CAHIERS DU BURO

PASCALE CHARPIN

Étude sur la valuation des H-codes binaires

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 41 (1983), p. 3-54

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1983__41__3_0>

ÉTUDE SUR LA VALUATION DES H-CODES BINAIRES

Pascale CHARPIN

Résumé

Ce travail fait suite à l'article de P. CAMION [5] sur les codes idéaux principaux de l'algèbre H_2G où G est un 2-groupe abélien élémentaire. Notre principal résultat est que cette classe de codes ne satisfait pas à la borne de GILBERT-VARSHAMOV ; nous énumérons les codes extrémaux et caractérisons leurs générateurs.

Abstract

This paper follows up P. CAMION's contribution [5] on the self-dual codes which are principal ideals of the algebra H_2G , where G is a 2-elementary abelian group. Our main result is that this class does not meet the GILBERT-VARSHAMOV bound ; we enumerate the extremal codes and characterize their generators.

ÉTUDE SUR LA VALUATION DES H-CODES BINAIRES

Pascale CHARPIN*

1. INTRODUCTION

Les H-codes binaires ont été introduits par P. CAMION dans [5]. Il s'agit d'une classe de codes autoduaux à poids multiples de 2 ou 4 qui sont des idéaux principaux d'une algèbre modulaire A de 2-groupe abélien. Ultérieurement A. POLI et M. VENTOU montrent que tout idéal principal autodual de A est un H-code. L'étude sur une extension de F_2 est poursuivie par P. CAMION, G. PASQUIER et J. WOLFMANN [14]. Elle fournit une nouvelle méthode de construction de codes autoduaux binaires ; ceci permet une autre définition du code de GOLAY (24,12,8) [17] et la mise en évidence d'un code autodual (64,32,12) à poids multiples de 4 [6] (seul code de ce type connu à présent).

Un des objectifs de ces travaux est de déterminer une classe de codes autoduaux binaires à poids multiples de 2 ou de 4 ayant des valuations intéressantes. Ce contexte est défini dans l'ouvrage de F.J. MAC WILLIAMS et N.J.A. SLOANE [13, ch.19].

Dans [5], P. CAMION montre qu'un nombre important de H-codes de longueur 32 sont extrêmaux et pose le problème de la valuation des H-codes de longueur supérieure.

Nous donnons (§2) les propriétés et définitions nécessaires à la compréhension du texte. La caractérisation des générateurs de H-codes (§3) est largement utilisée ensuite. Nous démontrons (§4)

* Institut de programmation. Université P. et M. Curie.

que la classe des H-codes est asymptotiquement mauvaise et qu'un H-code de longueur supérieure à 32 ne peut être extrémal. Nous dénombrons les H-codes extrémaux de longueur 32 et nous montrons que leur existence est liée à celle des ensembles à différences sur F_{16} (§6). Nous exposons quelques résultats pratiques sur la valuation des H-codes (§5 et §7).

2. TERMINOLOGIE, NOTATIONS, RAPPELS

Lorsque nous parlons de codes, il s'agit toujours de codes linéaires, ici sous-espaces d'un espace vectoriel fini sur F_2 . Un code autodual est un code identique à son complémentaire orthogonal. La distance utilisée est toujours celle de Hamming qui induit la distance minimale ou valuation du code. Un code autodual à poids multiples de 2 ou de 4 a une valuation inférieure à une valeur fonction de sa longueur (cf. [13], p. 629) ; si cette valeur est atteinte le code est dit extrémal. Le comportement asymptotique d'une classe de codes est l'évolution du rapport valuation sur longueur lorsque la longueur tend vers l'infini [13].

L'exposé fait suite à l'article de P. CAMION [5] dont nous avons conservé les principales notations :

- G est le groupe additif $(F_2^{\cdot}, +)$; la structure de F_2-espace vectoriel de G est en général utilisée.

- Nous notons A ou F_2G l'algèbre modulaire de 2-groupe abelien G . A est l'ensemble des polynômes :

$$A = \{ \sum_{g \in G} x_g X^g \mid x_g \in F_2 \}$$

A est munie en tant qu'algèbre des opérations usuelles de multiplication et addition de polynômes.

$(h \in G\ ,\ g \in G\ :\ X^g\, X^h = X^{g+h})$

- H désigne un hyperplan de G que nous identifions à $(F_{2^{m-1}}, +)$ ce qui justifie la notation $F_2 H$.

- Le support d'un mot de A est l'ensemble ,

$$x \in A\ ,\ x = \sum_{g \in G} x_g\, X^g \qquad s(x) = \{\, g \mid x_g \neq 0\} \tag{1}$$

- Le poids d'un mot de A est le cardinal de son support :

$$\omega(x) = |s(x)| \cdot \tag{2}$$

Rappelons [4] que le radical d'un anneau est l'intersection de tous ses idéaux maximaux. Le produit IJ de deux idéaux I et J d'un même anneau est l'idéal engendré par l'ensemble :

$$\{ij \mid i \in I\ ,\ j \in J\}\ .$$

L'annulateur d'un idéal I de A est l'ensemble : [4]

$$\mathrm{Ann}\ I = \{x \in A \mid y \in I \Rightarrow xy = 0\}\ . \tag{3}$$

Dans A, l'annulateur d'un idéal est égal au complémentaire orthogonal de cet idéal [12].

Soit x un élément de A , nous notons (x) l'idéal principal engendré par x dans A .

2.1 Propriétés de l'algèbre A [12]

Un élément x de A est soit nilpotent soit une unité de A ; en effet :

$$x^2 = \Big(\sum_{g\in G} x_g\, X^g\Big)^2 = \sum_{g\in G} x_g^2\, X^{2g} = \Big(\sum_{g\in G} x_g\Big)\, X^0$$

(A est de caractéristique 2).

On en déduit les propriétés :

Propriété 1 : L'algèbre A possède un seul idéal maximal P qui est son radical et l'ensemble de ses éléments nilpotents :

$$P = \{x \in A \mid x^2 = 0\} \qquad (4)$$

Remarque : $x^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{g\in G} x_g = 0$

$\Leftrightarrow$ x est de poids pair .

Propriété 2 : Un idéal principal de A est contenu dans son annulateur.

Soit $\{e_1,\ldots,e_k\}$ un ensemble de k vecteurs libres du F_2-espace vectoriel G et soit x l'élément de A dont le support est le sous-espace V de G engendré par cet ensemble. Alors :

$$x = \sum_{g\in V} X^g = \prod_{i=1}^{k} (X^{e_i} - 1) \ . \qquad (5)$$

Les éléments de A du type de x jouent un rôle important dans la définition des puissances P^j du radical de A :

Proposition 1 : Soit $e = \{e_1,\ldots,e_m\}$ une base de G . Alors l'ensemble ,

$$B(e) = \Big\{ \prod_{k=1}^{m} (X^{e_k} - 1)^{i_k} \mid i_k = 0 \text{ ou } 1 \Big\} \qquad (6)$$

est une base de A. Pour chaque j ($j \in [1,m]$) l'ensemble,

$$B^j(e) = \{ \prod_{k=1}^{m} (X^{e_k}-1)^{i_k} \mid i_k = 0 \text{ ou } 1, \sum_{k=1}^{m} i_k \geqslant j \} \qquad (7)$$

est une base de P^j .

Cette proposition permet de montrer [12] :

- $P^{m+1} = \{0\}$

- P^m est le seul idéal minimal de A . Il est de dimension 1 et engendré par le vecteur : $\prod_{i=1}^{m} (X^{e_i} - 1)$.

- $\mathrm{Ann}\, P^j = P^{m-j+1}$.

Nous dirons que $P^j \setminus P^{j+1}$ est l'ensemble des éléments de profondeur j de A .

Définition 1 : Soit V une variété linéaire du F_2-espace G . Soit $y \in A$, $y = \sum_{g \in G} y_g X^g$.

La restriction de y à V est l'élément $y' = \sum_{g \in V} y_g X^g$.

y est une unité sur V si y' est une unité de A .

y est nilpotent sur V si y' est un élément de P .

Proposition 2 : L'ensemble $P^j \setminus P^{j+1}$ est l'ensemble des éléments y de A vérifiant :

(1) Pour tout sous espace V de dimension m-j+1 de G , y est nilpotent (de poids pair) sur V et ses translatés.

(2) Il existe un sous-espace W de G de dimension m-j tel que y est une unité (de poids impair) sur W et ses translatés.

Cette proposition est obtenue à l'aide du Lemme suivant que nous utiliserons ultérieurement :

Lemme 1 : Soit V un sous-espace de G et $x = \sum_{g \in V} X^g$.

Soit V' = V + h un translaté de V .

Soit $y \in A$ et y' la restriction de y à V .

Alors,

y est une unité sur V' si et seulement si : le produit xy' est non nul et dans ce cas : $xy' = X^h x$.

Rappelons enfin que les puissances du radical de A sont les codes de Reed et Muller ([2] et [12]). Donc, P^{m-1} est l'ensemble des éléments de A du type (5) où V a pour dimension m-1 ou m (cf. dans [13] : le code de Reed et Muller d'ordre 1). On en déduit :

Propriété 3 : Soit $x \in P^j \setminus P^{j+1}$ où $j < m$. Alors l'idéal principal (x) de A contient un élément dont le support est un hyperplan de G .

2.2 Les H-codes

Définition 2 : [5]

Soit $x \in P$; $x = \sum_{g \in G} x_g X^g$.

S'il existe un hyperplan H du F_2-espace vectoriel G tel que $\sum_{g \in H} x_g = 1$, on dit alors que l'idéal principal de A engendré par x est un H-code de A .

Propriétés :

1) Le sous-ensemble de A, $\{X^g x \mid g \in H\}$, est une base du H-code (x) [5] .

Ceci prouve que la dimension de (x) est égale à 2^{m-1} . Or (x) contient son annulateur. Donc le code (x) est autodual.

2) Matrice génératrice d'un H-code [5].

Soit $x \in A$ et soit I un sous-ensemble de G tel que l'ensemble $\{X^g x \mid g \in I\}$ est une base de l'idéal (x). Nous désignons par M_x la matrice génératrice du code (x) : chaque ligne de la matrice M_x est un vecteur $X^g x$, $g \in I$, exprimé par ses coordonnées dans la base canonique de A . Lorsque (x) est un H-code, il existe un générateur y de (x) qui s'écrit :

$$y = 1 + X^h x' \text{ , } h \notin H, \ x' \text{ est une unité de } F_2 H \ . \qquad (8)$$

En conséquence, la matrice génératrice d'un H-code (x) est :

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad M_{x'} \qquad (9)$$

où $M_{x'}$ est la matrice génératrice de x' dans $F_2 H$ ($M_{x'}$ est de rang égal à 2^{m-1} puisque x' est une unité de $F_2 H$).

Définir la matrice génératrice d'un H-code de longueur 2^m , c'est se donner une unité de $F_2 H$ avec $H \simeq (F_{2^{m-1}}, +)$.

Soit un H-code (x), où x est donné par (8) et M_x par (9) . Nous noterons comme suit un mot de (x) :

$$y \in (x) \Leftrightarrow y = (u, u\,x'),\ u \in F_2\,H \qquad (10)$$

Le poids d'un mot de (x) est :

$$\omega(y) = \omega(u,\ u\,x')) = \omega(u) + \omega(ux') \qquad (11)$$

Le code (x) vérifie la propriété suivante :

$$(u,\ u\,x') \in (x) \Leftrightarrow (u\,x',\ u) \in (x) \qquad (12)$$

car $\qquad y = (u,\ u\,x') \Leftrightarrow x'\,y = (u\,x',\ u)$

3) Soit (x) un H-code de F_2 G ; (x) est un code à poids multiples de 4 si et seulement si le poids de x est un multiple de 4 [5].

4) L'ensemble des H-codes de l'algèbre F_2 G est l'ensemble des idéaux principaux de F_2 G engendrés par un élément de profondeur 1 ([5] et [12, Ch. III]) qui est lui-même l'ensemble des idéaux principaux autoduaux de F_2 G [15] .

$$(x) \text{ est un H-code} \Leftrightarrow x \in P \setminus P^2 \Leftrightarrow \dim(x) = 2^{m-1} \qquad (13)$$

3. AUTRES DEFINITIONS POUR LE GENERATEUR D'UN H-CODE

Soit $e = \{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de G et soit H l'hyperplan de G engendré par l'ensemble $\{e_1, \ldots, e_{m-1}\}$.

Soit (x) un H-code de F_2 G . L'expression de x suivant la base B(e), donnée par (6), est :

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i (X^{e_i} - 1) + y,\ y \in P^2,\ a_i \in F_2 \text{ et } a_m \neq 0 \quad . \qquad (14)$$

En effet, x est une unité sur H et sur le complémentaire de H, ceci par définition. On obtient, en appliquant le Lemme 1 :

$$(X^{e_1} - 1) \ldots (X^{e_{m-1}} - 1)\, x = \prod_{i=1}^{m} (X^{e_i} - 1) \quad .$$

Ceci signifie que si l'on exprime x avec la base B(e), le coefficient de $(X^{e_m} - 1)$ dans cette expression est non nul.

Proposition 2

Soit (x) un H-code de F_2 G . Alors :

(I) il existe g, $g \in G \setminus H$, et un générateur y de (x) qui a la forme suivante :

$$y = (X^g - 1) + x' \ , \ \underline{x' \in P \setminus P^2} \ \text{ et } s(x') \subset H \qquad (15)$$

(II) il existe g, $g \in G \setminus H$, et un générateur y de (x) qui a la forme suivante :

$$y = (X^g - 1) + x' \ , \ \underline{x' \in P^2} \ \text{ et } s(x') \subset H \quad . \qquad (16)$$

(La notation $s(x') \subset H$ signifie que le support de x' est dans H et en ce sens x' est un élément de l'algèbre $F_2\, F_{2^{m-1}}$ notée aussi $F_2\, H$).

Preuve

Soit (x) un H-code de F_2 G et soit $e = \{e_1, \ldots, e_m\}$, une base de G telle que l'ensemble $\{e_1, \ldots, e_{m-1}\}$ est une base de H . L'élément x est exprimé par (14) dans la base B(e). On peut donc écrire :

$$x = (X^{e_m} - 1)\, z + a \ , \ z \in A \setminus P \ , \ a \in P \qquad (I)$$

où z et a sont sans facteurs $(X^{e_m} - 1)$ ($s(z) \subset H$ et $s(a) \subset H$).

Le produit z x est aussi un générateur y de (x) :

$$y = (X^{e_m} - 1) + x' \ , \ x' \in P \text{ et } s(x') \subset H \qquad \text{(II)}$$

Remarquons que : $x' \in P \setminus P^2 \Leftrightarrow a \in P \setminus P^2$.

Deux cas sont à envisager pour y :

1°) $\underline{x' \in P^2}$ ((16) est alors vérifiée) .

Soit $g \in \mathbb{C}^*$ tel que : $g = e_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i e_i$ et $g \neq e_m$, $a_i \in F_2$

(donc $g \notin H$). Nous avons alors ,

$$(X^{e_m} - 1) = (X^g - 1) + 1)\left[\prod_{i=1}^{m-1} ((X^{a_i e_i} - 1) + 1)\right] - 1$$

$$= (X^g - 1) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i (X^{e_i} - 1) + b \quad \text{où} \quad b \in P^2 \ . \qquad \text{(III)}$$

Alors, d'après (II), y s'écrit :

$$y = (X^g - 1) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i (X^{e_i} - 1) + b' \quad \text{où } b' \in P^2$$

et les a_i sont non tous nuls, car $g \neq e_m$.

Donc : $y = (X^g - 1)\, y' + y''$, $y' \in A \setminus P$, $y'' \in P \setminus P^2$

où y' et y" sont sans facteurs $(X^g - 1)$.

On obtient un autre générateur de (x) :

$$y'y = (X^g - 1) + y'y'' \ , \ y'y'' \in P \setminus P^2 \text{ et } s(y'y'') \subset H \ .$$

La formule (15) est vérifiée.

2°) $x' \in P \setminus P^2$ ((15) est alors vérifiée).

Ceci signifie que : $x' = \sum_{i=1}^{m-1} a_i (X^{e_i} - 1) + x''$ où $x'' \in P^2$ et

au moins un élément a_i , $a_i \in F_2$, est non nul. Alors :

$$y = (X^{e_m} - 1) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i (X^{e_i} - 1) + x'' \ , \ x'' \in P^2 \ .$$

Soit $g \in G^* \setminus \{e_m\}$ tel que $g = e_m + \sum_{i=1}^{m-1} a_i e_i$. D'après (III):

$$(X^{e_m} - 1) = (X^g - 1) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i (X^{e_i} - 1) + b \ , \ b \in P^2$$

D'où : $y = (X^g - 1) + b + x''$, $b + x'' \in P^2$.

Donc : $y = (X^g - 1)\, t + t'$ où $t \in A \setminus P$, $t' \in P^2$, t et t' sont sans facteurs $(X^g - 1)$. Le produit y t est un générateur de (x) qui vérifie (16).

Corollaire 1.

$G = F_{2^m}$; H est un hyperplan de G ; H' est un hyperplan de H.

S'il existe un H'-code (x) qui est un code $(2^{m-1}, 2^{m-2}, d)$, alors on peut construire un H-code (y) qui est un code $(2^m, 2^{m-1}, d)$.

Preuve

Soit (x) un H'-code de l'algèbre F_2 H qui a pour valuation d . Si l'on se place dans F_2 G , le support de x est dans un hyperplan H de G . Soit $g \in G^* \setminus H$ et $y = (X^g + 1) + x$.

L'élément y est de profondeur 1 ; (y) est un H-code de valuation supérieure ou égale à d .

On peut choisir x : $x = 1 + X^e x'$, $e \in H^* \quad H'$, $s(x') \subset H'$. Soit $u \in F_2 H'$ avec $\omega(u\,x) = d$. Alors :

$$u\,y = u\,X^g + u + u + X^e\,x'\,u = u\,X^g + x^e\,x'\,u$$

$$\omega(u\,y) = \omega(u) + \omega(x'\,u) = \omega(u\,x) = d\ .$$

La valuation de (y) est donc égale à d.

Corollaire 2

Si tous les H'-codes de longueur 2^{m-1} ont une valuation inférieure ou égale à d , alors tous les H-codes de longueur 2^m ont une valuation inférieure ou égale à 2 d .

Preuve

Soit (x) un H-code de F_2 G avec, d'après (15),

$$x = (1 + X^g) + x',\ g \in G \quad H,\ x' \in F_2 H,\ x' \in P \setminus P^2\ .$$

Si le code (x'), considéré comme un H'-code de longueur 2^{m-1} , a une valuation inférieure ou égale à d , alors il existe $u \in F_2 H$ tel que :

$$u\,x' = 0 \text{ (c'est-à-dire } u \in (x')) \text{ et } \omega\,(u) \leqslant d\ .$$

Alors

$$u\,x = u(1 + X^g) \text{ et donc } \omega\,(u\,x) = 2\,\omega\,(u)\ .$$

Ainsi la valuation de (x) est au plus égale à 2 d.

Corollaire 3

S'il existe un élément y de profondeur supérieure ou égale à 2 dans l'algèbre $F_2\, F_{2^{m-1}}$, tel que :

$$v \in (y) \Rightarrow \omega(v) \geqslant d \qquad (I)$$

$$\text{et,} \quad v \in \text{Ann}\,(y) \Rightarrow \omega(v) \geqslant \frac{d}{2} \qquad (II)$$

alors il existe un H-code de longueur 2^m et de valuation d .

Preuve

Soit (x) un H-code de $F_2\, F_{2^m}$ avec, d'après (16) ,

$$x = (X^g - 1) + y \quad , \; g \in C \setminus H \; , \; y \in P^2 \cap F_2\, H \quad .$$

Supposons que y vérifie les hypothèses du Corollaire.
Soit $u \in F_2\, H$.

- Si $u\, y = C$, alors $\omega\,(u\, x) = 2\,\omega\,(u)$. D'après (II), $\omega\,(u\, x) \geqslant d$ et si $\omega\,(u) = \frac{d}{2}$, alors $\omega\,(u\, x) = d$.

- Si $u\, y \neq C$, alors $\omega\,(u\, x) = \omega\,(X^g\, u) + \omega\,(u + u\, y)$.

D'où, $\omega\,(u\, x) \geqslant \omega\,(X^g\, u) + \omega\,(u\, y) - \omega\,(u)$. Or, d'après (I) , $\omega\,(u\, y) \geqslant d$.
Donc $\omega\,(u\, x) \geqslant d$.

4. H-CODES EXTREMAUX

$G \simeq (F_{2^m}, +)$. La longueur des codes considérés est 2^m .

Théorème 1

Soit (x) un H-code de F_2 G . Alors, pour chaque entier i tel que $m - i \geqslant 2^{i-1}$, il existe un élément y de (x) dont le support est un sous-espace de dimension m - i de G .

Preuve

La démonstration se fait par récurrence sur la valeur de i ;

. i = 0. Chaque m vérifie $m \geqslant 1$ et chaque H-code de longueur 2^m contient y tel que s(y) = G(Cf. § 2.1).

. i = 1. Soit (x), un H-code de longueur 2^m , avec $m \geqslant 2$.

Alors il existe $y \in F_2$ G tel que :

y x = C et s(y) est un hyperplan de G .

(x est profondeur 1 ; on applique la propriété 3).

. Nous supposons que la Proposition est vraie jusqu'à i - 1 , c'est-à-dire ,

$\forall k$, $k \in [1, i - 1]$, $i > 1$:

$m \geqslant k + 2^{k-1}$ $\Rightarrow$ Chaque H-code de longueur 2^m contient un mot y dont le support est un sous-espace de dimension m - k de G .

Nous allons démontrer qu'elle est vraie pour la valeur i . Soit donc $m = i + 2^{i-1}$ et soit (x) un H-code de longueur 2^m ; (x) est un code de F_2 G . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe y dans (x) tel que s(y) est un sous-espace de dimension m-(i - 1) de G .

Soit $V = s(y)$, $t = m - i + 1$ et $\{e_1,\ldots,e_t\}$ une base de V complétée en une base $\{e_1,\ldots,e_m\}$ de G. Alors $y = \prod_{j=1}^{t} (X^{e_j} - 1)$ et $y\,x = C$.

On peut appliquer le Lemme 1 : x est nilpotent sur V et sur chaque translatée de V. Ceci s'exprime :

$$z = \prod_{j=t+1}^{m} (X^{e_j} - 1)$$

$$x = \sum_{g \in s(z)} X^g\, x(g),\ x(g) \in P,\ x(g) \in F_2\, V \qquad (I)$$

($X^g\, x(g)$ est la restriction de x à la variété linéaire $g + V$ (définition 1)).

Chaque $x(g)$, $g \in s(z)$, qui est tel que $x(g) \in P \setminus P^2$, engendre un W-code de $F_2\, V$. D'après (16), $x(g)$ s'écrit à une unité de $F^2 V$ près :

$$x(g) = (1 + X^h) + x',\ h \in V \setminus W,\ x' \in P^2 \qquad (II)$$

Soit Q le sous-espace de G engendré par l'ensemble des éléments h exhibés par (II) (à chaque $x(g)$, $g \in s(z)$ et $x(g) \in P \setminus P^2$, correspond un élément h).

Nous avons : $|s(z)| = 2^{m-t} = 2^{i-1}$ (car $t = m - i + 1$).
Donc : $\dim Q \leq 2^{i-1}$.

Soit V' un hyperplan de V contenant Q. (V' existe bien car, $\dim V = t = m - i + 1 = (i + 2^{i-1}) - i + 1 = 2^{i-1} + 1$).

Soit $a \in F_2\, G$ tel que $s(a) = V'$. Etudions les produits $a\, x(g)$, $g \in s(z)$:

. Si $x(g) \in P^2$, alors a $x(g)$ est de profondeur au moins $t + 1$ dans $F_2 V$; or l'index de nilpotence du radical de $F_2 V$ est justement égal à $t + 1$. Donc, dans ce cas, $a\ x(g) = 0$.

. Si $x(g) \in P \setminus P^2$, $x(g)$ est donné par (II). On obtient :

$$a\ x(g) = a(1 + X^h) + a\ x' \ .$$

Or $h \in Q$, $Q \subset s(a)$ et $s(a) = V'$; donc $a(1 + X^h) = 0$. Puisque $x' \in P^2$, nous sommes dans le cas précédent : $a\ x(g) = 0$.

Finalement, x étant donné par (I), nous avons :

$$a\ x = \sum_{g \in s(z)} X^g\ a\ x(g) = 0 \ .$$

Donc $a \in (x)$ et $s(a)$ un sous-espace de dimension $m - i$ de G ($\dim V' = \dim V - 1 = m - i$).

Notre hypothèse était : $m = i + 2^{i-1}$. Il reste à montrer que si m est strictement supérieur à $i + 2^{i-1}$, (x) contient un mot dont le support est un sous-espace de G de dimension $m - i$.

Nous avons montré que chaque H-code de longueur 2^m avec $m = i + 2^{i-1}$ vérifie cette propriété. Soit alors un G-code de longueur 2^{m+1} . D'après (15), un générateur de ce code est :

$$x = (X^g - 1) + x' \ , \ g \in F^*_{2^{m+1}} \setminus G \ , \ x' \in P \setminus P^2 \ , \ x' \in F_2 G \ .$$

Alors, il existe a, $a \in (x')$ et $s(a)$ est un sous-espace de dimension $m - i$ de G .

D'où $a\ x = a(X^g - 1)$. Donc $s(a\ x)$ est un sous-espace de dimension $(m + 1) - i$ de $F_{2^{m+1}}$. Le code (x), dont la longueur est 2^{m+1} , vérifie encore la propriété. La Proposition est ainsi démontrée.

Corollaire 4

$N = 2^m$ avec $m > 1$.

On désigne par d la valuation d'un H-code de longueur N . Soit $i = \max\{k \in \mathbb{N} \mid m \geqslant k + 2^{k-1}\}$. Alors, la valeur d est inférieure ou égale à 2^{m-i} et le rapport $\frac{d}{N}$ tend vers zéro lorsque m tend vers l'infini.

Preuve

Les notations et hypothèses sont celles de l'énoncé. Soit (x) un H-code de longueur N et de valuation d .

D'après la Proposition 6.2, (x) contient un mot de poids 2^{m-i} . Donc $d \leqslant 2^{m-i}$. On en déduit : $\frac{d}{N} \leqslant 2^{-i}$. Lorsque m tend vers l'infini, i tend vers l'infini et donc le rapport $\frac{d}{N}$ tend vers zéro.

Remarque : Le corollaire 4 prouve que la classe des H-codes n'est pas une classe de bons codes autoduaux car elle ne satisfait pas à la borne de GILBERT-VARSHAMOV [24, p. 557] . Pour qu'elle y satisfasse il faut que pour chaque m, $m > 1$, il existe un H-code qui est un code $(2^m, 2^{m-1}, d)$ tel que :

$$K\left(\frac{d}{2^m}\right) \leqslant \frac{1}{2} \text{ où } K(x) = 1 + x \log_2(x) + (1-x) + (1-x) \log_2(1-x) \qquad (I)$$

Or, $K\left(\frac{1}{8}\right) = 0{,}4564$ et $K\left(\frac{1}{16}\right) = 0{,}7520$.

Pour tout m, $m \geqslant 12$, (I) n'est pas vérifiée.

Théorème 2

Un H-code extrémal est l'un des codes suivants :

- un code (4, 2, 2) à poids multiples de 2
- un code (8, 4, 4) à poids multiples de 4
- un code (16, 8, 4) à poids multiples de 4
- un code (32, 16, 8) à poids multiples de 4 .

Preuve

1°) Un code autodual défini sur F_2 , de longueur 2^m et à poids multiples de 2, a une valuation d inférieure ou égale à λ , $\lambda = 2^{m-2} + 2$. Lorsque $d = \lambda$, le code en question est dit EXTREMAL [24, p. 629]. Soit (x) un H-code de longueur 2^m à poids multiples de 2. D'après le théorème 1, $m \geqslant 4 \Rightarrow$ (x) contient un mot de poids 2^{m-2} . Donc, dès que m est supérieur ou égal à 4, (x) ne peut être extrémal. Lorsque m = 3, si (x) est un code (8,4,4) il est à poids multiples de 4, ceci de par la forme de sa matrice génératrice (cf. (9)).

2°) Un code autodual sur F_2 , à poids multiples de 4 et de longueur 2^m , est extrémal lorsque sa valuation est égale à λ avec $\lambda = 4\,[\frac{2^{m-2}}{3}] + 4$ ($[\frac{2^{m-3}}{3}]$ signifie que l'on prend la partie entière de la valeur entre crochets).

Soit (x) un H-code de longueur 2^m à poids multiples de 4 . D'après le Théorème 1, $m \geqslant 7 \Rightarrow$ (x) contient un mot de poids 2^{m-3} . Donc : $m \geqslant 7 \Rightarrow$(x) ne peut être extrémal.

Il est clair que l'on construit facilement un H-code qui est un code (8, 4, 4) ou bien un code (16, 8, 4).

Pour démontrer la Proposition il reste à prouver que (x) ne peut être un code (64, 32, 12) :

Lemme 2

Soit (x) un H-code de longueur 64 . Alors, (x) contient un mot dont le support est un sous-espace de dimension 3 de F_{64} .

Preuve

$G = F_{64}$; $V = F_{32}$.

Soient $x_1 \in F_2 V$ et $x_2 \in F_2 V$ où x_1 et x_2 sont nilpotents. Si x_1 et x_2 sont de profondeur 1, ils s'écrivent respectivement à une unité de $F_2 V$ près :

$$x_1 = (X^g - 1) + x' \quad , \quad x' \in P^2 \quad , \quad g \in V^*$$

$$x_2 = (X^h - 1) + x'' \quad , \quad x'' \in P^2 \quad , \quad h \in V^*$$

(cf. (16)).

Soient $v = (X^g - 1)(X^h - 1)x_1$ et $w = (X^g - 1)(X^h - 1)x_2$.

Alors $v \in P^4$ et $w \in P^4$; P^4 est, dans $F_2 V$, le code de Reed et Muller d'ordre 1 : chaque mot de P^4 a pour support une variété linéaire de dimension 4 ou 5, ou bien le mot est nul (cf. §2.1).

Il est donc clair qu'il existe u avec $u \in V$ et $\{g, h, u\}$ est un système libre de V, tel que : $(X^u - 1)\, v = (X^u - 1)\, w = 0$.

Finalement :

$$\exists\, y \; ; \; y = (X^g - 1)(X^h - 1)(X^u - 1), \; y\, x_1 = 0 \text{ et } y\, x_2 = 0 \qquad (I)$$

Lorsque $h = g$, on peut prendre pour h un autre élément de V^* et la démonstration de (I) est alors inchangée.

Si x_1 (ou x_2) est de profondeur 2 , on choisit de même g , $g \in V^*$ et $g \neq h$ (ou h, $h \in V$ et $h \neq g$).

Soit (x) un H-code de F_2 G (H est un hyperplan de G) ; $x \in P \setminus P^2$; il existe donc $z \in F_2$ G tel que s(z) est un hyperplan H' de G et $z \in (x)$. (Propriété 3).

D'après le Lemme 1, x est nilpotent sur H' et sur le complémentaire de H' c'est-à-dire :

$$x = x_1 + X_g\, x_2 \ , \ g \in G^* \setminus H', \ x_1 \in F_2\, H', \ x_2 \in F_2\, H'$$

et x_1 et x_2 sont nilpotents .

On identifie H' et V et on applique (I) ;

$$\exists y,\ y \in F_2\, H' \text{ et } \omega(y) = 8 \text{ tel que :}$$

$$y\, x = y\, x_1 + X^g\, y\, x_2 = 0 \ .$$

Donc, (x) contient un mot de poids 8 dont le support est un sous-espace de dimension 3 de G . Le Théorème 2 est ainsi démontré.

CONCLUSION

Le corollaire 4 fournit une borne supérieure pour la valuation d'un H-code de longueur 2^m . Si d désigne cette borne supérieure, elle est pour de petites longueurs :

$$\begin{array}{ll} m = 4 & d = 2^{m-2} = 4 \\ m = 5 & d = 2^{m-2} = 8 \\ m = 6 & d = 2^{m-3} = 16 \\ m = 7 & d = 2^{m-3} = 16 \\ m = 8 & d = 2^{m-3} = 32 \ . \end{array}$$

Il existe une proportion importante de H-codes de longueur 32 qui sont des codes (32, 16, 8).

Nous avons exhibé, en utilisant un ordinateur, des H-codes qui sont des codes (128, 64, 16). Nous prouvons (§8 de ce chapitre) que l'on peut construire une classe de H-codes qui ont une valuation qui croît avec leur longueur. Ces résultats peuvent être améliorés. Nous conjecturons que :

1°) La borne supérieure fournie par le corollaire 4 n'est plus atteinte dès que $m \geqslant 8$.

2°) Lorsque m est impair, il existe un H-code de valuation égale à 2^k avec $k = \frac{m+1}{2}$.

5. POIDS DES GENERATEURS D'UN H-CODE

$G = F_{2^m}$; H est un hyperplan de G que l'on identifie, si c'est nécessaire, à $(F_{2^{m-1}}, +)$. Dans ce paragraphe nous utilisons la notation suivante :

$$C_y \text{ est un H-code} \Leftrightarrow \begin{array}{l} C_y = (x) \\ x = 1 + X^g y \\ g \in G \setminus H,\ y \text{ est une unité de } F_2 H \end{array} \qquad (17)$$

(cf. (8) et (9)).

Lemme 3

Le code C_y est défini par (17). Soit $u \in F_2 H$, u de poids impair.

Alors :

$$\omega(u\ x) \geqslant \omega(u) + \frac{\omega(y)}{\omega(u)} \qquad (18)$$

Preuve

Soit u, une unité de F_2 H ; alors $u^2 = 1$ et :

$$u\ x = (u,\ u\ y) \Rightarrow \omega(ux) = \omega(u) + \omega(u\ y)$$
$$\omega(y) = \omega(u^2\ y) \Rightarrow \omega(y) \leqslant \omega(u\ y)\,\omega(u)$$

Donc :

$$\omega(u\ x) - \omega(u) \geqslant \frac{\omega(y)}{\omega(u)} \quad .$$

Proposition 3

Soit un H-code C_y .
Soit d une valeur entière paire donnée et telle que :

$$\lambda \in N\ ,\ \lambda \text{ impair},\ 1 \leqslant \lambda < \frac{d}{2} \Rightarrow \omega(y) \geqslant \lambda(d - \lambda) \qquad (19)$$

Alors, chaque générateur du code C_y a un poids supérieur ou égal à d.

Preuve

Un générateur du code C_y est un mot $(u,\ u\ y)$ où u est une unité de F_2 H (u est de poids impair). Pour vérifier que chaque mot de ce type a un poids supérieur ou égal à d il suffit d'étudier les mots $(u,\ u\ y)$ tels que $\omega(u) < \frac{d}{2}$ (cf. (9), (12) et [5]).

Supposons que C_y est tel que y vérifie (19) pour une valeur d donnée. Soit u une unité de F_2 H .

Alors, d'après (18), $\omega(u,\ u\ y)) \geqslant \omega(u) + \frac{\omega(y)}{\omega(u)}$. Donc :

$$1 \leqslant \omega(u) < \frac{d}{2} \Rightarrow \omega(y) \geqslant \omega(u)\ (d - \omega(u)) \qquad \text{(d'après (19))}$$
$$\Rightarrow \omega(u, uy) \geqslant \omega(u) + d - \omega(u)$$
$$\Rightarrow \omega(u, uy) \geqslant d \quad .$$

Corollaire 5

Soit un H-code C_y de longueur 2^m et soit d une valeur entière paire tels que :

$$d = 4k + 2 \ , \ d^2 \leqslant 4(2^{m-1} + 3)$$

$$\omega(y) \geqslant \frac{d^2}{4} - 4 \qquad (20)$$

Alors, si C_y est un code à poids multiples de 2 (respectivement à poids multiples de 4), chaque générateur de C_y a un poids supérieur ou égal à d (respectivement à d + 2).

Preuve

Soit un H-code C_y et soit d tels que les hypothèses du corollaire 5 sont vérifiées. Montrons que dans ce cas y et d vérifient (19) :

L'application $f : \lambda \to \lambda(d - \lambda)$ est croissante dans l'intervalle $[0, \frac{d}{2}]$. La plus grande valeur impaire de l'intervalle $[1, \frac{d}{2}[$ est $\frac{d}{2} - 2$; or $f(\frac{d}{2} - 2) = \frac{d^2}{4} - 4$.

Donc, d'après (20) : $\omega(y) \geqslant \underset{\lambda \in [1, \frac{d}{2} - 2]}{\text{Sup}} f(\lambda)$.

Nous appliquons alors la Proposition 3 . Chaque générateur du code C_y a un poids supérieur ou égal à d .

Si C_y est un code à poids multiples de 4 , chaque générateur de C_y a donc un poids supérieur ou égal à d + 2 .

Remarquons que la condition $d^2 \leqslant 4(2^{m-1} + 3)$ est une condition sans laquelle (20) ne peut être vérifié. En effet, si C_y est de longueur 2^m , le poids de y est strictement inférieur à 2^{m-1} . Nous obtenons donc :

$$\frac{d^2}{4} - 4 \leqslant 2^{m-1} - 1 \Rightarrow d^2 \leqslant 4(2^m + 3) .$$

Utilisation pratique du corollaire 5

Remarquons d'abord qu'un code C_y de longueur 2^m peut être tel que ses générateurs ont un poids élevé alors que sa valuation est peu élevée. Ainsi par exemple, si $\omega(y) = 2^{m-1} - 1$ avec $m > 2$, le code C_y a pour valuation 4 alors que chacun de ses générateur a un poids supérieur à la valeur 2.2^{m-2}.D'autre part la condition (20) est une condition suffisante mais non nécessaire.

Si l'on recherche un code C_y qui est un code $(2^m , 2^{m-1} , d')$ le tableau ci-après montre comment l'on peut utiliser le Corollaire 5 de façon à ne pas avoir à vérifier le poids des générateurs du code C_y . Les notations sont celles du corollaire : pour une valeur d donnée, si d et y vérifient (20), la vérification de d' = d (ou d' = d + 2) se fait sans étudier les mots (u, uy) où u est une unité de F_2 H .

Notation

'C_y à p m 2' signifie 'C_y est à poids multiples de 2' .

d'	d		$\omega(y) \geqslant$		$m \geqslant$	
	à p m 2	à p m 4	à p m 2	à p = 4	à p m 2	à p m 4
8	10	6	21	7	6	4
10	10		21		6	
12	14	10	45	23	7	6
16	18	14	77	47	8	7
20	22	18	117	79	8	8
24	26	22	165	119	9	8
28	30	26	221	167	9	9
32	34	30	285	223	10	9

A titre d'exemple, le corollaire suivant montre que le corollaire 5 simplifie la recherche d'un H-code de valuation supérieure à 12.

Corollaire 6

Soit un H-code C_y de longueur 2^m avec $m \geqslant 7$ et tel que :

$$u \in F_2 H,\ u = (X^g - 1)(X^h - 1),\ h \neq g \neq 0 \Rightarrow (u\,y) > 4 \qquad (I)$$

Alors :

(|) Si C_y est à poids multiples de 2 et si $\omega(y) \geqslant 45$, C_y a une

valuation supérieure ou égale à 12 .

(||) Si C_y est à poids multiples de 4 et si $\omega(y) \geqslant 23$, C_y a une valuation supérieure ou égale à 12 .

Preuve

$G = F_{2^m}$.

Soit un H-code C_y défini par :

$$C_y = (x),\ x = 1 + X^v y\ ,\ v \in G^* \setminus H\ ;$$

C_y est de longueur 2^m avec $m \geqslant 7$ et y vérifie (I) .

Rappelons [5] que pour vérifier que C_y a bien une valuation supérieure ou égale à 12 il suffit d'étudier le poids des mots u x tels que :

$$u \in F_2 H\ ,\quad 0 \in s(u) \quad \text{et} \quad \omega(u) < 6\ .$$

Si y vérifie de plus les hypothèses données dans (|) et (||), le tableau précédent montre que chaque mot u x tel que $\omega(u)$ est impair, a un poids supérieur ou égal à 12. Il reste donc à montrer (II) et (III).

$$u \in F_2 H\ ,\ u = X^g - 1,\ g \in H^* \Rightarrow \omega(u\,x) \geqslant 12 \qquad \text{(II)}$$

$$u \in F_2 H\ ,\ \omega(u) = 4 \text{ et } u \in P \setminus P^2 \Rightarrow \omega(u\,x) \geqslant 12 \qquad \text{(III)}$$

a) Supposons que C_y ne vérifie pas (II), c'est-à-dire [5] :

$$\exists u,\ u = (y^j - 1),\ g \in H^*\ ;\ \omega(u\,y) = 2 \text{ ou } 6$$

. $\omega(u\ y) = 2 \Rightarrow u\ y = X^h\ u$, $h \in H$;

$\Rightarrow X^a\ u\ y = X^{h+a}\ u$, $a \in H \setminus \{0, g\}$

$\Rightarrow (1 - X^a)\ u\ y = X^h\ (1 - X^a)\ u$

$\Rightarrow \omega((1 - X^a)(1 - X^g)\ y) = 4$ avec $a \neq g \neq 0$.

Ceci contredit (I).

. $\omega(u\ y) = 6 \Rightarrow u\ y = X^{h_1}\ u + X^{h_2}\ u + X^{h_3}\ u$

où l'ensemble $\{h_i + \{0, g\},\ i = 1, 2, 3\}$ est composé de trois translatés du sous-espace $\{0, g\}$ de G .

Soit $h = h_1 + h_2$; h est non nul et h est différent de g .

Alors :

$$X^h\ y\ u = X^{h_2}\ u + X^{h_1}\ u + X^{h_3+h}\ u$$

Donc $$(1 - X^h)\ y\ u = X^{h_3}(1 - X^h)\ u$$

D'où : $\omega((1 - X^h)(1 - X^g)y) = 4$ ce qui contredit (I)

Donc, si C_y vérifie (I), C_y vérifie (II).

b) Supposons que C_y ne vérifie pas (III), c'est-à-dire :

$\exists\ u,\ u \in F_2\ H$, $u \in P \setminus P^2$ et $\omega(u) = 4$; $\omega(u\ y) = 4$.

Dans ce cas (u) est un H'-code (H' étant un hyperplan de H) et donc $u\ y = X^a\ u$, $a \in H$ [5] (u y est un générateur du code (u) ; (u) est un H'-code tel que $\omega(u) = 4$).

Il est clair (cf. (9)) que (u) contient un mot t dont le support est un sous-espace de dimension 2 de H :

$\exists z,\ z \in F_2\ H$ et $z\ u = t$

D'où :

$z \mu y = X^a z u = X^a t$ avec $t = (X^g - 1)(X^h - 1)$, $h \neq y \neq 0$ et $\omega(t\,y) = 4$

Ceci contredit (I). Donc si C_y vérifie (I), C_y vérifie (III).

6. *ENUMERATION DES H-CODES QUI SONT DES CODES (32, 16, 8) A POIDS MULTIPLES DE 4*

Notations

$G = F_{32}$; H est un hyperplan de G . La donnée d'un H-code C_y (cf. (17)) est la donnée d'une unité y de F_2 H (H étant alors identifié à $(F_{16}, +)$). Le code C_y est à poids multiples de 4 si et seulement si la quantité $\omega(y) + 1$ est divisible par 4 . Soit :

$$Y = \{y \in F_2 H \mid 4 \text{ divise } \omega(y) + 1\}$$

Alors
$$|Y| = \frac{2^{16}}{4} = 16\,384 \qquad (21)$$

Si $y \in Y$, alors $\omega(y) = 3, 7, 11$ ou 15 . Il est clair qu'un code C_y tel que $\omega(y) = 3$ ou 15, a pour valuation 4 . Ainsi, si C_y est extrémal (C_y est un code (32, 16, 8)) le poids de y est égal à 7 ou 11.

Chaque code C_y permet de définir 16 codes :

$$C_z \ , \ z = X^g y \ , \ g \in H$$

de même valuation que C_y . On réalise ainsi une partition de Y .

Pour étudier les H-codes extrémaux de F_2 G nous étudions les codes C_y tels que Y appartient à l'un des deux ensembles Y_7 et Y_{11} définis comme suit : i = 7 ou 11 ;

$$y \in Y_i \Leftrightarrow \begin{array}{l} \omega(y) = i \quad \text{et} \quad 0 \in s(y) \\ y \text{ est l'unique représentant dans } Y_i \\ \text{de l'ensemble } \{X^g\, y,\ g \in H\} \end{array} \tag{22}$$

(Y_i contient 1 et un seul représentant de chaque classe définie ci-dessus et ceci dans un sous-ensemble de Y composé des unités de poids i dont le support contient 0). Calculons le cardinal de chaque Y_i :

$$|Y_7| = \frac{1}{16} \times \binom{16}{17} = 715 \tag{23}$$

$$|Y_{11}| = \frac{1}{16} \binom{16}{11} = 273 \tag{24}$$

Les deux propriétés suivantes sont démontrées dans [5] .

Propriété 4.

Soit $y \in Y$ avec $\omega(y) = 7$ ou 11 .
Alors C_y est un code (32, 16, 8) si et seulement si

$$u \in F_2 H,\ 0 \in s(u) \quad \text{et} \quad \omega(u) = 2 \Rightarrow \omega(u\, y) > 2 \tag{25}$$

Propriété 5

Soit $y \in Y$ avec $\omega(y) = 7$ ou 11 .
Alors C_y est un code (32, 16, 4) si et seulement si, il existe $u = X^g + 1$ avec $g \in H^*$, tel que y est de poids impair sur un seul translaté de s(u) dans H .

Lemme 4

Soit $u \in F_2 H$ tel que $0 \in s(u)$ et $\omega(u) = 2$. Alors :
(I) Il existe 35 éléments y tels que : $y \in Y_7$ et $\omega(u\, y) = 2$

(II) Il existe 21 éléments y tels que : $y \in Y_{11}$ et $\omega(u\ y) = 2$.

Preuve

Soit $u = 1 + X^g$ avec $g \in H^*$; les translatés de s(u) dans H , forment une partition de H en huit sous-ensembles de deux éléments, soit :

$$\{0, g\}, \{g_1 , g_1 + g\}, \ldots, \{g_7 , g_7 + g\} .$$

Soit $y \in Y_7$ tel que $\omega(u\ y) = 2$ (C_y est donc un code (32, 16, 4)). Alors, d'après la propriété 5, y est tel que s(y) est composé de trois translatés de s(u) plus un élément d'un quatrième translaté de s(u). Il existe 16 . $\binom{7}{3}$ unités de $F_2 H$ de ce type : Y_7 en contient donc : $\binom{7}{3} = 35$.

De même, si $y \in Y_{11}$ et $\omega(u\ y) = 2$, le support de y est composé de cinq translatés de s(u) plus un élément d'un sixième translaté de s(u). Il existe 16 . $\binom{7}{5}$ unités de F_2 H de ce type ; Y_{11} en contient donc : $\binom{7}{5} = 21$.

Lemme 5

Soit $y \in Y_7$

(I) Si s(y) est contenu dans un hyperplan de H, alors il existe 7 éléments u tels que :

$$u \in F_2 H,\ 0 \in s(u),\ \omega(u) = \omega(u\ y) = 2 .$$

(II) Si s(y) n'est contenu dans aucun hyperplan de H et si C_y a pour valuation 4, alors il existe un seul élément u tel que

$$u \in F_2 H ,\ 0 \in s(u) ,\ \omega(u) = \omega(u\ y) = 2 .$$

Preuve

(I) Soit V un hyperplan de H et soit $\overline{V}$ le complémentaire de V dans H. Soit $y \in Y_7$ tel que $s(y) \subset V$. Chaque u, $u = 1 + X^g$ avec

$g \in V^*$, est tel que : un translaté de $s(u)$ dans H est soit dans V soit dans $\overline{V}$. Un tel u vérifie $\omega(u) = \omega(u\ y) = 2$ car y est de poids impair sur un seul translaté de $s(u)$ ($\omega(y) = 7$, $|V| = 8$ et $s(y) \subset V$).

Par contre si $u = 1 + X^g$ avec $g \in \overline{V}$, il est clair que y est de poids impair sur plus d'un translaté de $s(u)$. Puisque $|V^*| = 7$, ceci démontre (I).

(II) Nous supposons maintenant que : $y \in Y_7$, C_y n'est pas extrémal et $s(y)$ est de rang 4 dans H. Alors, d'après la propriété 5 , il existe u, $u = X^g + 1$ avec $g \in H^*$, tel que y est de poids impair sur un seul translaté de $s(u)$. Supposons qu'il existe v, $v = X^h + 1$ avec $h \in H^* \setminus \{g\}$, tel que y vérifie cette même propriété pour v . On peut supposer, sans perdre en généralité que $s(y)$ à la forme suivante :

$$s(y) = \{0, g_1, g_1 + g, g_2, g_2 + g, g_3, g_3 + g\}, \quad g_i \neq g .$$

L'existence de v suppose que l'ensemble $s(y) \cap s(X^h\ y)$ comporte 6 éléments, c'est-à-dire au moins deux translatés de $\{0, g\}$. Supposons par exemple que $g_2 = g_1 + h$. Alors :

$$\{g_1, g_1 + g, g_2, g_2 + g\} \subset s(y) \cap s(X^h\ y) .$$

On a dans ce cas : $g_3 = h$ ou $g_3 + g = h$ ou $g_3 + h = g_3 + g$.
Or ceci est impossible car $h \neq g$ et $s(y)$ est de rang 4 : on ne peut avoir une relation du type $g_1 + g_2 + g_3 = 0$ ou $g_1 + g_2 + g_3 + g = 0$.

Donc la seule solution est $v = u$; u est l'unique élément de $F_2\ H$ vérifiant :

$$u = X^g + 1 \quad , \quad g \in H^* \quad \text{et} \quad \omega(u\ y) = 2 \quad .$$

Lemme 6

Soit $y \in Y_{11}$ tel que C_y a pour valuation 4 . Alors, il existe trois éléments u du type suivant :

$$u = X^g + 1 \ , \quad g \in H^* \quad \text{et} \quad \omega(u\,y) = 2 \ .$$

Preuve

$y \in Y_{11}$ et C_y n'est pas extrémal. D'après la propriété 4, il existe $u = X^g + 1$ avec $g \in H^*$ et $\omega(u\,y) = 2$.

D'après la propriété 5 et puisque y est un représentant de l'ensemble $\{X^h\ y \mid h \in H\}$, on peut représenter s(y) comme suit :

$$s(y) = \{0, g_1, g_1 + g, \ldots, g_5, g_5 + g\}, \qquad g_i \neq g$$

avec $H = s(y) \cup \{g, g_6, g_6 + g, g_7, g_7 + g\}$.

Soit alors $h \in H \setminus \{g\}$. Trois cas sont à envisager :

1°) $h = g_6 + g_7$. Dans ce cas, $s(X^h\ y) \subset s(y) \cup \{g\}$. ($X^h\ y$ a pour poids 11 et son support est contenu dans la réunion de 6 translatés de u). Donc, $(1 + X^h)\ y$ est de poids 2 . On a ainsi exhibé v, $v = 1 + X^h$, tel que $\omega(v\,y) = 2$. (h est différent de 0 et de g puisque $g_6 \neq g_7 + g$ et $g_6 \neq g_7$).

2°) $h = g_6 + g_7 + g$. On a, de même qu'au 1°),

$s(X^h\ y) \subset s(y) \cup \{g\}$. Donc, on exhibe $w = 1 + X^h$ avec $\omega(w\,y) = 2$; w diffère de u et de v car $g_6 + g_7 + g \notin \{0, g, g_6 + g_7\}$.

3°) $h + g_6 + g_7 \notin \{0, g\}$. On obtient :

$$h + \{g_6, g_6 + g, g_7, g_7 + g\} \subset s(y) \cup \{g\} \ .$$

D'où, le poids de $(1 + X^h)\, y$ est supérieur à 2 .

On a finalement trois éléments u ne vérifiant pas (25).

Théorème 3

Parmi les 16 384 matrices génératrices de H-codes de longueur 32 et à poids multiples de 4, 7 168 sont des matrices génératrices de codes autoduaux extrémaux, soit une proportion de 43,75 % .

Parmi 4 368 H-codes C_y tels que $\omega(y) = 11$, 2 688 (soit 61,54 %) sont extrêmaux.

Parmi 11 480 H-codes C_y tels que $\omega(y) = 7$, 4 480 (39,60 %) sont extrêmaux.

Preuve

Soit $Y_i' = \{y \in Y_i \mid C_y \text{ est extrémal}\}$, $i \in \{7, 11\}$.
(Y_i est défini par (22)).

Nous allons calculer le cardinal de Y_7' et le cardinal de Y_{11}' .

Soit $U = \{u \in F_2^{\,H} \mid 0 \in s(u) \text{ et } \omega(u) = 2\}$.

Le code C_y, $y \in Y_7 \cup Y_{11}$, est extrémal si et seulement si pour chaque u, $u \in U$, $\omega(uy)$ est strictement supérieur à 2 .

1°) Cardinal de Y_7' :

Pour chaque hyperplan H' de H il n'existe qu'un seul y de Y_7 tel que $s(y) \subset H'$ car :

$$y' \in Y_7 \text{ et } s(y') \subset H' \Rightarrow y' = X^g y, \qquad g \in H' .$$

Il existe dans H, 15 hyperplans distincts. Donc pour 15 éléments de Y_7 , il existe 7 éléments u de U tels que $\omega(u\,y) = 2$ (Lemme 5, (I)). Nous avons vu, dans la démonstration du Lemme 5, que :

$$H' = \text{hyperplan de } H,\ s(y) \subset H' \quad u \in U \text{ et } \omega(u\,y) = 2 \quad \Rightarrow s(u) \subset H' \quad .$$

Soit $h \in H^*$; on peut construire t hyperplans de H contenant h et $t = \frac{14 \times 12}{6 \times 4} = 7$.

On peut conclure : pour chaque u, $u \in U$, il existe 7 éléments de y , $y \in Y_7$, tels que s(y) est contenu dans un hyperplan de H et $\omega(u\,y) = 2$. D'après le Lemme 4 il reste alors 28 éléments y de Y_7 tels que $\omega(u\,y) = 2$. D'après le Lemme 5 (II), un tel y vérifie $\omega(u\,y) = 2$ pour ce seul u de U .

Donc, sur les 715 éléments de Y_7 (cf. (23)) :

- 15 ont leur support dans un hyperplan de H ;
- $|U| \times 28 = 15 \times 28 = 420$ vérifient les hypothèses du Lemme 5, (II).

Il reste 280 éléments de y de Y_7 , tels que C_y est un code extrémal. Donc : $|Y'_7| = 280$;

$$|\{C_y |\ \omega(y) = 7\}| = 16 \times |Y_7| = 11\,440$$

$$|\{C_y |\ \omega(y) = 7,\ C_y \text{ est extrémal}\}| = 16 \times |Y'_7| = 4\,480 \ .$$

On obtient un pourcentage de 39,16 % de H-codes C_y tels que $\omega(y) = 7$ et C_y est extrémal.

2°) Cardinal de Y'_{11}

Le lemme 6 prouve que pour chaque y de Y_{11}, soit C_y est extrémal, soit il existe exactement trois éléments u, $u \in U$ et $\omega(u\ y) = 2$.

Or chaque u de U vérifie $\omega(u\,y) = 2$ pour 21 éléments y de Y_{11} (Lemme 4 (II)). Donc :

$$|Y'_{11}| = |Y_{11}| - \frac{|U| \times 21}{3}$$

$$|Y'_{11}| = 273 - \frac{15 \times 21}{3} = 168$$

$$|\{C_y \mid \omega(y) = 11\}| = 4\ 368$$

$$|\{C_y \mid \omega(y) = 11,\ C_y \text{ est extrémal}\}| = 2\ 688\ .$$

Ainsi, 61,54 % de H-codes C_y avec $\omega(y) = 11$, sont extrémaux.

3°) CONCLUSION

On a déterminé en tout 7 168 codes extrémaux sur les 16 384 H-codes de longueur 32 et à poids multiples de 4, soit une proportion de 43,75 % .

Nous allons maintenant définir un générateur d'un H-code extrémal. Rappelons la définition d'un ensemble à différences dans un groupe abélien d'ordre 2^k [7] .

Définition 3

Soit G un groupe abélien fini. Un sous-ensemble D de G est un ENSEMBLE à DIFFERENCES s'il vérifie pour tout h de G^* :

$$|\ D \cap D + h| = \lambda \quad .$$

Théorème de H.B. MANN

Soit G un groupe abélien d'ordre 2^k et soit D un ensemble à différences de G. Alors, si $D \neq \{0\} \cup G'$, où G' est un sous-groupe de G , la seule possibilité est :

$$k = 2t \ , \ |D| = 2^{t-1}(2^t + \epsilon), \ \lambda = 2^{t-1}(2^{t-1} + \epsilon)$$

où $\epsilon = \pm 1$ et $\lambda = |D \cap D + h|$, $h \in G^*$.

Théorème 4

$G = F_{32}$; H est un hyperplan de G . Un H-code (x) est un code (32, 16, 8) à poids multiples de 4 si et seulement si, il existe un générateur y de (x) qui a la forme suivante :

$$y = 1 + X^g(1+z), \ g \in G \setminus H, \ s(z) \subset H \ , \ \omega(z+1) = 7 \text{ ou } 11$$

et s(z) est un ensemble à différences de F_{16} .

Preuve

Les codes étudiés sont à poids multiples de 4 .

1°) Soit (x), un code de F_2 G , possédant un générateur y qui vérifie les hypothèses de la Proposition.

Soit $u = 1 + X^h$, $h \in H^*$. D'après le Théorème de H.B. MANN :

$|s(z) \cap s(z) + h| = 2$ ou 6 et $|s(z)| = 6$ ou 10 $(t = 2)$

Or, $\omega(u\,z) = 2\,\omega(z) - 2\,|s(z) \cap s(X^h z)|$

$= 12 - 4$ (ou 20 -12, car $s(X^h z) = h + s(z)$)

$= 8$.

Donc $\omega(u\,y) = \omega(u, u + u\,z)$ où $\omega(u + u\,z) = 6$ ou 10 .

D'après la propriété 4, (x) est un code extrémal.

2°) Inversement, supposons que (x) est un H-code qui est un code (32, 16, 8). Alors, d'après (16), il existe un générateur y de (x) tel

que :

$$y = 1 + X^g (1+z),\ g \notin H,\ \underline{s(z) \subset H \text{ et } z \in P^2} \quad .$$

Nous allons montrer que $s(z)$ est un ensemble à différences de F_{16} . Pour cela il suffit de montrer :

$$u = X^h + 1,\ h \in H^* \Rightarrow \omega(u\,z) = 8 \qquad (I)$$

Soit u ci-dessus défini. Alors, $u\,z \in P^3$ avec $s(u\,z) \subset H$. Donc $u\,z$ est un élément du code de Reed et Muller d'ordre 1 et de longueur 16 . Ainsi, $\omega(u\,z) = 0$, 8 ou 16 .

On ne peut avoir $u\,z = 0$ car (x) est extrémal. Supposons que $\omega(u\,z) = 16$.

On définit une base de H, soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ où $e_1 = h$.

Alors, $u\,z = \prod_{i=1}^{4} (X^{e_i} - 1)$; donc z s'exprime comme suit dans la base $\{ \prod_{i=1}^{4} (X^{e_i} - 1)^{j_i} \mid j_i \in [0\,,1] \}$ de $F_2\,H$:

$$z = (X^{e_1} - 1)\, z_1 + (X^{e_2} - 1)(X^{e_3} - 1)\,(X^{e_4} - 1)$$

où $z_1 \in P \setminus P^2$ et z_1 est sans facteur $(X^{e_1} - 1)$.

Soit V le sous-espace de H engendré par $\{e_2\,, e_3\,, e_4\}$; (z_1) est un V'-code de $F_2\,V$. D'après (16), on a à une unité de $F_2\,V$ près :

$$z_1 = 1 + X^t + a,\ t \in V \setminus V' \quad \text{et} \quad a \in P^2 \quad .$$

D'où : $(1 + X^t)\, z_1 \in P^3$. Ceci entraîne : $(1 + X^t)\, z \in P^4$, et donc

$$(1 + X^t)\, z = u\,z = \prod_{i=1}^{4} (X^{e_i} - 1) \quad (\text{car } (x) \text{ est extrémal}).$$

On en déduit :

$$(1 + X^t + 1 + X^{e_1})\, z = 0$$

$$(X^t + X^{e_1})\, z = 0 \quad .$$

Donc $(X^t + X^{e_1})y = (X^t + X^{e_1}, X^t + X^{e_1})$. Ceci contredit le fait que (x) est extrémal. La seule possibilité est $\omega(u\,z) = 8$, ce qui démontre (I).

Exemples

Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, une base de G ; H est engendré par $\{e_i \mid i = 1, 4\}$. On peut formuler comme suit le générateur x d'un H-code (x) de valuation 8 et à poids multiples de 4 :

(notation : $X^{e_i} = X_i$)

- $x = 1 + X_5(1 + (X_1 + 1)(X_2 + 1) + (X_3 + 1)(X_4 + 1))$
  où $\omega(x) = 8$

- $x = 1 + X_5(1 + (X_1 + 1)(X_2 + 1) + (X_3 + 1)(X_4 + 1) + X_4 \prod_{i=1}^{3} (X_1 + 1))$
  où $\omega(x) = 12$.

Par contre, si

$$x = 1 + X_5(1 + (X_1 + 1)(X_2 + 1) + (X_3 + 1)(X_4 + 1) + \prod_{i=1}^{3} (X_i + 1)),$$

(x) est un code (32, 16, 6) à poids multiples de 2 .

7. *UNE CLASSE DE H-CODES DONT LA VALUATION CROIT AVEC LA LONGUEUR*

G = F_{2^m} ; H est un hyperplan de G engendré par une base $\{e_1, \ldots, e_{m-1}\}$; $e = \{e_1, \ldots, e_m\}$ est une base de G .

Notations :

$X^{e_i} = X_i$; B(e) est la base de F_2 G définie au §2-1 .

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

PROPOSITION 4

Soit $j \in N$, $j \geqslant 3$.

Alors pour chaque m, $m \geqslant (j-1)^2 + 1$, il existe au moins un H-code qui est un code $(2^m, 2^{m-1}, 2^j)$.

Pour cela nous allons définir une classe de H-codes vérifiant la proposition 4 .

DEFINITION

Soit $j \geqslant 3$ et $m = (j-1)^2 + 1$. Soit $\{I_i \mid i = 1,\ldots,j-1\}$ une partition de l'ensemble d'indices $\{1,2,\ldots,m-1\}$ en j -1 ensemble disjoints de j -1 éléments chacun. On désigne alors par C_j un H-code de longueur 2^m du type suivant :

$$\begin{aligned} C_j &= (x_j) \\ x_j &= 1 + X_m\, y_j \ , \ y_j \in F_2\, H \\ y_j &= 1 + \Big[\sum_{i=1}^{j-1} \prod_{k \in I_i} (X_k + 1)\Big] + \alpha_j \ , \ \alpha_j \in P^j \end{aligned} \tag{26}$$

(y_j est ici exprimé avec la base B(e) de F_2 G , mais le support de y_j est dans H : y_j est sans facteur $(X_m - 1)$).

Valuation d'un code C_j

Nous devons étudier les mots : $u\, x_j$, $u \in F_2$ H et $\omega(u) < 2^{j-1}$.

- $u \in P^s \setminus P^{s+1}$, $s \in [1, j-2]$. (si $s = j-1$, le poid de u est supérieur ou égal à 2^{j-1}).

Alors, si l'on exprime u dans la base B(e) :

$$u = \Big[\sum_{\{i_1,\ldots,i_s\}} u_{i_1\ldots i_s} (X_{i_1} + 1) \ldots (X_{i_s} + 1)\Big] + \omega'$$

où $u' \in P^{s+1}$, $u_{i_1 \ldots i_s} \in [0,1]$ et $\{i_1,\ldots,i_s\} \subset \{1,2,\ldots,m-1\}$.

Par hypothèse ($u \in P^s \setminus P^{s+1}$) un terme $u_{i_1 \ldots i_s}$ au moins est non nul.

Alors il existe k, $k \in [1, j-1]$, tel que :

$$T = u_{i_1 \ldots i_s} \Big(\prod_{t \in I_k} (X_t + 1) \Big) \times (X_{i_1} + 1) \ldots (X_{i_s} + 1) \neq 0$$

car $s < j-1$ et donc : $\exists k$; $\{i_1 \ldots i_s\} \cap I_k = \emptyset$.

Soit $z_j = y_j + 1$. Si l'on effectue le produit $u\, z_j$, le terme T ne peut apparaître qu'une fois puisque les I_k sont disjoints et chaque I_k contient plus de s éléments. Donc, le produit $u\, z_j$ exprimé dans la base B(e) a au moins un terme non nul : $u\, z_j \neq 0$ et $u\, z_j \in P^{j-1+s}$.
Nous avons montré :

$$\begin{aligned} u \in P \setminus P^{j-1} &\Rightarrow u\, x_j = (u, u + u\, z_j),\ u\, z_j \in P^j \setminus \{0\} \\ &\Rightarrow \omega(u\, x_j) \geqslant \omega(u) + \omega(u\, z_j) - \omega(u) \\ &\Rightarrow \omega(u\, x_j) \geqslant 2^j \end{aligned}$$

- $u \in A \setminus P$ et $\omega(u) < 2^{j-1}$. Il faut d'abord remarquer que la démonstration précédente est valable quel que soit α_j .

Nous allons maintenant déterminer α_j de telle façon que C_j soit de valuation au moins égale à 2^j . Nous supposons $j > 3$ car lorsque $j = 3$ et $m = 5$ nous donnons à la fin du § 6 un exemple de H-code qui est un code (32, 16, 8) du type C_5 .

Nous utilisons la Proposition 3 :
Si $\omega(y_j) \geqslant \max\{\lambda(2^j - \lambda) \mid \lambda \in [1, 2^{j-1}[\}$, alors chaque générateur de C_j a un poids supérieur à 2^j .

Il suffit donc que : $\omega(y_j) \geqslant 2^{2(j-1)} - 1$, $j > 3$.

Or $\omega(y_j + \alpha_j) = (j-1)(2^{j-1} - 1) + \epsilon$ ($\epsilon = 0$ ou 1 selon que j est pair ou

impair).

Si l'on prend par exemple $\alpha_j = \prod_{i=1}^{m-1} (X_i + 1)$, alors

$$\omega(y_j) = 2^{m-1} - (j-1)\,(2^{j-1} - 1) - \epsilon \quad \text{où} \quad m - 1 = (j-1)^2$$

$$\omega(y_j) = 2^{(j-3)(j-1)}\, 2^{2(j-1)} - (j-1)\,(2^{j-1} - 1) - \epsilon \ .$$

Il est clair que : $\omega(y) \geqslant 2^{2(j-1)} - 1$.

Dans ce cas, C_j est de valuation égale à 2^j :

Soit $u = (X_{k_1} + 1) \ldots (X_{k_{j-1}} + 1)$ où $k_t \in I_t$; alors $u\, y_j = u$ et donc $\omega(u\, x_j) = 2\,\omega(u) = 2^j$.

Nous avons donc exhibé un H-code qui est un code $(2^m, 2^{m-1}, 2^j)$ avec $m - 1 = (j-1)^2$. Ainsi, il existe pour chaque longueur 2^k , $k > m$, un H-code de valuation 2^j (Corollaire 1). Nous avons montré la Proposition 4 .

Exemples

1) $\underline{j = 4,\ m = 10}$

$$x = 1 + X_{10}\,(1 + (X_1 + 1)(X_2 + 1)(X_3 + 1) + (X_4 + 1)(X_5 + 1)(X_6 + 1) + (X_7 + 1)(X_8 + 1)(X_9 + 1) + \prod_{I=1}^{9} (X_i + 1)$$

(x) est un code $(2^{10}, 2^9, 16)$ à poids multiples de 4 avec $\omega(x) = 492$.

2) $\underline{j = 5,\ m = 17}$

$$x = 1 + X_{17}\,(1 + (X_1 + 1) \ldots (X_4 + 1) + \ldots + (X_{13} + 1) \ldots (X_{16} + 1) + \prod_{i=1}^{16} (X_i + 1))$$

(x) est un code $(2^{17}, 2^9, 32)$ à poids multiples de 4 .

Remarque

Nous donnons en annexe la matrice génératrice d'un H-code qui est un code (128, 64, 16) à poids multiples de 4 . Les expériences que nous avons faites semblent prouver qu'il en existe un certain nombre de ce type. Nous pensons donc que les valuations obtenues ci-dessus peuvent être nettement améliorées.

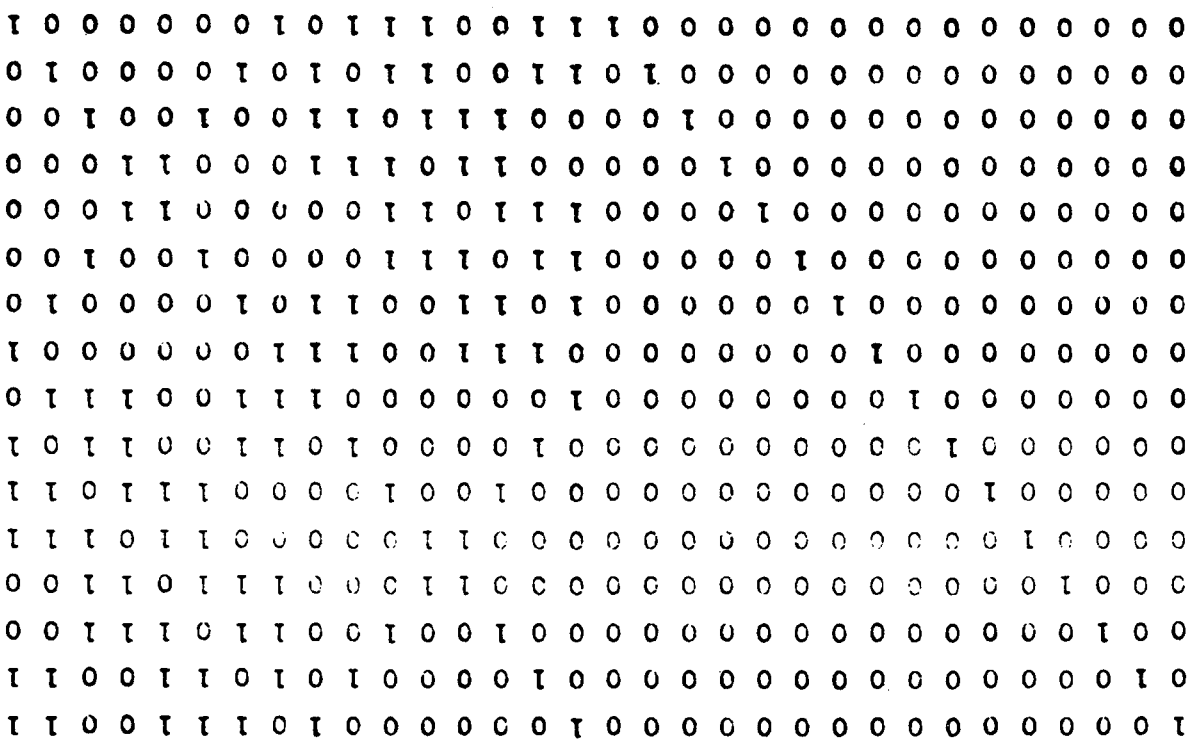
A N N E X E

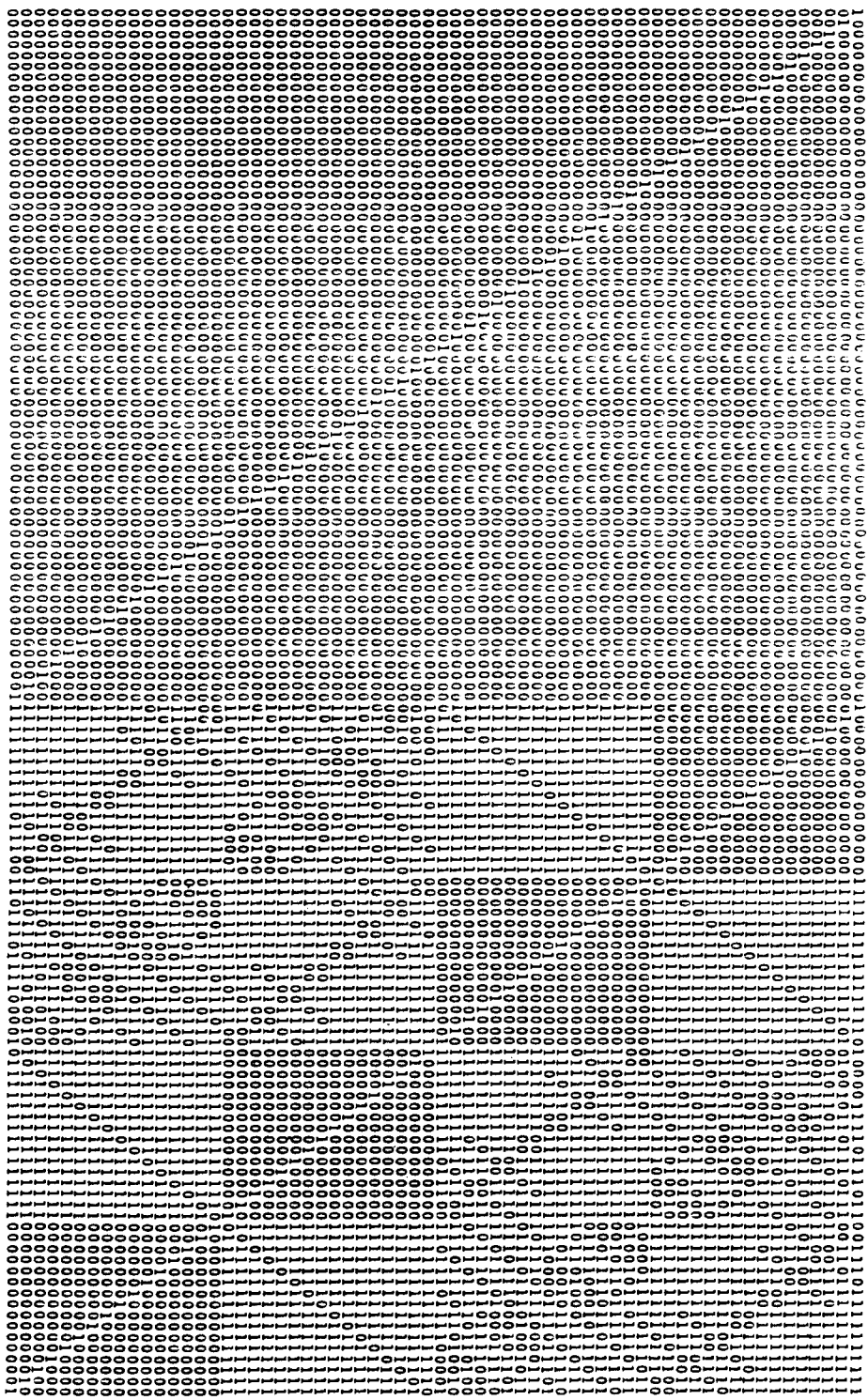
1) *MATRICES GENERATRICES DE H-CODES QUI SONT DES CODES (32, 16, 8)*

2) *MATRICE GENERATRICE D'UN H-CODE QUI EST UN CODE (128, 64, 16).*

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1





BIBLIOGRAPHIE

[1] E.R. BERLEKAMPF. Algebraic coding theory. Mc Graw Hill book Cie, New-York.

[2] S.D. BERMAN. On the theory of group codes. Kibernetica. Vol. 1, n°1, pp. 31-39, (1967).

[3] S.D. BERMAN & I.I. GRUSHKO. Code parameters of principal ideals of group (2,..., 2) over field of characteristic 2. Pr. Pe. Inform.. Vol. 14. n°4. pp. 3-12 (1978).

[4] N. BOURBAKI. Livre II. Algèbre. Herman, Paris (1958).

[5] P. CAMION. Etude de codes binaires abeliens modulaires autoduaux de petites longueurs. Revue du Cethedec, NS 79-2 (1979), pp..3-24.

[6] P. CAMION, G. PASQUIER & J. WOLFMAN. A class of self dual codes. I.E.E.E. Trans. Info. Theory. à paraître.

[7] P. CAMION. Une généralisation dans les p-groupes abéliens élémentaires, $p > 2$, des théorèmes de H.B. MANN et J.F. DILLON sur les ensembles à différences des 2-groupes abéliens élémentaires. Combinatorics 79 (Proc. Colloq. Univ. Montreal, Que. 1979, Part. II). Ann. Discrete Math. 9 (1980), pp. 163-174.

[8] P. CAMION. Differences sets in elementary abelian groups. Les Presses de l'Université de Montreal (1979).

[9] P. CAMION. Codes abeliens autoduaux. Colloque du C.N.R.S., Cachan, 4-8 Juillet 1977.

[10] P. CHARPIN. The extended of Reed Solomon codes considered as ideals of a modular algebra. Communicate at Marseille Luminy : 'Combinatoire 1981'. To appear in The Annals of Discrete Mathematics.

[11] P. CHARPIN. Puissance du radical d'une algèbre modulaire et codes cycliques. Revue du Cethedec, 18ème année, 4ème trimestre 1981, NS 81-2, pp. 35-43.

[12] P. CHARPIN. Codes idéaux de certaines algèbres modulaires. Thèse de 3ème cycle, Juin 1982, Université de Paris 7.

[13] F.J. MAC WILLIAMS & N.J.A. SLOANE. The theory of error correcting codes. North-Holland (1977).

[14] G. PASQUIER. Etude des codes sur une extension de F_2 et de leurs images binaires. Thèse de 3ème cycle. Université de Provence (1980).

[15] A. POLI a M. VENTOU. Codes autoduaux principaux et groupes d'automorphismes de l'algèbre $F_{2^r}[X_1,\ldots,X_n](X_1^2-1,\ldots,X_n^2-1)$. Europ. Journal Combinatories (1981).

[16] A. POLI. Codes dans certaines algèbres modulaires. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paul Sabatier Toulouse (1978).

[17] J. WOLFMANN. A new construction of the binary Golay code (24, 12, 8) using a group algebra over a finite field. Discrete Math. 31 (1980), pp. 337-338.

[18] J. WOLFMANN. Aspects geometriques et combinatoires de l'étude des codes correcteurs. Thèse de Doctorat d'Etat. Université de Paris VII. (1978).