \\ J_n = \cup \{J_m \mid m \in S_n\} \end{cases}$$

où l'on suppose qu'il s'agit d'union disjointe, i.e. que les  $I_m$  forment une partition de  $I_n$  et de même pour  $J_n$  ;

$$\forall m, m' \in S_n, \forall i \in I_m, \forall j \in J_{m'}, m \neq m' \Rightarrow$$

$$(2) \quad p_{ij}^n = q_{mm'}^n \cdot p_{i \cdot}^m \cdot p_{\cdot j}^{m'}$$

---

(★) les ensembles  $I_t$  et  $J_t$  peuvent être des ensembles réduits à un élément.

où on a noté :

$$(3) \quad \begin{cases} p_{i \cdot}^m &= \sum \{p_{ij}^m \mid j \in J_m\} \\ p_{\cdot j}^{m'} &= \sum \{p_{ij}^{m'} \mid i \in I_m\} \end{cases}$$

$p_{ij}^n, p_{ij}^m, p_{ij}^{m'}$  désignant respectivement les termes généraux des tableaux  $P^n, P^m, P^{m'}$ .

$$\forall m \in S_n, \forall i \in I_m, \forall j \in J_m :$$

$$(4) \quad p_{ij}^n = q_{mm}^n p_{ij}^m$$

Si  $P_{mm}^n$ , désigne le sous-tableau de  $P^n$  croisant  $I_m$  et  $J_m'$ , les relations précédentes peuvent encore s'écrire matriciellement ;

$$(4 \text{ bis}) \quad \begin{cases} m \neq m' \Rightarrow P_{mm'}^n = q_{mm'}^n \underline{p}_{I_m}^m (\underline{p}_{J_m'}^{m'})'^{\star} \\ P_{mm}^n = q_{mm}^n P^m \end{cases}$$

$\underline{p}_{I_m}^m$  (resp.  $\underline{p}_{J_m'}^{m'}$ ) désignant le vecteur colonne des  $\{p_{i \cdot}^m \mid i \in I_m\}$  (resp.  $\{p_{\cdot j}^{m'} \mid j \in J_m'\}$ ).

Les tableaux  $P_{mm}^n$  et  $P^m$  sont donc proportionnels, tandis que les tableaux  $P_{mm'}^n$ , ( $m \neq m'$ ) correspondent à des lois produits.

Il est facile de vérifier que si les  $P^m$  ( $m \in S_n$ ) sont des lois de probabilité,  $P^n$  est bien une loi de probabilité. Comme par hypothèse les  $P^t$  ( $t \in \text{Ter } A$ ) sont des lois de probabilité, il en résulte que tous les  $P^k$  ( $k \in A$ ) sont des lois de probabilité.

(\*) De façon générale, un élément souligné  $\underline{a}$  correspond à un vecteur colonne, tandis que  $\underline{a}'$  correspond au vecteur ligne transposé de  $\underline{a}$ , le prime correspondant, comme il est d'usage en statistique à la transposition.

La construction culmine dans le tableau  $P^S$  que l'on notera aussi  $P$ , et qui est une loi de probabilité sur  $I_s \times J_s = I \times J$ , avec :

$$(5) \quad \begin{cases} I_s = I = \cup \{I_t \mid t \in \text{Ter } A\} \\ J_s = J = \cup \{J_t \mid t \in \text{Ter } A\} \end{cases}$$

et l'on dira que  $P$  est une correspondance hiérarchique à Card (Nod  $A$ ) niveaux.

On désignera par  $p_{ij}$  le terme général de  $P$ , et par  $p_I = \{p_{i.} \mid i \in I\}$  et  $p_J = \{p_{.j} \mid j \in J\}$  les lois marginales associées.

Soient  $m, m', n$  trois éléments de  $A$ ; on posera :

$$(6) \quad \begin{cases} p_{mn} = \sum \{p_{ij} \mid i \in I_m, j \in J_n\} \\ p_{m.} = \sum \{p_{i.} \mid i \in I_m\} \\ p_{.m'} = \sum \{p_{.j} \mid j \in J_{m'}\} \end{cases}$$

$p_{mn}$  est donc la masse du sous-tableau  $P_{mn}$  (défini sur  $I_m \times J_n$ ) de  $P$ , tandis que  $p_{m.}$  (resp.  $p_{.n}$ ) est la masse de  $I_m$  (resp.  $J_n$ ) dans ce tableau.

Soit  $n$  un noeud de  $A$ , on désignera par  $q_{1S_n} = \{q_{m.}^n \mid m \in S_n\}$  et  $q_{2S_n} = \{q_{.m}^n \mid m \in S_n\}$  les lois marginales associées à  $Q^n$  :

$$(7) \quad \begin{cases} q_{m.}^n = \sum \{q_{mm'}^n \mid m' \in S_n\} \\ q_{.m}^n = \sum \{q_{m'm}^n \mid m' \in S_n\} \end{cases}$$

On posera encore :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in A, n \neq s : \quad r(n) = \prod \{q_{mm}^{\text{pr}(m)} \mid m \in \text{Pred}(n), n \neq s\} \\ r_1(n) = \prod \{q_{m\bullet}^{\text{pr}(m)} \mid m \in \text{Pred}(n), n \neq s\} \\ r_2(n) = \prod \{q_{\bullet m}^{\text{pr}(m)} \mid m \in \text{Pred}(n), n \neq s\} \\ r(s) = r_1(s) = r_2(s) = 1 \end{array} \right.$$

et nous verrons au § suivant que  $r(n), r_1(n), r_2(n)$  s'expriment très simplement en fonction de  $p_{nn}, p_{n\bullet}$  et  $p_{\bullet n}$ .

I.2 Lois marginales. Liens entre les tableaux  $P, P^n$  et  $Q^n$ .

I.2.1 Lois marginales.

On a les résultats suivants :

1)  $\forall n \in \text{Nod } A$  ,  $\forall m \in S_n$  ,  $\forall i \in I_m$  ,  $\forall j \in J_m$  :

$$(9) \quad \begin{cases} p_{i \cdot}^n &= p_{i \cdot}^m q_{m \cdot}^n \\ p_{\cdot j}^n &= p_{\cdot j}^m q_{\cdot m}^n \end{cases}$$

2)  $\forall n \in A$  ,  $\forall i \in I_n$  ,  $\forall j \in J_n$  :

$$(10) \quad \begin{cases} p_{i \cdot}^n &= p_{i \cdot} / r_1(n) = p_{i \cdot} / p_{n \cdot} \\ p_{\cdot j}^n &= p_{\cdot j} / r_2(n) = p_{\cdot j} / p_{\cdot n} \\ r_1(n) &= p_{n \cdot} \\ r_2(n) &= p_{\cdot n} \end{cases}$$

3)  $\forall n \in \text{Nod } A$  ,  $\forall m \in S_n$  :

$$(11) \quad \begin{cases} q_{m \cdot}^n &= \sum \{ p_{i \cdot}^n \mid i \in I_m \} = p_{m \cdot} / r_1(n) = p_{m \cdot} / p_{n \cdot} \\ q_{\cdot m}^n &= \sum \{ p_{\cdot j}^n \mid j \in J_m \} = p_{\cdot m} / r_2(n) = p_{\cdot m} / p_{\cdot n} \end{cases}$$

Démontrons le point 1) ; on a pour  $i \in I_m$  et compte tenu de (2) et (4) :

$$\begin{aligned}
 p_{i \cdot}^n &= \sum_{j \in J_n} p_{ij}^n = \sum_{j \in J_m} p_{ij}^n + \sum_{m' \in S_{n-\{m\}}} \sum_{j \in J_{m'}} p_{ij}^n \\
 &= \sum_{j \in J_m} q_{mm}^n p_{ij}^m + \sum_{m' \in S_{n-\{m\}}} \sum_{j \in J_{m'}} p_{i \cdot}^m \cdot p_{\cdot j}^{m'} q_{mm'}^n \\
 &= q_{mm}^n p_{i \cdot}^m + p_{i \cdot}^m \sum_{m' \in S_{n-\{m\}}} q_{mm'}^n = p_{i \cdot}^m \sum_{m' \in S_n} q_{mm'}^n \\
 &= p_{i \cdot}^m q_m^n
 \end{aligned}$$

ce qui démontre la première relation du point 1). On démontrerait de façon analogue la seconde. On a alors :

$$p_{i \cdot}^m = p_{i \cdot}^n / q_m^n = p_{i \cdot}^{\text{pr}(n)} / (q_n^{\text{pr}(n)} q_m^n) = \dots = p_{i \cdot} / r_1(m)$$

Ecrivant que  $\sum_{i \in I_m} p_{i \cdot}^m$  vaut 1, on obtient  $r_1(m) = p_{m \cdot}$ .

Remplaçant  $m$  par  $n$ , on obtient la première et la troisième relation du point 2), les deux autres se démontrant de façon analogue.

Les deux relations du point 3) résultent immédiatement des points 1) et 2) et du fait que  $P^m$  étant une loi de probabilité, on a

$$\sum_{i \in I_m} p_{i \cdot}^m = \sum_{j \in J_m} p_{\cdot j}^m = 1.$$

Remarque : On déduit du point 2) que :

$$\forall t \in \text{Ter } A, \forall i \in I_t, \forall j \in J_t :$$

$$p_{i \cdot} = r_1(t) p_{i \cdot}^t = p_{t \cdot} p_{i \cdot}^t$$

$$p_{\cdot j} = r_2(t) p_{\cdot j}^t = p_{\cdot t} p_{\cdot j}^t$$

I.2.2 Liens entre les tableaux P, P<sup>n</sup> et Q<sup>n</sup>.

On a les résultats suivants :

1)  $\forall n \in A, \forall i \in I_n, \forall j \in J_n :$

$$(12) \quad \begin{cases} p_{ij}^n = p_{ij}/r(n) = p_{ij}/p_{nn} \\ r(n) = p_{nn} \end{cases}$$

2)  $\forall n \in \text{Nod } A, \forall m \in S_n, \forall m' \in S_n :$

$$(13) \quad \begin{cases} q_{mm'}^n = \sum \{p_{ij}^n \mid i \in I_m, j \in J_{m'}\} \\ = p_{mm'}/r(n) = p_{mm'}/p_{nn} \end{cases}$$

En particulier, si  $m = m'$ , on a :

$$(14) \quad q_{mm}^n = r(m)/r(n) = p_{mm}/p_{nn}$$

3)  $\forall n \in \text{Nod } A, \forall m \in S_n :$

$$(15) \quad \begin{cases} q_{m\cdot}^n = p_{mn}/p_{nn} \\ q_{\cdot m}^n = p_{nm}/p_{nn} \end{cases}$$

Le point 1) se démontre à partir de la relation (4) en remontant l'arbre, puis en remplaçant  $m$  par  $n$ .

Le point 2) se déduit de la relation (2) (ou de (4) si  $m = m'$ ) sommée sur  $I_m \times J_{m'}$  et du point 1).



On a enfin, compte tenu de (13), (1) et (12) :

$$\begin{aligned} q_m^n &= \sum \{q_{mm'}^n \mid m' \in S_n\} \\ &= \sum \{p_{ij}^n \mid i \in I_m, j \in J_{m'}, m' \in S_n\} \\ &= \sum \{p_{ij}^n \mid i \in I_m, j \in J_n\} = p_{mn}/p_{nn} \end{aligned}$$

ce qui démontre la première relation (15), la seconde se démontrant de façon symétrique.

Remarque : La relation (12) traduit le fait que le tableau  $P^n$  est proportionnel au sous-tableau  $P_{nn}$  de  $P$  croisant  $I_n$  et  $J_n$ , tandis que (13) exprime le fait que le tableau  $Q_n$  se déduit (au coefficient  $1/p_{nn}$  près) du tableau  $P$  en remplaçant chaque bloc  $P_{mm'}$ , croisant  $I_m$  et  $J_{m'}$ , ( $m, m' \in S_n$ ) par la somme de ses éléments.

I.3 Etude des facteurs et des valeurs propres.

Nous rappelons ici quelques résultats établis dans [1 b] et permettant d'obtenir les facteurs issus de l'analyse factorielle des correspondances (A.F.C.) du tableau  $P^n$  ( $n \in \text{Nod } A$ ) à partir des facteurs issus de l'A.F.C. des tableaux  $P^m$  ( $m \in S_n$ ) et  $Q^n$ ; ce qui nous permettra en remontant l'arbre de voir les liens existant entre les facteurs du tableau  $P$ , et ceux des tableaux  $P^n$  et  $Q^n$  et de déduire les facteurs de  $P$  à partir des facteurs des tableaux  $P^t$  ( $t \in \text{Ter } A$ ) et  $Q^n$  ( $n \in \text{Nod } A$ ).

I.3.1 Facteurs de  $P^n$  obtenus à partir des facteurs de  $P^m$  ( $m \in S_n$ ).

Soit donc  $n$  un noeud de  $A$ ,  $m$  un élément de  $S_n$  et  $(\underline{a}^m, \underline{b}^m)$  un couple de facteurs canoniques<sup>★</sup> issus de l'A.F.C. du tableau  $P^m$  et relatifs à la valeur propre  $\lambda$ . A ce couple, on peut associer (cf [1 b]) un couple de facteurs canoniques  $(\underline{a}^n, \underline{b}^n)$  issus de l'A.F.C. de  $P_n$ . Si l'on pose :

$$(16) \quad \begin{cases} (\underline{a}^n)' = \{(\underline{a}_m^n)'\} \mid m \in S_n \\ (\underline{b}^n)' = \{(\underline{b}_m^n)'\} \mid m \in S_n \end{cases}$$

où  $\underline{a}_m^n$  (resp.  $\underline{b}_m^n$ ) désigne la restriction du facteur  $\underline{a}^n$  (resp.  $\underline{b}^n$ ) à  $I_m$  (resp.  $J_m$ ), on a :

$$(17) \quad \begin{cases} \underline{a}_m^n = (q_{m \cdot}^n)^{-1/2} \underline{a}^m ; \\ \underline{b}_m^n = (q_{\cdot m}^n)^{-1/2} \underline{b}^m \\ \forall m' \in S_n, m' \neq m : \underline{a}_{m'}^n = \underline{0} ; \underline{b}_{m'}^n = \underline{0} \end{cases}$$

---

(★) différent du couple trivial de facteurs constants.

Considérant  $\underline{a}^n, \underline{b}^n, \underline{a}^m, \underline{b}^m$  comme des fonctions sur  $I_n, J_n, I_m, J_m$  respectivement, on peut dire que  $\underline{a}^n$  a pour support  $I_m$  et correspond à un coefficient près au prolongement de  $\underline{a}^m$  à  $I_n$  tandis que  $\underline{b}^n$  a pour support  $J_m$  et est à un coefficient près le prolongement de  $\underline{b}^m$  à  $J_n$ .

La valeur propre associée au couple  $(\underline{a}^n, \underline{b}^n)$  et que l'on notera  $\lambda_{nm}$  est reliée à  $\lambda$  par la formule :

$$(18) \quad \lambda_{nm} = \lambda(q_{mm}^n)^2 / (q_m^n \cdot q_{\cdot m}^n)$$

On en déduit en remontant l'arbre un couple de facteurs  $(\underline{a}, \underline{b})$  de support  $I_m \times J_m$  issu de l'A.F.C. de  $P$  et relatif à la valeur propre  $\lambda_{sm}$  avec :

$$(19) \quad \begin{cases} \underline{a}_m = (r_1(m))^{-1/2} \underline{a}^m = (p_{m\cdot})^{-1/2} \underline{a}^m \\ \underline{b}_m = (r_2(m))^{-1/2} \underline{b}^m = (p_{\cdot m})^{-1/2} \underline{b}^m \\ \lambda_{sm} = \lambda(r(m))^2 / (r_1(m)r_2(m)) = \lambda(p_{mm})^2 / (p_m \cdot p_{\cdot m}) \end{cases}$$

$\underline{a}_m$  (resp.  $\underline{b}_m$ ) étant la restriction de  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}$ ) à  $I_m$  (resp.  $J_m$ ).

Notons que l'on a :

$$(20) \quad \begin{cases} \forall i \in I_m, \forall j \in J_m : \\ \left\{ \begin{aligned} a_i b_j (\lambda_{sm})^{1/2} &= a_i^m b_j^m (\lambda)^{1/2} r(m) / (r_1(m)r_2(m)) \\ &= a_i^m b_j^m (\lambda)^{1/2} p_{mm} / (p_m \cdot p_{\cdot m}) \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$a_i$  (resp.  $b_j; a_i^m; b_j^m$ ) désignant la composante  $i$  (resp.  $j; i; j$ ) de  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}; \underline{a}^m; \underline{b}^m$ )

A partir des formules précédentes (où il faut remplacer  $m$  par  $t$ ), on déduit de tout couple de facteurs canoniques  $(\underline{a}^t, \underline{b}^t)$  issu de l'A.F.C. de  $P^t$  ( $t \in \text{Ter } A$ ) un couple de facteurs  $(\underline{a}, \underline{b})$  issu de l'A.F.C. de  $P$ ,  $(\underline{a}, \underline{b})$  étant de support  $I_t \times J_t$ .

I.3.2. Facteurs issus de  $Q^n$  ( $n \in \text{Nod } A$ ).

Soit  $(\underline{c}, \underline{d})$  un couple de facteurs canoniques issus de l'A.F.C. du tableau  $Q^n$ , et relatif à la valeur propre  $\lambda$ . Il lui correspond (cf. [1 b]) un couple de facteurs  $(\underline{a}^n, \underline{b}^n)$  issus de l'A.F.C. de  $P^n$  et relatifs à la même valeur propre, avec

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall m \in S_n, \forall i \in I_m : a_i^n = c_m \\ \forall j \in J_m : b_j^n = d_m \end{array} \right.$$

En d'autres termes le sous vecteur  $\underline{a}_m^n$  (resp.  $\underline{b}_m^n$ ) de  $\underline{a}^n$  (resp.  $\underline{b}^n$ ) est un vecteur dont toutes les composantes sont égales à  $c_m$  (resp.  $d_m$ )  $m^{\text{ième}}$  composante de  $\underline{c}$  (resp.  $\underline{d}$ ). On dira encore que  $\underline{a}^n$  (resp.  $\underline{b}^n$ ) est constant sur  $I_m$  (resp.  $J_m$ ).

A  $(\underline{a}^n, \underline{b}^n)$  et donc à  $(\underline{c}, \underline{d})$  est associé d'après le § I.3.1. un couple de facteurs canoniques  $(\underline{a}, \underline{b})$  pour  $P$  relatif à la valeur propre  $\lambda_{sn}$  avec :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall m \in S_n, \forall i \in I_m : a_i = (p_n)^{-1/2} c_m \\ \forall j \in J_m : b_j = (p_n)^{-1/2} d_m \\ \forall i \notin I_n, \forall j \notin J_n : a_i = b_j = 0 \\ \lambda_{sn} = \lambda(p_{nn})^2 / (p_n \cdot p_n) \end{array} \right.$$

$$\forall m \in S_n, \forall m' \in S_n, \forall i \in I_m, \forall j \in J_{m'} :$$

$$(23) \quad a_{i,j} \cdot (\lambda_{sn})^{1/2} = c_{m,m'} \cdot d_{m'}(\lambda)^{1/2} \cdot p_{nn} / (p_n \cdot p_n)$$

$$(24) \quad \forall (i,j) \notin I_n \times J_n : a_{i,j} \cdot (\lambda_{sn})^{1/2} = 0$$

Ces deux formules nous serviront au § I.4.

Remarque : On peut montrer, à l'aide de la formule de reconstitution des données (cf. [1 a] et [1 b]) que l'on obtient tous les facteurs de  $P^n$  ( $n \in \text{Nod } A$ ) à partir des facteurs de  $Q^n$  et des facteurs des tableaux  $P^m$  ( $m \in S_n$ ) suivant les formules données dans ce paragraphe et dans le précédent. On en déduit que les couples de facteurs canoniques  $(\underline{a}^n, \underline{b}^n)$  issus de l'A.F.C. de  $P^n$  peuvent se répartir (si du moins il n'existe pas de valeurs propres multiples) dans l'un des deux groupes suivants :

1<sup>er</sup> groupe :  $\forall m \in S_n, \underline{a}^n$  (resp.  $\underline{b}^n$ ) est constant sur  $I_m$  (resp.  $J_m$ ).

2<sup>eme</sup> groupe :  $\exists m \in S_n$  tel que  $\underline{a}^n$  (resp.  $\underline{b}^n$ ) soit de support  $I_m$  (resp.  $J_m$ ).

S'il existe des valeurs propres multiples, on peut toujours trouver un système orthonormé complet de facteurs vérifiant la propriété précédente.

On verra au § II une réciproque de cette propriété quand  $n = s$ .

I.3.3. Détermination des facteurs de P à partir des facteurs de  $P^t$   
( $t \in \text{Ter } A$ ) et de  $Q^n$  ( $n \in \text{Nod } A$ ).

Compte tenu de ce que les facteurs issus de l'A.F.C. de  $P^n$  ( $n \in \text{Nod } A$ ) se déduisent des facteurs issus de l'A.F.C. de  $Q^n$  et des facteurs issus des analyses des tableaux  $P^m$  ( $m \in S_n$ ), on peut, en descendant l'arbre, obtenir les facteurs de  $P^n$  d'une part à partir des facteurs des tableaux  $P^t$  ( $t \in \text{Ter } A$ ) associés aux terminaux  $t$  constituant le noeud  $n$ , et d'autre part à partir des facteurs des tableaux  $Q^m$  ( $m \in \text{Nod } A$ ) associés aux noeuds contenus dans  $n$ , i.e. aux successeurs (non terminaux) de  $n$ , y compris  $n$ . En particulier, on peut à l'aide des relations (19) et (22) obtenir facteurs et valeurs propres issus de l'A.F.C. de  $P$  à partir des facteurs et valeurs propres issus de l'A.F.C. des tableaux  $P^t$  ( $t \in \text{Ter } A$ ) et  $Q^n$  ( $n \in \text{Nod } A$ ), qui sont les tableaux à partir desquels s'effectue toute la construction du modèle.

On peut remarquer que les facteurs canoniques  $(\underline{a}, \underline{b})$  issus de l'A.F.C. de  $P$  possèdent (si du moins il n'existe pas de valeurs propres multiples) l'une des deux propriétés suivantes :

ou il existe  $t \in \text{Ter } A$ , tel que  $\underline{a}$  soit de support  $I_t$  et  $\underline{b}$  de support  $J_t$  ;

ou,  $\forall t \in \text{Ter } A$ ,  $\underline{a}$  est constant sur  $I_t$  et de même  $\underline{b}$  est constant sur  $J_t$ .

S'il existe des valeurs propres multiples, on peut toujours trouver un système complet de facteurs vérifiant la propriété précédente.

I.4 Détermination de  $Q^n$  en fonction des facteurs et des valeurs propres de l'A.F.C. de  $P$ .

Soit  $\{(a_{-\alpha}^n, b_{-\alpha}^n) \mid \alpha \in R_n\}$  l'ensemble des couples de facteurs non triviaux  $\star$  de  $P$  construits à partir de l'ensemble  $R_n$  des facteurs non triviaux issus de l'A.F.C. de  $Q^n$  ( $n \in \text{Nod } A$ ). Ces facteurs sont facilement identifiables, car si l'on considère par exemple les facteurs canoniques  $\frac{a_{-\alpha}^n}{-\alpha}$ , ces facteurs ont pour support  $I_n$ , et sont constants sur chaque sous-ensemble  $I_m$  ( $m \in S_n$ ).

Soit  $m \in S_n$ ; on désignera par  $a_{m\alpha}^n$  (resp.  $b_{m\alpha}^n$ ) la  $i^{\text{ème}}$  (resp.  $j^{\text{ème}}$ ) composante de  $\frac{a_{-\alpha}^n}{-\alpha}$  (resp.  $\frac{b_{-\alpha}^n}{-\alpha}$ ) pour  $i \in I_m$  (resp.  $j \in J_m$ ) et on posera :

$$\forall m \in S_n, \forall m' \in S_n :$$

$$(25) \quad C_n(m, m') = \sum \{a_{m\alpha}^n b_{m'\alpha}^n (\lambda_{s_n\alpha})^{1/2} \mid \alpha \in R_n\}$$

$\lambda_{s_n\alpha}$  désignant la valeur propre associée à  $(\frac{a_{-\alpha}^n}{-\alpha}, \frac{b_{-\alpha}^n}{-\alpha})$ . On posera encore :

$$(26) \quad T_n = 1 + \sum \{C_{pr(m)}(m, m) \mid m \in \text{Pred } n, m \neq s\}$$

On a alors les résultats suivants :

1)

$$(27) \quad p_{nn} = p_n \cdot p_{\cdot n} T_n$$

$$(28) \quad \forall m \in S_n : q_{mm}^n = (p_m \cdot p_{\cdot m} T_m) / (p_n \cdot p_{\cdot n} T_n)$$

( $\star$ ) i.e. l'ensemble des facteurs associés à une valeur propre non nulle, et différents du facteur constant associé à la valeur propre 1.

2)  $\forall m \in S_n, \forall m' \in S_n :$

$$(29) \quad p_{mm'} = p_m \cdot p_{\cdot m'} (T_n + C_n(m, m'))$$

$$(30) \quad q_{mm'}^n = p_m \cdot p_{\cdot m'} (T_n + C_n(m, m')) / (p_n \cdot p_{\cdot n} T_n)$$

Pour démontrer ces résultats, on peut utiliser les relations  
 (13)  $q_{mm'}^n = p_{mm'} / p_{nn}$ , et calculer  $p_{mm'}$  et  $p_{nn}$  en utilisant la formule de reconstitution associée à  $P$ , puis en la sommant sur  $I_m \times J_m$  et  $I_n \times J_n$ . Compte tenu de la remarque donnée à la fin du § I.3.2, et du fait que les facteurs intervenant dans la formule de reconstitution sont orthogonaux à la droite des constantes, il est facile de voir que les seuls facteurs apportant une contribution non nulle aux sommes  $p_{mm'}$  et  $p_{nn}$  sont les facteurs dérivés des tableaux  $Q^k$  avec  $k \in \text{Pred } n$  pour  $p_{mm'}$ , et  $k \in \text{Pred}(\text{pr}(n))$  pour  $p_{nn}$ ; de plus ces facteurs sont constants sur  $I_m$  et sur  $J_m$ , pour  $k = n$ , et sur  $I_n$  et  $J_n$  pour  $k \in \text{Pred}(\text{pr}(n))$ . On en déduit les formules (27) et (29) et donc (28) et (30).

On peut aussi démontrer ces formules à partir de la formule de reconstitution exprimant  $q_{mm'}^n$  en fonction des facteurs et des valeurs propres issus de  $Q^n$ . C'est cette voie que nous développerons ici. La formule de reconstitution relative à  $Q^n$  s'écrit

$$\forall m, m' \in S_n : q_{mm'}^n = q_m^n \cdot q_{\cdot m'}^n \left( 1 + \sum \{ (\lambda_\alpha)^{1/2} c_{m\alpha} d_{m'\alpha} \mid \alpha \in R_n \} \right)$$

$(\underline{c}_\alpha, \underline{d}_\alpha)$  étant le  $\alpha^{\text{ème}}$  couple de facteurs canoniques issu de l'A.F.C. de  $Q^n$ , et  $\lambda_\alpha$  la valeur propre correspondante.

Compte tenu de (11), (23), (25), la formule précédente s'écrit :



$$q_{mm'}^n = p_m \cdot p_{m'} \cdot [1 + p_n \cdot p_n \cdot C_n(m, m') / p_{nn}] / (p_n \cdot p_n)$$

d'où l'on déduit, compte tenu de (13) :

$$(31) \quad \frac{p_{mm'}}{p_m \cdot p_{m'}} = \frac{p_{nn}}{p_n \cdot p_n} + C_n(m, m')$$

Faisant  $m = m'$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{p_{mm}}{p_m \cdot p_m} &= \frac{p_{nn}}{p_n \cdot p_n} + C_n(m, m) = \\ &= \frac{p_{pr(n)} p_{pr(n)}}{p_{pr(n)} \cdot p_{pr(n)}} + C_{pr(n)}(n, n) + C_n(m, m) \\ &= \dots = \frac{p_{ss}}{p_s \cdot p_s} + \sum \{C_{pr(k)}(k, k) \mid k \in \text{Pred}(m), k \neq s\} \\ (32) \quad &= T_m \end{aligned}$$

puisque  $p_{ss} = p_{.s} = p_s = 1$ , ces trois quantités étant égales à la somme des éléments de  $P^S$ , i.e. de  $P$ .

De (32) écrite en remplaçant  $m$  par  $n$ , (31), (13) et (14), l'on déduit immédiatement les relations (27) à (30).

Dans le cas particulier où  $A$  est un arbre binaire, chaque noeud a deux successeurs immédiats, et les tableaux  $Q^n$  sont donc des tableaux  $2 \times 2$  ne possédant qu'un seul couple de facteurs non triviaux. Il est alors aisé de calculer le couple de facteurs correspondants issu de l'A.F.C. de  $P$ , et d'en déduire les quantités  $C_n(m, m')$  et  $T_m$ .

I.5 Généralisation du modèle précédent.

Le modèle hiérarchique étudié précédemment suppose que tous les sous-ensembles  $I_n$  et  $J_n$  ( $n \in A$ ) qui interviennent soient non vides. Nous allons généraliser ce modèle au cas où certains sous-ensembles peuvent être vides. Il suffit dans la définition du modèle donnée au § I.1 de considérer que certains  $I_t$  ou  $J_t$  peuvent être vides. Dans ce cas, outre les tableaux  $Q^n$  ( $n \in \text{Nod } A$ ) et  $P^t$  ( $t \in \text{Ter } A$ ,  $I_t \neq \emptyset$ ,  $J_t \neq \emptyset$ ) il faut se donner pour tout  $t$  appartenant à  $\text{Ter } A$  et tel que  $I_t = \emptyset$ ,  $J_t \neq \emptyset$  (resp.  $J_t = \emptyset$ ,  $I_t \neq \emptyset$ ) une loi de probabilité  $p_{J_t}$  sur  $J_t$  (resp.  $p_{I_t}$  sur  $I_t$ ). Soit  $n$  un noeud de  $A$ , on définira toujours  $I_n$  et  $J_n$  à l'aide des formules (1). Si  $J_n$  est vide, et si  $I_n$  est non vide, on définira  $p_{I_n}$  à l'aide de la première formule (9) qui s'écrit :

$$(33) \quad \forall m \in S_n, \forall i \in I_m : p_{i.}^n = q_{m.}^n p_{i.}^m$$

auquel cas, on a seulement besoin de connaître la loi marginale  $q_{1S_n}$  et non la loi de probabilité  $Q^n$  toute entière.

De même si  $I_n$  est vide, et si  $J_n$  est non vide, on posera :

$$(34) \quad \forall m \in S_n, \forall j \in J_m : p_{.j}^n = q_{.m}^n p_{.j}^m$$

qui correspond à la seconde formule (9) : là encore, on n'a pas besoin de connaître le tableau  $Q^n$  en entier, mais seulement la loi marginale  $q_{2S_n}$ .

Si  $I_n$  et  $J_n$  sont non vides, les formules (2) et (4) permettent encore de définir le tableau  $P^n$  (et ceci même s'il existe un élément  $m$  de  $S_n$  tel que  $I_m$  ou  $J_m$  soit vide ; supposons en effet que  $I_m \neq \emptyset$  et  $J_{m'} = \emptyset$  ; alors si  $i \in I_m$ ,  $j \in J_{m'}$  (avec  $m' \in S_n$ ),  $m'$  est différent de  $m$  puisque  $J_m$  est vide ;  $p_{I_m}^m$  et  $p_{J_{m'}}^{m'}$  étant définis la formule (2) permet de calculer  $p_{ij}^n$ ).

Enfin si  $I_n = J_n = \emptyset$ , le noeud  $n$  n'intervient pas au niveau de la construction effectuée et peut être éliminé, ainsi que tous ses successeurs. On dira qu'un tel noeud est trivial, ainsi que ses successeurs et les terminaux correspondants. On supposera par la suite que les éléments triviaux de l'arbre  $A$  ont été retirés, et l'on dira encore que  $P$  est une correspondance hiérarchique à Card (Nod  $A$ ) niveaux.

Comme on vient de le voir, si  $n \in \text{Nod } A$ ,  $m, m' \in S_n$ , et si  $I_m$  ou  $J_m$  est vide, on n'a pas besoin de connaître  $q_{mm'}^n$ . De façon à ce que les résultats donnés dans les § précédents se généralisent, on posera  $q_{mm'}^n = 0$  si  $I_m$  ou  $J_m$  est vide.

On posera aussi comme convention que la masse d'un ensemble vide est nulle (e.g. avec les notations définies par (6) :  $p_{n\cdot} = 0$  si  $I_n = \emptyset$  ;  $p_{\cdot n} = 0$  si  $J_n = \emptyset$  ;  $p_{nm} = 0$  si  $I_n \times J_m = \emptyset$  (i.e.  $I_n = \emptyset$  ou  $J_m = \emptyset$ )).

Avec les conventions précédentes, tous les résultats donnés dans les § I.1 à I.4 restent valables, à condition que les êtres mathématiques intervenant aient un sens (e.g. si  $I_n = \emptyset$ , le tableau  $P^n$  n'a pas de sens et n'est pas donc pas à considérer ; de même les formules (13) et (15) ne sont valables que si  $p_{nn}$  est non nul, i.e. si  $I_n \times J_n$  est non vide etc...).

## II . Caractérisation des correspondances hiérarchiques.

### II.1 Introduction.

On donne ici quelques théorèmes permettant de déceler qu'un tableau  $P$  est une correspondance hiérarchique associée au modèle général du § I.5. Après avoir défini la notion d'ensemble caractéristique associé à  $P$ , on donne, à partir des facteurs issus de l'A.F.C. de  $P$ , une première caractérisation des correspondances hiérarchiques à un niveau (§ II.2, Théorème 1), ou à plus d'un niveau (§ II.3, Théorème 2). On donne ensuite une autre caractérisation des correspondances hiérarchiques, non basée sur les propriétés des facteurs (§ II.4, Théorème 6) caractérisation qui conduira à la notion de couples d'ensembles associés dans une correspondance, ensembles qui seront définis et étudiés au § III.

### II.2 Ensemble caractéristique. Théorème 1.

#### II.2.1 Définition d'un ensemble caractéristique associé à $P$ .

On dit qu'un ensemble fini  $S$  est un ensemble caractéristique associé au tableau de correspondance  $P$  (toujours définie sur le produit  $I \times J$ ) si  $I$  est la réunion d'ensembles disjoints (éventuellement vides) indicés par les éléments de  $S$ , et si de même  $J$  est la réunion d'ensembles disjoints (dont certains peuvent être vides) également indicés par  $S$ .

Si  $n$  est un élément de  $S$  tel que  $I_n = J_n = \emptyset$ , on dira que c'est un élément trivial de  $S$ , et on pourra le supprimer sans perte de généralité. Nous supposerons par la suite, sauf indication contraire que les ensembles caractéristiques de  $P$  ne comportent pas d'éléments triviaux.

### II.2.2 Enoncé du théorème 1.

Théorème 1 : S'il existe un ensemble caractéristique  $S$  associé à  $P$ , et si les facteurs canoniques non triviaux  $(\underline{a}, \underline{b})$  issus de l'A.F.C. de  $P$  peuvent être répartis par un choix convenable d'un système complet de facteurs (lequel n'est unique que s'il n'y a pas de valeurs propres multiples) dans l'un des deux groupes  $E_1$  et  $E_2$  suivants :

$E_1$  :  $\forall m \in S$ , alors les composantes  $a_i$  de  $\underline{a}$  prennent la même valeur pour  $i \in I_m$  (si  $I_m \neq \emptyset$ ), i.e. le sous vecteur  $\underline{a}_m$  de  $\underline{a}$ , associé à  $I_m$  a toutes ses composantes égales. De même les composantes  $b_j$  de  $\underline{b}$  prennent la même valeur pour  $j \in J_m$  (si  $J_m \neq \emptyset$ ).

$E_2$  :  $\exists m \in S$ , tel que les seules composantes  $a_i$  non nulles correspondent au sous vecteur  $\underline{a}_m$  de  $\underline{a}$  (i.e.  $a_i = 0$  sauf pour  $i \in I_m$ ; en d'autres termes  $\underline{a}$  a pour support  $I_m$ ) et de même les seules composantes  $b_j$  de  $\underline{b}$  non nulles correspondent au sous vecteur  $\underline{b}_m$  de  $\underline{b}$  ( $\underline{b}$  a pour support  $J_m$ )

alors  $P$  est une correspondance hiérarchique (au sens du modèle général du § I.5) à un niveau.

L'ensemble  $S_s$  des successeurs immédiats du sommet  $s$  de la hiérarchie (qu'on notera encore  $A$ ) associé à  $P$  est égal à  $S$ , tandis que l'ensemble  $\text{Ter } A$  des terminaux de  $A$  est aussi égal à  $S$ .

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant.

### II.2.3 Lemme.

Soit  $\{(\underline{a}_{-\alpha}, \underline{b}_{-\alpha}) \mid \alpha \in E_1\}$  l'ensemble des facteurs issus du premier groupe. Pour  $m \in S$  (resp.  $n \in S$ ) désignons par  $a_{m\alpha}$  (resp.  $b_{n\alpha}$ ) la  $i^{\text{ème}}$  (resp.  $j^{\text{ème}}$ ) composante de  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}$ ) pour  $i \in I_m$  (resp.  $j \in J_n$ ), et posons :

$$T(m,n) = 1 + \sum \{(\lambda_\alpha)^{1/2} a_{m\alpha} b_{n\alpha} \mid \alpha \in E_1\}$$

$\lambda_\alpha$  désignant la valeur propre associée au facteur  $\alpha$ .

On a alors, en désignant toujours pas  $p_I = \{p_i \mid i \in I\}$  et  $p_J = \{p_j \mid j \in J\}$  les lois marginales de  $P$ , et en conservant les notations définies par (6) :

$$(35) \quad \forall i \in I_m : p_{in} = p_i \cdot p_{.n} T(m,n)$$

$$(36) \quad \forall j \in J_n : p_{mj} = p_m \cdot p_{.j} T(m,n)$$

$$(37) \quad p_{mn} = p_m \cdot p_{.n} T(m,n)$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in I_m : p_{im} = p_i \cdot p_{.m} T(m,m) \\ \forall j \in J_n : p_{nj} = p_n \cdot p_{.j} T(n,n) \\ p_{mm} = p_m \cdot p_{.m} T(m,m) \\ p_{nn} = p_n \cdot p_{.n} T(n,n) \end{array} \right.$$

N.B. : Les formules précédentes supposent essentiellement que les ensembles  $I_m, I_n, J_m, J_n$  intervenant sont non vides. Si  $I_m$  par exemple est vide,  $T(m,n)$  et  $T(m,m)$  ne sont pas définis puisque  $a_{m\alpha}$  n'est plus défini ; on pourra alors poser par convention  $a_{m\alpha} = 0$  (auquel cas  $T(m,m) = T(m,n) = 1$ ) et avec les conventions adoptées au § I.5, les formules (35) à (38) resteront valables puisque cela revient à attribuer une masse nulle aux ensembles vides. Nous supposons donc dans la démonstration du lemme que les ensembles qui interviennent sont non vides.

Démonstration du lemme.

Supposons les relations (35) et (36) démontrées, alors (37) se déduit de (35) en sommant  $i$  sur  $I_m$ , tandis que les relations (38) se déduisent des relations (35) à (37) en faisant  $m = n$ . Il nous reste à montrer que les relations (35) et (36) sont vérifiées.

Pour cela, on va se servir de la formule de reconstitution des données qui s'écrit :

$$\forall i \in I_m, \forall j \in J_n :$$

$$(39) \quad p_{ij} = p_i \cdot p_{\cdot j} \left\{ T(m,n) + \sum \{ (\lambda_\alpha)^{1/2} a_{i\alpha} b_{j\alpha} \mid \alpha \in E_2 \} \right\}$$

$E_2$  désignant, rappelons le, l'ensemble des facteurs du second groupe.

Deux cas sont à considérer suivant que  $m$  est ou non égal à  $n$ .

1<sup>er</sup> cas :  $m \neq n$ .

Dans ce cas, le produit  $a_{i\alpha} b_{j\alpha}$  est toujours nul pour  $\alpha \in E_2$ . En effet, soit  $\underline{a}_\alpha$  est de support  $I_m$ , auquel cas  $\underline{b}_\alpha$  est de support  $J_m$  et donc  $b_{j\alpha} = 0$  puisque  $j \in J_n \neq J_m$ ; soit  $\underline{a}_\alpha$  est de support  $I_k$  ( $k \in S, k \neq m$ ) auquel cas  $a_{i\alpha} = 0$  (puisque  $i \in I_m$ ).

On a alors, d'après (39)

$$(40) \quad p_{ij} = p_i \cdot p_{\cdot j} T(m,n)$$

d'où l'on déduit (35) (resp. (36)) en sommant (40) sur  $j$  (resp.  $i$ ) pour  $j$  (resp.  $i$ ) décrivant  $J_n$  (resp.  $I_m$ ).

2<sup>ème</sup> cas :  $m = n$  .

Dans ce cas le produit  $a_{i\alpha} b_{j\alpha}$  ( $\alpha \in E_2$ ) n'est différent de zéro que pour les facteurs tels que  $\frac{a}{\alpha}$  est de support  $I_m$  et donc  $\frac{b}{\alpha}$  est de support  $J_m$  .

Si l'on somme (39) (où  $m = n$ ) pour  $j$  (resp.  $i$ ) décrivant  $J_m$  (resp.  $I_m$ ) la contribution des facteurs précédents est nulle puisqu'ils sont de moyenne nulle (i.e. orthogonaux au facteur constant), et on retrouve la relation (35) (resp. (36)) avec  $m = n$  .

c.q.f.d.

#### II.2.4 Démonstration du théorème 1.

Posons

$$S_s = S$$

$$(41) \quad \forall m, n \in S_s \quad : \quad q_{mn}^s = p_{mn}$$

$$\forall n \in S_s$$

$$(42) \quad - \text{ si } I_n \times J_n \neq \emptyset : \forall i \in I_n, \forall j \in J_n : p_{ij}^n = p_{ij}/p_{nn}$$

$$(43) \quad - \text{ si } I_n \neq \emptyset, J_n = \emptyset, \forall i \in I_n : p_{i\cdot}^n = p_{i\cdot}/p_{n\cdot}$$

$$(44) \quad - \text{ si } I_n = \emptyset, J_n \neq \emptyset, \forall j \in J_n : p_{\cdot j}^n = p_{\cdot j}/p_{\cdot n}$$

Pour qu'on ait une correspondance hiérarchique à un niveau, il suffit de montrer que les relations (2), (4), (33), (34) (où l'on fait  $n = s$ ,  $I_n = I_s = I$ ,  $J_n = J_s = J$ ) sont vérifiées, ce qui revient à montrer que :

$$\forall n \in S_s :$$



$$(45) \quad - \text{ si } I_n \times J_n \neq \emptyset : \forall i \in I_n, \forall j \in J_n : p_{ij} = p_{ij}^n q_{nn}^s$$

$$(46) \quad - \text{ si } I_n \neq \emptyset, J_n = \emptyset : \forall i \in I_n : p_{i\cdot} = p_{i\cdot}^n q_{n\cdot}^s$$

$$(47) \quad - \text{ si } I_n = \emptyset, J_n \neq \emptyset : \forall j \in J_n : p_{\cdot j} = p_{\cdot j}^n q_{\cdot n}^s$$

$$- \forall m, n \in S_s, m \neq n, \text{ si } I_m \times J_n \neq \emptyset :$$

$$(48) \quad \forall i \in I_m, \forall j \in J_n : p_{ij} = p_{i\cdot}^m p_{\cdot j}^n q_{mn}^s$$

La relation (45) se déduit immédiatement des relations (41) et (42) où l'on fait  $m = n$ . Par ailleurs l'on déduit de (41) que  $q_{m\cdot}^s = p_{m\cdot}$ ,  $q_{\cdot n}^s = p_{\cdot n}$  et donc  $q_{n\cdot}^s = p_{n\cdot}$ , ce qui joint aux relations (43) et (44) donne les relations (46) et (47).

Il reste à démontrer (48). Pour cela, on va calculer le second membre de cette relation et montrer qu'il est égal à  $p_{ij}$ .

Calculons d'abord  $p_{i\cdot}^m$  et  $p_{\cdot j}^n$ .

Sommant (42) pour  $i$  décrivant  $I_n$ , on obtient :

$$\forall j \in J_n : p_{\cdot j}^n = p_{nj}/p_{nn}$$

$$\text{De même, } \forall i \in I_m : p_{i\cdot}^m = p_{im}/p_{mm}.$$

Compte tenu de (41), on a donc :

$$(49) \quad p_{i\cdot}^m p_{\cdot j}^n q_{mn}^s = (p_{im} p_{nj} p_{mn}) / (p_{mm} p_{nn})$$

On déduit des relations (37) et (38) du lemme que le second membre de (49) est égal à  $p_{i\cdot} p_{\cdot j} T(m,n)$  quantité encore égale (puisque  $m \neq n$ ) à  $p_{ij}$  d'après (40) ce qui achève la démonstration.

### II.2.5 Conséquences du théorème 1.

Il résulte du théorème 1 et de la remarque située à la fin du § I.3.2. que la condition donnée dans le théorème 1 pour que  $P$  soit une correspondance hiérarchique à un niveau est aussi une condition nécessaire. On a donc :

Théorème 1 bis : Pour que  $P$  soit une correspondance hiérarchique à un niveau, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble caractéristique  $S$  associé à  $P$  et qu'on puisse trouver un système complet de facteurs non triviaux se répartissant suivant les deux groupes  $E_1$  et  $E_2$  définis dans le théorème 1. Si  $s$  désigne le sommet de la hiérarchie  $A$  associée à  $P$ , on a  $S_s = \text{Ter } A = S$ .

Remarque : Il résulte des propriétés données au § I.3 sur les correspondances hiérarchiques, ou directement du théorème 1 que si le tableau  $P$  vérifie les hypothèses de ce théorème, l'A.F.C. de  $P$  se réduit d'une part à l'A.F.C. des blocs non vides  $I_m \times J_n$  pour  $m$  appartenant à  $S$ , et d'autre part à l'A.F.C. du tableau  $Q^S$  dont l'élément  $q_{mn}^S$  ( $m \in S, n \in S$ ) est égal à la somme  $p_{mn}$  des éléments du bloc  $I_m \times J_n$ ,  $p_{mn}$  étant nul si  $I_m$  ou  $J_n$  est vide.

II.3 Cas où les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées avec deux ensembles caractéristiques S et S'.

II.3.1 Introduction.

On donne ici un théorème caractérisant les correspondances hiérarchiques P ayant un nombre de niveaux supérieurs à 1. Mais avant d'énoncer ce théorème, remarquons que si S et S' sont deux ensembles caractéristiques associés à P (ensembles dont on supposera toujours qu'ils ne comportent pas d'éléments triviaux),  $S \times S'$  est encore un ensemble caractéristique associé à P. Il suffit de poser :  $\forall m \in S, \forall m' \in S' : I_{(m,m')} = I_m \cap I_{m'}, J_{(m,m')} = J_m \cap J_{m'}$ . On désignera par  $(S \times S')^-$  l'ensemble des éléments non triviaux de  $S \times S'$ , i.e. l'ensemble  $S \times S'$  dont on a retiré les éléments  $(m,m')$  tels que  $I_m \cap I_{m'} = J_m \cap J_{m'} = \emptyset$ . Nous poserons enfin :

$$(50) \quad \begin{cases} T = \{m \mid m \in S, \exists m' \in S' : I_m \subset I_{m'}, J_m \subset J_{m'}\} \\ T' = \{m' \mid m' \in S', \exists m \in S : I_m \subset I_{m'}, J_m \subset J_{m'}\} \end{cases}$$

II.3.2 Théorème 2

Enoncé : Soit P un tableau de correspondance vérifiant les deux hypothèses suivantes :

1) Il existe deux ensembles caractéristiques S et S' ( $S \neq S'$ ) associés à P.

2) Pour chacun des deux ensembles S et S' les facteurs issus de l'A.F.C. de P vérifient les hypothèses du théorème 1.

Alors  $P$  peut être considéré comme une correspondance hiérarchique (au sens du modèle général du § I.5) associé à un arbre  $A$  de sommet  $s$  de plusieurs manières différentes :

a)  $P$  est une correspondance hiérarchique à un niveau, et l'on a :  
 $S_s = \text{Ter } A = S$ ,  $S_s$  désignant toujours l'ensemble des successeurs immédiats de  $s$ .

b)  $P$  est une correspondance hiérarchique à un niveau et l'on a :  
 $S_s = \text{Ter } A = S'$ .

c)  $P$  est une correspondance hiérarchique à un niveau et l'on a :  
 $S_s = \text{Ter } A = (S \times S')^{-}$ .

d)  $P$  est une correspondance hiérarchique ayant  $\text{Card } S+1 - \text{Card } T$  niveaux, avec  $S_s = S$ ,  $\text{Nod } A = s \cup (S-T)$ ,  $\text{Ter } A = (S \times S')^{-}$ ,  $T$  étant défini par (50).

e)  $P$  est une correspondance hiérarchique ayant  $\text{Card } S'+1 - \text{Card } T'$  niveaux, avec  $S_s = S'$ ,  $\text{Nod } A = s \cup (S'-T')$ ,  $\text{Ter } A = (S \times S')^{-}$ ,  $T'$  étant défini par (50).

### Démonstration

Les points a) et b) résultent du théorème 1.

Esquisons la démonstration du point c).

Pour cela nous désignerons par  $E_1$  et  $E_2$  (resp.  $E'_1$  et  $E'_2$ ) les deux groupes suivant lesquels se répartissent les facteurs de  $P$  quand on considère  $S$  (resp.  $S'$ ), les facteurs  $(\underline{a}, \underline{b})$  de  $E_1$  (resp.  $E'_1$ ) étant constants sur chaque classe  $I_m \times J_m$  ( $m \in S$  (resp.  $m \in S'$ )) tandis que les facteurs de  $E_2$  (resp.  $E'_2$ ) ont pour support une classe  $I_m \times J_m$  ( $m \in S$  (resp.  $m \in S'$ )). Posons :

$$(51) \quad \begin{cases} F_1 = (E_1 \cap E'_1) \cup (E_1 \cap E'_2) \cup (E'_1 \cap E_2) \\ F_2 = E_2 \cap E'_2 \end{cases}$$

Alors les facteurs issus de l'A.F.C. de  $P$  se répartissent suivant les deux groupes  $F_1$  et  $F_2$ , et il est aisé de montrer que tout couple de facteurs  $(\underline{a}, \underline{b})$  de  $F_1$  est constant sur les classes  $I_{(m, m')} \times J_{(m, m')}$  ( $(m, m') \in (S \times S')^{-}$ ) tandis que tout couple de facteurs  $(\underline{a}, \underline{b})$  de  $F_2$  a pour support une classe de la forme  $I_{(m, m')} \times J_{(m, m')}$  avec  $(m, m') \in (S \times S')^{-}$ . Du théorème 1 découle alors le point c).

Démontrons le point d).

Posons  $S_s = S$  et considérons le tableau  $Q^s$  défini par (41), ainsi que les lois  $P^n$ , (si  $I_n$  et  $J_n$  sont non vides),  $P_{I_n}^n$  (si  $I_n \neq \emptyset$ ,  $J_n = \emptyset$ ),  $P_{J_n}^n$  (si  $I_n = \emptyset$ ,  $J_n \neq \emptyset$ ) associés à chaque élément  $n$  de  $S_s$  et données respectivement par les relations (42) à (44), lois qui font de  $P$  une correspondance hiérarchique à un niveau.

Notons d'abord que si  $n$  appartient à  $T$ , l'ensemble des  $\{(n, m) | (n, m) \in (S \times S')^{-}\}$  se réduit à l'élément  $(n, n')$  tel que  $I_n \subset I_{n'}$ ,  $J_n \subset J_{n'}$ . On considèrera alors que  $n$  est un terminal de la hiérarchie associée à  $P$  et dont on va montrer l'existence. Pour montrer que  $P$  est une correspondance à  $\text{Card } S + 1 - \text{Card } T$  niveaux dont l'ensemble des terminaux est  $(S \times S')^{-}$ , et l'ensemble des noeuds  $s \cup (S - T)$ , il suffit de montrer que la correspondance  $P^n$  associée à chaque élément  $n$  de  $S - T$  est une correspondance hiérarchique à un niveau de sommet  $n$ , et telle que

$$(52) \quad S_n = \{(n, n') \mid n' \in S', (n, n') \in (S \times S')^{-}\}$$

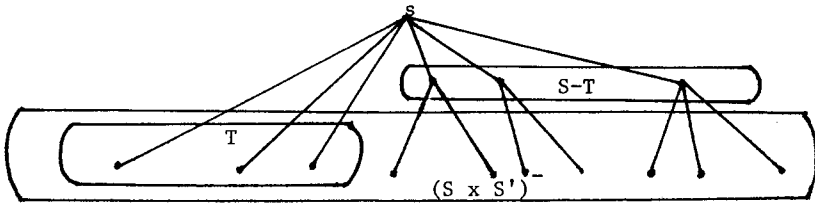


Figure 2

Trois cas peuvent se présenter.

1<sup>er</sup> cas :  $I_n \neq \emptyset$  ,  $J_n = \emptyset$  .

Soit  $t = (n, n') \in (S \times S')^{-}$  , alors  $I_t = I_n \cap I_{n'}$  est non vide, et il suffira de poser :

$$\forall i \in I_t : p_{i.}^t = p_{i.}^n / p_t.$$

$$q_{t.}^n = p_t.$$

pour que le modèle de correspondance hiérarchique (i.e. ici la relation (33) où il faut remplacer  $m$  par  $t$  ) soit vérifié.

2<sup>ème</sup> cas :  $I_n = \emptyset$  ,  $J_n \neq \emptyset$  .

Ce cas se traite de façon analogue au cas précédent.

3<sup>ème</sup> cas :  $I_n \neq \emptyset$  ,  $J_n \neq \emptyset$  .

Pour démontrer que  $P^n$  est une correspondance hiérarchique à un niveau, de sommet  $n$  , et telle que l'ensemble  $S_n$  des successeurs immédiats de  $n$  soit défini par (52), il suffit de montrer que  $P^n$  satisfait aux conditions du théorème 1, où  $S$  est remplacé par  $S_n$  . Or il est facile de voir à l'aide de (42), et de la formule de reconstitution des données appliquée à  $P$  que les facteurs  $(\underline{a}^n, \underline{b}^n)$  non triviaux issus de l'A.F.C.

de  $P^n$  correspondent aux facteurs non triviaux  $(\underline{a}, \underline{b})$  issus de l'A.F.C. de  $P$ , et de support  $I_n \times J_n$ , facteurs qui appartiennent à  $E_2$ .  $\underline{a}^n$  (resp.  $\underline{b}^n$ ) est proportionnel au sous-vecteur  $\underline{a}_n$  de  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}_n$  de  $\underline{b}$ ) qui correspond au support de  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}$ ), le coefficient de proportionalité étant donné par (19) (où il faut remplacer  $m$  par  $n$ ).

Deux possibilités se présentent :

a)  $(\underline{a}, \underline{b}) \in E_1'$  : dans ce cas  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}$ ) est constant sur les classes non vides  $I_m$  (resp.  $J_m$ ) pour  $m \in S'$ ; il en résulte que pour les éléments  $(n, m)$  de  $S_n$ ,  $\underline{a}^n$  (resp.  $\underline{b}^n$ ) est constant sur la classe  $I_{(n, m)} = I_n \cap I_m$  (resp.  $J_{(n, m)} = J_n \cap J_m$ ) si du moins cette classe est non vide,  $I_{(n, m)}$  et  $J_{(n, m)}$  n'étant pas simultanément non vides, puisque, par définition de  $S_n$ ,  $(n, m) \in (S \times S')^-$ .

b)  $(\underline{a}, \underline{b}) \in E_2'$  : dans ce cas, il existe  $m \in S'$  tel que  $(\underline{a}, \underline{b})$  ait son support dans la classe  $I_m \times J_m$ . Il en résulte que  $(\underline{a}, \underline{b})$  et donc  $(\underline{a}^n, \underline{b}^n)$  a son support contenu dans  $(I_n \cap I_m) \times (J_n \cap J_m)$  qui est donc non vide, ce qui implique que  $m$  appartient à  $S_n$ .

Le tableau  $P^n$  satisfait donc aux conditions du théorème 1, ce qui achève la démonstration du point d). Le point e) se démontrant de façon analogue, après interversion des rôles de  $S$  et  $S'$ , le théorème 2 est démontré.

### II.3.3. Recherche d'autres arbres associés à $P$ , quand les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées.

Dans le théorème 2, on associe à la correspondance  $P$  plusieurs hiérarchies à un niveau. On peut se poser la question de savoir s'il existe une hiérarchie à un niveau associée à  $P$  ayant le moins de terminaux

(ou de classes) possibles, i.e. donnant la séparation la moins fine possible. Si une telle hiérarchie  $A$  existe, on peut se poser la même question pour chaque correspondance  $P^n$  associée aux terminaux de  $A$ , puis continuer la procédure pour chacune des correspondances définies aux terminaux de la hiérarchie associée à  $P_n$  etc... Le but de cette procédure est d'essayer d'associer à  $P$  la hiérarchie permettant d'aller du niveau de séparation le plus grossier, au niveau de séparation le plus fin.

Supposant les conditions du théorème 2 vérifiées, nous allons donner trois théorèmes permettant de trouver d'autres ensembles caractéristiques associés à  $P$  que  $S, S', (S \times S')^-$  et vérifiant les conditions du théorème 1 ; le troisième théorème permettant de trouver la partition la plus grossière de  $I \times J$ , vérifiant les conditions du théorème 1.

Théorème 3 : On suppose que les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées :

1) Considérons un couple  $(n, n') \in (S \times S')^-$  tel que  $I_n \cap I_{n'}$  et  $J_n \cap J_{n'}$  sont non vides. Posons

$$(53) \quad \begin{cases} n'' = n \cup n' \\ I_{n''} = I_n \cup I_{n'} \\ J_{n''} = J_n \cup J_{n'} \\ S'' = \{(k, k') \mid (k, k') \in (S \times S')^-, k \neq n, k' \neq n'\} \\ v = n'' \cup S'' \end{cases}$$

alors  $v$  est un ensemble caractéristique associé à  $P$  vérifiant les conditions du théorème 1.

2) Soit  $n$  un élément de  $S$ . Posons :



$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} T'_n = \{n' \in S' \mid \bar{I}_n \cap I_{n'} \neq \emptyset, J_n \cap J_{n'} \neq \emptyset\} \\ I_{n'} = \cup \{I_m \mid m' \in T'_n\} \\ J_{n'} = \cup \{J_m \mid m' \in T'_n\} \\ I_{n''} = I_n \cup I_{n'} \\ J_{n''} = J_n \cup J_{n'} \\ S'' = \{(k, k') \mid (k, k') \in (S \times S')^-, k \neq n, k' \notin T'_n\} \\ v' = n' \cup (S' - T'_n) \\ v'' = n'' \cup S'' \end{array} \right.$$

$n'$  (resp.  $n''$ ) désignant l'élément associé au couple  $(I_{n'}, J_{n'})$  (resp.  $(I_{n''}, J_{n''})$ ).

Alors  $v$  et  $v'$  sont des ensembles caractéristiques associés à  $P$  vérifiant les conditions du théorème 1.

Démonstration.

On garde les notations définies au début de la démonstration du théorème 2. Démontrons le premier point.

Soit  $(\underline{a}, \underline{b})$  un couple de facteurs issus de l'A.F.C. de  $P$ ; quatre cas sont à envisager :

a)  $(\underline{a}, \underline{b}) \in E_1 \times E_1'$ , auquel cas, compte tenu de ce que  $I_n \cap I_{n'} \neq \emptyset$ ,  $J_n \cap J_{n'} \neq \emptyset$ ,  $(\underline{a}, \underline{b})$  est constant sur  $I_{n''} \times J_{n''}$ ; de plus, d'après la démonstration du point c) du théorème 2,  $(\underline{a}, \underline{b})$  est constant sur  $I_m \times J_m$  pour  $m \in (S \times S')^-$  donc pour  $m \in S''$ .  $(\underline{a}, \underline{b})$  est donc constant sur  $I_m \times J_m$  pour  $m \in v$ .

b)  $(\underline{a}, \underline{b}) \in E_1 \cap E_2'$  .

Soit  $(I_m, x J_m)$  ( $m' \in S'$ ) le support de  $(\underline{a}, \underline{b})$  . Alors,

- si  $m' \neq n'$  ,  $(\underline{a}, \underline{b})$  étant nul sur  $I_{n'} \times J_{n'}$  , et constant sur  $I_n \times J_n$  est nul sur  $I_n \times J_n$  (puisque  $I_n \cap I_{n'} \neq \emptyset$  ,  $J_n \cap J_{n'} \neq \emptyset$  ) et donc sur  $I_{n''} \times J_{n''}$  . De plus, d'après la démonstration du théorème 2,  $(\underline{a}, \underline{b})$  est constant sur  $I_m \times J_m$  pour  $m \in (S \times S')^-$  donc pour  $m \in S''$  . Il en résulte que  $(\underline{a}, \underline{b})$  est constant sur  $I_m \times J_m$  pour  $m \in \nu$  .

- si  $m' = n'$  ,  $(\underline{a}, \underline{b})$  a pour support  $I_{n'} \times J_{n'}$  ; le support de  $(\underline{a}, \underline{b})$  est donc contenu dans  $I_{n''} \times J_{n''}$  .

c)  $(\underline{a}, \underline{b}) \in E_2 \cap E_1'$  .

Ce cas se traite comme le cas b) après interversion des rôles de  $n$  et  $n'$  d'une part, de  $S$  et  $S'$  d'autre part.

d)  $(\underline{a}, \underline{b}) \in E_2 \cap E_2'$  .

Dans ce cas, il est facile de voir que  $(\underline{a}, \underline{b})$  a pour support  $I_m \times J_m$  pour un élément  $m$  de  $\nu$  .

Les facteurs issus de l'A.F.C. de  $P$  se divisent donc suivant les 2 groupes définis dans le théorème 1, où il faut replacer  $S$  par  $\nu$  , ce qui achève la démonstration du point 1) du théorème 3. Le point 2) se démontre de façon analogue.

Corollaire : Supposons les hypothèses du théorème 2 vérifiées, et soit un couple  $(n, n') \in (S \times S')^-$  tel que  $I_n \cap I_{n'} \neq \emptyset$  ,  $J_n \cap J_{n'} \neq \emptyset$  . Alors  $P$  peut être considérée comme une correspondance hiérarchique associée à un arbre  $A$  de sommet  $s$  de plusieurs façons différentes.

On a, en conservant les notations définies par (53) et en supposant que  $(I_n \cap I_{n'} , J_n \cap J_{n'}) \neq \{(I_n, J_n) , (I_{n'} , J_{n'})\}$  :

- a) P est une correspondance hiérarchique à un niveau, et  $S = \text{Ter } A = v$ .
- b) P est une correspondance hiérarchique à deux niveaux et,  $S_s = v$ ,  $\text{Nod } A = \{s, n''\}$ ,  $\text{Ter } A = n \cup [(S-n) \times n']^- \cup S''$ . \*
- c) P est une correspondance hiérarchique à trois niveaux et  $S_s = v$ ,  $\text{Nod } A = \{s, n'', n\}$ ,  $\text{Ter } A = (S \times S')^-$ .
- d) P est une correspondance hiérarchique à deux niveaux et  $S_s = v$ ,  $\text{Nod } A = \{s, n''\}$ ,  $\text{Ter } A = n' \cup [n \times (S'-n')]^- \cup S''$ . \*
- e) P est une correspondance hiérarchique à trois niveaux et  $S_s = v$ ,  $\text{Nod } A = \{s, n'', n'\}$ ,  $\text{Ter } A = (S \times S')^-$ .

Supposons maintenant que  $I_n \subset I_{n'}$ ,  $J_n \subset J_{n'}$ , alors les points a) et b) restent valables (avec  $n'' \equiv n'$ ).

De même si  $I_n \subset I_n$ ,  $J_n \subset J_n$ , les points a) et d) restent valables (avec  $n'' \equiv n$ ).

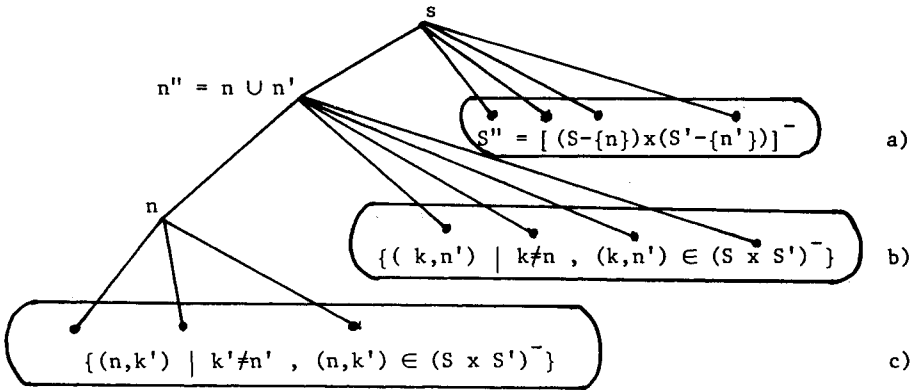
Démonstration :

Le point a) résulte immédiatement des théorèmes 1 et 3. Les autres propriétés découlent du point d) (ou e)) du théorème 2 et du théorème 3 en croisant  $v$  avec  $S$  (point b)), puis le résultat avec  $S'$  (point c)) ou en croisant d'abord  $v$  avec  $S'$  (point d)), puis le résultat avec  $S$  (point e)).

La figure 3 illustre les points a), b), c) du corollaire, les points d) et e) s'en déduisant en inversant les rôles de  $n$  et  $n'$

---

(★)  $[R]^-$  signifie que l'on ne considère que les éléments non triviaux de  $R$ , i.e. les éléments différents de  $(\emptyset, \emptyset)$ .



L'arbre du a) correspond à l'arbre obtenu en ne subdivisant pas  $n''$ , i.e. en considérant  $n''$  comme un terminal.

L'arbre du b) correspond à l'arbre obtenu en ne subdivisant pas  $n$ , qui est alors considéré comme un terminal.

L'arbre du c) correspond à l'arbre représenté ici. Cette représentation suppose que  $n''$  est différent de  $n$  ou de  $n'$ . Si  $n'' = n'$  (i.e.  $I_n \subset I_{n'}$ ,  $J_n \subset J_{n'}$ ), on ne peut plus subdiviser  $n$ , l'ensemble des  $\{n, k'\}$  de  $(S \times S')^-$  avec  $k' \neq n'$  étant vide. Dans ce cas l'arbre du c) n'existe pas.

Illustration des points a), b), c)  
du corollaire du théorème 3.

Figure 3

Théorème 4 : Soit  $n$  un élément de  $S$ . On considère les deux suites d'ensembles  $T_n^k$  et  $T_n'^k$  suivantes :

$$T_n^0 = \{n\}$$

$$T_n'^1 = \{m' \mid m' \in S' : I_n \cap I_{m'} \neq \emptyset ; J_n \cap J_{m'} \neq \emptyset\}$$

$$T_n^1 = \{m \mid m \in S : \exists m' \in T_n'^1 : I_m \cap I_{m'} \neq \emptyset ; J_m \cap J_{m'} \neq \emptyset\}$$

⋮

$$T_n'^k = \{m' \mid m' \in S', \exists m \in T_n^{k-1} : I_m \cap I_{m'} \neq \emptyset ; J_m \cap J_{m'} \neq \emptyset\}$$

$$T_n^k = \{m \mid m \in S, \exists m' \in T_n'^k : I_m \cap I_{m'} \neq \emptyset ; J_m \cap J_{m'} \neq \emptyset\}$$

alors

a) les suites  $T_n^k$  et  $T_n'^k$  sont croissantes et ont une limite que nous désignerons par  $T_n$  et  $T_n'$  respectivement.

b)  $\forall m \in T_n$ , on a  $T_m = T_n$ .

c) Posons :

$$I_1 = \cup \{I_k \mid k \in T_n\}$$

$$J_1 = \cup \{J_k \mid k \in T_n\}$$

$$I_2 = \cup \{I_k \mid k \in T_n'\}$$

$$J_2 = \cup \{J_k \mid k \in T_n'\}$$

alors si  $I_1 \neq I_2$  et si  $i \in I_1 \cap (I - I_2)$ , on a  $J_r \cap J_{r'} = \emptyset$ ,  $r$  ( $r \in T_n$ ) et  $r'$  ( $r' \in S' - T_n'$ ) désignant respectivement les éléments de  $S$  et  $S'$  tels que  $i \in I_r \cap I_{r'}$ .

On a une propriété analogue si  $J_1 \neq J_2$ , obtenue en intervertissant les rôles de  $I$  et  $J$ .

d)  $v = n_1'' \cup (S - T_n)$  et  $v' = n_2'' \cup (S' - T_n')$  sont deux ensembles caractéristiques associés à P et vérifiant les hypothèses du théorème 1,  $n_1''$  (resp.  $n_2''$ ) étant l'élément correspondant au couple  $(I_1, J_1)$  (resp.  $(I_2, J_2)$ ).

Démonstration :

a) Les suites  $T_n^k$  et  $T_n'^k$  étant croissantes par construction et respectivement contenues dans S et S' ont une limite.

b) Nous allons montrer que  $\forall r \in T_m, r \in T_n$  auquel cas  $T_m \subset T_n$ .  
 Invertissant les rôles de n et m, on a de même  $T_n \subset T_m$  d'où

$$T_n = T_m.$$

Montrons donc que  $T_m \subset T_n$ .

Soit k le plus petit entier tel que  $m \in T_n^k$ .

Alors il existe une série d'indices  $n_0 = n, n_1', n_1, n_2', n_2, \dots, n_k', n_k = m$  tels que  $n_i' \in T_n^i, n_i \in T_n^i$ , avec

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{n_i'} \cap I_{n_i} \neq \emptyset, \quad I_{n_i} \cap I_{n_{i+1}'} \neq \emptyset \\ J_{n_i'} \cap J_{n_i} \neq \emptyset, \quad J_{n_i} \cap J_{n_{i+1}'} \neq \emptyset \end{array} \right.$$

Soit  $r \in T_m$ . Deux cas peuvent se présenter :

- soit il existe un indice  $t \leq k$ , tel que  $r \in T_n^t$ , auquel cas  $r \in T_n$  puisque  $T_n^t \subset T_n$

- soit un tel indice n'existe pas. On peut alors, puisque  $r \in T_m$ , trouver une série d'indices  $n_k = m, n_{k+1}', n_{k+1}, \dots, n_{k+k}', n_{k+k} = r$  telle que (55) soit vérifiée. On en déduit puisque (55) est vérifiée à partir de  $n_0$  que

$$\forall n_i : 1 \leq i \leq k + k' : n_i \in T_n^i$$

et en particulier

$$n_{k+k'} = r \in T_n^{k+k'} \subset T_n$$

soit  $r \in T_n$  et donc  $T_m \subset T_n$ .

c.q.f.d.

c) Supposons que  $J_r \cap J_{r'} \neq \emptyset$ ; alors comme  $I_r \cap I_{r'} \neq \emptyset$  (puisque  $i$  y appartient), on a  $r' \in T_r'$ , et comme  $T_r = T_n$  (d'après b), et compte tenu de ce que  $r \in T_n$ ) l'on en déduit aisément que  $r' \in T_n$ , et donc que  $i \in I_2$  ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc  $J_r \cap J_{r'} = \emptyset$ .

d) Cette propriété se démontre aisément avec des arguments analogues à ceux utilisés pour prouver le théorème 3.

Remarque : Soit  $r$  et  $r'$  deux éléments de  $S$  et  $S'$  respectivement tels que  $J_r \cap J_{r'} = \emptyset$ ; alors on peut montrer (cf. § III), à l'aide de la notion d'ensembles associés que nous définirons au § III.1 que soit  $I_r \cap I_{r'} = \emptyset$ , soit  $I_r \cap I_{r'}$  se réduit à un élément  $\{i_0\}$ . Dans ce dernier cas, on peut toujours se ramener à avoir  $I_r \cap I_{r'} = \emptyset$ . Il suffit soit de remplacer  $(I_r, J_r)$  par  $(I_r - \{i_0\}, J_r)$  et  $(\{i_0\}, \emptyset)$ , soit de remplacer  $(I_{r'}, J_{r'})$  par  $(I_{r'} - \{i_0\}, J_{r'})$  et  $(\{i_0\}, \emptyset)$ .

Compte tenu de cette remarque, on peut toujours s'arranger pour faire en sorte que dans le point c) du théorème 4, on ait  $I_1 = I_2$  et  $J_1 = J_2$ , quitte à introduire dans  $T_n$  (ou dans  $T_n'$ ) des éléments  $m$  tels que  $(I_m = \{i_0\}, J_m = \emptyset)$  ou  $(I_m = \emptyset, J_m = \{j_0\})$ .

Dans ces conditions, on pourra à partir d'un élément  $m$  de  $S-T_n$  recommencer la construction effectuée dans le théorème 4, construction qui opérera sur  $I-I_1$  et  $J-J_1$  respectivement. Continuant le processus, on trouvera ainsi une partition de  $S$  et une partition de  $S'$  en  $k$  classes :  $S = (S_1, \dots, S_k)$ ,  $S' = (S'_1, \dots, S'_k)$  telles que :

$$\forall u = 1, \dots, k : \quad \cup \{I_r \mid r \in S_u\} = \cup \{I_{r'} \mid r' \in S'_u\}$$

$$\cup \{J_r \mid r \in S_u\} = \cup \{J_{r'} \mid r' \in S'_u\}$$

On désignera respectivement par  $I_{n''_u}$  et  $J_{n''_u}$  les deux ensembles précédents. On a alors le théorème suivant qui permet de répondre au problème posé au début de ce paragraphe.

Théorème 5 : L'ensemble  $R = (n''_1, n''_2, \dots, n''_k)$  est l'ensemble caractéristique le plus grossier  $\star$  associé à  $P$  et vérifiant les conditions du théorème 1.  $P$  est donc une correspondance hiérarchique à un niveau associée à un arbre  $A$  de sommet  $s$  tel que  $S_s = \text{Ter } A = R$ .

---

( $\star$ ) moyennant certaines conventions que nous n'expliciterons pas ici quant à l'affectation dans les  $S_u$  et  $S'_u$  d'éléments  $m$  tels que  $I_m = \{i_o\}$ ,  $J_m = \emptyset$  ou  $I_m = \emptyset$ ,  $J_m = \{j_o\}$ .



## II.4 Théorème 6 : Une autre caractérisation des correspondances hiérarchiques

### II.4.1 Théorème 6.

Pour qu'une correspondance  $P$  puisse être considérée comme une correspondance hiérarchique à un niveau, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble caractéristique  $S$  associé à  $P$  et tel que :

1)  $\forall m, m' \in S$ , si  $I_m$  et  $J_{m'}$  sont non vides, les marges du sous-tableau  $P_{mm'}$  de  $P$  croisant  $I_m$  avec  $J_{m'}$  sont proportionnelles aux marges restreintes à  $I_m$  et  $J_{m'}$  de  $P$ .

2)  $\forall m, m' \in S$ ,  $m \neq m'$ , si  $I_m$  et  $J_{m'}$  sont non vides, le sous-tableau  $P_{mm'}$  de  $P$  est un tableau produit (i.e. toutes les lignes de ce bloc sont proportionnelles et de même toutes les colonnes de ce bloc sont proportionnelles).

### II.4.2 Démonstration.

Condition nécessaire :

Supposons que  $P$  soit une correspondance hiérarchique associée à un arbre  $A$  de sommet  $s$ . Il suffit de prendre  $S_s = S$  et de tenir compte de relations (2), (4), (9) (où l'on fait  $n = s$ , et donc  $p_{ij}^n = p_{ij}$ ) pour en déduire les propriétés 1) et 2) du théorème.

Condition suffisante :

On prendra pour ensemble  $S_s$  l'ensemble  $S$ , et l'on va montrer que les relations (2), (4), (ou ce qui est équivalent (4 bis)) (33), (34) (relations où il faut remplacer  $n$  par  $s$ ) sont vérifiées, ce qui établira que  $P$  est une correspondance hiérarchique à un niveau de sommet  $s$ .

Soit  $(m, m')$  un couple d'éléments de  $S$  tels que  $I_m \times J_{m'}$  soit non vide. A la loi de probabilité sur  $I_m \times J_{m'}$  déduit de  $P$  en se limitant au bloc  $I_m \times J_{m'}$ , correspond, en gardant les notations définies par (6) le tableau  $P_{mm'}/p_{mm'}$ .

Traduisons d'abord l'hypothèse relative aux marges : la marge  $p_{I_m}^{(m,m')}$  de  $P_{mm'}/p_{mm'}$ , est proportionnelle à la marge sur  $I$  de  $P$  restreinte à  $I_m$ , marge que nous noterons  $p_{I_m}^m$ . Compte tenu de ce que  $p_{I_m}^{(m,m')}$  est une loi de probabilité, la constante de proportionnalité est égale à  $1/p_m$  et ne dépend donc pas de l'ensemble  $J_m$ , considéré. On pourra donc noter  $p_{I_m}^m$  au lieu de  $p_{I_m}^{(m,m')}$  et l'on a donc :

$$(56) \quad p_{I_m}^{(m,m')} = p_{I_m}^m = p_{I_m}^m / p_m.$$

De même la marge sur  $J_m$ ,  $p_{J_m}^{(m,m')}$  de  $P_{mm'}/p_{mm'}$ , ne dépend pas de  $m$ . On pourra donc la noter  $p_{J_m}^{m'}$  et l'on a donc :

$$(57) \quad p_{J_m}^{(m,m')} = p_{J_m}^{m'} = p_{J_m}^{m'} / p_{m'}.$$

$p_{J_m}^{m'}$  désignant la restriction de la marge sur  $J$ ,  $p_J$  de  $P$  à  $J_m$ .

Notons que si  $I_m = \emptyset$ ,  $J_m \neq \emptyset$ , (resp.  $I_m \neq \emptyset$ ,  $J_m = \emptyset$ ) la formule (57) (resp. (56)) reste valable puisqu'elle est indépendante de  $m$  (resp.  $m'$ ). Dans ce cas, au lieu d'associer au couple  $(m,m')$  la loi  $P_{mm'}/p_{mm'}$ , qui n'existe pas, on lui associera la loi  $p_{J_m}^{m'}$  (resp.  $p_{I_m}^m$ ).

Traduisons maintenant l'hypothèse que pour  $m \neq m'$  (et  $I_m \times J_m \neq \emptyset$ )  $P_{mm'}/p_{mm'}$  est une correspondance produit. Compte tenu de (56) et (57), on a pour  $m \neq m'$  :

$$(58) \quad P_{mm'}/p_{mm'} = \frac{p_{I_m}^{(m,m')}}{p_{I_m}^m} \frac{p_{J_m}^{(m,m')}}{p_{J_m}^{m'}} = p_{I_m}^m p_{J_m}^{m'}$$

Si maintenant  $I_m$  et  $J_m$  sont non vides, et si  $P^m$  désigne la loi de probabilité  $P_{mm}/p_{mm}$  sur  $I_m \times J_m$ , on a :

$$(59) \quad P_{mm}/p_{mm} = P^m$$

Il suffit d'associer à chaque couple  $(I_m, J_m)$  tel que  $I_m \times J_m \neq \emptyset$  la correspondance  $P^m$ , et de poser pour tout couple  $(m, m')$  d'éléments (distincts ou non) de  $S$ ,  $q_{mm'} = p_{mm'}$ , pour retrouver les relations (4 bis) (où il faut remplacer  $n$  par  $s$ , avec, rappelons-le,  $P^S = P$ ,  $Q^S = Q$ ) caractérisant une correspondance hiérarchique. Par ailleurs d'après la définition de  $Q = \{q_{mm'} \mid m \in S, m' \in S'\}$ , l'on déduit  $q_{m^*} = p_{m^*}$  (resp.  $q_{.m'} = p_{.m'}$ ), ce qui joint à la relation (56) (resp. (57)) montre que si  $I_m \neq \emptyset$ ,  $J_{m'} = \emptyset$  (resp.  $I_m = \emptyset$ ,  $J_{m'} \neq \emptyset$ ) la relation (33) (resp. (34)) (où il faut toujours remplacer  $n$  par  $s$ ) est vérifiée, ce qui achève la démonstration.

#### II.4.3 Remarques.

a) On peut affaiblir la condition 1) du théorème 6 en supposant que les marges du bloc  $I_m \times J_{m'}$  sont proportionnelles aux marges restreintes de  $P$  seulement pour  $m \neq m'$ . En effet, si tel est le cas, il est facile de vérifier qu'automatiquement les marges du bloc  $I_m \times J_m$  sont proportionnelles aux marges restreintes à  $I_m$  et  $J_m$  de  $P$ .

b) Il résulte des propriétés 1) (ou de la propriété plus faible donnée dans la remarque a) ci-dessus) et 2) du théorème 6 que pour tout bloc  $I_m \times J_{m'}$  non vide tel que  $m \neq m'$ , les lignes de ce bloc sont proportionnelles entre elles et à la marge sur  $J$  restreinte à  $J_{m'}$  de  $P$ . De même les colonnes de ce bloc sont proportionnelles entre elles et à la marge sur  $I$ , restreinte à  $I_m$  de  $P$ .

c) Comte tenu du théorème 1 bis, on déduit le corollaire suivant du théorème 6 :

Corollaire : Soit  $S$  un ensemble caractéristique associé à  $P$  . Pour que  $S$  vérifie les conditions de séparabilité en deux groupes des facteurs issus de l'A.F.C. de  $P$  , conditions précisées dans le théorème 1, il faut et il suffit que  $S$  vérifie les conditions 1) et 2) du théorème 6.

### III . Ensembles associés.

#### III.1 Définition et structures des ensembles associés.

##### III.1.1 Définition.

Soit  $P$  une correspondance sur  $I \times J$  .

On dira qu'un sous-ensemble  $I_k$  de  $I$  et un sous-ensemble  $J_k$  de  $J$  sont associés (pour  $P$ ) si :

1) il existe un ensemble caractéristique  $S$  associé à  $P$  , et vérifiant les conditions 1) et 2) du théorème 6 ;

2) il existe un élément  $n$  de  $S_k$  tel que  $I_k = I_n$  ,  $J_k = J_n$  .

Compte tenu du corollaire donné à la fin du § II.4.3, on peut dans la définition précédente remplacer la condition 1) par la condition 1') suivante :

1') il existe un ensemble caractéristique  $S$  associé à  $P$  et vérifiant les conditions du théorème 1.

Conséquence de la définition : si  $I_k$  et  $J_k$  sont associés, on déduit du théorème 1 que  $P$  est une correspondance hiérarchique à un niveau associée à un arbre  $A$  de sommet  $s$  tel que  $k$  appartient à l'ensemble  $S_s = S$  des successeurs immédiats de  $s$  .

##### III.1.2 Caractérisation des ensembles associés et premières propriétés.

Théorème 7 : Pour que deux sous-ensembles  $I_k$  et  $J_k$  soient associés, il faut et il suffit que soient vérifiées les deux conditions suivantes :

a) Si  $I_k$  et  $J - J_k$  sont non vides, tous les éléments  $j$  de  $J - J_k$  ont leurs colonnes restreintes à  $I_k$  proportionnelles entre elles et à la marge sur  $I$  restreinte à  $I_k$  de  $P$  .

b) Si  $I-I_k$  et  $J_k$  sont non vides, tous les éléments  $i$  de  $I-I_k$  ont leurs lignes restreintes à  $J_k$  proportionnelles entre elles et à la marge sur  $J$  restreinte à  $J_k$  de  $P$ .

Démonstration du théorème.

Condition nécessaire : Supposons donc qu'il existe un ensemble caractéristique  $S$  associé à  $P$ , vérifiant les conditions 1) et 2) du théorème 6 et tel qu'il existe un élément  $m$  de  $S$  avec  $I_k = I_m$ ,  $J_k = J_m$ . Montrons la condition a). Pour cela supposons que  $I_k$  et  $J-J_k$  sont non vides. Alors  $\forall m' \in S$ ,  $m' \neq m$ , si  $J_{m'}$  est non vide, le tableau  $I_m \times J_{m'}$  est un tableau produit dont toutes les colonnes sont proportionnelles entre elles et à la marge sur  $I_{p_{I_m}}$  restreinte à  $I_m$  (i.e.  $I_k$ ) de  $P$ . La réunion des  $J_{m'}$  précédents ( $m' \neq m$ ,  $J_{m'} \neq \emptyset$ ) étant  $J-J_k$ , le point a) du théorème 7 s'en déduit.

Le point b) de ce théorème se démontre de façon analogue, en considérant les tableaux  $I_{m'} \times J_m$  ( $m' \neq m$ ,  $I_{m'} \neq \emptyset$ ).

Condition suffisante :

Désignons par  $i_1, i_2, \dots, i_t$  les éléments de  $I-I_k$  et par  $j_1, j_2, \dots, j_n$  les éléments de  $J-J_k$ , et posons :

$$S = \{1, 2, \dots, t+n+1\}$$

avec :

$$\begin{aligned} \forall m \in S : \quad & 1 \leq m \leq t \Rightarrow I_m = \{i_m\} \quad , \quad J_m = \emptyset \\ & t+1 \leq m \leq t+n \Rightarrow I_m = \emptyset \quad , \quad J_m = \{j_{m-t}\} \\ & m = t+n+1 \Rightarrow I_m = I_k \quad , \quad J_m = J_k \end{aligned}$$

Nous allons montrer que  $S$  vérifie les conditions 1) et 2) du théorème 6, d'où l'on déduira que  $I_k$  et  $J_k$  sont associés.

En effet, les seuls tableaux  $I_m \times J_{m'}$ , ( $m \in S$ ,  $m' \in S$ ) non vides et différents d'un tableau  $1 \times 1$  pour lequel les conditions 1) et 2) du théorème 6 sont trivialement vérifiées sont :

soit des tableaux de la forme  $\{i_m\} \times J_k$  avec  $i_m \in I - I_k$

soit des tableaux de la forme  $I_k \times \{j_{m'-t}\}$  avec  $j_{m'-t} \in J - J_k$

soit le tableau  $I_k \times J_k$ .

Les deux premiers types de tableaux vérifient la condition 1) du théorème 6, d'après les conditions a) et b) du théorème 7 ; de plus ces tableaux n'ayant qu'une ligne ou qu'une colonne vérifient trivialement la condition 2) du théorème 6.

Compte tenu de la remarque du § II.4.3.a), on en déduit que  $S$  vérifie bien les conditions du théorème 6, et donc que  $I_k$  et  $J_k$  sont associés.

Corollaire :

1)  $\forall i \in I$ ,  $\forall j \in J$  :  $\{i\}$  est associé au vide, et de même  $\{j\}$  est associé au vide.

2)  $\forall i \in I$ ,  $\forall j \in J$  :  $\{i\}$  est associé à  $\{j\}$ .

3) Si  $I_m$  (supposé non vide) est associé au vide ou à un ensemble  $J_m$  à un élément, toutes les lignes du sous-tableau  $I_m \times J$  sont proportionnelles. On peut donc remplacer le sous-tableau précédent par sa marge, sans changer les résultats de l'A.F.C. de  $P$ .

On a bien sûr un résultat analogue si  $J_m$  est associé au vide ou à un ensemble à un élément.

4) Si  $I_m$  est associé à  $J$  tout entier, alors le complémentaire  $I - I_m$  de  $I_m$  est formé de lignes proportionnelles entre elles et à la marge

sur  $J_{p_j}$  de  $P$ . L'A.F.C. du sous-tableau  $I_m \times J$  est alors identique (à un coefficient de proportionnalité près) à l'A.F.C. du tableau  $P$  tout entier. On pourra donc supprimer toutes les lignes de  $I - I_m$ .

De même si  $J_m$  est associé à  $I$ , on pourra supprimer toutes les colonnes de  $J - J_m$  sans changer les résultats de l'A.F.C. de  $P$ .

5)  $I$  et  $J$  sont associés.

6)  $I_m = \emptyset$  et  $J_m = \emptyset$  sont associés.

Dans la suite, nous supposons qu'on a "nettoyé" le tableau  $P$  dans le sens où l'on a cumulé les lignes et les colonnes proportionnelles, et où l'on a éliminé les lignes ou les colonnes ayant le même profil que la marge correspondante de  $P$ .

Compte tenu des conventions précédentes, on peut remplacer les propriétés 3) et 4) du corollaire par la propriété suivante :

Soit  $(I_m, J_m)$  un couple d'ensembles associés, alors :

$$(3') : (60) \quad \text{Card } I_m \leq 1 \Leftrightarrow \text{Card } J_m \leq 1$$

$$(4') : (61) \quad I_m = I \Leftrightarrow J_m = J$$

Notons que (3') est encore équivalent à :

$$(3'') : (62) \quad \text{Card } I_m \geq 2 \Leftrightarrow \text{Card } J_m \geq 2$$



III.1.3 Recherche des ensembles  $J_m$  associés à un ensemble  $I_m$  donné.

On peut se poser la question suivante : étant donné un sous-ensemble  $I_m$  de  $I$ , existe-t'il un ou plusieurs sous-ensembles  $J_m$  de  $J$  qui lui soient associés, cette question ne présentant un intérêt, d'après les propriétés 1) et 2) du corollaire précédent que si  $I_m$  (ou  $J_m$ ) est de cardinal supérieur ou égal à 2. Le théorème suivant permet de répondre à la question précédente :

Théorème 8 : Pour qu'il existe un ou plusieurs sous-ensembles  $J_m$  associés à un sous-ensemble  $I_m$  de  $I$  donné, il faut et il suffit que soient vérifiées les deux conditions suivantes :

1) il existe des éléments  $j$  de  $J$  dont la colonne restreinte à  $I_m$  ait un profil proportionnel à la marge sur  $I$  restreinte à  $I_m$ ,  $p_{I_m}$  de  $P$ . On désignera par  $J'_m$  l'ensemble des  $j$  de  $J$  vérifiant la condition précédente, et par  $J_{pm}$  le complémentaire  $J - J'_m$  de  $J'_m$ .

2) si  $J_{pm}$  est non vide, toutes les lignes  $i$  de  $I - I_m$  restreintes à  $J_{pm}$  ont un profil proportionnel à la marge sur  $J$  restreinte à  $J_{pm}$ ,  $p_{J_{pm}}$  de  $P$ .

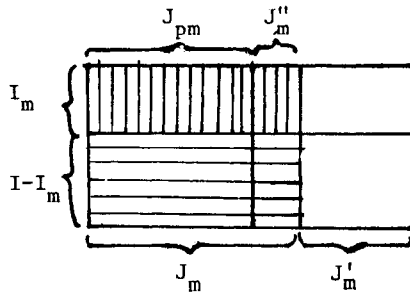
Dans ces conditions :

- a)  $J_{pm}$  est le plus petit sous-ensemble associé à  $I_m$ .
- b) s'il existe un sous-ensemble  $J_m$  de  $J$  associé à  $I_m$  et différent de  $J_{pm}$  (auquel cas  $J_{pm} \subset J_m$ ) alors  $J''_m = J_m - J_{pm}$  se réduit à un élément.
- c) si  $I_m$  comporte plus de 2 éléments, auquel cas  $J_{pm}$  est différent de l'ensemble vide, il existe au plus un second sous-ensemble  $J_m$ , différent de  $J_{pm}$  et associé à  $I_m$ .
- d) si  $I_m$  est vide, ou réduit à un élément,  $J_{pm}$  est vide, et tout sous-ensemble  $J_m$  réduit à un élément est encore associé à  $I_m$ .

Démonstration.

Compte tenu du théorème 7,  $J_{pm}$  est associé à  $I_m$ . Montrons que  $J_{pm}$  est bien le plus petit sous-ensemble associé à  $I_m$  : ou bien  $J_{pm}$  est vide, auquel cas c'est bien le plus petit sous-ensemble associé à  $I_m$ , ou bien  $J_{pm}$  est non vide. Dans ce dernier cas, si l'on retire un ou plusieurs éléments  $j$  de  $J_{pm}$ , la colonne  $j$  restreinte à  $I_m$  n'est pas proportionnelle à la marge sur  $I$  restreinte à  $I_m$  de  $P$ , puisque  $j \notin J'_m$ , et donc d'après le théorème 7,  $J_{pm} - \{j\}$  n'est pas associé à  $I_m$ .

Supposons maintenant qu'il existe un sous-ensemble  $J_m$  associé à  $I_m$  et différent de  $J_{pm}$ ; nous allons voir que  $J''_m = J_m - J_{pm}$  ne comporte qu'un élément. En effet, supposons que  $J''_m$  comporte au moins deux éléments.  $I_m$  étant associé à  $J_m$ , toutes les lignes du bloc  $(I-I_m) \times J_m$  sont proportionnelles à la marge sur  $J$  restreint à  $J_m$  de  $P$ , et donc toutes les lignes du bloc  $(I-I_m) \times J''_m$  sont proportionnelles à la marge sur  $J$ , restreinte à  $J''_m$ ,  $p_{J''_m}$  de  $P$ . Il en résulte que la marge sur  $J''_m$  du bloc  $I_m \times J''_m$  est proportionnelle à  $p_{J''_m}$ . Comme  $J''_m \subset J'_m$ , toutes les colonnes du bloc  $I_m \times J''_m$  sont proportionnelles; il en résulte que toutes les lignes de ce tableau sont proportionnelles entre elles, et donc



Les traits horizontaux ou verticaux indiquent que les lignes ou les colonnes correspondantes sont proportionnelles aux marges correspondantes de  $P$

Figure 4

à la marge sur  $J_m''$  de ce bloc qui est elle-même proportionnelle à  $p_{J_m''}$ .  
Finalement toutes les lignes du bloc  $I_m \times J_m''$  sont proportionnelles à  $p_{J_m''}$   
et donc toutes les lignes de  $I \times J_m''$  sont proportionnelles. On en déduit  
que toutes les colonnes de  $J_m''$  sont proportionnelles, ce qui n'est pas  
possible, puisqu'on a supposé qu'on avait regroupé toutes les colonnes  
proportionnelles ; donc  $J_m''$  ne comporte qu'un élément.

Supposons maintenant que  $I_m$  comporte au moins deux éléments (auquel  
cas, d'après la propriété 3'') du corollaire du théorème 7,  $J_{pm}$  comporte  
au moins deux éléments) et montrons qu'il ne peut pas exister un troisième  
sous-ensemble, différent de  $J_m$  et de  $J_{pm}$ , et associé à  $I_m$ . En effet,  
si un tel sous-ensemble existe, il est de la forme  $J_{pm} \cup \{j'\}$  avec  
 $j' \in J_m'$ . Désignons par  $j''$  l'unique élément dont est formé  $J_m''$   
( $J_m = J_{pm} \cup \{j''\}$  ;  $j'' \neq j'$ ). Alors il est immédiat de vérifier, compte  
tenu de ce que  $J_{pm}$  est non vide que toutes les lignes du bloc  
 $(I - I_m) \times (J_{pm} \cup \{j'\} \cup \{j''\})$  sont proportionnelles à la marge correspondante  
de  $P$ , d'où l'on déduit par un raisonnement analogue à celui utilisé pour  
montrer que  $J_m''$  se réduit à un élément, que les colonnes  $j'$  et  $j''$  sont  
proportionnelles, ce qui n'est pas possible. Il ne peut donc pas exister  
un troisième sous-ensemble différent de  $J_m$  et  $J_{pm}$  et associé à  $I_m$ .

Si maintenant  $I_m$  est vide ou réduit à un élément, la propriété d)  
se déduit immédiatement de la propriété 3') du corollaire du théorème 7.

Remarque : Dans le cas où  $I_m$  comporte au moins deux éléments, et où il  
existe deux sous-ensembles  $J_{pm}$  et  $J_m = J_{pm} \cup \{j''\}$  associés à  $I_m$ ,  
on peut montrer que la colonne  $j''$  est proportionnelle à la marge sur  $I$   
du bloc  $I \times J_{pm}$ .

III.1.4. Structure des ensembles associés.

Nous désignons par  $\nu$  l'ensemble des couples d'ensembles associés  $(I_m, J_m)$  de  $P$  ;  $\nu$  est donc un ensemble de parties de  $I \times J$ , dont le corollaire du théorème 7 (où il faut remplacer les propriétés 3) et 4) par les propriétés 3') et 4')) donne quelques propriétés. Nous allons, à l'aide des théorèmes 9, 10 et 11 préciser la structure de  $\nu$ ,  $I \times J$  étant muni des opérations classiques de la théorie des ensembles (réunion, intersection, complémentation).

III.1.4.1 Théorème 9.

Soient  $(I_m, J_m)$  et  $(I_n, J_n)$  deux éléments de  $\nu$ . On a les propriétés suivantes :

1) Si  $I_m \cap I_n = \emptyset$ , alors soit  $J_m \cap J_n = \emptyset$ , soit  $J_m \cap J_n$  se réduit à un élément  $j_o$ . Dans ce dernier cas, si  $J_m$  et  $J_n$  sont différents de  $j_o$ ,  $(I_m, J_m - \{j_o\})$ ,  $(I_n, J_n - \{j_o\})$  sont également des éléments de  $\nu$ . Si  $J_m$  (resp.  $J_n$ ) est égal à  $\{j_o\}$ , i.e. si  $J_m \subset J_n$  (resp.  $J_n \subset J_m$ ), alors  $I_m$  (resp.  $I_n$ ) se réduit à un élément  $\{i_o\}$  ou est vide, et donc  $(I_m, J_m - \{j_o\})$  (resp.  $(I_n, J_n - \{j_o\})$ ) appartient à  $\nu$ . Dans tous les cas, on pourra toujours supposer si  $I_m \cap I_n = \emptyset$  que  $J_m \cap J_n = \emptyset$  (quitte à enlever le cas échéant soit de  $J_m$  soit de  $J_n$ , l'unique élément de  $J_m \cap J_n$ ).

2)  $(I_m \cap I_n, J_m \cap J_n)$  appartient à  $\nu$ . En d'autres termes  $\nu$  est fermé pour l'intersection.

3) Si  $I_m \cap I_n \neq \emptyset$ , et si  $J_m \cap J_n \neq \emptyset$ , alors  $(I_m \cup I_n, J_m \cup J_n)$  appartient à  $\nu$ .

4) Supposons que  $I_m \subset I_n$ , alors :

a) si  $J_m \cap J_n = \emptyset$ ,  $I_m$  se réduit à un élément, ou est vide, de même pour  $J_m$ . Ce cas est donc trivial.

b) si  $J_m \cap J_n \neq (\emptyset, J_m, J_n)$ ,  $J_m \cap J_n^c$  se réduit à un élément  $j_0$  et  $I_m$  est aussi associé à  $J'_m = J_m - \{j_0\}$ . Si donc on considère  $(I_m, J'_m)$  au lieu de  $(I_m, J_m)$  on est ramené au cas où  $I_m \subset I_n$ ,  $J'_m \subset J_n$ .

c) si  $J_m \cap J_n = J_n$  (i.e.  $J_n \subset J_m$ )  $I_n - I_m$  se réduit à un élément  $i_0$  et de même  $J_m - J_n$  se réduit à un élément  $j_0$ . Dans ce cas  $(I_m, J_n)$  et  $(I_n, J_m)$  sont deux éléments de  $\nu$ . On pourra donc remplacer  $(I_m, J_m)$  et  $(I_n, J_n)$  par les deux éléments disjoints  $(I_m, J_n)$ ,  $(\{i_0\}, \{j_0\})$  de  $\nu$  ou par les trois éléments disjoints de  $\nu$ :  $(I_m, J_n)$ ,  $(\{i_0\}, \emptyset)$ ,  $(\emptyset, \{j_0\})$ , la réunion de ces éléments étant  $(I_n, J_m)$ , i.e. la réunion  $(I_m \cup I_n, J_m \cup J_n)$ .

Quel que soit le cas a), b), c) considéré ci-dessus, on pourra toujours si  $I_m \subset I_n$  se ramener (après élimination du cas trivial a)) au cas  $J_m \subset J_n$ .

5) Supposons que  $I_m \cap I_n$  soit différent de  $I_m$  ou de  $I_n$  et que de même  $J_m \cap J_n$  soit différent de  $J_m$  ou de  $J_n$ , alors  $(I_m \cap I_n^c, J_m \cap J_n^c)$  et  $(I_m^c \cap I_n, J_m^c \cap J_n)$  sont deux éléments de  $\nu$ . On peut donc remplacer les deux éléments  $(I_m, J_m)$ ,  $(I_n, J_n)$  de  $\nu$  par les trois éléments disjoints suivants de  $\nu$  dont la réunion est  $(I_m \cup I_n, J_m \cup J_n)$ :  $(I_m \cap I_n, J_m \cap J_n)$ ,  $(I_m \cap I_n^c, J_m \cap J_n^c)$ ,  $(I_m^c \cap I_n, J_m^c \cap J_n)$ . (Notons que parmi ces éléments, on peut avoir l'élément  $(\emptyset, \emptyset)$ ).

Si  $I_m \cap I_n$  et  $J_m \cap J_n$  sont non vides, on a alors une décomposition de  $(I_u = I_m \cup I_n, J_u = J_m \cup J_n)$  qui appartient à  $\nu$  en trois éléments disjoints de  $\nu$ .

(★) le signe  $c$  sert à désigner le complémentaire. Ainsi  $J_n^c$  est le complémentaire de  $J_n$  dans  $J$ .

Remarques.

a) Si  $J_m \cap J_n = \emptyset$ , ou si  $J_m \subset J_n$ , on obtient des propriétés analogues aux propriétés 1) et 4) précédentes, en intervertissant les rôles de  $I_m$  et  $J_m$  et ceux de  $I_n$  et  $J_n$ .

b) D'après le point 4)c) les résultats du point 5) restent valables si  $I_m \cap I_n = I_m$ ,  $J_m \cap J_n = J_n$ , ou si  $I_m \cap I_n = I_n$ ,  $J_m \cap J_n = J_m$ . Par contre les conclusions du point 5) ne sont plus valables si  $I_m \subset I_n$ ,  $J_m \subset J_n$ , car en général  $I_n - I_m$  et  $J_n - J_m$  ne sont pas associés.

c) Il résulte des points 1), 4), 5) de ce théorème que si  $(I_m, J_m)$  et  $(I_{m'}, J_{m'})$  sont deux éléments de  $\nu$ , on peut toujours se ramener à l'un des trois cas suivants, quitte à éliminer des couples  $(I_k, J_k)$  triviaux de  $\nu$ , i.e. tels que  $\text{Card } I_k \leq 1$ ,  $\text{Card } J_k \leq 1$  :

1<sup>er</sup> cas :  $I_m \cap I_{m'} = J_m \cap J_{m'} = \emptyset$

2<sup>eme</sup> cas :  $\text{Card } (I_m \cap I_{m'}) \geq 2$  ;  $\text{Card } (J_m \cap J_{m'}) \geq 2$   
 $(I_m \cap I_{m'}, J_m \cap J_{m'}) \in \{(I_m, J_m), (I_{m'}, J_{m'})\}$

3<sup>eme</sup> cas :  $\text{Card } (I_m \cap I_{m'}) \geq 2$  ;  $\text{Card } (J_m \cap J_{m'}) \geq 2$

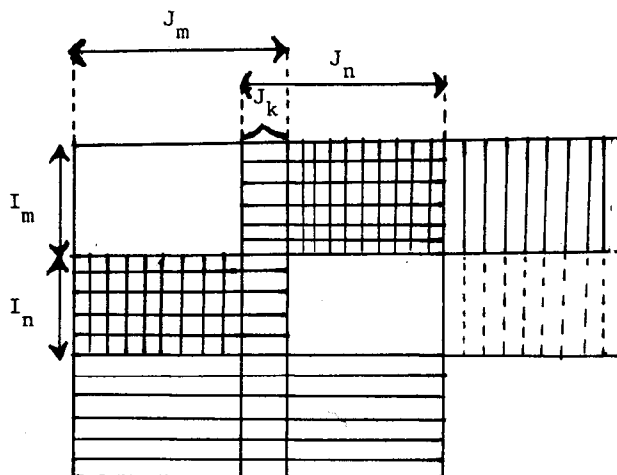
$I_m \cap I_{m'} \notin \{I_m, I_{m'}\}$  ;  $J_m \cap J_{m'} \notin \{J_m, J_{m'}\}$

dans ce cas, la décomposition fournie par le point 5) du théorème précédent correspond à une décomposition en trois couples d'ensembles associés non triviaux (i.e. tous les ensembles intervenant sont de cardinal supérieur ou égal à 2).

Démonstration du théorème 9.

Tous les points du théorème 9 se démontrent à partir du théorème 7. Nous ne démontrerons donc que les points 1), 2), 3), les autres se montrant par des raisonnements analogues.

Montrons le premier point : Supposons que  $I_m \cap I_n = \emptyset$ , et posons  $J_k = J_m \cap J_n$ . Si  $\text{Card } J_k \geq 2$ , on va voir que toutes les colonnes de  $J_k$  sont proportionnelles, ce qui n'est pas possible, puisqu'on a supposé qu'on avait cumulé au préalable de telles colonnes. En effet les lignes du bloc  $(I - I_m) \times J_k$  sont proportionnelles à la marge sur  $J$  restreintes à  $J_k$   $p_{J_k}$  de  $P$ , puisque  $J_k$  est contenu dans  $J_m$ . De même les lignes du bloc  $I_m \times J_k$  sont proportionnelles à  $p_{J_k}$ , puisque  $I_m$  est contenu dans  $I - I_n$  et  $J_k$  dans  $J_n$ . Toutes les lignes du tableau



Les traits horizontaux (en plein ou en pointillés) indiquent que les lignes ou colonnes correspondantes sont proportionnelles aux marges restreintes associées de  $P$ .

On a mis des pointillés quand le coefficient de proportionnalité avec la marge restreinte diffère d'un bloc à l'autre.

Cas  $I_m \cap I_n = \emptyset$ ,  $J_m \cap J_n = J_k \neq \emptyset$

Figure 5

$I \times J_k$  étant proportionnelles à  $p_{J_k}$  sont proportionnelles entre elles.

Il en résulte que toutes les colonnes de  $J_k$  sont proportionnelles, ce qui n'est pas possible.

$J_k$  est donc soit vide, soit réduit à un élément  $j_0$ . Supposons que  $J_k = \{j_0\}$  et que  $J_m$  et  $J_n$  sont différents de  $\{j_0\}$ . Toutes les lignes du bloc  $I_m \times J_n$  étant proportionnelles puisque  $I_m \subset I - I_n$ , toutes les colonnes de ce bloc le sont. Il en résulte en particulier que la restriction de  $j_0$  à  $I_m$  est proportionnelle aux colonnes du bloc  $I_m \times (J_m^c \cap J_n)$  (qui est non vide, puisque  $J_n \neq \{j_0\} = J_m \cap J_n$ ) colonnes elles-mêmes proportionnelles à la marge sur  $I$  restreinte à  $I_m$ ,  $p_{I_m}$  de  $P$ , puisque  $J_m^c \cap J_n \subset J - J_m$ . On en déduit immédiatement (cf. figure 5) que  $I_m$  est associé à  $J_m - \{j_0\}$ . De même  $(I_n, J_n - \{j_0\})$  appartient à  $\nu$ .

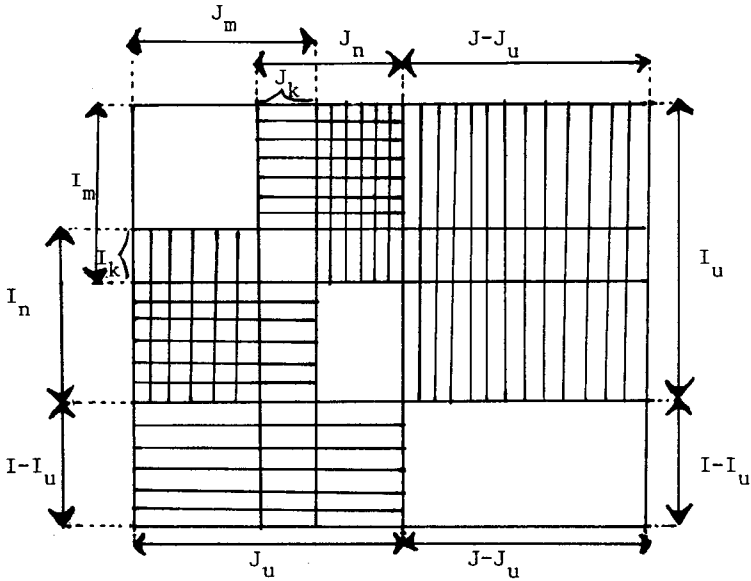
Si maintenant  $J_m = \{j_0\}$ , auquel cas  $J_m \subset J_n$ , d'après la propriété 3') du corollaire du théorème 7,  $I_m$  est soit réduit à un élément  $i_0$ , soit vide, et  $J_m - \{j_0\}$  qui est vide, est bien associé à  $I_m$ , ce qui termine la démonstration du point 1).

Démontrons le point 2).

Posons  $I_k = I_m \cap I_n$ ,  $J_k = J_m \cap J_n$ . Si  $I_k$  ou  $J_k$  est vide,  $(I_k, J_k)$  appartient à  $\nu$  d'après le point 1). Supposons donc que  $I_k$  et  $J_k$  sont non vides, et montrons qu'ils sont associés. Or toutes les lignes du bloc  $(I - I_k) \times J_k$  sont proportionnelles à la marge sur  $J$  restreinte à  $J_k$ ,  $p_{J_k}$  de  $P$ , puisque tout élément de  $I - I_k$  est soit un élément de  $I - I_m$  (avec  $J_k \subset J_m$ ), soit un élément de  $I - I_n$  (avec  $J_k \subset J_n$ ) (cf. figure 6). De même toutes les colonnes du bloc  $I_k \times (J - J_k)$  sont proportionnelles à la marge sur  $I$  restreinte à  $I_k$  de  $P$ , ce qui montre, d'après le théorème 7 que  $(I_k, J_k)$  appartient à  $\nu$ .



On voit également sur la figure 6 que  $I_u = I_m \cup I_n$  et  $J_u = J_m \cup J_n$  sont associés. En effet toutes les colonnes du bloc  $I_m \times (J-J_u)$  sont proportionnelles à la marge sur  $I$  restreinte à  $I_m$ ,  $p_{I_m}$  de  $P$  puisque  $J-J_u \subset J-J_m$ . De même toutes les colonnes du bloc  $I_n \times (J-J_u)$  sont proportionnelles à la marge sur  $I$  restreinte à  $I_n$ ,  $p_{I_n}$  de  $P$ , le coefficient de proportionnalité étant pour chaque colonne le même que l'on soit sur le bloc  $I_m \times (J-J_u)$  ou  $I_n \times (J-J_u)$  puisque  $I_m \cap I_n$  est non vide. Donc toutes les colonnes du bloc  $I_u \times (J-J_u)$  sont proportionnelles à la marge sur  $I$  restreinte à  $I_u$ ,  $p_{I_u}$  de  $P$ . De même toutes les lignes du bloc  $(I-I_u) \times J_u$  sont proportionnelles à la marge sur  $J$  restreintes à  $J_u$ ,  $p_{J_u}$  de  $P$ ; ce qui entraîne bien, d'après le théorème 7 que  $(I_u, J_u)$  appartient à  $\nu$ , et démontre le point 3).



Etude du cas où  $I_k = I_m \cap I_n$  et  $J_k = J_m \cap J_n$  sont non vides.

(pour la légende, cf. figure 4)

Figure 6

Nous allons maintenant donner un théorème précisant ce point 3) et qui nous sera utile au § III.2 quand on cherchera les facteurs issus de l'A.F.C. de  $P$ .

III.1.4.2 Théorème 10.

Avant d'énoncer ce théorème, donnons un lemme qui nous sera utile.

Lemme : Soit  $(I_m, J_m)$  un élément de  $\nu$ , et  $I_n$  et  $J_n$  deux ensembles tels que  $I_n \subset I_m$ ,  $J_n \subset J_m$ . Alors pour que  $(I_n, J_n)$  appartienne à  $\nu$ , il faut et il suffit que  $I_n$  et  $J_n$  soient associés dans le bloc  $I_m \times J_m$ .

Ce lemme résulte immédiatement du théorème 7.

Énonçons maintenant le théorème 10.

Théorème 10 : Soient  $(I_m, J_m)$  et  $(I_n, J_n)$  deux éléments de  $\nu$  tels que :

$$I_m \cap I_n \notin \{I_m, I_n, \emptyset\} \quad ; \quad J_m \cap J_n \notin \{J_m, J_n, \emptyset\}$$

Posons :

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{ll} I_\alpha = I_m \cap I_n^c & ; \quad J_\alpha = J_m \cap J_n^c \\ I_\beta = I_m \cap I_n & ; \quad J_\beta = J_m \cap J_n \\ I_\gamma = I_m^c \cap I_n & ; \quad J_\gamma = J_m^c \cap J_n \\ I_u = I_m \cup I_n & ; \quad J_u = J_m \cup J_n \\ K = \{\alpha, \beta, \gamma\} \end{array} \right.$$

On a alors, en conservant les notations définies par (6) :

$$1) \quad \forall (i,j) \in (I_\alpha \times J_\beta) \cup (I_\alpha \times J_\gamma) \cup (I_\beta \times J_\gamma) :$$

$$(64) \quad p_{ij} = x p_{iu} p_{uj} / p_{uu}$$

$$\forall (i,j) \in (I_\beta \times J_\alpha) \cup (I_\gamma \times J_\alpha) \cup (I_\gamma \times J_\beta) :$$

$$(65) \quad p_{ij} = y p_{iu} p_{uj} / p_{uu}$$

x et y étant deux nombres égaux à 1 si la relation

$$(66) \quad p_{\alpha u} p_{u\beta} p_{\gamma u} = p_{u\alpha} p_{\beta u} p_{u\gamma}$$

n'est pas vérifiée.

Si (66) est vérifiée, alors le couple (x,y) est une des solutions de l'équation

$$(67) \quad (x-1) p_{\alpha u} (p_{uu} - p_{u\alpha}) = (y-1) p_{u\alpha} (p_{uu} - p_{\alpha u})$$

2) Si  $x = y$  (ce qui est en particulier réalisé si (66) n'est pas vérifiée, ou si (66) étant vérifiée, on a  $p_{\alpha u} = p_{u\alpha}$ , auquel cas  $p_{\beta u} = p_{u\beta}$ ,  $p_{\gamma u} = p_{u\gamma}$ ), alors  $(I_\alpha \cup I_\gamma, J_\alpha \cup J_\gamma)$  est un élément de  $\nu$ .

Démonstration.

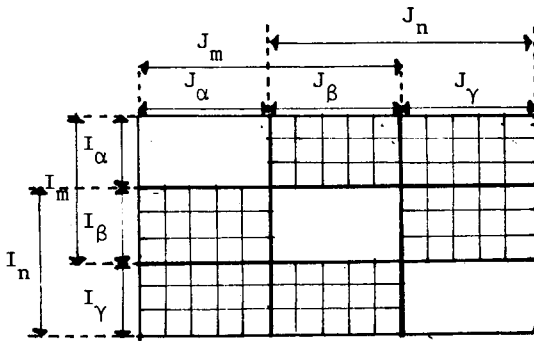
D'après les points 3) et 5) du théorème 9),  $(I_u, J_u)$ ,  $(I_\alpha, J_\alpha)$ ,  $(I_\beta, J_\beta)$ ,  $(I_\gamma, J_\gamma)$  appartiennent à  $\nu$ . Restreignons-nous au bloc  $I_u \times J_u$ . Dans ce bloc, d'après le lemme,  $I_\alpha$  et  $J_\alpha$  (resp.  $I_\beta$  et  $J_\beta$ ;  $I_\gamma$  et  $J_\gamma$ ) sont associés. De même  $I_m$  et  $J_m$ , ainsi que  $I_n$  et  $J_n$  sont associés dans ce bloc (avec  $I_m = I_\alpha \cup I_\beta$ ,  $I_n = I_\beta \cup I_\gamma$ ,  $J_m = J_\alpha \cup J_\beta$ ,  $J_n = J_\beta \cup J_\gamma$ ).  $I_\alpha$  et  $J_\alpha$  étant associés, toutes les colonnes du bloc  $I_\alpha \times J_n$  (cf. figure 7) sont proportionnelles à la marge sur  $I_u$  restreinte

à  $I_\alpha$  du bloc  $I_u \times J_u$ . Toutes les lignes du bloc  $I_\alpha \times J_n$  sont donc proportionnelles, et comme  $I_n$  et  $J_n$  sont associés, elles sont proportionnelles à la marge sur  $J_u$ , restreinte à  $J_n$  du bloc  $I_u \times J_u$ . La relation (64) est donc vérifiée sur le bloc  $I_\alpha \times J_n$ .

Considérons maintenant le bloc  $I_m \times J_\gamma$ ; compte tenu de ce que  $I_\gamma$  et  $J_\gamma$  sont associés, et qu'il en est de même de  $I_m$  et de  $J_m$ , on montre de la même façon que précédemment que pour tout élément  $p_{ij}$  de ce bloc, on a :  $p_{ij} = x' p_{iu} p_{uj} / p_{uu}$ , où  $x'$  est une constante. Comme les blocs  $I_\alpha \times J_n$  et  $I_m \times J_\gamma$  ont en commun le bloc  $I_\alpha \times J_\gamma$ , on a  $x' = x$ , et donc (64) est vérifiée.

On montre de la même façon la relation (65).

Pour trouver les valeurs de  $x$  et  $y$ , on va considérer le tableau  $R_{KK}$  (noté encore  $R$ ) qui est un tableau  $3 \times 3$  obtenu à partir du tableau  $I_u \times J_u$  en remplaçant chacun des 9 blocs de ce tableau par son total (par exemple l'élément  $r_{\alpha\beta}$  de  $R$  vaut :  $\sum \{p_{ij} \mid i \in I_\alpha, j \in J_\beta\}$  soit  $r_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}$  avec les notations définies par (6)).



Etude du bloc  $I_u \times J_u$  :

tous les blocs non diagonaux sont des blocs produits.

(pour la légende, cf. figure 4)

Figure 7

Compte tenu de (64) et de (65) les éléments non diagonaux de R s'écrivent :

$$(68) \quad \begin{cases} p_{\alpha\beta} = x p_{\alpha u} p_{u\beta} / p_{uu} & ; & p_{\alpha\gamma} = x p_{\alpha u} p_{u\gamma} / p_{uu} \\ p_{\beta\gamma} = x p_{\beta u} p_{u\gamma} / p_{uu} & ; & p_{\beta\alpha} = y p_{\beta u} p_{u\alpha} / p_{uu} \\ p_{\gamma\alpha} = y p_{\gamma u} p_{u\alpha} / p_{uu} & ; & p_{\gamma\beta} = y p_{\gamma u} p_{u\beta} / p_{uu} \end{cases}$$

Ecrivant que la somme des termes de la première ligne de R est égale à  $p_{\alpha u}$  et que de même la somme des éléments de la première colonne de ce tableau est égale à  $p_{u\alpha}$ , on obtient :

$$(69) \quad \begin{cases} p_{\alpha\alpha} + x p_{\alpha u} (p_{u\beta} + p_{u\gamma}) / p_{uu} = p_{\alpha u} \\ p_{\alpha\alpha} + y p_{u\alpha} (p_{\beta u} + p_{\gamma u}) / p_{uu} = p_{u\alpha} \end{cases}$$

Eliminant  $p_{\alpha\alpha}$  de ces deux équations, et compte tenu de ce que :

$$(70) \quad p_{\alpha u} + p_{\beta u} + p_{\gamma u} = p_{u\alpha} + p_{u\beta} + p_{u\gamma} = p_{uu}$$

on obtient la relation (67) :

$$(67) \quad (x-1) p_{\alpha u} (p_{uu} - p_{u\alpha}) = (y-1) p_{u\alpha} (p_{uu} - p_{\alpha u})$$

Opérant de même sur la troisième ligne et la troisième colonne de R, on obtient :

$$(71) \quad (x-1) p_{u\gamma} (p_{uu} - p_{\gamma u}) = (y-1) p_{\gamma u} (p_{uu} - p_{u\gamma})$$

Si le déterminant du système des deux équations (67) et (71) est non nul, on a un système de Cramer qui a une solution unique  $x = y = 1$ .

Si ce déterminant est nul, ou ce qui est équivalent, comme on peut le vérifier, si la relation (66) est vraie, il y a une infinité de solutions  $x$  et  $y$  étant liés par la relation (67) (ou par (71) qui est dans ce cas proportionnelle à (67)). On a ainsi démontré le point 1).

Remarques :

a) Les relations (67) et (71) ont été obtenues en considérant  $p_{\alpha\alpha}$  et  $p_{\gamma\gamma}$ . On aurait pu aussi obtenir une relation entre  $x$  et  $y$  en considérant  $p_{\beta\beta}$ . Cette relation se déduit des deux précédentes puisque la somme des termes de  $R$  est fixée et égale à  $p_{uu}$ .

b) Compte tenu de (70), les relations (69) peuvent encore se mettre sous la forme suivante, qui nous sera utile au § III.2.1 dans la démonstration du théorème 15 :

$$(69 \text{ bis}) \quad \begin{cases} p_{\alpha\alpha} = (1-x) p_{\alpha u} + x p_{\alpha u} p_{u\alpha} / p_{uu} \\ p_{\alpha\alpha} = (1-y) p_{u\alpha} + y p_{\alpha u} p_{u\alpha} / p_{uu} \end{cases}$$

Démontrons maintenant le second point.

Comme  $x = y$ , toutes les colonnes du bloc  $(I_\alpha \cup I_\gamma) \times J_\beta$  sont proportionnelles à la marge sur  $I_u$  restreinte à  $I_\alpha \cup I_\gamma$  du bloc  $I_u \times J_u$ , et de même toutes les lignes du bloc  $I_\beta \times (J_\alpha \cup J_\gamma)$  sont proportionnelles à la marge restreinte correspondante du bloc  $I_u \times J_u$  (cf. formules (64), (65) et figure 7).  $I_\alpha \cup I_\gamma$  et  $J_\alpha \cup J_\gamma$  sont donc associés dans le bloc  $I_u \times J_u$ . Comme  $(I_u, J_u)$  appartient à  $\nu$ , on déduit du lemme que  $(I_\alpha \cup I_\gamma, J_\alpha \cup J_\gamma)$  appartient à  $\nu$ .

c.q.f.d.

III.1.4.3 Généralisation (cf. figure 8).

Le théorème 10 se généralise aisément si l'on considère un nombre  $t$  supérieur à 2 d'éléments de  $\nu$  se coupant.

De façon précise soit  $(I_{mk}, J_{mk})$  ( $1 \leq k \leq t$ )  $t$  éléments de  $\nu$  tels que

1)  $\forall k : 1 \leq k \leq t, \exists k', 1 \leq k' \leq t, k' \neq k$  tel que :

$$I_{mk} \cap I_{mk'} \neq \emptyset, \quad J_{mk} \cap J_{mk'} \neq \emptyset$$

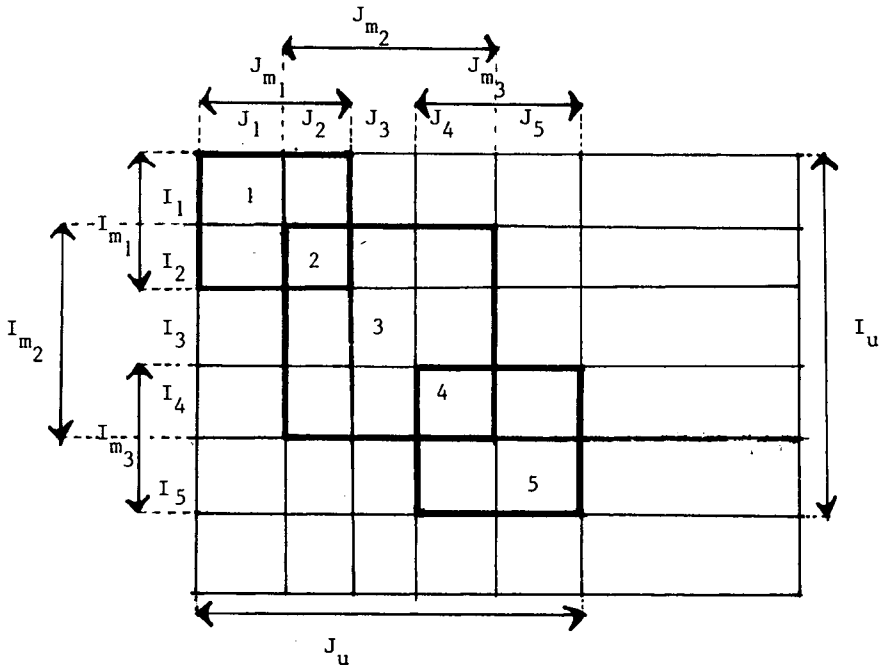
2)  $\forall k, k', 1 \leq \overset{k}{k'} \leq t, k \neq k'$  :

$$\begin{array}{l} I_{mk} \cap I_{mk'} \neq \emptyset \\ J_{mk} \cap J_{mk'} \neq \emptyset \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} I_{mk} \cap I_{mk'} \notin \{I_{mk}, I_{mk'}\} \\ J_{mk} \cap J_{mk'} \notin \{J_{mk}, J_{mk'}\} \end{array}$$

Désignons par  $I_u$  la réunion des  $I_{mk}$  et par  $J_u$  celle des  $J_{mk}$ . On a alors le théorème suivant qui généralise le théorème 10.

Théorème 11.

1)  $(I_u, J_u)$  appartient à  $\nu$ , et l'on peut décomposer le bloc  $I_u \times J_u$  en  $\nu$  blocs ( $\nu \leq 2^t - 1$ )  $(I_k, J_k)$  ( $1 \leq k \leq \nu$ ) non vides, deux à deux disjoints ( $I_k \cap I_{k'} = J_k \cap J_{k'} = \emptyset$ , si  $k \neq k'$ ) dont la réunion est  $(I_u, J_u)$ , chaque couple  $(I_k, J_k)$  appartenant à  $\nu$  et étant de la forme  $(\cap \{I_{mk} \mid k \in K\}) \cap (\cap \{I_{mk}^c \mid k \in L\})$ ,  $(\cap \{J_{mk} \mid k \in K\}) \cap (\cap \{J_{mk}^c \mid k \in L\})$ ,  $(K, L)$  désignant une partition de  $\{1, 2, \dots, t\}$ .



Etude du cas où l'on a trouvé trois éléments  $m_1, m_2, m_3$  de  $\nu$  se coupant. On a supposé pour simplifier que  $I_{m_1} \cap I_{m_3} = J_{m_1} \cap J_{m_3} = \emptyset$ , ce qui fait qu'à partir des 3 blocs  $m_1, m_2, m_3$ , on n'a que 5 blocs disjoints appartenant à  $\nu$  numérotés de 1 à 5, dont la réunion est le bloc  $u$  réunion des 3 blocs  $m_1, m_2, m_3$ .

Pour tout couple  $(i, j)$  de  $I_u \times J_u$  appartenant à un bloc non diagonal et situé au-dessus des blocs diagonaux, on a  $p_{ij} = x p_{iu} p_{uj} / p_{uu}$ , tandis que s'il est situé au-dessous, on a  $p_{ij} = y p_{iu} p_{uj} / p_{uu}$ . En général, on a :  $x = y = 1$ .

Figure 8



2)  $\forall k, k' \in \{1, 2, \dots, v\}, k \neq k',$

$\forall i \in I_k, \forall j \in J_{k'}, :$

$$(72) \quad k' > k \Rightarrow p_{ij} = x p_{iu} p_{uj} / p_{uu}$$

$$(73) \quad k' < k \Rightarrow p_{ij} = y p_{iu} p_{uj} / p_{uu}$$

ces relations supposant qu'on a placé dans un ordre convenable les ensembles  $(I_k, J_k)$ .

En d'autres termes, tout élément  $(i, j)$  de  $I_u \times J_u$  appartenant à un bloc non diagonal situé au-dessus (resp. au-dessous) des blocs diagonaux vérifie (72) (resp. (73)).

Sauf cas particulier (où il y a dégénérescence), on a  $x = y = 1$ .

S'il y a dégénérescence  $x$  et  $y$  sont liés par la relation :

$$(x-1) p_{lu} (p_{uu} - p_{ul}) = (y-1) p_{ul} (p_{uu} - p_{lu})$$

qui correspond à la relation (67) où l'indice  $\alpha$  a été remplacé par l'indice  $k = l$ .

Si en particulier  $\forall k : 1 \leq k \leq v : p_{ku} = p_{uk}$  il y a dégénérescence, et l'on a  $x = y$ . Réciproquement, si  $x = y \neq 1$ , on a :  $\forall k, 1 \leq k \leq v : p_{ku} = p_{uk}$ .

3) Si  $x = y$ , et si l'on considère  $h$  couples  $(I_{n_1}, J_{n_1}), (I_{n_2}, J_{n_2}), \dots, (I_{n_h}, J_{n_h}), n_1, n_2, \dots, n_h$  appartenant à l'ensemble  $\{1, 2, \dots, v\}$  alors :

$$(\cup \{I_{n_k} \mid k = 1, h\}, \cup \{J_{n_k} \mid k = 1, h\}) \text{ appartéient à } v$$

III.1.5 Tableau du Burt et ensembles associés.

Considérons le tableau défini sur  $J \times J$  :

$$B = P' D_{1/p_I} P$$

où  $D_{1/p_I}$  désigne la matrice diagonale des  $1/p_i$ .

Le terme général  $b_{jj'}$ , de ce tableau s'écrit

$$(74) \quad \forall j, j' \in J : b_{jj'} = \sum \{ p_{ij} p_{ij'} / p_i \mid i \in I \}$$

On dira que  $B$  est le tableau de Burt associé à  $P$  (même si  $P$  n'est pas un tableau disjonctif complet) et l'on sait (cf. [2]) que les facteurs sur  $J$  issus de l'A.F.C. de  $B$  sont les mêmes que ceux issus de l'A.F.C. de  $P$ , les valeurs propres dans la première analyse étant les carrés des valeurs propres dans la seconde. Rappelons également que les deux marges de  $B$  qui est un tableau symétrique sont égales à la marge  $p_J$  de  $P$ . On a alors le théorème suivant :

Théorème 12 :

Soit  $(I_m, J_m)$  un couple d'éléments associés pour  $P$ , alors  $(J_m, J_m)$  est un couple d'éléments associés pour  $B$ .

Démonstration :

On posera pour simplifier les notations :  $I_n = I_m^C$ ,  $J_n = J_m^C$ .  $B$  étant symétrique, et ayant même marge sur  $J$  que  $P$ , il suffit de montrer que le bloc  $J_m \times J_n$  de  $B$  est un tableau produit dont la marge sur  $J_m$  est proportionnelle à la marge restreinte correspondante de  $B$ , i.e. à la restriction à  $J_m$   $p_J$  de  $p_J$ .

Or on a, puisque  $I_m$  et  $J_m$  sont associés :

$$(75) \quad \begin{cases} \forall (i, j') \in I_m \times J_n : p_{ij'} = p_i \cdot p_{mj'} / p_m \\ \forall (i, j) \in I_n \times J_m : p_{ij} = p_{im} p_{.j} / p_{.m} \end{cases}$$

On déduit de (74) en sommant d'abord sur  $I_m$ , puis sur  $I_n$  et en tenant compte de (75) que :

$$(76) \quad \begin{cases} \forall (j, j') \in J_m \times J_n : b_{jj'} = p_{mj} p_{mj'} / p_m + \dots \\ \dots + (p_{.j} / p_{.m}) \sum \{ p_{im} p_{ij'} / p_i \mid i \in I_n \} \end{cases}$$

Or la marge sur  $J_m$  du bloc  $I_m \times J_m$  étant proportionnelle à la marge restreinte correspondante  $p_{J_m}$  de  $P$ , on a :

$$(77) \quad \forall j \in J_m : p_{mj} / p_{mm} = p_{.j} / p_{.m}$$

(76) s'écrit, compte tenu de (77) :

$$(78) \quad b_{jj'} = (p_{.j} / p_{.m}) [ p_{mm} p_{mj'} / p_m + \sum \{ p_{im} p_{ij'} / p_i \mid i \in I_n \} ]$$

Posant :

$$(79) \quad b_{mj'} = \sum \{ b_{jj'} \mid j \in J_m \}$$

on déduit de (78) et (79) que :

$$\forall (j, j') \in J_m \times J_n : b_{jj'} = (p_{.j} / p_{.m}) b_{mj'}$$

ce qui termine la démonstration.

Remarques :

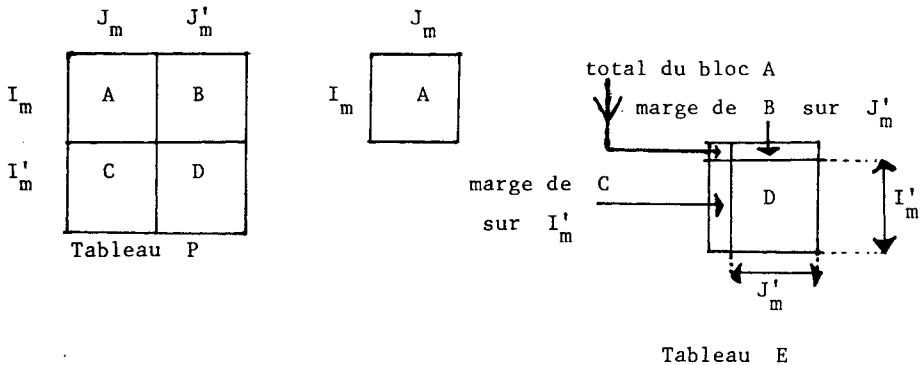
Le tableau de Burt  $J_m \times J_m$  associé au bloc  $I_m \times J_m$  de  $P$  est différent du bloc  $J_m \times J_m$  de  $B$ . Par contre le tableau de Burt déduit du tableau  $P$ , où l'on a additionné toutes les lignes  $i$  de  $I_m$  et toutes les colonnes  $j$  de  $J_m$ , est identique au tableau déduit de  $B$  en additionnant toutes les lignes de  $J_m$  et toutes les colonnes de  $J_m$ . Cette propriété est intéressante, quand on étudie la réduction de l'A.F.C. de  $P$  (et donc de  $B$ ) à celle de blocs plus petits (cf. § III.2).

III.2. Ensembles associés et facteurs.

Nous donnons ici quelques théorèmes relatifs aux facteurs issus de l'A.F.C. d'un tableau P, quand ce dernier possède un ou plusieurs couples d'ensembles associés, puis nous donnons une autre caractérisation d'un couple  $(I_m, J_m)$  d'ensembles associés, à partir des facteurs issus du bloc  $I_m \times J_m$ .

III.2.1 Propriétés des facteurs quand P possède un ou plusieurs couples d'ensembles associés.

Théorème 13. Si  $I_m$  et  $J_m$  sont associés pour P, l'A.F.C. de P se réduit d'une part à l'A.F.C. du bloc  $I_m \times J_m$  et d'autre part à l'A.F.C. du tableau déduit de P en cumulant toutes les lignes de  $I_m$  et toutes les colonnes de  $J_m$ . Posant  $I'_m = I - I_m$ ,  $J'_m = J - J_m$ , ce dernier tableau n'est autre que le bloc  $I'_m \times J'_m$  bordé par les marges des tableaux  $I_m \times J'_m$  et  $I'_m \times J_m$  et complété par le total du bloc  $I_m \times J_m$  (cf. figure 9).



Si  $I_m$  et  $J_m$  sont associés l'A.F.C. de P se réduit à celle des deux tableaux A (bloc  $I_m \times J_m$ ) et E (bloc D complété en cumulant les lignes de  $I_m$  et les colonnes de  $J_m$  dans le tableau P).

Figure 9

Démonstration :

Compte tenu de la démonstration de la condition suffisante du théorème 7 (cf. III.1.2), on peut trouver un ensemble caractéristique  $S$  associé à  $P$  vérifiant les conditions du théorème 6 (et donc celles du théorème 1) où tous les couples d'ensembles associés sont de la forme  $(\{i_0\}, \emptyset)$ ,  $(\emptyset, \{j_0\})$  sauf un qui correspond au couple  $(I_m, J_m)$ . Le théorème résulte alors immédiatement de la remarque donnée après le théorème 1 bis (cf. § II.2.5. in fine).

Théorème 14 : Soient  $(I_m, J_m)$  et  $(I_n, J_n)$  deux couples d'ensembles associés de  $P$  tels que :

$$I_m \cap I_n = J_m \cap J_n = \emptyset$$

alors l'A.F.C. de  $P$  se réduit

- 1) à l'A.F.C. des blocs  $I_m \times J_m$  et  $I_n \times J_n$
- 2) à l'A.F.C. du tableau  $(I' \cup \{m, n\}) \times (J' \cup \{m, n\})$

où  $I' = I - I_m \cup I_n$ ,  $J' = J - J_m \cup J_n$ , tableau obtenu en cumulant toutes les lignes de  $I_m$  et toutes les colonnes de  $J_m$ , et en opérant de même pour les lignes de  $I_n$  et les colonnes de  $J_n$ .

Ce théorème résulte immédiatement du théorème 13 et du lemme suivant qui se démontre facilement.

Lemme : Soient  $(I_m, J_m)$  et  $(I_n, J_n)$  deux couples d'ensembles associés pour  $P$  tels que  $I_m \cap I_n = J_m \cap J_n = \emptyset$ , alors  $(I_n, J_n)$  est un couple d'ensembles associés pour le tableau de correspondance déduit de  $P$  en cumulant les lignes de  $I_m$  et les colonnes de  $J_m$ .

Nous allons maintenant étudier le cas où il existe deux couples d'ensembles associés  $(I_m, J_m)$  et  $(I_n, J_n)$  pour  $P$  tels que  $I_m \cap I_n$  et  $J_m \cap J_n$  sont non vides.

Théorème 15.

Plaçons nous maintenant dans les conditions du théorème 10 dont on conservera les notations, et désignons toujours par  $R$  le tableau  $3 \times 3$  obtenu à partir du tableau  $I_u \times J_u$  en remplaçant chacun des 9 blocs de ce tableau par son total. On a alors les résultats suivants :

1) L'A.F.C. de  $P$  se ramène à l'A.F.C. du bloc  $I_u \times J_u$  et à celle du bloc déduit de  $P$  en cumulant dans  $P$  toutes les lignes de  $I_u$  et toutes les colonnes de  $J_u$ .

2) L'A.F.C. du bloc  $I_u \times J_u$  se réduit à l'A.F.C. de ses trois blocs diagonaux  $I_\alpha \times J_\alpha$ ,  $I_\beta \times J_\beta$ ,  $I_\gamma \times J_\gamma$  et à celle du tableau  $R$ . Si  $x = y = 1$  (ce qui est toujours le cas si (66) n'est pas vérifiée), l'A.F.C. du bloc  $I_u \times J_u$  se réduit à l'A.F.C. de ses trois blocs diagonaux.

3) Toutes les valeurs propres (autres que la valeur propre triviale 1, associée au facteur constant) issues de l'A.F.C. de  $R$  sont égales à  $(1-x)(1-y)$ .

Si  $x = y = 1$ ,  $R$  est une correspondance produit.

Si  $x = y \neq 1$ ,  $R$  est une correspondance symétrique qui se met sous la forme :

$$(80) \quad (1-x) R^{\text{diag}} + x R^{\text{prod}}$$

où  $R^{\text{diag}}$  (resp.  $R^{\text{prod}}$ ) est la correspondance diagonale (resp. produit) ayant mêmes marges que  $R$ .

Démonstration.

Le point 1) résulte du point 3) du théorème 9, et du théorème 13.

Démontrons maintenant le point 2). On a vu au début de la démonstration du théorème 10 que  $(I_\alpha, J_\alpha)$ ,  $(I_\beta, J_\beta)$ ,  $(I_\gamma, J_\gamma)$  (dont la réunion est  $(I_u, J_u)$ ) sont des couples d'ensembles associés pour le bloc  $I_u \times J_u$ ;  $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  est donc un ensemble caractéristique associé à ce bloc et vérifiant les conditions du théorème 1.

La première partie du point 2) résulte alors de la remarque déjà citée située après l'énoncé du théorème 1 bis (cf. § II.2.5). La seconde partie de ce point (cas  $x = y = 1$ ) résulte du fait que d'après le point 3) qu'on démontrera plus loin, toutes les valeurs propres (autres que la valeur propre triviale 1 associée au facteur constant) issues de l'A.F.C. de  $R$  sont nulles quand  $x = y = 1$ .

Démontrons le point 3).

Soit  $(\underline{a}, \underline{b})$  un couple de facteurs canoniques orthogonaux à la droite des constantes (i.e. différent du couple trivial constant associé à la valeur propre 1) issu de l'A.F.C. de  $R$  et relatif à la valeur propre  $\lambda$ . On va montrer, en appliquant les formules de transition reliant  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  (cf [1 a]) que  $\lambda$  est égale à  $(1-x)(1-y)$ . La valeur de  $\lambda$  étant indépendante du couple de facteurs considérés, l'espace des facteurs centrés est sphérique, et  $\lambda$  est de multiplicité 2.

Montrons donc que  $\lambda = (1-x)(1-y)$ .

Désignant par  $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma$  les composantes de  $\underline{a}$ , et par  $b_\alpha, b_\beta, b_\gamma$  les composantes de  $\underline{b}$ , et exprimant que  $\underline{a}$  est orthogonal au vecteur constant, on a :

$$(80 \text{ bis}) \quad p_{\alpha u} a_\alpha + p_{\beta u} a_\beta + p_{\gamma u} a_\gamma = 0$$



La formule de transition appliquée à la première colonne de R s'écrit, compte tenu de (68) :

$$p_{\alpha\alpha} a_{\alpha} + y p_{u\alpha} (p_{\beta u} a_{\beta} + p_{\gamma u} a_{\gamma}) / p_{uu} = \sqrt{\lambda} p_{u\alpha} b_{\alpha}$$

ce qui s'écrit, compte tenu de (80 bis)

$$(p_{\alpha\alpha} - y p_{u\alpha} p_{\alpha u} / p_{uu}) a_{\alpha} = \sqrt{\lambda} p_{u\alpha} b_{\alpha}$$

Tenant compte de la deuxième équation (69 bis), la relation précédente s'écrit encore :

$$(81) \quad (1-y)a_{\alpha} = \sqrt{\lambda} b_{\alpha}$$

De même la formule de transition appliquée à la troisième colonne de R donne :

$$(82) \quad (1-x)a_{\gamma} = \sqrt{\lambda} b_{\gamma}$$

Appliquant la seconde formule de transition à la première et à la dernière ligne de R , on obtient de même :

$$(83) \quad (1-x)b_{\alpha} = \sqrt{\lambda} a_{\alpha}$$

$$(84) \quad (1-y)b_{\gamma} = \sqrt{\lambda} a_{\gamma}$$

Des relations (81) à (84) l'on déduit bien que  $\lambda = (1-x)(1-y)$  .

Si  $x = y = 1$  ,  $\lambda = 0$  , et toutes les valeurs propres issues de l'A.F.C. de R sont triviales. R est donc une correspondance produit, comme on peut le vérifier directement à partir des équations (68) et (69).

Si  $x = y$ , on déduit de (68) que  $R$  est une correspondance symétrique qui peut, compte tenu de (68) et de relations telles que (69) ou (69 bis) se mettre sous la forme (80).

Le théorème précédent se généralise quand on se place dans les conditions du théorème 11.

Théorème 16. Plaçons nous maintenant dans les conditions du théorème 11 dont on conservera toujours les notations, et désignons par  $R$  le tableau  $v \times v$  dont l'élément  $r_{kk'}$  ( $1 \leq k \leq v, 1 \leq k' \leq v$ ) est égal à la somme des éléments du bloc  $I_k \times J_{k'}$  (avec les notations définies par (6)  $r_{kk'} = p_{kk'}$ ). Alors les conclusions du théorème 15 restent valables à condition de remplacer (dans le point 2)) les 3 blocs diagonaux  $I_\alpha \times J_\alpha, I_\beta \times J_\beta$  et  $I_\gamma \times J_\gamma$  par les  $v$  blocs  $I_k \times J_k$  ( $1 \leq k \leq v$ ).

### III.2.2 Une autre caractérisation des ensembles associés à l'aide des facteurs.

Avant d'énoncer le théorème donnant cette caractérisation, précisons quelques notations.

Soient  $I_m$  et  $J_m$  deux sous-ensembles de  $I$  et  $J$  respectivement et  $(\underline{a}^m, \underline{b}^m)$  deux vecteurs dont les composantes sont respectivement indicées par  $I_m$  et  $J_m$ . On peut encore considérer que  $\underline{a}^m$  et  $\underline{b}^m$  sont des fonctions sur  $I_m$  et  $J_m$  respectivement.

Soit  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}$ ) le prolongement de  $\underline{a}^m$  (resp.  $\underline{b}^m$ ) sur  $I$  (resp.  $J$ ):  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}$ ) peut être considéré comme un vecteur dont les composantes sont indicées par  $I$  (resp.  $J$ ), les seules composantes non nulles de  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}$ ) correspondant au sous-vecteur  $\underline{a}_m$  de  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}_m$  de  $\underline{b}$ ) dont les composantes sont indicées par  $I_m$  (resp.  $J_m$ ) avec  $\underline{a}_m = \underline{a}^m$  (resp.  $\underline{b}_m = \underline{b}^m$ ). On a alors le théorème suivant :

Théorème 17. Pour que  $I_m$  et  $J_m$  soient associés, il faut et il suffit :

a) que tout couple de facteurs non triviaux (i.e. non constants, et associés à une valeur propre non nulle)  $(\underline{a}^m, \underline{b}^m)$  issu de l'A.F.C. du bloc  $I_m \times J_m$  (bloc qu'on notera  $P^m$ ) se prolonge en un couple de facteurs  $(\underline{a}, \underline{b})$  pour l'A.F.C. de  $P$ .

b) que tout facteur  $\underline{a}^m$  sur  $I_m$  (resp.  $\underline{b}^m$  sur  $J_m$ ) issu de l'A.F.C. de  $P^m$  et relatif à une valeur propre nulle se prolonge en un facteur  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}$ ) relatif à la valeur propre nulle dans l'A.F.C. de  $P$ .

Démonstration.

Condition nécessaire :  $I_m$  et  $J_m$  étant associés,  $P$  est une correspondance hiérarchique à un niveau associé à un arbre  $A$  de sommet  $s$  tel que  $m$  appartient à l'ensemble  $S_s$  des successeurs immédiats de  $s$ . La propriété résulte alors directement des propriétés des facteurs issus d'une correspondance hiérarchique (cf. § I.3).

Condition suffisante : Soit  $\underline{a}^m$  un facteur quelconque sur  $I_m$ , (différent du facteur constant) issu de l'A.F.C. de  $P^m$ , et  $\underline{a}$  son prolongement sur  $I$ , qui est aussi facteur dans l'A.F.C. de  $P$ .

$\underline{a}^m$  étant non constant est de moyenne nulle (pour la loi marginale  $p_{I_m}^m$  associée à  $P^m$ ) ; il vient donc, en conservant les notations définies par (6) :

$$(85) \quad \sum \{(p_{im}/p_{mm})a_i^m \mid i \in I_m\} = 0$$

De même  $\underline{a}$  étant un facteur issu de l'A.F.C. de  $P$ , de support  $I_m$ , donc non constant sur  $I$ , est de moyenne nulle (pour la loi marginale  $p_I$  de  $P$ ), d'où :

$$(86) \quad \sum \{ (p_{i\cdot} / p_{m\cdot}) a_i^m \mid i \in I_m \} = 0$$

On a enfin la relation, en posant  $J_n = J - J_m$ ,

$$(87) \quad \forall j \in J_n : \sum \{ p_{ij} / p_{mj} a_i^m \mid i \in I_m \} = 0$$

Cette relation correspond (au facteur  $p_{\cdot j} / p_{mj}$  près) à la formule de transition appliquée à  $\underline{a}$  dans l'A.F.C. de  $P$ .

Si  $\underline{a}^m$  est relatif à la valeur propre  $0$ , (87) est vérifiée puisque  $\underline{a}$  est aussi relatif à la valeur propre nulle.

Si  $\underline{a}^m$  est un facteur non trivial sur  $I_m$  issu de l'A.F.C. de  $P^m$ , il lui correspond un facteur  $\underline{b}^m$  sur  $J_m$ , et le couple  $(\underline{a}^m, \underline{b}^m)$  se prolonge en un couple de facteurs  $(\underline{a}, \underline{b})$  dans l'A.F.C. de  $P$ . La relation (87) exprime alors le fait que  $\underline{b}$  est de support  $J_m$  (i.e. est nul sur  $J_n$ )

Dans les équations (85) à (87) on a introduit des coefficients de pondération ( $1/p_{mm}$  pour (85),  $1/p_{m\cdot}$  dans (86),  $1/p_{mj}$  dans (87)) de façon à ce que la somme sur  $I_m$  des coefficients des  $a_i^m$  dans ces équations fasse 1 :

$$(88) \quad \begin{aligned} \sum \{ p_{i\cdot} / p_{mm} \mid i \in I_m \} &= \sum \{ p_{i\cdot} / p_{m\cdot} \mid i \in I_m \} \\ &= \sum \{ p_{ij} / p_{mj} \mid i \in I_m \} = 1 \end{aligned}$$

Les équations (85) à (87) étant valables pour tout facteur  $\underline{a}^m$  non constant, on peut trouver un système de  $(\text{Card } I_m - 1)$  facteurs  $\underline{a}_{-\alpha}^m$  ( $1 \leq \alpha \leq \text{Card } I_m - 1$ ) linéairement indépendants et de moyenne nulle (pour  $p_{I_m}^m$ ) issus de l'A.F.C. de  $P^m$  et vérifiant les équations (85) à (87). Au système précédent, on peut adjoindre le facteur trivial constant  $\underline{a}_{-0}^m$  dont toutes les composantes valent 1, de façon à avoir un système de

Card  $I_m$  facteurs linéairement indépendants vérifiant les équations (85) à (87), où compte tenu de (88), il faut remplacer le second membre par  $\delta_\alpha^0$  (i.e. par 0 si  $\underline{a}^m = \underline{a}_\alpha^m \neq a_\alpha^0$ , et par 1 si  $\underline{a}^m = \underline{a}_0^m$ ). Or si l'on considère le système des équations suivantes :

$$(89) \quad \forall \alpha, 0 \leq \alpha \leq \text{Card } I_m - 1 : \quad \sum \{x_i a_{i\alpha}^m \mid i \in I_m\} = \delta_\alpha^0$$

on a Card  $I_m$  équations à Card  $I_m$  inconnues, dont le déterminant est non nul, puisque les  $\underline{a}_\alpha^m$  ( $0 \leq \alpha \leq \text{Card } I_m - 1$ ) sont linéairement indépendants. Ce système est donc un système de Cramer qui a une solution unique.

Comme les trois systèmes de nombres (pour  $j$  fixé  $\in J_n$ ) :  $\{p_{im}/p_{mm} \mid i \in I_m\}$ ,  $\{p_{i\cdot}/p_{m\cdot} \mid i \in I_m\}$ ,  $\{p_{ij}/p_{mj} \mid i \in I_m\}$  vérifient (89), on a :

$$\forall i \in I_m, \forall j \in J_n :$$

$$p_{im}/p_{mm} = p_{i\cdot}/p_{m\cdot} = p_{ij}/p_{mj}$$

d'où l'on déduit en particulier que toutes les colonnes du bloc  $I_m \times J_n$  sont proportionnelles à la marge sur  $I$  restreinte à  $I_m$ ,  $p_{I_m}$  de  $P$ .

On démontrerait de même, en intervertissant les rôles de  $I$  et  $J$ , et ceux de  $I_m$  et  $J_m$  que toutes les lignes du bloc  $I_n \times J_m$  (où  $I_n = I - I_m$ ) sont proportionnelles à la marge sur  $J$  restreinte à  $J_m$ ,  $p_{J_m}$  de  $P$ . Il résulte alors du théorème 7 que  $I_m$  et  $J_m$  sont associés.

#### Remarques.

a) Si  $\underline{a}^m$  (resp.  $\underline{b}^m$ ) est un facteur de variance 1 (pour  $p_{I_m}^m$  (resp.  $p_{J_m}^m$ )) issu de l'A.F.C. de  $P^m$  et relatif à la valeur propre  $\lambda$ ,

son prolongement  $\underline{a}$  (resp.  $\underline{b}$ ) est un facteur de variance  $p_m$  (resp.  $p_{\cdot m}$ ) relatif à la valeur propre  $\lambda(p_{mm})^2/(p_m \cdot p_{\cdot m})$  dans l'A.F.C. de  $P$ .

b) On peut montrer, à l'aide des formules de transition que s'il existe un couple de facteurs  $(\underline{a}^m, \underline{b}^m)$  issu de l'A.F.C. de  $P^m$  qui se prolonge en un couple de facteurs  $(\underline{a}, \underline{b})$  pour l'A.F.C. de  $P$ , alors les marges du bloc  $I_m \times J_m$  sont proportionnelles aux marges restreintes correspondantes de  $P$ .

c) On peut définir les ensembles associés à partir du théorème précédent. Si on n'a pas "nettoyé" le tableau  $P$  comme indiqué à la fin du § III.1.2. en regroupant par exemple les lignes et les colonnes proportionnelles, il faut faire l'hypothèse que si  $I_m$  (resp.  $J_m$ ) est vide, toute fonction de moyenne nulle sur  $J_m$  pour  $p_{J_m}$  (resp.  $I_m$  pour  $p_{I_m}$ ) se prolonge sur  $J$  (resp.  $I$ ) en un facteur de  $P$  associé à la valeur propre nulle.

III.3. Réduction de l'A.F.C. de P .

III.3.1. Hiérarchies associées à P , quand on a des ensembles associés et réduction de l'A.F.C. de P .

Nous nous proposons ici de généraliser la démarche esquissée au § III.2.1. pour effectuer l'A.F.C. de P , à partir de l'A.F.C. de blocs plus petits, quand on a un nombre quelconque de couples d'ensembles associés  $\{(I_m, J_m) \mid m \in B\}$  non triviaux (i.e. différents de  $(\emptyset, \emptyset)$  ,  $(I, J)$  ,  $(\{i\}, \emptyset)$  ,  $(\emptyset, \{j\})$  ,  $(\{i\}, \{j\})$  ,  $\forall (i, j) \in I \times J$  ) indicés par un ensemble fini B . Nous supposons que les éléments  $m, m'$  de B vérifient les conditions données dans la remarque c) qui suit l'énoncé du théorème 9 (cf. § III.1.4.1.) conditions auxquelles on peut toujours se ramener, comme on l'a déjà dit, quitte à éliminer certains couples d'ensembles triviaux, et nous désignerons par  $I'$  (resp.  $J'$  ) l'union des  $I_m$  (resp.  $J_m$  ) pour  $m$  décrivant B , union qui est en général différente de I (resp. J ).

$$(90) \quad \begin{cases} I' = \cup \{I_m \mid m \in B\} \subset I \\ J' = \cup \{J_m \mid m \in B\} \subset J \end{cases}$$

On posera également :

$$(91) \quad \begin{cases} I'' = I - I' \\ J'' = J - J' \end{cases}$$

Ces notations étant fixées, on peut, en utilisant les points 3) et 5) du théorème 9 remplacer les  $\{(I_m, J_m) \mid m \in B\}$  par les quatre séries d'ensembles associés suivants :

1) une série d'ensembles associés  $\{(I_m, J_m) \mid m \in B_1\}$  telle que :

a)  $\forall m, m' \in B_1, m \neq m' : I_m \cap I_{m'} = J_m \cap J_{m'} = \emptyset$

b)  $\cup \{I_m \mid m \in B_1\} = I'$  ;  $\cup \{J_m \mid m \in B_1\} = J'$

c)  $\forall m \in B_1, \exists m' \in B : I_{m'} \subset I_m, J_{m'} \subset J_m$

d)  $\{(I_m, J_m) \mid m \in B_1\}$  constitue la partition la plus grossière de  $(I', J')$  en couples d'ensembles associés.

e) Les couples précédents sont non triviaux, sauf dans le cas particulier où  $\text{Card } B_1 = 1$ , et  $I' = I, J' = J$ , cas où ils se réduisent au couple  $(I, J)$ .

2) une série de sous-ensembles associés non triviaux  $\{(I_m, J_m) \mid m \in B_2\}$  telle que :

a)  $\forall m, m' \in B_2, m \neq m' : I_m \cap I_{m'} = J_m \cap J_{m'} = \emptyset$

b)  $\forall m \in B_2, \exists m' \in B_1 : I_m \subset_s I_{m'}, J_m \subset_s J_{m'}^*$

c) on peut trouver une partition de  $B_1$  en deux sous-ensembles  $B_1'$  et  $B_1''$  vérifiant les propriétés suivantes :

$\forall m \in B_1', \exists B_m \subset B_2$  tel que

$$I_m = \cup \{I_{m'} \mid m' \in B_m\} ; J_m = \cup \{J_{m'} \mid m' \in B_m\}$$

$\{(I_m, J_m) \mid m' \in B_m\}$  constitue la partition la plus fine de  $(I_m, J_m)$  en couples d'ensembles associés.

$\forall m \in B_1''$ , on ne peut trouver de partition de  $(I_m, J_m)$  en couples d'ensembles associés non triviaux autre que  $(I_m, J_m)$  lui-même.

---

(\*) le  $s$  signifie l'inclusion stricte.



d)  $\{(I_m, J_m) \mid m \in B_2 \cup B_1''\}$  constitue la partition la plus fine de  $(I', J')$  en couples d'ensembles associés non triviaux.

3) une série de sous-ensembles associés non triviaux  $\{(I_m, J_m) \mid m \in B_3\}$  telle que :  $\forall m \in B_3, \exists m' \in B_2 \cup B_1'' : I_m \subset_s I_{m'}, J_m \subset_s J_{m'}, I_m, -I_m$  et  $J_m, -J_m$  n'étant pas associés.

4) une série de sous-ensembles associés non triviaux  $\{(I_m, J_m) \mid m \in B_4\}$  telle que :

$$\forall m \in B_4, \exists m' \in B_1, m'' \in B_2 :$$

$$I_{m''} \subset_s I_m \subset_s I_{m'} ; J_{m''} \subset_s J_m \subset_s J_{m'}$$

La première série d'ensembles est obtenue en remplaçant, compte tenu du point 3) du théorème 9, les couples d'ensembles associés d'intersection non vide de  $B$  par leur union. Si l'on peut trouver une chaîne d'ensembles associés se coupant, et comprenant tous les éléments de  $B$ , on a alors  $\text{Card } B_1 = 1$ , et le seul couple d'ensembles associés de  $B_1$  est  $(I', J')$ .

La deuxième série d'ensembles associés est obtenue à partir de la décomposition de couples d'ensembles associés de  $B_1$  (en fait de  $B_1''$ ) en couples d'ensembles associés d'intersection vide, conformément au point 5) du théorème 9.

La troisième série d'ensembles est construite à partir de couples  $(I_m, J_m)$  ( $m \in B$ ) tels qu'il existe  $m' \in B$  avec  $I_m \subset I_{m'}, J_m \subset J_{m'}$ ,  $(I_m, -I_m, J_m, -J_m)$  n'étant pas un couple d'éléments associés.

Enfin les couples  $(I_m, J_m)$  de la quatrième série correspondent :

- . soit à des éléments de  $B$  n'appartenant pas à  $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ ,
- . soit à des couples intermédiaires, construits à partir des points 3) et 5) du théorème 9 et ayant servi à déterminer les éléments de  $B_1, B_2, B_3$ .

A partir des ensembles  $B_1, B_2, B_4$ , on peut construire plusieurs hiérarchies de sommet  $s$  associées à  $P$  (ou plus exactement au bloc  $I' \times J'$  de ce tableau si on élimine les éléments triviaux de la forme  $(I_m, J_m)$  avec  $\text{Card } I_m \leq 1$ ,  $\text{Card } J_m \leq 1$ , éléments qui ne figurent pas par hypothèse dans  $B_1, B_2, B_4$  et que l'on peut considérer comme des éléments isolés). Nous allons expliciter deux de ces hiérarchies : la première que nous noterons  $A$  est la hiérarchie la plus grossière (cf. § II.3.3) que l'on peut construire à partir des ensembles associés appartenant à  $B$  ; c'est une hiérarchie à un niveau qui est telle que  $S_s = \text{Ter } A = B_1$ . La seconde hiérarchie, que nous noterons  $A_1$  s'obtient à partir de  $A$ , en subdivisant les éléments de  $B'_1$  ; elle est telle que :

$$S_s = B_1 \quad , \quad \text{Ter } A_1 = B_2 \cup B''_1$$

Notons que si l'on accepte des couples d'ensembles associés triviaux, on peut, à l'aide des éléments de  $B_3$  construire des hiérarchies plus fines que  $A_1$ , en subdivisant les éléments  $k$  de  $\text{Ter } A_1$  tels qu'il existe  $m \in B_3$ , avec  $I_m \subset I_k$ ,  $J_m \subset J_k$ , suivant  $(I_m, J_m)$  et des éléments triviaux  $\{(\{i\}, \emptyset) \mid i \in I_k - I_m\}$  et  $\{(\emptyset, \{j\}) \mid j \in J_k - J_m\}$ .

On peut aussi à partir des éléments de  $B_4$  construire des hiérarchies  $H$  telles que  $S_s = B_1$ ,  $\text{Ter } H = \text{Ter } A_1 = B_2 \cup B''_1$ , mais comportant plus de noeuds que  $A_1$ . Pour avoir la hiérarchie comportant le plus grand nombre de noeuds possibles, il suffit d'associer à chaque élément  $m$  de  $B'_1$  la hiérarchie la plus grossière que l'on peut construire à partir des éléments de  $B_4$ , puis réitérer le processus sur chacun des terminaux de la hiérarchie ainsi construite, et ainsi de suite.

Aux hiérarchies  $A$  et  $\tilde{A}_1$  précédentes, correspondent deux réductions possibles pour l'A.F.C. de  $P$ .

A partir de  $A$ , on obtient, d'après le théorème 14 la réduction suivante : l'A.F.C. de  $P$  se réduit :

- a) à l'A.F.C. du bloc  $(I'' \cup B_1) \times (J'' \cup B_1)$  déduit de  $P$  en cumulant pour tout  $m$  de  $B_1$  les lignes  $i$  de  $I_m$  et les colonnes  $j$  de  $J_m$
- b) à l'A.F.C. des blocs  $\{I_m \times J_m \mid m \in B_1\}$

Par ailleurs l'A.F.C. du bloc  $I_m \times J_m$  pour  $m \in B_1'$ , bloc qu'on notera  $P_m$  se réduit toujours d'après le théorème 14 à :

- . l'A.F.C. du bloc  $B_m \times B_m$  obtenu en cumulant dans  $P_m$  les lignes  $i$  de  $I_k$  et les colonnes  $j$  de  $J_k$  pour tout  $k$  de  $B_m$ .
- . l'A.F.C. des blocs  $\{I_k \times J_k \mid k \in B_m\}$

Finalement l'A.F.C. des blocs  $\{I_m \times J_m \mid m \in B_1\}$  se réduit

- b1) à l'A.F.C. des blocs  $\{B_m \times B_m \mid m \in B_1'\}$  définis précédemment.
- b2) à l'A.F.C. des blocs  $\{(I_k \times J_k) \mid k \in B_2 \cup B_1''\}$ .

La réduction de l'A.F.C. de  $P$  suivant les A.F.C. définies en a), b1) b2) correspond à la réduction obtenue à partir de la hiérarchie  $A_1$ .

Notons que l'on peut affiner les réductions précédentes, en considérant les éléments  $m$  de  $B_3$ , ainsi que ceux de  $B_4$ .

### III.3.2 Cas particuliers.

Si  $P$  est une correspondance diagonale par blocs, alors toute la masse de  $P$  se trouve dans les blocs diagonaux  $\{(I_m \times J_m) \mid m \in B\}$  ( $B$  désignant l'ensemble des blocs diagonaux) et les ensembles

$(I_m, J_m)$  ( $m \in B$ ) sont associés. Notons que dans ce cas,  $\forall m, n \in B, m \neq n$ ,  $(I_m \cup I_n, J_m \cup J_n)$  est encore un couple d'ensembles associés, bien que  $I_m \cap I_n = J_m \cap J_n = \emptyset$ . L'A.F.C. du tableau  $P$  se ramène bien à celle des blocs  $\{(I_m \times J_m) \mid m \in B\}$  et à celle du tableau diagonal  $B \times B$  dont le  $m^{\text{ème}}$  élément diagonal est égal à la somme des éléments du bloc  $I_m \times J_m$  ( $m \in B$ ), A.F.C. dans laquelle toutes les valeurs propres sont égales à 1.

Un autre cas encore plus particulier est celui d'une correspondance diagonale ; ce cas correspond au cas précédent quand tous les blocs diagonaux se réduisent à un élément.

Un autre cas particulier trivial est la correspondance produit : dans ce cas tout sous-ensemble de  $I$  est associé à tout sous-ensemble de  $J$ .

A N N E X E

UN EXEMPLE D'ANALYSE PROCHE DU MODELE DE CORRESPONDANCES HIERARCHIQUES :  
STRUCTURE DES ECHANGES COMMERCIAUX EN EUROPE

(Données OCDE : année 1972, l'unité étant la dizaine de millions de dollars).

Symboles : D=République Fédérale d'Allemagne, B=Bénélux,  
A=Autriche, F=France, GR=Grèce, IRL=Irlande,  
I=Italie, NL=Pays-Bas, N=Norvège, P=Portugal,  
E=Espagne, S=Suède, CH=Suïsse, TK=Turquie,  
GB=Grande Bretagne, YU=Yougoslavie, SU=URSS,  
DDR=République Démocratique Allemande, PL=Pologne,  
CS=Tchécoslovaquie, H=Hongrie, R=Roumanie, B=Bulgarie,  
DK= Danemark, SF=Finlande.

Exemple : La Belgique (B) exporte 334 vers l'Allemagne Fédérale (D)

	-D	-B	-A	-DK	-SF	-F	-GR	-IRL	-I	-NL	-N	-P	-E
+D	0	334	68	43	26	469	22	7	359	454	38	8	44
+B	313	0	4	5	5	250	2	4	54	213	6	3	9
+A	180	8	0	6	2	18	1	0	31	12	2	2	2
+DK	79	13	7	0	12	19	0	0	12	18	20	3	4
+SF	44	4	5	8	0	10	0	0	6	9	8	2	2
+F	493	252	9	10	11	0	7	6	226	137	10	6	44
+GR	41	7	3	1	2	16	0	0	21	7	2	0	2
+IRL	13	2	0	2	2	6	0	0	3	5	1	1	2
+I	326	64	29	11	5	253	8	2	0	78	6	3	17
+NL	286	240	9	9	9	113	3	3	60	0	8	2	14
+N	50	11	4	25	11	13	0	0	6	15	0	2	3
+P	27	4	2	2	1	12	0	0	10	5	2	0	9
+E	66	13	3	4	3	53	2	2	35	16	4	2	0
+S	125	13	21	54	39	29	1	1	19	27	43	7	6
+CH	211	36	24	10	5	96	1	1	68	24	3	3	7
+TK	23	1	3	0	0	9	0	0	14	4	1	0	1
+GB	175	66	27	73	51	126	4	93	73	128	46	26	34
+YU	50	4	12	1	0	13	3	0	33	4	1	0	0
+SU	65	8	9	2	33	31	3	0	25	5	2	0	3
+DDR	77	2	4	2	2	13	1	0	3	7	2	0	2
+PL	41	5	7	4	3	14	2	0	12	6	3	0	3
+CS	35	4	7	2	1	6	2	0	8	5	1	0	1
+H	24	2	8	1	1	3	1	0	9	4	1	0	1
+R	27	2	5	1	1	12	1	0	9	2	0	0	1
+BU	9	1	2	0	0	3	1	0	5	1	1	0	1

	-S	-CH	-TK	-GB	-YU	-SU	-DDR	-PL	-CS	-H	-R	-BU
+D	82	90	15	116	37	35	65	25	22	17	21	6
+B	26	16	2	82	2	9	4	4	3	1	1	1
+A	12	31	2	26	4	9	3	6	7	7	3	1
+DK	67	10	2	52	1	3	2	4	2	1	0	0
+SF	46	7	0	31	1	32	2	4	1	1	1	0
+F	43	53	5	115	8	24	7	10	5	4	7	2
+GR	2	4	1	13	5	3	0	1	2	1	1	1
+IRL	4	1	0	89	0	1	0	2	1	0	0	0
+I	22	34	6	56	31	27	4	18	7	17	13	5
+NL	27	16	2	74	3	6	4	4	4	4	2	1
+N	68	8	0	42	2	2	2	4	1	1	0	0
+P	6	7	1	23	0	0	0	1	0	0	1	0
+E	15	15	2	43	2	2	0	3	1	2	2	1
+S	0	18	2	87	4	13	6	9	4	3	3	0
+CH	22	0	2	52	3	3	1	2	4	3	1	0
+TK	2	6	0	14	1	10	1	1	1	1	0	0
+GB	107	77	3	0	5	47	4	15	7	2	5	1
+YU	5	11	1	14	0	23	8	7	13	6	5	5
+SU	8	6	4	21	30	0	246	182	167	119	170	148
+DDR	6	3	1	3	7	200	0	41	53	32	17	20
+PL	8	5	0	17	9	157	58	0	45	23	9	11
+CS	3	4	1	5	12	150	57	36	0	27	15	12
+H	2	3	1	5	5	108	31	16	26	0	6	5
+R	3	3	1	9	5	56	18	10	18	7	0	5
+BU	1	2	1	2	5	135	23	11	16	6	5	0

Le tableau des données

	VALEUR PROPRE	POURCENTAGE D'INERTIE	CUMUL
1	.518	.398	.398
2	.228	.175	.573
3	.133	.102	.675
4	.122	.093	.769
5	.080	.061	.830
6	.069	.053	.883
7	.039	.030	.913

-----  
 CONTRIBUTION DES COLONNES AUX INERTIES ASSOCIEES AUX AXES FACTORIELS  
 -----

-D	.039	.005	.421	.010	.079	.164
-B	.036	.003	.000	.138	.166	.224
-A	.001	.000	.008	.001	.002	.000
-DK	.006	.000	.005	.153	.001	.001
-SF	.000	.006	.001	.095	.001	.002
-F	.024	.004	.089	.047	.090	.263
-GR	.000	.000	.005	.004	.000	.000
-IRL	.005	.000	.056	.162	.148	.025
-I	.021	.002	.028	.051	.012	.143
-NL	.037	.004	.213	.018	.039	.007
-N	.004	.000	.003	.083	.000	.004
-P	.003	.000	.002	.036	.006	.001
-E	.005	.000	.001	.000	.010	.006
-S	.013	.001	.000	.191	.003	.018
-CH	.007	.000	.006	.012	.012	.000
-TX	.000	.000	.001	.001	.000	.000
-GB	.021	.000	.137	.018	.425	.121
-YU	.005	.000	.003	.003	.001	.003
-SU	.190	.674	.010	.002	.000	.002
-DDR	.145	.041	.005	.000	.001	.014
-PL	.086	.038	.001	.003	.000	.001
-CS	.105	.009	.001	.000	.000	.000
-H	.066	.016	.001	.000	.000	.002
-R	.080	.102	.000	.000	.001	.000
-BU	.089	.093	.002	.000	.001	.001

-----  
 CONTRIBUTION DES LIGNES AUX INERTIES ASSOCIEES AUX AXES FACTORIELS  
 -----

+D	.042	.019	.457	.009	.035	.101
+B	.032	.000	.002	.023	.091	.270
+A	.003	.000	.067	.000	.011	.023
+DK	.000	.000	.019	.069	.022	.012
+SF	.000	.013	.007	.045	.015	.007
+F	.039	.000	.059	.049	.134	.146
+GR	.002	.000	.004	.003	.000	.000
+IRL	.004	.000	.060	.014	.294	.087
+I	.011	.000	.007	.020	.007	.251
+NL	.030	.000	.115	.053	.115	.010
+N	.007	.000	.009	.115	.020	.017
+P	.003	.000	.006	.001	.009	.003
+E	.007	.000	.003	.000	.016	.000
+S	.007	.000	.016	.125	.022	.004
+CH	.019	.000	.029	.007	.000	.018
+TX	.000	.002	.002	.001	.004	.001
+GB	.024	.001	.121	.375	.137	.030
+YU	.002	.000	.002	.002	.000	.001
+SU	.295	.486	.005	.004	.001	.000
+DDR	.090	.109	.002	.001	.002	.011
+PL	.070	.072	.001	.000	.002	.003
+CS	.092	.056	.001	.001	.000	.001
+H	.047	.063	.002	.001	.000	.001
+R	.019	.019	.000	.001	.001	.000
+BU	.060	.159	.006	.002	.000	.003

COORDONNEES DES LIGNES SUR LES AXES FACTORIELS

+SU	-1.533E00	1.126E00	-8.366E-02	7.309E-02	-2.739E-02	7.669E-03
+BU	-1.413E00	-1.521E00	2.178E-01	-1.245E-01	3.060E-02	-1.173E-01
+CS	-1.262E00	-6.901E-01	8.595E-02	-7.778E-02	-2.220E-03	-4.578E-02
+DDR	-1.178E00	-8.573E-01	-7.792E-02	-5.289E-02	6.933E-02	1.474E-01
+H	1.152E00	-8.913E-01	1.197E-01	-8.984E-02	3.416E-02	-5.958E-02
+PL	-1.103E00	-7.393E-01	5.860E-02	-4.383E-02	6.963E-02	-8.959E-02
+R	-8.705E-01	-5.729E-01	-1.856E-02	-8.978E-02	7.507E-02	7.074E-03
+YU	-2.349E-01	-8.615E-02	-1.495E-01	1.176E-01	-1.857E-02	-5.665E-02
+SF	1.223E-01	-4.438E-01	-2.401E-01	6.028E-01	2.834E-01	-1.799E-01
+TK	1.651E-01	-2.853E-01	-2.263E-01	-9.898E-02	2.389E-01	-7.982E-02
+A	2.593E-01	-4.347E-02	-5.921E-01	1.592E-02	-1.884E-01	2.522E-01
+I	2.814E-01	2.675E-02	-1.124E-01	-1.880E-01	8.990E-02	4.976E-01
+GR	3.122E-01	1.862E-02	-2.255E-01	-1.825E-01	3.909E-02	3.044E-02
+S	3.179E-01	-3.261E-03	-2.397E-01	6.481E-01	2.217E-01	-8.752E-02
+D	3.650E-01	1.632E-01	6.120E-01	-2.575E-01	1.309E-01	-2.078E-01
+GB	3.909E-01	-5.819E-02	-4.469E-01	7.518E-01	-4.415E-01	1.603E-01
+DK	4.299E-01	-2.232E-02	-3.332E-01	6.143E-01	2.811E-01	-1.897E-01
+E	4.302E-01	-5.566E-02	-1.436E-01	9.401E-03	2.537E-01	4.177E-02
+N	4.342E-01	-1.577E-02	-2.534E-01	-8.746E-01	-2.946E-01	-2.564E-01
+F	4.471E-01	6.244E-03	-2.795E-01	-2.428E-01	3.259E-01	-3.166E-01
+CK	4.474E-01	9.441E-03	-3.111E-01	-1.420E-01	3.166E-02	1.783E-01
+IRL	4.787E-01	1.326E-02	-9.401E-01	-4.289E-01	1.606E00	-8.109E-01
+NL	4.798E-01	2.235E-02	-4.763E-01	-3.081E-01	-3.680E-01	-9.991E-02
+P	4.828E-01	3.778E-02	-3.313E-01	-1.335E-01	3.065E-01	-1.649E-01
+B	4.891E-01	3.797E-02	6.746E-02	-2.029E-01	3.260E-01	5.214E-01

COORDONNEES DES COLONNES SUR LES AXES FACTORIELS

-DU	-1.742E00	1.180E00	-1.323E-01	5.010E-02	-6.336E-02	5.917E-02
-R	-1.461E00	1.091E00	-5.487E-02	3.910E-02	-5.743E-02	3.336E-02
-DDR	-1.425E00	5.026E-01	1.355E-01	-4.000E-02	4.844E-02	-1.606E-01
-CS	-1.400E00	2.727E-01	-5.145E-02	-1.568E-03	-1.135E-02	1.077E-02
-H	-1.332E00	4.398E-01	-9.060E-02	-3.447E-02	-2.248E-02	9.166E-02
-PL	-1.257E00	5.524E-01	-6.197E-02	1.057E-01	-2.229E-02	4.351E-02
-SU	-1.176E00	-1.468E00	1.350E-01	-5.950E-02	1.295E-02	-3.971E-02
-YU	-4.477E-01	4.617E-02	1.650E-01	-1.859E-01	9.120E-02	1.310E-01
-SF	7.046E-02	3.040E-01	8.086E-02	8.705E-01	-8.272E-02	-8.535E-02
-GR	9.894E-02	8.252E-03	4.000E-01	-3.266E-01	1.434E-02	-8.393E-02
-TK	1.220E-01	9.621E-02	1.829E-01	-1.589E-01	6.116E-02	-1.567E-02
-A	1.329E-01	-7.297E-02	2.401E-01	9.290E-02	9.451E-02	2.408E-03
-D	3.232E-01	-7.919E-02	-5.369E-01	-8.011E-02	-1.800E-01	2.417E-01
-CH	3.615E-01	-1.762E-02	1.652E-01	-2.244E-01	-1.848E-01	-1.189E-02
-I	3.795E-01	7.932E-02	2.243E-01	-2.896E-01	1.119E-01	-3.648E-01
-GB	4.001E-01	-3.504E-03	-6.212E-01	1.805E-01	7.114E-01	-3.537E-01
-N	4.020E-01	-4.807E-02	1.718E-01	8.406E-01	2.837E-02	1.359E-01
-F	4.046E-01	9.582E-02	3.313E-01	-2.293E-01	2.591E-01	4.112E-01
-S	4.083E-01	-8.086E-02	-7.433E-03	7.656E-01	7.857E-02	-1.762E-01
-DK	4.174E-01	-4.380E-02	1.970E-01	9.977E-01	-6.040E-02	-6.202E-02
-C	4.252E-01	1.398E-02	1.177E-01	6.173E-02	-2.354E-01	1.765E-01
-NL	4.895E-01	1.023E-01	5.956E-01	-1.659E-01	1.972E-01	7.780E-02
-B	5.146E-01	1.028E-01	1.870E-02	-4.214E-01	-4.239E-01	4.575E-01
-P	5.332E-01	-2.615E-02	2.643E-01	9.645E-01	3.275E-01	9.251E-02
-IPL	5.507E-01	-6.759E-02	9.659E-01	1.568E00	-1.215E00	4.598E-01

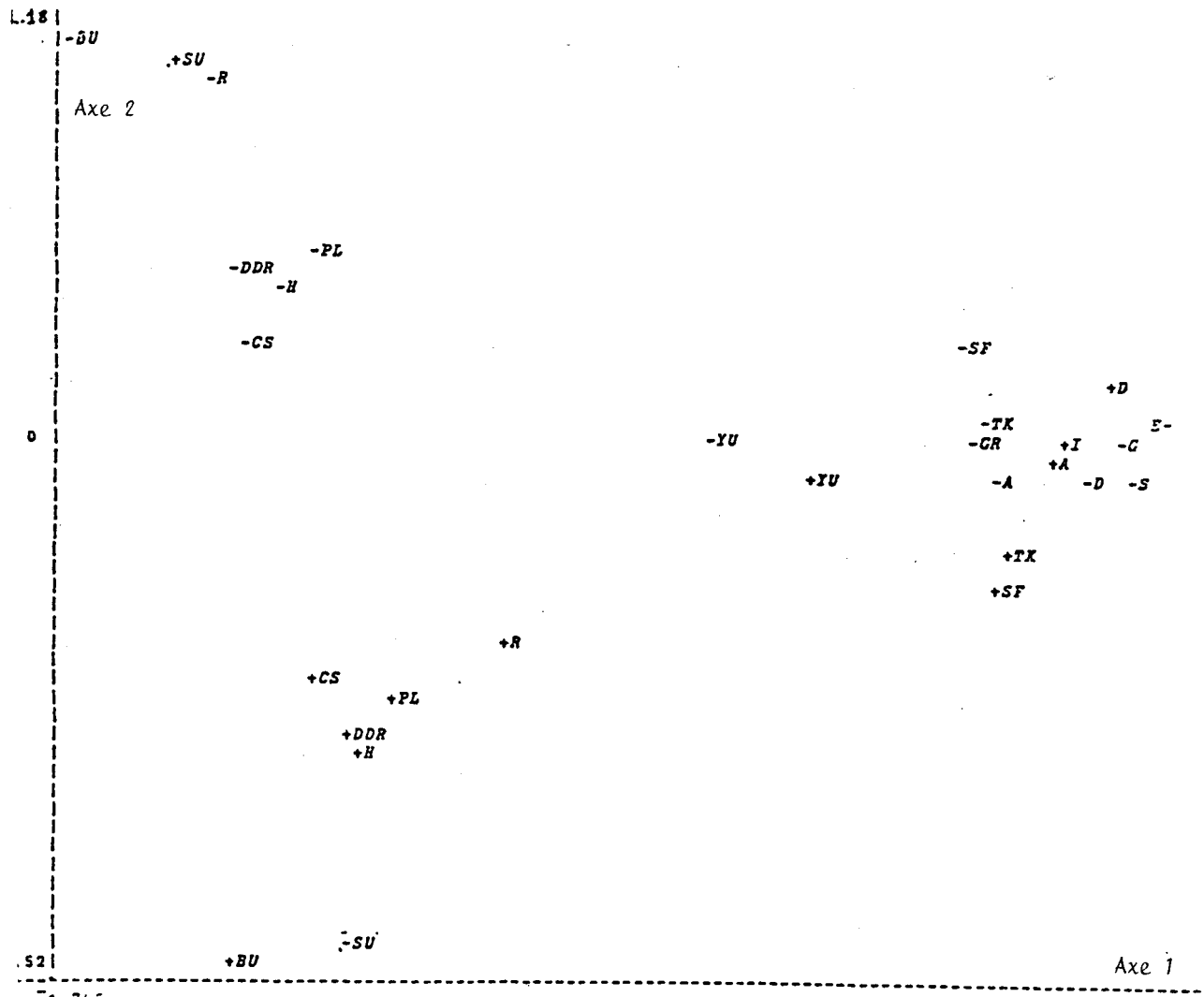


COSINUS DES ANGLES DES VECTEURS-COLONNES AVEC LES SOUS-ESPACES

-D	.455	.469	.890	.897	.932	.992
-B	.526	.537	.537	.688	.813	.938
-A	.200	.220	.426	.449	.471	.471
-DK	.318	.320	.353	.838	.839	.840
-SF	.065	.288	.298	.858	.861	.865
-F	.514	.528	.676	.736	.806	.961
-GR	.142	.143	.593	.756	.756	.766
-IRL	.214	.215	.432	.746	.882	.900
-I	.508	.519	.599	.713	.729	.877
-NL	.554	.566	.880	.900	.927	.931
-H	.321	.323	.351	.757	.757	.765
-P	.432	.432	.483	.919	.956	.959
-E	.572	.572	.594	.600	.678	.719
-S	.332	.338	.339	.709	.712	.726
-CH	.533	.534	.567	.674	.727	.727
-TK	.231	.294	.454	.544	.556	.557
-GB	.370	.370	.607	.630	.910	.967
-YU	.583	.586	.625	.670	.680	.701
-SU	.623	.996	.999	.999	.999	.999
-DDR	.883	.937	.940	.941	.941	.946
-PL	.873	.953	.954	.957	.957	.958
-CS	.906	.923	.923	.923	.923	.923
-H	.908	.956	.958	.959	.959	.961
-R	.794	.990	.991	.991	.992	.992
-BU	.821	.991	.993	.994	.994	.995

COSINUS DES ANGLES DES VECTEURS-LIGNES AVEC LES SOUS-ESPACES

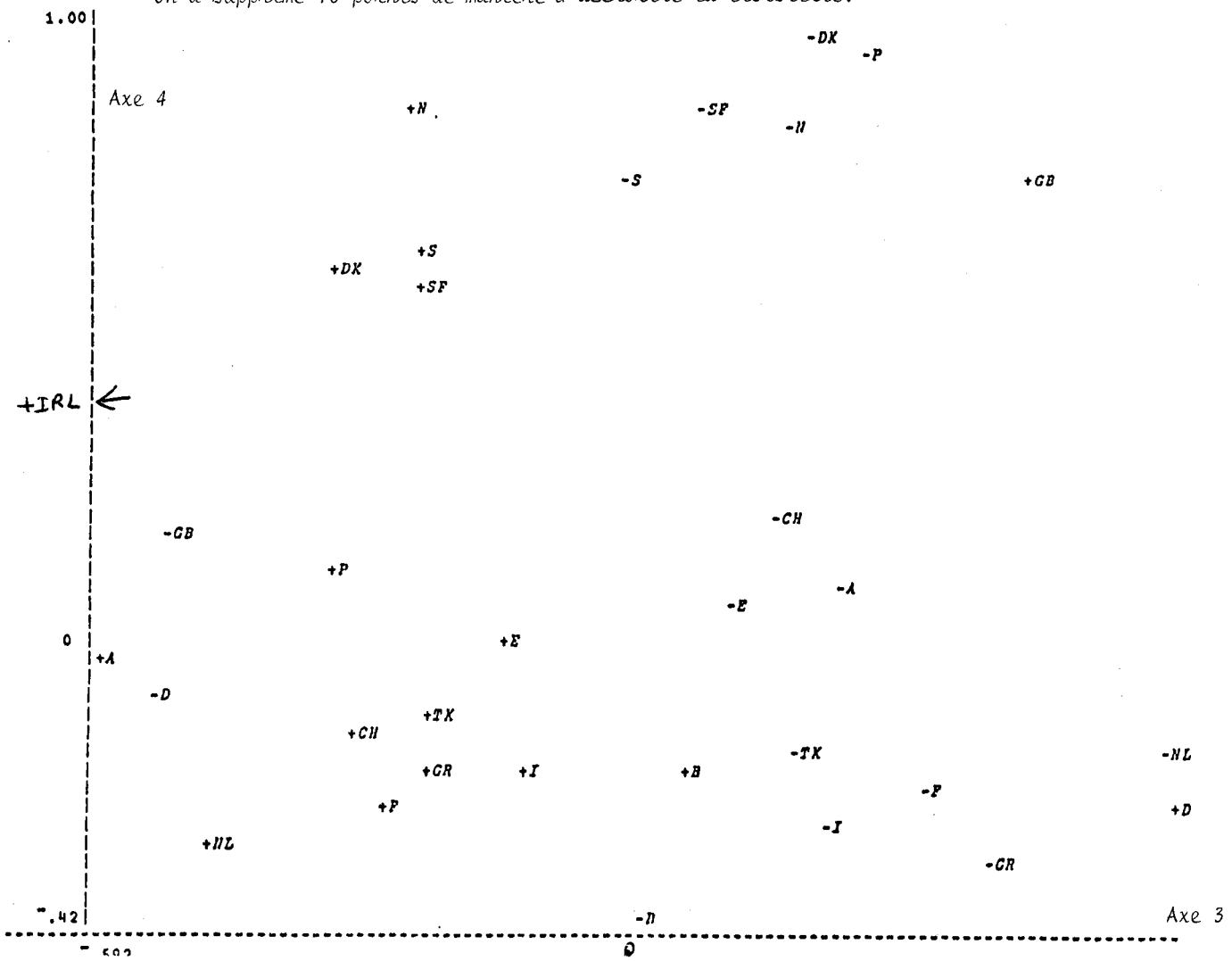
+D	.447	.490	.895	.949	.962	.996
+B	.559	.561	.566	.612	.716	.932
+A	.301	.305	.751	.752	.783	.836
+DK	.366	.386	.488	.727	.779	.797
+GF	.114	.431	.486	.745	.790	.808
+F	.577	.577	.680	.749	.858	.951
+GR	.508	.509	.627	.694	.696	.698
+IRL	.201	.201	.444	.479	.828	.996
+I	.409	.411	.443	.520	.536	.901
+NL	.522	.522	.735	.808	.902	.908
+H	.318	.318	.368	.738	.769	.792
+P	.510	.512	.620	.636	.715	.736
+E	.630	.686	.722	.722	.826	.829
+S	.277	.277	.347	.663	.690	.694
+CH	.647	.647	.738	.814	.816	.855
+TK	.238	.474	.575	.593	.685	.695
+GB	.359	.363	.548	.881	.970	.981
+YU	.353	.376	.438	.473	.473	.481
+SU	.804	.999	.999	1.000	1.000	1.000
+DDR	.753	.931	.932	.933	.934	.938
+PL	.784	.944	.945	.946	.947	.949
+CC	.809	.922	.924	.925	.925	.926
-H	.760	.961	.965	.966	.967	.967
+R	.797	.955	.955	.958	.961	.961
-BU	.671	.985	.991	.993	.993	.994



REPRESENTATION SIMULTANEE - Plan 3.4

On a supprimé 18 points de manière à accroître la lisibilité.

↗ - IRL





BIBLIOGRAPHIE

- [0] BENZECRI, J.P. : *L'analyse des données, T.1, La Taxinomie, ([nomenclature] , T.1 C n° 12), Dunod, 4<sup>e</sup> édition, (1984).*
- [1] BENZECRI, J.P. : *L'analyse des données, T.2, L'analyse des correspondances, Dunod, 4<sup>e</sup> édition (1982).*  
a) [*Dis.  $\chi^2$  corr.*], T. II B n° 5  
b) [*Corr. Hier.* ], T. II B n° 11 .
- [2] BENZECRI, J.P. : *Sur l'analyse des tableaux binaires associés à une correspondance multiple [Bin., Mult.], Les Cahiers de l'Analyse des données, Vol. 2 n° 1, pp. 55-71 (1977).*
- [3] CAILLIEZ, F., PAGES, J.P. : *Introduction à l'analyse des données, SMASH, (1976).*