

CAHIERS DU BURO

ERIC STEMMELEN

Tableaux d'échanges : description et prévision

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.

Série Recherche, tome 28 (1977), p. 3-83

http://www.numdam.org/item?id=BURO_1977__28__3_0

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

On peut lire chez L. Stoleru, dans "L'équilibre et la croissance économique" [45], cette définition :

"Toute théorie économique est avant tout une description de certaines structures économiques : de cette description et des hypothèses qui l'accompagnent, la théorie déduit des "lois" qu'il est indispensable de tester en confrontant leurs conséquences chiffrées aux données que l'on a pu réellement observer."

Un problème est alors posé : que signifie donc "décrire certaines structures" ? Comment peut-on savoir s'il y a structure, voire même ce qu'est une structure ? Et puis, "décrire" est-il vraiment équivalent à comprendre ? Au lieu de décrire en premier lieu des structures qui n'apparaissent nullement au grand jour, ne faudrait-il pas d'abord décrire les données pour en dégager des structures, au lieu de procéder, comme semblent faire la plupart des économistes, de façon inverse ? N'est-ce pas faire bon marché des faits que d'espérer d'eux qu'ils veuillent bien s'adapter à une théorie postulée ? D'autant plus qu'ils ne s'y adaptent que rarement, comme l'avoue notre auteur en poursuivant ainsi :

"Nous aurons l'occasion de voir que, malheureusement, ce test est assez peu significatif, vu la difficulté qu'il y a à isoler du contexte économique d'ensemble l'influence de certaines causes bien précises."

Ainsi, non seulement les données n'interviennent en général qu'au niveau d'un test, mais encore ce test n'a-t-il que peu de signification : la théorie économique ainsi comprise se restreint donc textuellement à une "description de certaines structures" et à des "hypothèses". Elle n'est plus qu'un discours, qu'une spéculation, à propos du réel.

Au delà des structures qui n'apparaissent pas clairement, restent les "hypothèses". Au lieu d'examiner des faits, on énonce encore des *a priori*. Ces hypothèses qui pourraient être réalistes ne le sont pas souvent. Qu'on en juge par cet exemple, signalé par R. Barre, dans "Economie Politique" [41] :

"Samuelson a montré récemment, à l'aide d'un modèle mathématique, que, sous certaines conditions (homogénéité des facteurs de production, identité des techniques de production, conditions de concurrence parfaite, parfaite mobilité des produits), l'échange international égalisera le prix des facteurs de production de nation à nation. Mais ces conditions ne sont pas réunies dans la réalité, surtout dans la réalité contemporaine, et l'étude de Samuelson est avant tout un exercice mathématique, sans portée explicative actuelle."

Cette entrée en matière explique pourquoi on ne devra pas s'étonner de ne trouver, dans cet essai sur les tableaux d'échanges, aucune allusion à une prétendue théorie générale des échanges !

La démarche ici adoptée veut contribuer à une réhabilitation des données : nous voulons réaffirmer la primauté des faits sur les suppositions tendancieuses. Elle ne conduit à aucune théorie économique, mais seulement à des méthodes et techniques opérationnelles pour appréhender un phénomène d'échanges et prévoir son évolution future.

Nous rappelons pour commencer l'intérêt des techniques de l'Analyse des données, encore trop peu utilisées en Economie, alors qu'elles constituent l'instrument idéal pour aborder l'étude de tout problème économique avec un minimum d'hypothèses sous-jacentes : leur mise en œuvre doit précéder ou accompagner toute tentative de modélisation. Nous insistons sur l'usage, dans le cas des tableaux d'échanges, des opérateurs introduits par Y. Escoufier [56], technique qui permet en particulier de déterminer dans quelle mesure il y a évolution du phénomène, avant de se lancer dans la prévision.

Nous présentons ensuite une vue unifiée des pratiques classiquement utilisées en Econométrie. Ce tour d'horizon, abordé sous un angle original, montre que l'ensemble de la pratique classique relève du même principe : rechercher le tableau d'échanges le plus proche d'un "squelette" donné au préalable, et vérifier des marges supposées connues. Ainsi la pratique classique souffre-t-elle des mêmes défauts que la théorie classique : elle nécessite la description *a priori* d'une prétendue structure et son adaptation, selon des critères plus ou moins valables, aux données disponibles. Elle a cependant l'avantage d'être déjà plus proche des faits eux-mêmes, et l'empirisme de certaines méthodes en fait souvent la qualité.

Nous ne pouvons nous contenter de techniques encore trop peu reliées aux données elles-mêmes. Nous introduisons donc une technique totalement nouvelle pour la prévision des tableaux d'échanges. Cette technique est issue directement de certains résultats connus en Analyse factorielle des correspondances. Elle ne dégage aucune "structure" proprement dite, mais retient plutôt l'essentiel du phénomène d'échanges et le projette dans le futur. Cette technique semble prometteuse mais n'en est qu'à ses premiers essais ; nous espérons la voir utiliser pour d'autres problèmes de prévisions de tableaux d'échanges et la voir ainsi s'améliorer progressivement... ou être rejetée, si elle ne s'avérait finalement pas assez efficace.

On constatera l'absence des modèles non théoriques, mais faisant appel à de trop nombreux paramètres, tels que les modèles gravitationnels. Ces modèles nous ont paru relever à chaque fois d'un problème particulier difficilement généralisable. Les paramètres qu'ils utilisent sont souvent plus ardues à prévoir que les

échanges eux-mêmes et sont même parfois inaccessibles en tant que données sûres. Les modèles de type économétriques qui échappent à ces critiques fournissent cependant –mais dans des cas très précis– des résultats satisfaisants ; il n'est donc pas question de les mépriser, mais seulement de savoir les utiliser de manière originale en fonction de chaque cas particulier étudié. Nous donnons un de ces exemples particuliers.

Enfin, nous n'avons pas non plus abordé le problème des prévisions de type qualitatif. Les méthodes que nous proposons sont impuissantes à prévoir les bouleversements structurels : tout au plus les opérateurs d'Escoufier peuvent-ils signaler les ruptures de tendance. Mais l'objet de ce travail était par définition quantitatif : les tableaux d'échanges sont des données chiffrées qui rendent compte à leur manière d'une vision des échanges passés. Nous désirons simplement observer et prévoir l'évolution naturelle, ou plutôt probable, de ce phénomène. Ce résultat n'est nullement négligeable. Il se peut que l'évolution naturelle de la situation actuelle conduise à court ou moyen terme à une situation inacceptable : c'est alors aux décideurs –pouvoirs économiques ou politiques– d'en tirer les conclusions. . .

NOTATIONS UTILISÉES

Un tableau d'échanges est une matrice ($n \times m$) où le terme X_{ij} désigne la quantité de produit envoyé par la région (ou le pays) i vers la région j dans le cas d'échanges commerciaux, ou bien la valeur des consommations intermédiaires de la branche j en provenance de la branche i dans le cas des tableaux d'échanges interindustriels (T.E.I).

On notera les marges de ce tableau X_i , et X_j , et le total $X_{..}$:

$$X_i = \sum_{j=1}^m X_{ij} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n$$

$$X_j = \sum_{i=1}^n X_{ij} \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, m$$

$$X_{..} = \sum_{i,j} X_{ij} = \sum_i X_i = \sum_j X_j.$$

On notera L_i , C_j et T les prévisions à l'horizon voulu de ces marges et de ce total ; elles vérifient toujours :

$$T = \sum_i L_i = \sum_j C_j.$$

On notera enfin les probabilités associées :

$$p_{ij} = \frac{X_{ij}}{T}, \quad p_i = \frac{X_i}{T}, \quad p_j = \frac{X_j}{T}.$$

1. SUR LES TECHNIQUES D'ANALYSE DE DONNÉES UTILISÉES POUR DÉCRIRE LES TABLEAUX D'ÉCHANGES

Avant d'envisager la prévision d'un phénomène, encore faut-il s'être assuré de son existence. . .

La chose étudiée présente-t-elle une permanence dans le temps ? Quels en sont les invariants ? En quoi réside l'essentiel ?

Puis : existe-t-il une évolution compréhensible des choses ? Quelles sont les grandes tendances ? Si structure il y a, cette structure connaît-elle une déformation régulière ?

L'économètre qui dispose de données (par exemple : des tableaux d'échanges...) se doit de répondre à ces diverses interrogations. En utilisant les techniques de l'analyse des données, il évitera de tomber dans des descriptions sommaires ou subjectives, et préparera le terrain pour une prévision de meilleure qualité.

L'éventail des techniques disponibles est des plus larges (cf. [54]). Ces techniques peuvent aider à répondre à toutes les questions que doit se poser l'économiste avant de bâtir une théorie ; deux d'entre elles apparaissent plus particulièrement adaptées aux problèmes d'étude et de prévision des tableaux d'échanges : l'Analyse factorielle des correspondances et les *opérateurs d'Escoufier*.

1.1 – A PROPOS DE L'ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES (AFC)

Les tableaux d'échanges peuvent être considérés comme des tableaux de contingence particuliers, associés aux deux caractères qualitatifs : "être envoyé par..."

et “être reçu par...”. L’analyse factorielle des correspondances permet donc d’obtenir des images résumées des tableaux d’échanges considérés isolément ; la comparaison des images, correspondant à des années successives, permet, en observant les modifications d’une année à l’autre sur les plans factoriels, de saisir, même d’expliquer, les évolutions de la structure des échanges : un exemple concret de ce type de démarche est fourni au paragraphe 4.1.1.

On verra par ailleurs, au paragraphe 3, comment utiliser l’AFC pour résumer l’information apportée par le tableau d’échanges et isoler l’essentiel du phénomène, la formule classique de “reconstitution” permettant alors de retrouver ce tableau avec une bonne approximation.

1.2 – LES OPERATEURS

La technique des opérateurs (cf. [52], [56], [59]) permet de répondre en particulier très simplement à la deuxième série de questions, c’est-à-dire de s’assurer de l’existence d’une évolution du phénomène d’échanges.

Afin de les comparer entre eux, on considère les tableaux d’échanges correspondant à des années successives comme des tableaux individus – caractères où les individus sont les lois conditionnelles associées aux colonnes (chaque loi représente le profil d’importations associé à une région) ; ceci revient à considérer les opérateurs associés comme des “individus” (cf. [59] § 3.1.1 et 3.2). On juge de l’évolution des échanges en regardant la disposition des différentes années sur le plan principal ; si les années s’ordonnent, il y a bien déformation régulière de la structure ; on peut de plus découvrir parmi les tableaux d’échanges ceux dont les données sont sujettes à caution : des exemples d’applications sont donnés au paragraphe 4.1.2.

2. LA PRATIQUE CLASSIQUE

Après avoir analysé les données à l'aide des techniques que nous avons rappelées au paragraphe précédent on peut envisager de passer au stade prévisionnel. Si les différentes analyses des données, et en particulier les opérateurs, ont fourni l'assurance que le phénomène existe et présente une évolution régulière, il reste à découvrir les règles qui régissent cette évolution.

Or, dans le domaine incertain de la prévision, la pratique économétrique consiste bien souvent à plaquer sur un phénomène des modèles plus ou moins cohérents ; l'économiste semble penser que le réel s'adapte bien à une logique issue de considérations purement mathématiques : il ne contrôle pas toujours la rigueur de la méthode, ni surtout sa validité.

Mais on peut avoir bien des visions d'un phénomène suivant l'angle sous lequel on se place ; ici l'angle est défini par l'intention : deviner un certain futur. Ayant précisé les objectifs avec une rigueur toute phénoménologique, il s'agit d'observer le phénomène, de le comprendre, d'en dégager l'essentiel, ..., pour aboutir éventuellement à un modèle qui pourra, lui, être considéré comme résultant non seulement de l'intention mais aussi du phénomène.

On dispose souvent de bonnes prévisions des marges des tableaux d'échanges ; il en est ainsi par exemple des échanges commerciaux où les exportations et importations totales pour chaque pays ou chaque région sont en général bien prévues. Ces "prévisions" peuvent être parfois en fait des objectifs fixés par les décideurs, la prévision du tableau d'échanges fournissant alors une image des conséquences globales de ces objectifs ponctuels.

Il s'agit dans tous les cas de construire un tableau dont les marges sont fixées et qui tienne compte des données que l'on possède sur les échanges passés.

L'économiste écarte en général délibérément les hypothèses de bouleversements complets ; il ne peut envisager que des phénomènes évolutifs, à déformation lente.

Encore faut-il pouvoir dégager ce qui évolue véritablement à moyen ou long terme, de ce qui ne fait que varier momentanément, voire accidentellement. Il s'agit donc de découvrir ce qui est déformable dans les tableaux d'échanges, sans présenter de rupture à un moment donné ; on ne retiendra pas les brusques oscillations de faible amplitude qui ne correspondent à rien de significatif.

Nous appellerons *squelette* d'un tableau d'échanges l'ensemble des éléments qui caractérise cette structure évolutive des échanges et qui ne retient pas ce qui n'est que passager.

Il s'agit d'une conception dynamique de la structure d'un phénomène ; le type de structure retenu sera toujours contrôlable à l'aide de critères simples, les différences entre les tableaux réels et les tableaux reconstruits à l'aide du squelette doit résumer *l'essentiel* du tableau, c'est-à-dire éliminer l'accessoire et en particulier les échanges sans signification.

Ainsi la prévision des échanges revient-elle à la recherche d'un squelette, à l'étude de ses déformations successives et à la prévision de son état à l'horizon choisi. Le tableau recherché sera le tableau, de marges données, le plus proche —au sens d'un critère à préciser— du squelette projeté.

On peut regrouper les méthodes de prévision des tableaux d'échanges en deux catégories :

1) Celles qui utilisent un squelette théorique préexistant, et tentent de vérifier *a posteriori* que le phénomène étudié relève bien du modèle présupposé.

2) Celles qui cherchent à dégager peu à peu de l'étude des données disponibles un squelette bien adapté à l'objectif et jouissant des propriétés exigées.

La première façon de procéder est usuelle en Econométrie ; la deuxième façon, qui l'est malheureusement beaucoup moins, fait appel aux méthodes de l'Analyse des données.

Dans ce paragraphe nous donnons une présentation unifiée des techniques usuelles ; on constate en effet qu'elles relèvent finalement toutes du même principe : déterminer les termes d'échanges X_{ij} qui minimisent une certaine fonction sous les contraintes de respect des marges. La fonction retenue dépend à la fois du squelette utilisé *a priori* et de la façon de mesurer l'écart entre le tableau et le squelette.

Au paragraphe 3, la prévision des tableaux est abordée à l'aide de l'Analyse factorielle des correspondances.

Les méthodes et techniques, les façons de faire décrites dans ces paragraphes empruntent évidemment très largement à la statistique ; les tableaux d'échanges définissant des mesures positives sur des produits cartésiens, les traitements effectués sont souvent voisins de ceux que l'on fait ou que l'on pourrait faire sur les tableaux de contingence.

2.1 – GENERALITES : NOTION DE PROGRAMME DE PREVISION

Il s'agit de reconstruire le tableau d'échanges X à partir de la donnée d'un squelette S —qui sera soit une approximation de X , soit un ensemble de coefficients ou de paramètres qui rendent compte des idées *a priori* que l'on peut avoir de X — et des marges de X , supposées connues, L_i et C_j .

Le but étant de faire "coller" au mieux le tableau X au squelette S , tout en respectant les marges données, la reconstruction du tableau se fera à l'aide d'un critère du type :

rendre minimum $F(X, S)$

sous les contraintes de respect des marges :

$$\sum_{j=1}^m X_{ij} = L_i \quad \text{pour tout } i$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = C_j \quad \text{pour tout } j$$

et sous les contraintes de signe :

$$X_{ij} \geq 0 \quad \text{pour tout } i \text{ et pour tout } j$$

F étant une fonction de X et de S qui mesurera en quelque sorte l'écart entre le tableau X et le squelette S .

En réalité, désirant dans un premier temps dresser un bilan des méthodes existantes, on s'est aperçu qu'il suffisait de ne considérer que les fonctions F telles que :

$$F(X, S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij})$$

en faisant intervenir le squelette au niveau de la définition de la fonction f .

On peut remarquer que le critère alors retenu donne des rôles équivalents aux différents éléments du tableau X ; cela revient —dans le cas d'échanges com-

merciaux— à faire l'hypothèse d'une certaine cohérence dans les actions des agents économiques qui assurent les échanges, cohérence qui permettrait à la fois d'effectuer la même transformation sur chacun des termes X_{ij} et de minimiser la somme des résultats obtenus. On élimine ainsi toute idée de conflit au niveau des échanges, toute notion de déséquilibre au profit de certains agents économiques ; les méthodes employées usuellement ne sont donc pas neutres puisqu'elles présupposent à la fois l'existence d'un squelette *a priori* —donc d'une prétendue structure immuable— et un jeu d'acteurs économiques aboutissant à l'équilibre. Ceci ne peut que confirmer la réflexion de J. Attali et M. Guillaume [40] : “*Toutes ces méthodes de prévision, même si elles sont très empiriques, donnent des résultats à peu près acceptables, au moins dans les périodes d'évolution normale des échanges. Elles ne sont évidemment d'aucune utilité pour comprendre les relations internationales de domination et les mécanismes d'appropriation et d'exportation du profit.*”

Nous nous contenterons donc d'exposer ces méthodes et de les tester (§ 4), sans les parer d'une vertu théorique quelconque : il s'agit d'un ensemble cohérent de techniques, et non pas de “lois”.

Nous regrouperons sous le vocable de *programme de prévision* d'un tableau d'échanges les méthodes qui se ramènent à un problème de la forme suivante :

déterminer les X_{ij} qui minimisent	
$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(X_{ij})$	
sous les contraintes	
$\sum_j X_{ij} = L_i$	pour tout $i = 1, \dots, n$ (L)
$\sum_i X_{ij} = C_j$	pour tout $j = 1, \dots, m$ (C)
$X_{ij} \geq 0$	pour tout i et tout j (S)

On notera désormais les contraintes de marges *contraintes* (L) et (C) et les contraintes de signe *contraintes* (S). On ne rappellera pas les contraintes (S) lorsque celles-ci sont visiblement satisfaites.

Les différentes méthodes se distingueront à la fois par la forme analytique donnée à la fonction f et par les paramètres retenus pour la préciser qui caractériseront le squelette adopté.

Rappelons que ces paramètres n'ont d'intérêt que s'ils ne sont pas en nombre trop élevé et s'ils peuvent être considérés comme des "données sûres".

Remarquons enfin qu'on parlera toujours de *programme de prévision* si les contraintes à respecter sont seulement des conséquences ou des cas particuliers des contraintes de respect des marges ici indiquées pour le cas général.

2.2 – LES PROGRAMMES DE TRANSPORT

Le programme suivant :

$$\begin{aligned} & \min \sum_{ij} X_{ij} C_{ij} \\ & \text{sous } \sum_{ij} X_{ij} = C_j \quad \text{pour } j = 1, \dots, m \\ & \quad \sum_{ij} X_{ij} = L_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \\ & \quad X_{ij} \geq 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

est bien connu ; il s'agit d'un classique programme linéaire de transport [4] où la fonction à minimiser $f(X_{ij}) = \sum_{ij} X_{ij} C_{ij}$ représente le coût des transports de la région i à la région j , le terme C_{ij} étant le coût unitaire d'échange de i vers j . On suppose que les échanges ont lieu de telle sorte que leur coût global soit minimum, en admettant que ce critère rend bien compte de l'ensemble des comportements des agents économiques. Mais si les comportements individuels sont assez faciles à deviner (volonté de vendre ou d'acheter au meilleur prix, donc nécessité pour tous de minimiser les coûts d'échanges), leur agrégation pose sans doute quelques problèmes car, comme nous l'avons déjà signalé (cf. § 2.1) les agents sont très loin d'être des "centres de décision autonomes", hypothèse qui est pourtant à la base de toute la théorie néoclassique (cf. Malinvaud "Leçons de théorie microéconomique": p. 3), comme de la réflexion "libérale" (cf. Peyrefitte : "Le mal français" : p. 200). On suppose de plus que le coût unitaire d'échange, qui ne dépend que des régions de départ et d'arrivée, exprime l'ensemble des termes à prendre en compte dans l'expression du profit (du point de vue du producteur) ou des coûts (du point de vue du consommateur). On conçoit donc l'importance que prend la construction d'un indice C_{ij} qui sera en fait un *coût généralisé d'échange* dans lequel on aura introduit un certain nombre de paramètres caractérisant le phénomène. La construction de cet indice C_{ij} dépend totalement du problème traité ; pour le construire les techniques d'Analyse des données peuvent être utilisées. (cf. § 4.2.1).

On rappelle simplement ici que la résolution du programme linéaire de transport s'opère en général à l'aide de l'algorithme de Ford- Fulkerson [5] et qu'on obtient un nombre de solutions X_{ij} non nulles inférieur ou égal au nombre de contraintes, soit $(n + m - 1)$ (rappelons que les nombres donnés C_j et L_i sont liés par une relation : $\sum_j C_j = \sum_i L_i$) : cette faiblesse est souvent sans gravité, car la plupart des tableaux d'échanges sont suffisamment bien "approchés" par la donnée de $(n + m - 1)$ termes sur les $(n \times m)$ termes théoriques.

Une autre particularité –signalée par M. Fréchet [8]– de la solution de ce programme est à noter. Si l'on considère un "rectangle" extrait du tableau solution :

$$\begin{array}{ccc} X_{ij} & \text{-----} & X_{il} & i < k \\ | & & | & j < l \\ X_{kj} & \text{-----} & X_{kl} & \end{array}$$

l'un au moins de ses termes est nul. Ce qui signifie que les programmes de transport ne peuvent rendre compte de situations d'échanges où deux pays (i et k) se trouveraient *chacun* fournisseur de deux autres pays (j et l) ; cette restriction peut être gênante dans certains cas et il est bon d'avoir étudié si une telle situation peut se produire dans le phénomène d'échanges considéré avant de se lancer dans la recherche d'un "coût généralisé d'échanges" et la résolution du programme de transport correspondant.

2.3 – LA METHODE RAS

2.3.1 – Présentation classique

On connaît la formulation classique de la "méthode RAS" [2], [3], [7], [13], [17], [18], [27], [30], [31], [37], [38], [39] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_{ij} = r_i a_{ij} s_j & \text{pour tout } i \text{ et tout } j \\ \sum_j X_{ij} = L_i & \text{pour tout } i \\ \sum_i X_{ij} = C_j & \text{pour tout } j \end{array} \right.$$

Les termes a_{ij} ne sont autres que des termes " X_{ij} " correspondant à une année antérieure, ou des estimations provisoires des X_{ij} à l'horizon voulu.

On suppose que chaque élément a_{ij} est soumis à deux effets interprétés ainsi en terme d'échanges interrégionaux :

1) Une correction de l'offre globale de la région i , la part de chaque région dans les exportations de i restant constante : coefficient r_i .

2) Une correction de la demande globale de la région j , la part de chaque région dans les importations de j restant constante : coefficient s_j .

L'interprétation en termes de coefficients techniques d'un T.E.I. (tableau d'échanges interindustriels) est du même type :

1) Un "effet de substitution" : le produit i est remplacé par d'autres produits —ou les remplace— comme intermédiaire dans le processus de fabrication.

2) Un "effet de fabrication" : le produit j absorbe une plus ou moins grande part de produits intermédiaires.

On suppose que les deux effets jouent indépendamment l'un de l'autre et simultanément, d'où l'application de la double correction par le coefficient $r_i s_j$.

Le problème ainsi posé se résoud par un procédé itératif qui était connu dès 1940 [6] bien avant son application à la prévision des coefficients techniques par les économistes de Cambridge [31] et qui consiste en une simple succession de règles de trois.

A l'itération $2p + 1$, pour obtenir X_i^{2p+1} on ajustera les marges en ligne de la matrice X^{2p} par la formule :

$$X_{ij}^{2p+1} = X_{ij}^{2p} \frac{L_i}{X_i^{2p}}$$

On obtient ensuite la matrice $X^{2(p+1)}$ en ajustant les marges en colonne de la matrice X^{2p+1} à l'aide de la formule :

$$X_{ij}^{2(p+1)} = X_{ij}^{2p+1} \frac{C_j}{X_{.j}^{2p+1}}$$

La matrice X^0 permettant d'effectuer la première itération sera la matrice des a_{ij} donnés. Les itérations se poursuivent jusqu'à ce que les marges de la matrice obtenue soient suffisamment proches des marges C_j et L_i ; dans la pratique l'approximation est excellente au bout de 5 à 6 itérations pour peu que les marges du tableau des a_{ij} ne diffèrent pas trop des marges données. La convergence théorique de la méthode a été démontrée par Bacharach [1] ; une preuve de la convergence de l'itération vers la solution $X_{ij} = r_i a_{ij} s_j$ a été fournie également par Ireland et Kullback [15], [16] à l'aide de la théorie de l'information de Kullback [19] :

une approche de démonstration plus classique a été tentée par Caussinus [3] ; enfin les cas particuliers intéressants de non-convergence ont été traités par Thionet [36] et [37].

2.3.2 – Interprétation en termes de programme de prévision

Cette méthode relève parfaitement de ce que nous avons appelé *programme de prévision* ; en effet, si on considère le programme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i,j} X_{ij} \operatorname{Log} \frac{X_{ij}}{a_{ij}} \\ \text{sous les contraintes (L) et (C)} \end{array} \right.$$

la fonction à minimiser étant convexe et les contraintes linéaires, la solution unique (cf. [25]) sera donnée par la résolution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{Log} \frac{X_{ij}}{a_{ij}} + \rho_i + \sigma_j = 1 & \text{pour tout } i \text{ et tout } j \\ \sum_i X_{ij} = C_j & \text{pour tout } j \\ \sum_j X_{ij} = L_i & \text{pour tout } i. \end{array} \right.$$

Soit en posant $r_i = e^{\rho_i - 1}$ et $s_j = e^{\sigma_j}$

$$X_{ij} = r_i a_{ij} s_j$$

$$\sum_i X_{ij} = C_j$$

$$\sum_j X_{ij} = L_i.$$

Ce qui est bien la formulation usuelle de la méthode RAS.

Ainsi la méthode RAS apparait comme un simple algorithme de résolution d'un programme de prévision particulier. Il s'agit ici de minimiser l'écart entre un squelette (caractérisé par les a_{ij}) et le tableau recherché X_{ij} ; cet écart est mesuré selon un indice, $\sum X_{ij} \operatorname{Log} \frac{X_{ij}}{a_{ij}}$, qui rappelle ceux utilisés en théorie de l'information. Nous allons préciser comment interpréter cette mesure de l'écart entre deux tableaux, en nous plaçant dans le cas de deux tableaux de contingence p_{ij} et π_{ij} .

On sait que le *degré d'indétermination* ou *entropie* —selon la terminologie de Shannon— d'un système d'événements S est donné par :

$$H = - \sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k,$$

où p_k est la probabilité associée à l'événement S_k (H est donc l'espérance mathématique des informations apportées par la détermination de chaque événement). Cette entropie est comprise entre 0 (si l'une des probabilités est égale à 1) et $\log_2 n$ (si toutes les probabilités sont égales à $1/n$).

Si l'on considère un tableau de contingence dont les probabilités associées sont p_{ij} , l'entropie de la partition croisée $P = P_1 \times P_2$ est :

$$H = - \sum_{i,j} p_{ij} \log_2 p_{ij}.$$

Les entropies associées aux partitions P_1 et P_2 correspondant aux marges du tableau —les lois de probabilités marginales associées définies par les probabilités p_i et p_j sont notées H_1 et H_2 — sont données par :

$$\begin{cases} H_1 = - \sum_i p_i \log_2 p_i \\ H_2 = - \sum_j p_j \log_2 p_j \end{cases}$$

L'entropie H est inférieure ou égale à la somme $H_1 + H_2$ et l'égalité est atteinte si et seulement si :

$$p_{ij} = p_i \cdot p_j \quad \text{pour tout } i \text{ et pour tout } j.$$

L'*information mutuelle* entre les partitions P_1 et P_2 est notée $I(P_1, P_2)$:

$$I(P_1, P_2) = H_1 + H_2 - H.$$

Elle s'écrit encore :

$$I(P : P_1 \times P_2) = \sum_{i,j} p_{ij} \log_2 \left(\frac{p_{ij}}{p_i \cdot p_j} \right)$$

L'information mutuelle est nulle si $p_{ij} = p_i \cdot p_j$; l'indice $I(P : P_1 \times P_2)$ mesure l'écart à l'indépendance de la distribution des p_{ij} .

Par analogie, S. Kullback [19] a utilisé un indice permettant de mesurer l'écart entre les p_{ij} et une distribution quelconque de référence ; l'*information de discrimination* entre la distribution des p_{ij} et la distribution de référence des π_{ij} est donnée par :

$$I(p : \pi) = \sum_{i,j} p_{ij} \operatorname{Log} \frac{p_{ij}}{\pi_{ij}}.$$

(Remarquons ici l'utilisation du logarithme népérien).

On montre que cette quantité est positive ou nulle et ne s'annule que si $p_{ij} = \pi_{ij}$ pour tout i et pour tout j .

Enfin, si p_{ij} est proche de π_{ij} l'information de discrimination est équivalente à une distance du χ^2 (de centre π), puisqu'on a alors :

$$I(p : \pi) \sim \sum_{i,j} p_{ij} \left(\frac{p_{ij}}{\pi_{ij}} - 1 \right)$$

et

$$[d_{\chi^2}(p, \pi)]^2 \sim \sum_{ij} \pi_{ij} \left[\left(\frac{p_{ij}}{\pi_{ij}} \right)^2 - 1 \right].$$

Cette dernière remarque permet d'introduire un nouveau programme de prévision, utilisant la distance du χ^2 , et qui avait été proposé [6], [10], [30] pour résoudre des problèmes d'estimation de tableaux de contingence.

Soit le programme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{ij} \frac{(p_{ij} - \pi_{ij})^2}{\pi_{ij}} \\ \text{sous :} & \sum_i X_{ij} = C_j \quad \text{pour tout } j \\ & \sum_j X_{ij} = L_i \quad \text{pour tout } i \\ & p_{ij} \geq 0 \quad \text{pour tout } i \text{ et tout } j \end{array} \right.$$

où $p_{ij} = X_{ij}/T$ et où les π_{ij} sont les probabilités associées à des résultats d'observation sur un échantillon. On peut adapter cette méthode aux problèmes de prévision en prenant ici pour termes π_{ij} les probabilités associées à un tableau d'échanges connu ou des probabilités supposées assez voisines de celles recherchées, et obtenues éventuellement par extrapolation.

Les solutions s'obtiennent par :

$$-\frac{2(p_{ij} - \pi_{ij})}{\pi_{ij}} + \rho_i + \sigma_j = 0,$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{X_{ij}}{T} = \pi_{ij} (r_i + s_j) & \text{pour tout } i \text{ et tout } j \\ \sum_i X_{ij} = C_j & \text{pour tout } j \\ \sum_j X_{ij} = L_i & \text{pour tout } i. \end{array} \right.$$

La solution de ce programme peut être obtenue par l'algorithme suivant dû à Stephan [30] :

$$r_i^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{L_i}{T \pi_i}$$

$$s_j^{(p)} = \frac{C_j}{T \pi_j} - \sum_i r_i^{(p)} \frac{\pi_{ij}}{\pi_j} \quad \text{pour } p \geq 1$$

$$r_i^{(p)} = \frac{L_i}{T \pi_i} - \sum_j s_j^{(p-1)} \frac{\pi_{ij}}{\pi_i} \quad \text{pour } p > 1.$$

La convergence de cet algorithme et d'un algorithme similaire est démontrée, sous certaines conditions, par Friedlander [10].

2.4 – LES METHODES “STRUCTURELLES”

Parler de méthodes prétendues “structurelles” ne signifie nullement dégager une quelconque structure ; d'ailleurs “*on retiendra que la notion de structure réduite à elle-même est trop vague pour que son utilisation n'entraîne pas inévitablement un certain nombre d'ambiguïtés*” (P. Delattre. “Système, structure, fonction, évolution”). Il s'agit simplement ici d'une facilité de langage pour caractériser l'utilisation d'un certain nombre de coefficients construits à partir des termes X_{ij} d'un quelconque tableau d'échanges.

En ce sens, il est classique [7], [23], [24], [28] de considérer les quatre types de coefficients :

$$\left(\frac{X_{ij}}{X}\right) \left(\frac{X_{ij}}{X_i}\right) \left(\frac{X_{ij}}{X_j}\right) \left(\frac{X_{ij} X_{..}}{X_i X_j}\right)$$

que nous noterons respectivement α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} et δ_{ij} .

Les modèles alors construits en supposant constant l'un de ces coefficients postulent une relation de proportionnalité dont l'interprétation est immédiate dans les trois premiers cas, si X_{ij} est un tableau d'échanges commerciaux :

1) $X_{ij} = \alpha_{ij} X_{..}$ suppose la conservation des parts dans le commerce total, qui seul évolue (modèle à un degré de liberté).

2) $X_{ij} = \beta_{ij} X_i$ suppose la conservation des parts des importateurs dans les exportations de chaque région i , qui seules évoluent (modèle à n degrés de liberté).

3) $X_{ij} = \gamma_{ij} X_j$ suppose la conservation des parts des exportateurs dans les importations de chaque région j , qui seules évoluent (modèle à n degrés de liberté).

Le quatrième coefficient mérite quelques explications ; l'équation du modèle est la suivante :

$$4) X_{ij} = \delta_{ij} \frac{X_i X_j}{X_{..}}$$

où δ_{ij} est le coefficient supposé constant.

Ce coefficient δ_{ij} a été utilisé à des fins d'analyse de tableaux d'échanges la première fois par Leontief et Strout [20], [21] et repris en particulier par Nagy [26] et par Froment et Zighera [11], [12]. On peut en donner une justification économique en écrivant :

$$\delta_{ij} = \frac{\frac{X_{ij}}{X_i}}{\frac{X_j}{X_{..}}} = \frac{\text{part du pays importateur } j \text{ dans les exportations de } i}{\text{part du pays importateur } j \text{ dans le commerce total}}$$

ou encore :

$$\delta_{ij} = \frac{\frac{X_{ij}}{X_j}}{\frac{X_i}{X_{..}}} = \frac{\text{part du pays exportateur } i \text{ dans les importations de } j}{\text{part du pays exportateur } i \text{ dans le commerce total}}$$

Sous l'un quelconque de ces deux points de vue, un état "normal" du commerce serait celui où tous les δ_{ij} sont égaux à 1.

Mais remarquons aussi que dans ce cas on aurait :

$$\frac{X_{ij}}{X_{..}} = \frac{X_{i.}}{X_{..}} \times \frac{X_{.j}}{X_{..}},$$

ce qui est la classique hypothèse d'indépendance entre lignes et colonnes d'un tableau statistique ; les δ_{ij} rendent donc compte ici de "l'écart à l'indépendance", écart que l'on suppose constant dans ce modèle.

On peut bien entendu inventer d'autres coefficients construits à partir des éléments X_{ij} , $X_{..}$, $X_{i.}$ et $X_{.j}$. Par exemple, R. Teekens [32] suggère :

$$\epsilon_{ij} = \frac{X_{ij} X_{..} - X_{i.} X_{.j}}{X_{..}^2}$$

qui est une autre façon de mesurer l'écart à l'indépendance.

Le modèle correspondant s'écrit :

$$X_{ij} = \epsilon_{ij} X_{..} + \frac{X_{i.} X_{.j}}{X_{..}} \quad (5)$$

Il est également à $2n - 1$ degrés de liberté.

Les cinq modèles que nous venons d'envisager supposent chacun l'existence d'un coefficient constant pour toute matrice $\{X_{ij}\}$ du phénomène étudié. Pour étudier la validité de tels modèles, il suffit de construire les matrices $\{\alpha_{ij}\}$, $\{\beta_{ij}\}$, ..., pour plusieurs années consécutives et de vérifier leur stabilité.

Il est bien rare dans la pratique de rencontrer de tels cas : les coefficients ont plutôt tendance à se modifier d'une année sur l'autre. Les graphiques donnant chacun des coefficients en fonction du temps nous renseignent sur leur évolution ; si celle-ci n'est pas anarchique (croissances ou décroissances régulières) il est possible de prévoir les valeurs prises par ces coefficients dans le futur, et par là de prévoir les X_{ij} : on construit ainsi des *modèles à coefficients évolutifs*. Un problème est alors celui de la cohérence des prévisions X_{ij} et des prévisions des marges : nous allons indiquer comment le résoudre pour chaque cas et surtout montrer que ces différents modèles relèvent tous des programmes de prévision introduits précédemment.

2.4.1 – Modèle des fréquences (α_{ij})

Soient α_{ij} des nombres positifs donnés tels que :

$$\sum_{ij} \alpha_{ij} = 1.$$

Ce sont des coefficients de fréquences d'échanges, c'est-à-dire des termes correspondant à certains ($X_{ij}/X_{..}$).

Les α_{ij} ont pu être obtenus comme extrapolations des coefficients ($X_{ij}/X_{..}$) des années antérieures, extrapolations dont on a ramené la somme à 1.

Soit alors le programme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{ij} X_{ij} \operatorname{Log} \frac{X_{ij}}{\alpha_{ij}} \\ \text{sous } \sum_{ij} X_{ij} = T, \end{array} \right.$$

où T est un nombre donné, qui correspond à l'échange total prévu à l'horizon où l'on se place pour la prévision.

La fonction à minimiser étant *convexe* et les contraintes *linéaires* la solution *unique* est donnée par la résolution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{Log} \frac{X_{ij}}{\alpha_{ij}} - 1 + \lambda = 0 \quad (\text{pour tout } i \text{ et tout } j) \\ \sum_{ij} X_{ij} = T. \end{array} \right.$$

En posant $l = e^{\lambda-1}$ on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{ij} = \alpha_{ij} l \quad (\text{pour tout } i \text{ et tout } j) \\ \sum_{ij} X_{ij} = T, \end{array} \right.$$

d'où finalement :

$$X_{ij} = \alpha_{ij} T \quad (\text{pour tout } i \text{ et tout } j)$$

ce qui correspond à la solution espérée du modèle (1).

2.4.2 – Modèles des profils (β_{ij}) et (γ_{ij})

Soit le programme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i,j} X_{ij} \operatorname{Log} \frac{X_{ij}}{\beta_{ij}} \\ \text{sous la contrainte (L),} \end{array} \right.$$

où les β_{ij} sont des nombres positifs donnés tels que :

$$\sum_j \beta_{ij} = 1 \quad (\text{pour tout } i)$$

Les β_{ij} sont considérés comme des *profils en ligne*, ils peuvent être obtenus comme extrapolations des coefficients (X_{ij}/X_i) des années antérieures, extrapolations dont on a ramené les n sommes en ligne à 1.

Le programme équivaut à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{Log} \frac{X_{ij}}{\beta_{ij}} - 1 + \rho_i = 0 \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j) \\ \sum_j X_{ij} = L_i \quad (\text{pour tout } i) \end{array} \right.$$

dont les solutions sont celles “souhaitées” :

$$X_{ij} = L_i \beta_{ij} \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j).$$

On aura de même un programme de prévision correspondant aux *profils en colonne*, c'est-à-dire aux termes γ_{ij} obtenus par extrapolation de termes (X_{ij}/X_j) correspondant aux années antérieures et corrigés de façon à ce qu'ils vérifient :

$$\sum_i \gamma_{ij} = 1 \quad (\text{pour tout } j).$$

Ce programme s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{ij} X_{ij} \operatorname{Log} \frac{X_{ij}}{\gamma_{ij}} \\ \text{sous la contrainte (C)} \end{array} \right.$$

et ses solutions sont bien sûr :

$$X_{ij} = C_j \gamma_{ij} \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j)$$

2.4.3 – Premier modèle d'écart à l'indépendance (δ_{ij})

Soit le programme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{ij} X_{ij} \operatorname{Log} \frac{X_{ij} T}{\delta_{ij}} \\ \text{sous les contraintes (L), (C) et (S),} \end{array} \right.$$

où les coefficients δ_{ij} sont des nombres positifs donnés tels que :

$$(K) \left\{ \begin{array}{l} \sum_i L_i \delta_{ij} = T \quad (\text{pour tout } j) \\ \sum_j C_j \delta_{ij} = T \quad (\text{pour tout } i). \end{array} \right.$$

La solution de ce programme s'obtient par résolution des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{Log} \frac{X_{ij} T}{\delta_{ij}} + \rho_i + \sigma_j = 1 \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j) \\ \sum_i X_{ij} = C_j \quad (\text{pour tout } j) \\ \sum_j X_{ij} = L_i \quad (\text{pour tout } i) \end{array} \right.$$

équivalentes aux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{ij} = \frac{r_i s_j}{T} \delta_{ij} \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j) \\ \sum_i X_{ij} = C_j \quad (\text{pour tout } j) \\ \sum_j X_{ij} = L_i \quad (\text{pour tout } i) \end{array} \right.$$

(on a posé : $r_i = e^{\rho_i - 1}$ et $s_j = e^{\sigma_j}$).

Du fait de la propriété (K) une solution est donnée par :

$$r_i = L_i \quad (\text{pour tout } i)$$

$$s_j = C_j \quad (\text{pour tout } j)$$

car alors :

$$\sum_i X_{ij} = \sum_i \frac{L_i C_j}{T} \delta_{ij} = C_j \frac{\sum_i L_i \delta_{ij}}{T} = C_j$$

et de même :

$$\sum_j X_{ij} = L_i \frac{\sum_j C_j \delta_{ij}}{T} = L_i.$$

Cette solution est unique, la fonction à minimiser étant convexe et les contraintes linéaires.

On obtient donc bien le résultat :

$$X_{ij} = \frac{L_i C_j}{T} \delta_{ij} \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j).$$

Si les coefficients δ_{ij} sont tous égaux à 1 on retrouve :

$$X_{ij} = \frac{L_i C_j}{T},$$

c'est-à-dire la solution classique correspondant à l'hypothèse d'indépendance.

Remarques sur les conditions vérifiées par les δ_{ij} :

On montre sans difficultés que les conditions (K) sont caractéristiques de ce premier modèle d'écart à l'indépendance ; on pose :

$$X_{ij} = \delta_{ij} \frac{L_i C_j}{T}.$$

Les X_{ij} ayant bien –d'après (K)– pour marges L_i et C_j , et pour total T , s'écrivent en effet :

$$X_{ij} = \delta_{ij} \frac{X_{i.} X_{.j}}{X_{..}}.$$

De plus, les conditions (K) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \Delta' \underline{L} = T \underline{j} \\ \Delta \underline{C} = T \underline{j} \end{cases}$$

où \underline{C} et \underline{L} sont les vecteurs colonnes dont les coordonnées sont les C_i et les L_j , et où Δ est la matrice des nombres donnés δ_{ij} .

Si P désigne la matrice des probabilités définies par les X_{ij}/T , cette condition s'écrit encore :

$$\begin{cases} \Delta P' \underline{j} = \underline{j} \\ \Delta' P \underline{j} = \underline{j} \end{cases}$$

soit, si Δ est inversible

$$\begin{cases} P' \underline{j} = \Delta^{-1} \underline{j} \\ P \underline{j} = \Delta'^{-1} \underline{j} \end{cases}$$

Les marges en colonne de P ne sont autres que les marges en ligne de Δ^{-1} , les marges en ligne de P ne sont autres que les marges en colonne de Δ^{-1} . Cette constatation montre que l'on peut obtenir directement les X_{ij} à partir des δ_{ij} et de T , donc que le modèle issu des coefficients de Leontief est à un seul degré de liberté [11], [12], [22], [23], [24].

En général, on obtient la matrice des δ_{ij} permettant de construire le tableau à l'horizon voulu par extrapolation des coefficients δ_{ij} associés aux tableaux connus aux années antérieures. Un problème se pose alors : comment obtenir une matrice de δ_{ij} possédant les propriétés (K).

Cette question a été étudiée par R. Froment et J. Zighera, puis par B. Lenclud ; les méthodes proposées consistent en d'assez complexes transformations à effectuer sur les matrices des coefficients obtenus par extrapolation. Ces transformations paraissent avoir la fâcheuse tendance de fournir des coefficients δ_{ij} finalement assez éloignés de la réalité, quoique parfaitement corrects sur le plan théorique.

Il paraît préférable de procéder à des repondérations successives des coefficients $\hat{\delta}_{ij}$ obtenus par extrapolation en procédant de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \delta_{ij}^{(1)} &= \hat{\delta}_{ij} \frac{T}{\sum_i L_i \hat{\delta}_{ij}} \\ \delta_{ij}^{(2)} &= \delta_{ij}^{(1)} \frac{T}{\sum_j C_j \delta_{ij}^{(1)}} \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{ij}^{(2p+1)} &= \delta_{ij}^{(2p)} \frac{T}{\sum_i L_i \delta_{ij}^{(2p)}} \end{aligned}$$

$$\delta_{ij}^{(2(p+1))} = \delta_{ij}^{(2p+1)} \frac{T}{\sum_j C_j \delta_{ij}^{(2p+1)}}$$

.....

Ainsi à l'ordre $(2p + 1)$ on aura :

$$\sum_i L_i \delta_{ij}^{(2p+1)} = T \quad (\text{pour tout } j)$$

et à l'ordre $2(p + 1)$:

$$\sum_j C_j \delta_{ij}^{(2(p+1))} = T \quad (\text{pour tout } i).$$

On interrompt l'itération lorsqu'on a atteint la précision souhaitée. Cette méthode simple permettant d'obtenir de "véritables" coefficients δ_{ij} n'est autre qu'une variante de la méthode RAS : elle a donc l'avantage de modifier le plus faiblement possible les δ_{ij} initiaux.

2.4.4 – Deuxième modèle d'écart à l'indépendance

Soit le programme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{ij} \left(X_{ij} - \frac{L_i C_j}{T} \right) \text{Log} \left(\frac{X_{ij} - \frac{L_i C_j}{T}}{\epsilon_{ij}} \right) \\ \text{sous les contraintes } (L), (C), \text{ et } (S) \end{array} \right.$$

où les coefficients ϵ_{ij} sont tels que :

$$\sum_i \epsilon_{ij} = \sum_j \epsilon_{ij} = 0 \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j).$$

Une solution s'écrit :

$$X_{ij} = r_i s_j \epsilon_{ij} + \frac{L_i C_j}{T} \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j)$$

et d'après les contraintes et les propriétés des ϵ_{ij} :

$$r_i = r \quad \text{pour tout } i$$

$$s_j = s \quad \text{pour tout } j$$

donc, si $t = r s$:

$$X_{ij} = t \epsilon_{ij} + \frac{L_i C_j}{T} \quad (\text{pour tout } i \text{ et pour tout } j).$$

On remarque que la solution n'est pas ici unique, c'est-à-dire qu'il existe plusieurs systèmes de coefficients ϵ_{ij} vérifiant les conditions $\sum_i \epsilon_{ij} = \sum_j \epsilon_{ij} = 0$ et fournissant une solution du type précédent. En fonction des ϵ_{ij} choisis, le paramètre t peut prendre toute valeur réelle ; on a en particulier la solution :

$$X_{ij} = T \epsilon_{ij} + \frac{L_i C_j}{T}.$$

C'est cette solution qui est retenue, le squelette des ϵ_{ij} pouvant être facilement obtenu par extrapolation des coefficients :

$$\epsilon_{ij} = \frac{X_{ij} X_{..} - X_{i.} X_{.j}}{X_{..}^2}$$

calculés aux dates antérieures, extrapolation dont les marges auront été ramenées à zéro.

On a donc bien retrouvé l'expression du modèle (5) comme solution d'un programme de prévision.

2.4.5 — Coefficients structurels et méthode RAS

Les tableaux obtenus à l'aide des coefficients α_{ij} , β_{ij} et γ_{ij} ne possèdent pas obligatoirement les marges données, puisque pour ces trois types de coefficients les contraintes (C) et (L) ne sont pas entièrement utilisées. On pourra donc considérer les tableaux ainsi obtenus comme seulement de premières approximations du tableau recherché X_{ij} , approximations a_{ij} sur lesquelles on appliquera la méthode RAS : les résultats sont appréciables (cf. [22]).

De même, au lieu d'utiliser des coefficients δ_{ij} exacts, c'est-à-dire des extrapolations modifiées de façon à vérifier (remarque § 2.4.3) :

$$(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i L_i \delta_{ij} = T \\ \sum_j C_j \delta_{ij} = T, \end{array} \right.$$

on pourra utiliser des δ_{ij} "faux", c'est-à-dire des extrapolations $\hat{\delta}_{ij}$ non modifiées.

Ayant alors calculé les termes suivants :

$$a_{ij} = \hat{\delta}_{ij} \frac{L_i C_j}{T},$$

on pourra considérer ces termes comme une première approche des X_{ij} et leur appliquer la méthode RAS (cf. [11], [12], [22]).

Enfin, au lieu d'appliquer la méthode RAS aux tableaux d'échanges, on peut l'appliquer immédiatement aux tableaux de coefficients, à condition de disposer de prévisions des marges de ces tableaux de coefficients. Les marges des tableaux α_{ij} , β_{ij} ou γ_{ij} peuvent être en effet plus simples à prévoir que les marges L_i et C_j elles-mêmes, en raison par exemple d'une plus grande stabilité dans le temps ; mais cette pratique nous éloignerait de notre cadre où nous supposons les marges L_i et C_j données.

2.5 – PROGRAMME DU COMMERCE MINIMAL

Nous proposons ici un exemple très simple d'application du schéma général des programmes de prévision.

Soit le programme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min \sum_{ij} X_{ij}^2 & \\ \text{sous } \sum_j X_{ij} = L_i & \text{pour tout } i \\ \sum_i X_{ij} = C_j & \text{pour tout } j \\ X_{ij} \geq 0 & \text{pour tout } i \text{ et tout } j. \end{array} \right.$$

On peut encore le concevoir sous l'angle d'un programme de transport où les coûts unitaires seraient directement proportionnels aux quantités transportées. Sous cette hypothèse —qui a heureusement peu de chance d'être réalisée— les agents économiques chercheraient évidemment à réduire les échanges à leur strict minimum : la solution de ce programme correspondra donc, à marges données, au minimum d'échanges nécessaires pour assurer l'équilibre global offre-demande. Ce résultat, quelque peu abstrait, du "commerce minimal" n'est cependant pas

inutile par exemple pour étudier les limites physiques d'une politique protectionniste généralisée.

La résolution donne, si on ne considère pas la contrainte (S) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2X_{ij} + \rho_i + \sigma_j = 0 & \text{pour tout } i \text{ et pour tout } j \\ \sum_j X_{ij} = L_i & \text{pour tout } i \\ \sum_i X_{ij} = C_j & \text{pour tout } j \end{array} \right.$$

d'où on extrait les solutions :

$$\rho_i = \frac{2L_i}{m} \quad \text{pour tout } i$$

$$\sigma_j = \frac{2}{n} \left[C_j - \frac{T}{m} \right] \quad \text{pour tout } j$$

et finalement :

$$X_{ij} = \frac{L_i}{m} + \frac{C_j}{n} - \frac{T}{n \times m}$$

solution unique puisque la fonction à minimiser est convexe et les contraintes linéaires.

Ce dernier exemple, et surtout le tour d'horizon des méthodes usuelles, ont montré que l'ensemble de la pratique classique se formalise de façon unitaire, alors qu'apparemment les diverses techniques utilisées par les économètres formaient un ensemble assez disparate. La présentation théorique globale des pratiques classiques ne permet pas seulement une compréhension plus approfondie et plus critique des diverses méthodes qui obéissent toutes en réalité aux mêmes principes : elle ouvre aussi la voie à de nouvelles méthodes. Des développements sont en effet à envisager par la recherche de fonctions à minimiser qui proposeraient d'autres explications *a priori* des phénomènes d'échanges, c'est-à-dire d'autres squelettes. Ces nouvelles méthodes ne sortiraient cependant pas du schéma que nous avons critiqué : elles seraient entachées des mêmes *a priori* en ce qui concerne la structure des échanges et ne pourraient que vérifier au mieux des postulats souvent discutables. Il faut donc partir à la recherche d'une méthode qui élimine tout modèle *a priori* et qui dégage une structure à partir des données elles-mêmes. C'est pourquoi nous allons faire un retour à l'Analyse de données, en nous plaçant plus nettement dans une optique prévisionnelle.

3. UTILISATION DE L'ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES (AFC)

Jusqu'à présent, on a souvent interprété chacun des termes $p_{ij} = X_{ij}/X_{..}$ comme la probabilité pour une unité du produit considéré d'aller de la région i à la région j ; ceci vient du fait que le tableau d'échanges définit une mesure positive sur un produit cartésien : on peut réduire le tableau en sommant des lignes et des colonnes. La technique la mieux adaptée à la description des tableaux X_{ij} de ce type (tableaux de contingence) est l'analyse factorielle des correspondances (AFC). L'économiste qui envisage de construire un modèle de prévision a tout intérêt à utiliser cette technique afin de bien observer les données dont il dispose, c'est-à-dire les tableaux d'échanges correspondant aux années antérieures à la date à laquelle il désire effectuer la prévision.

Les analyses de correspondance effectuées sur les différents tableaux disponibles fournissent des images parlantes de l'ensemble des échanges. Regarder ces images et les comparer entre elles permet de dégager quelques idées sur le phénomène étudié. (cf. § 4.1.1).

Peut-on de plus utiliser ces images pour faire de la prévision quantitative ? On sait que, connaissant les valeurs propres λ_l et les facteurs principaux a_l et b_l obtenus à partir d'une AFC, on peut reconstruire le tableau des probabilités p_{ij} associées aux X_{ij} , à l'aide de la formule :

$$p_{ij} = p_{i.} p_{.j} \left(1 + \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right)$$

où les a_l^i et b_l^j sont les coordonnées des facteurs principaux associées aux lois conditionnelles définies sur les lignes et les colonnes du tableau X .

On trouvera des démonstrations classiques, mais lourdes, de cette formule dans [51] (pp. 31-34, 158-159) et [57] (pp. 204-205, 239) ; celle qui suit, plus rapide, utilise les notations de [54] (pp. 442-460).

Pour un tableau X quelconque, la représentation d'un point \underline{x}_j dans les axes principaux est donnée par :

$$\underline{x}_j = \sum_{l=0}^{n-1} C_j^l \underline{u}_l$$

où \underline{u}_l désigne le vecteur de base correspondant au $l^{\text{ème}}$ axe principal et C_j^l la valeur prise par la $l^{\text{ème}}$ composante principale pour l'individu j . Dans le cas d'une AFC, les tableaux considérés sont :

– celui des “lois conditionnelles sur I sachant j ” (lois \underline{p}_I^j) ; le nuage associé est noté \mathfrak{N} .

– celui des “lois conditionnelles sur J sachant i ” (lois \underline{p}_J^i) ; le nuage associé est noté \mathfrak{P} .

Les composantes principales \underline{c}^l du nuage \mathfrak{N} sont liées aux facteurs principaux \underline{b}_l du nuage \mathfrak{P} par les relations :

$$\underline{c}^l = \sqrt{\lambda_l} \underline{b}_l \quad \text{si } \lambda_l \neq 0.$$

Les axes principaux \underline{u}_l du nuage \mathfrak{N} sont liés aux facteurs principaux \underline{a}_l par :

$$\underline{u}_l = D_{p_I}(\underline{a}_l),$$

puisque D_{p_I} est l'isomorphisme inverse de D_I/p_I qui désigne l'application entre l'espace des mesures sur I et son dual, correspondant au choix de la métrique du chi-deux pour mesurer les proximités entre lois de probabilité.

On aura donc :

$$\underline{p}_I^j = \sum_{l=0}^{n-1} \sqrt{\lambda_l} b_l^j D_{p_I}(\underline{a}_l).$$

D'où

$$p_i^j = \sum_{l=0}^{n-1} \sqrt{\lambda_l} b_l^j p_i a_l^i$$

où p_i^j désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de \underline{p}_I^j , soit $\frac{p_{ij}}{p_{.j}}$.

Finalement :

$$p_{ij} = p_i p_{.j} \sum_{l=0}^{n-1} \sqrt{\lambda_l} b_l^j a_l^i.$$

On retrouve bien la “formule de reconstruction”, à la première valeur propre λ_0 égale à 1 étant associés des facteurs principaux \underline{a}_0 et \underline{b}_0 dont toutes les composantes sont égales à 1.

Cette formule permet d’envisager la prévision dans la mesure où certaines conditions, que nous allons préciser, sont respectées par les valeurs propres λ_1 et les facteurs \underline{a}_1 et $\underline{b}_1 \dots$

On justifie ici en quelque sorte les coefficients de structure δ_{ij} utilisés dans le modèle d’écart à l’indépendance (cf. 2.4) :

$$\delta_{ij} = \frac{X_{ij} X_{..}}{X_{i.} X_{.j}} = \frac{p_{ij}}{p_{i.} p_{.j}} = 1 + \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j.$$

L’interprétation mathématique de ces coefficients donne des idées nouvelles quant à leur utilisation en matière de prévision : plutôt que de les extrapoler purement et simplement on essaiera de les projeter en exploitant au mieux leurs caractéristiques.

3.1 – ETUDE DES STRUCTURES ET PROJECTION A L’AIDE DE L’AFC

3.1.1 – Recherche et projection du squelette

Si on veut utiliser les résultats de l’analyse des correspondances pour faire de la prévision à l’horizon t , les marges (et donc le total) du tableau à prévoir étant connues, il est nécessaire de disposer des estimations des valeurs propres et des facteurs principaux à l’instant t .

Ne retenant en fait que les p premiers facteurs, on utilise la formule de reconstruction approchée :

$$\hat{p}_{ij} = p_{i.} p_{.j} \left(1 + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right)$$

Tout en réduisant le nombre de termes à estimer, on espère éliminer le “bruit” et saisir ainsi “l’essentiel” du phénomène. On peut considérer que l’on élimine bien le bruit si, pour chacun des couples (i, j) , les différences $\hat{e}_{ij} = p_{ij} - \hat{p}_{ij}$ aux dates précédant l’instant t ont les propriétés statistiques classiques des erreurs ([54] pp. 332-335 ; [53] pp. 26-44) : la différence \hat{e}_{ij} à un instant donné peut être alors considérée comme représentant le “passager” à cet instant.

Si on admet que le bruit n'est pas important, le nombre de facteurs conservés (qu'on pourra appeler *degré de complexité* de la structure du tableau X) doit permettre, pour chaque tableau connu, de reconstituer les p_{ij} avec une bonne précision.

Ce but sera atteint si les p premières valeurs propres contribuent à une large part de l'inertie totale. Plus précisément, le carré de la distance du χ^2 (de centre la distribution des p_i, p_j) entre les distributions des p_{ij} et des \hat{p}_{ij} est égal à :

$$d^2 = \sum_{ij} \frac{(p_{ij} - \hat{p}_{ij})^2}{p_i \cdot p_j} = \sum_{ij} \left(\sum_{l>p} \sqrt{p_i \cdot p_j} \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right)^2$$

Or les facteurs \underline{a}_l forment un système D_{p_l} - orthonormé ([54] p. 437 et 379), c'est-à-dire vérifient :

$$D_{p_l}(\underline{a}_{l_1}, \underline{a}_{l_2}) = \sum_i p_i a_{l_1}^i a_{l_2}^i = \delta_{l_1}^{l_2}$$

où $\delta_{l_1}^{l_2}$ est le symbole de Kronecker.

De même les facteurs \underline{b}_l forment un système D_{p_j} - orthonormé et vérifient donc :

$$D_{p_j}(\underline{b}_{l_1}, \underline{b}_{l_2}) = \sum_j p_j b_{l_1}^j b_{l_2}^j = \delta_{l_1}^{l_2}.$$

Ce qui permet d'obtenir

$$d^2 = \sum_{l>p} \lambda_l.$$

Ce qu'on peut encore exprimer sous la forme :

$$d^2 = (1 - I_p) \times \text{Tr}$$

où Tr désigne la somme de toutes les valeurs propres (trace) et I_p la part d'inertie expliquée par les p premières valeurs propres.

Ainsi, la reconstruction p_{ij} sera jugée de bonne qualité si les p valeurs propres retenues sont assez élevées et expriment une forte part de l'inertie totale.

Les estimations à l'instant t des p valeurs propres et des facteurs principaux associés ne seront considérées comme satisfaisantes que si ces termes ont évolué dans le passé de façon régulière, ce qui est facile à contrôler. Ceci exige que les valeurs propres obtenues pour une année donnée soient suffisamment éloignées

entre elles, sous peine de voir leur classement changer d'une année sur l'autre. Si la structure est suffisamment stable les facteurs d'ordre l auront une même signification aux différentes dates ; on peut alors envisager de les projeter à l'horizon t . Ceci interdit de retenir un *degré de complexité* p trop grand car les petites valeurs propres ne sont jamais bien séparées. (Un test peut être fait pour juger de l'égalité des valeurs propres non retenues : cf. [49]).

Les conditions *expliquer une large part de l'inertie et être suffisamment distinctes* que doivent satisfaire les p premières valeurs propres peuvent parfois être difficilement conciliables. Mais rien n'empêche l'économiste, qui domine maintenant ses données grâce aux descriptions issues de l'AFC, d'effectuer certaines transformations simples sur les tableaux dont il dispose, de façon à accroître la part d'inertie expliquée et à séparer les valeurs propres (tout en conservant l'essentiel de l'information contenue dans le tableau). L'extrapolation des valeurs propres et des facteurs permet alors, à l'aide de la formule de reconstruction, d'obtenir un tableau sur lequel il suffit de procéder à la transformation inverse pour reconstituer le tableau d'échanges à l'horizon t .

Les tableaux qui nous intéressaient plus particulièrement concernaient des échanges de produits agricoles entre régions françaises ; les termes diagonaux de ces tableaux sont en général très importants relativement aux termes non diagonaux (l'auto-consommation l'emporte sur la distribution au niveau national). Or l'AFC appliquée sur des tableaux à diagonale chargée donne de nombreuses valeurs propres élevées et peu différentes ; si bien que dans l'exemple considéré on n'obtient une part d'inertie expliquée appréciable (de l'ordre de 90 %) qu'avec un grand nombre de valeurs propres (11 sur un total de 15). Aussi s'est-on efforcé de rééquilibrer la matrice en réduisant le poids des termes diagonaux ; plus précisément on a fait en sorte que le poids moyen d'un terme diagonal soit égal au poids moyen d'un terme non diagonal, en divisant chaque terme X_{ii} par le nombre :

$$k = (n - 1) \frac{D}{T - D}$$

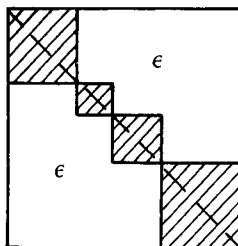
où

$$D = \sum_i X_{ii} \text{ et } T = \sum_{i,j} X_{ij}.$$

Après transformation, la part d'inertie expliquée par les cinq premiers facteurs était de l'ordre de 90 % (pour chacun des tableaux d'échanges disponibles) contre environ 55 % avant repondération de la diagonale ; on a de plus constaté que les valeurs propres étaient mieux séparées.

Pour le type de tableaux qui nous intéresse (nombreuses valeurs propres élevées) on peut généraliser la transformation précédente. Ayant réorganisé les

lignes et les colonnes du tableau de façon à faire apparaître le long de la diagonale des pavés bien chargés :



on effectue la transformation consistant à repondérer non pas la diagonale, mais —éventuellement de façon différente— les pavés précédents.

D'autres modifications simples (i.e. réversibles) peuvent être envisagées pour optimiser les résultats fournis par l'AFC. On se souciera toujours de contrôler la permanence de la structure du squelette que l'on tente de dégager des échanges passés.

3.1.2 — Estimation du tableau à l'horizon t

En résumé, la méthode que nous venons de voir consiste à construire un squelette (les \hat{p}_{ij}), le plus proche possible de la réalité, au moyen des images résumées que fournissent les AFC. La construction du squelette est contrôlée à tout moment par l'opérateur (choix du nombre de valeurs propres, observation des résidus, transformations simples sur les tableaux d'échanges, extrapolation de l'essentiel après élimination du bruit, . . .).

La formule de reconstruction fournit des termes \hat{p}_{ij} , donc le total T étant connu, des estimations des X_{ij} à l'horizon t . (On aura pris comme marges p_i et p_j les marges données L_i/T et C_j/T .)

Si les tableaux utilisés pour la prévision n'ont pas subi de transformation, les marges du tableau X_{ij} obtenu sont bien les marges données. On a en effet :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \hat{p}_{ij} &= p_j \sum_{i=1}^n p_i \left(1 + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right) \\ &= p_j \left(\sum_{i=1}^n p_i + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} b_l^j \left(\sum_{i=1}^n p_i a_l^i \right) \right) \\ &= p_j \end{aligned}$$

car :

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

et : $\sum_{i=1}^n p_i a_i^i = D_{p_I}(a_i, j) = 0$ car les facteurs sont centrés.

On aurait de même :

$$\sum_{j=1}^n \hat{p}_{ij} = p_i,$$

car :

$$D_{p_J}(b_j, j) = 0.$$

Remarquons bien que ces propriétés ne dépendent pas du nombre de valeurs propres retenues.

Par contre, lorsque les tableaux de données ont subi des transformations, les marges des estimations \hat{p}_{ij} ne sont pas les marges supposées connues $p_i = L_i/T$ et $p_j = C_j/T$. On procédera alors au réajustement des marges au moyen de la méthode RAS (§ 2.3.1), qui fournit le tableau des X_{ij}/T à marges données le plus proche des \hat{p}_{ij} au sens du χ^2 (§ 2.3.2).

3.2 – RETOUR AUX METHODES STRUCTURELLES

On vient de voir que la méthode d'élaboration du squelette, qui consiste ici à dégager pour chaque année les p premiers facteurs principaux, tient compte de la réalité des tableaux et non pas d'une hypothèse *a priori* sur leur structure. Mais la formule de reconstruction de l'AFC peut également être utilisée en liaison avec des idées *a priori* de structure telles que celles qui ont été introduites précédemment. Cette formule permet d'obtenir des estimations à l'horizon t des différents coefficients rencontrés au paragraphe 2.4 ; elle peut en effet s'écrire sous les formes suivantes :

$$\frac{X_{ij}}{X_{..}} \sim \frac{L_i}{T} \frac{C_j}{T} \left(1 + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right) \quad (1)$$

$$\frac{X_{ij}}{X_i} \sim \frac{C_j}{T} \left(1 + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right) \quad (2)$$

$$\frac{X_{ij}}{X_{.j}} \sim \frac{L_i}{T} \left(1 + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j \right) \quad (3)$$

$$\frac{X_{ij} X_{..}}{X_i X_j} \sim 1 + \sum_{l=1}^p \sqrt{\lambda_l} a_l^i b_l^j. \quad (4)$$

Dans chacun des cas on peut procéder sur les estimations des coefficients aux transformations qui en feront de "vrais" coefficients α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} , δ_{ij} (cf. § 2.4) ; on vérifiera d'ailleurs au passage que les estimations obtenues ne sont pas très loin de vérifier les propriétés qui caractérisent ces coefficients (on contrôlera par exemple que les sommes en ligne des estimations des $X_{ij}/X_{.j}$ sont voisines de 1, avant de les ramener effectivement à 1, etc.).

La méthode de reconstruction à partir des AFC fournit donc des squelettes utilisables pour les diverses méthodes structurelles. Là encore, la construction du squelette est contrôlée pas à pas, sa validité peut être vérifiée à chaque stade de l'opération. . . seul "l'essentiel" est projeté à l'horizon t .

4. APPLICATIONS

Une méthode de prévision, aussi satisfaisante soit-elle sur le plan théorique, doit être avant tout opérationnelle. Il importe donc d'expérimenter la méthode sur des exemples divers afin de vérifier sa validité et de corriger ses imperfections. Cette mise à l'épreuve favorise l'apparition d'idées théoriques nouvelles et c'est cet aller-retour théorie/pratique qui permet la mise au point d'une méthode efficace.

On trouvera donc ici des exemples d'applications des différentes démarches ou méthodes qui viennent d'être exposées. Ces exemples sont présentés dans l'ordre naturel de leur utilisation par l'économètre :

1) Interrogation des données, à l'aide en particulier de l'Analyse factorielle des correspondances et des opérateurs d'Escoufier.

2) Essais des modèles *a priori* que propose la pratique classique.

3) Essais de prévision au moyen de la formule de reconstruction de l'AFC.

Indiquons auparavant la nature des données utilisées :

a) *Echanges de blé*

Nous disposons de données utilisées pour une étude de radioprotection [22], les matrices d'échanges de blé tendre entre seize régions françaises, pour les années 1965 à 1974. Le terme X_{ij} désigne dans ce cas la quantité de blé envoyée par les producteurs de la région i vers les minoteries de la région j . Les seize régions considérées sont définies sur la carte ci-jointe (fig. 1).

b) *Commerce extérieur mondial*

Nous avons dressé à partir d'Annuaire statistiques de l'O.N.U. [46, 47], des tableaux du commerce extérieur entre les six zones suivantes :



Figure 1. - Division régionale (d'après l'ONIC)

1. Europe occidentale
2. Etats-Unis
3. Japon
4. Europe de l'Est (y compris U.R.S.S.)
5. Moyen-Orient
6. Pays en voie de développement.

c) *T.E.I. français*

Nous avons enfin étudié le tableau d'échanges interindustriels français, pour l'année 1974, aux prix courants, à 28 branches [48].

4.1 – ANALYSE DES DONNEES : EXEMPLES

4.1.1 – Exemples d'AFC sur des tableaux d'échanges

a) *Echanges de blé :*

Les tableaux d'échanges inter-régionaux ont été étudiés à l'aide de l'Analyse factorielle des correspondances. Sur ces graphiques (cf. figures 2, 3 et 4), les régions en tant que productrices figurent en lettres majuscules et les régions en tant que consommatrices en lettres minuscules. On constate immédiatement les proximités entre une même région vue comme productrice ou comme consommatrice, ce qui dénote l'importance des échanges intra-régionaux. L'étude simultanée des trois plans factoriels fournit les premiers résultats suivants :

1. Les régions de Rouen, Paris, Marseille, Lyon, Clermont-Ferrand et Dijon forment bloc autour de la région d'Orléans qui joue un rôle moteur dans les échanges ; cette région assure une part croissante de l'offre sur le marché français : de 18 % en 1967 à 27 % en 1974.

2. Le groupe du Nord (Amiens-Lille), tout d'abord indépendant, se joint au bloc précédent après 1970 ; en effet, depuis quelques années, le développement du blé fourrager dans le Nord a incité les minotiers de ces régions à se fournir en blé de meilleure qualité dans la région d'Orléans.

3. Le groupe de l'Ouest (Rennes-Nantes) tend à se rapprocher également du bloc central.

4. Le groupe du Sud-Ouest (Poitiers, Bordeaux, Toulouse) reste plus isolé ; toutefois on observe un éclatement du groupe avec le rapprochement de Poitiers du groupe de l'Ouest : l'intensification constatée de ces échanges peut éventuellement s'expliquer par l'accroissement des excédents de la région de Poitiers.

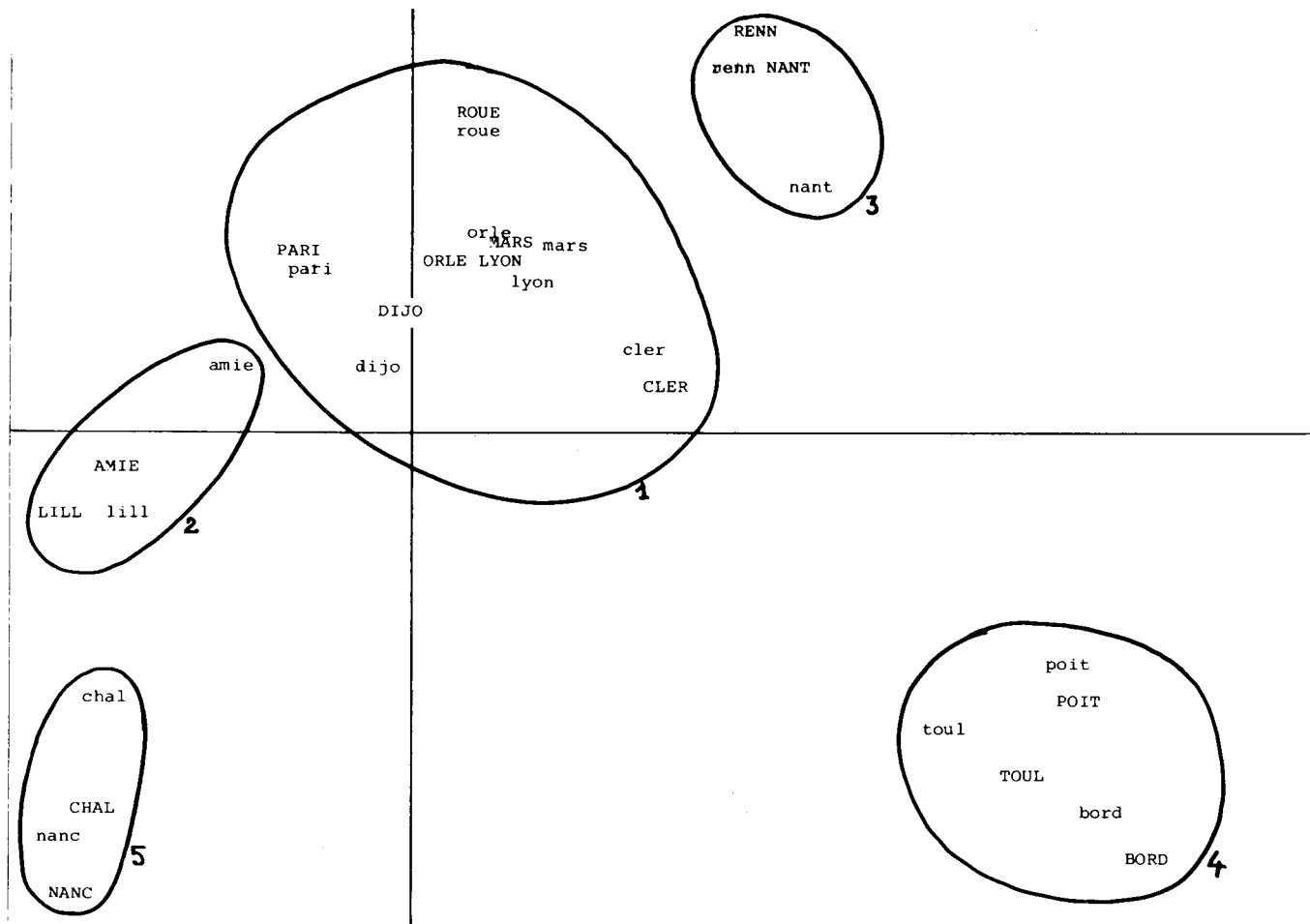


Figure 2. – Echanges de blé 1965
consommateurs/PRODUCTEURS A.F.C. (représentation simultanée) Axes 1 et 2

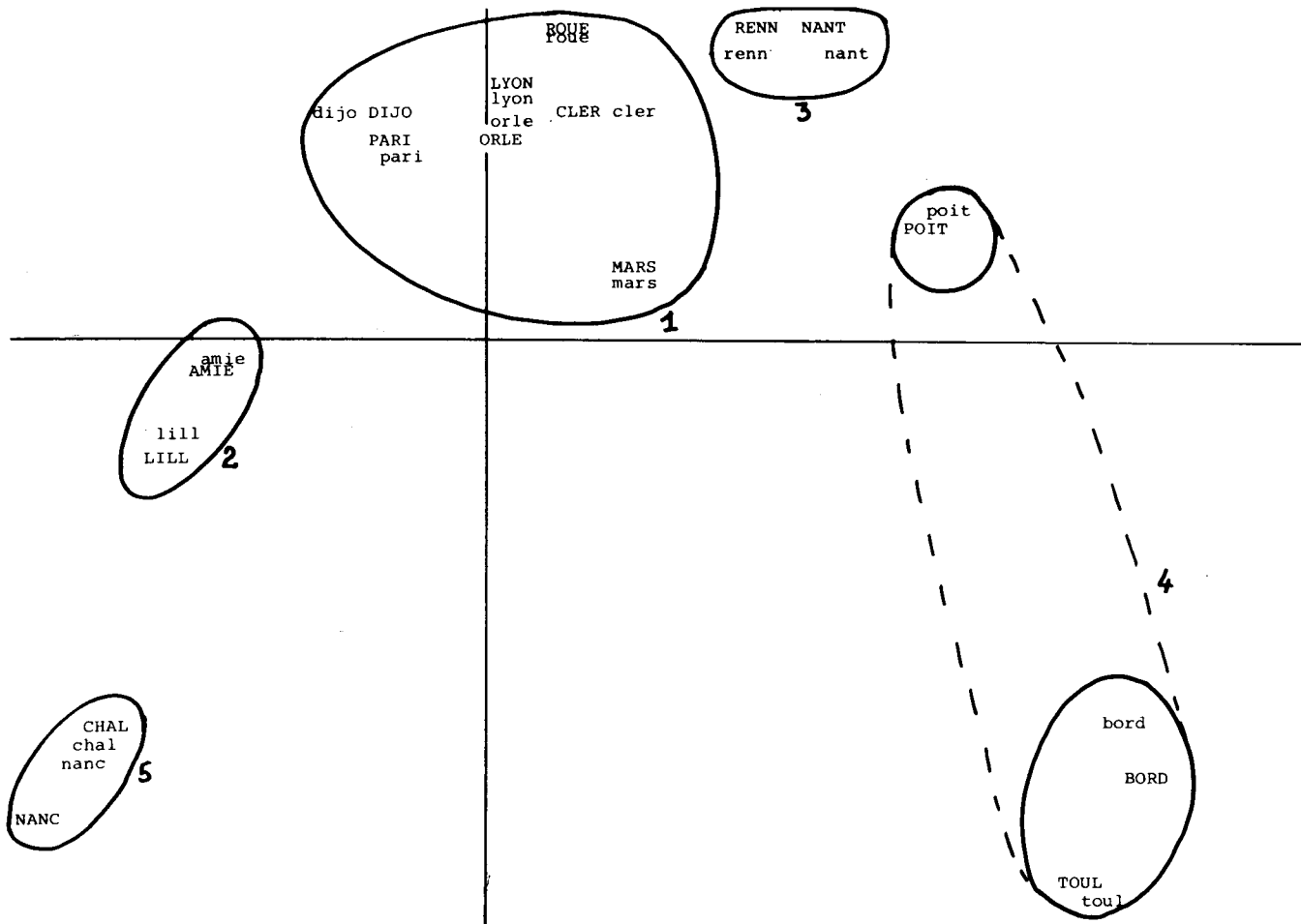


Figure 3. - Echanges de blé 1970
consommateurs/PRODUCTEURS A.F.C. (représentation simultanée) Axes 1 et 2

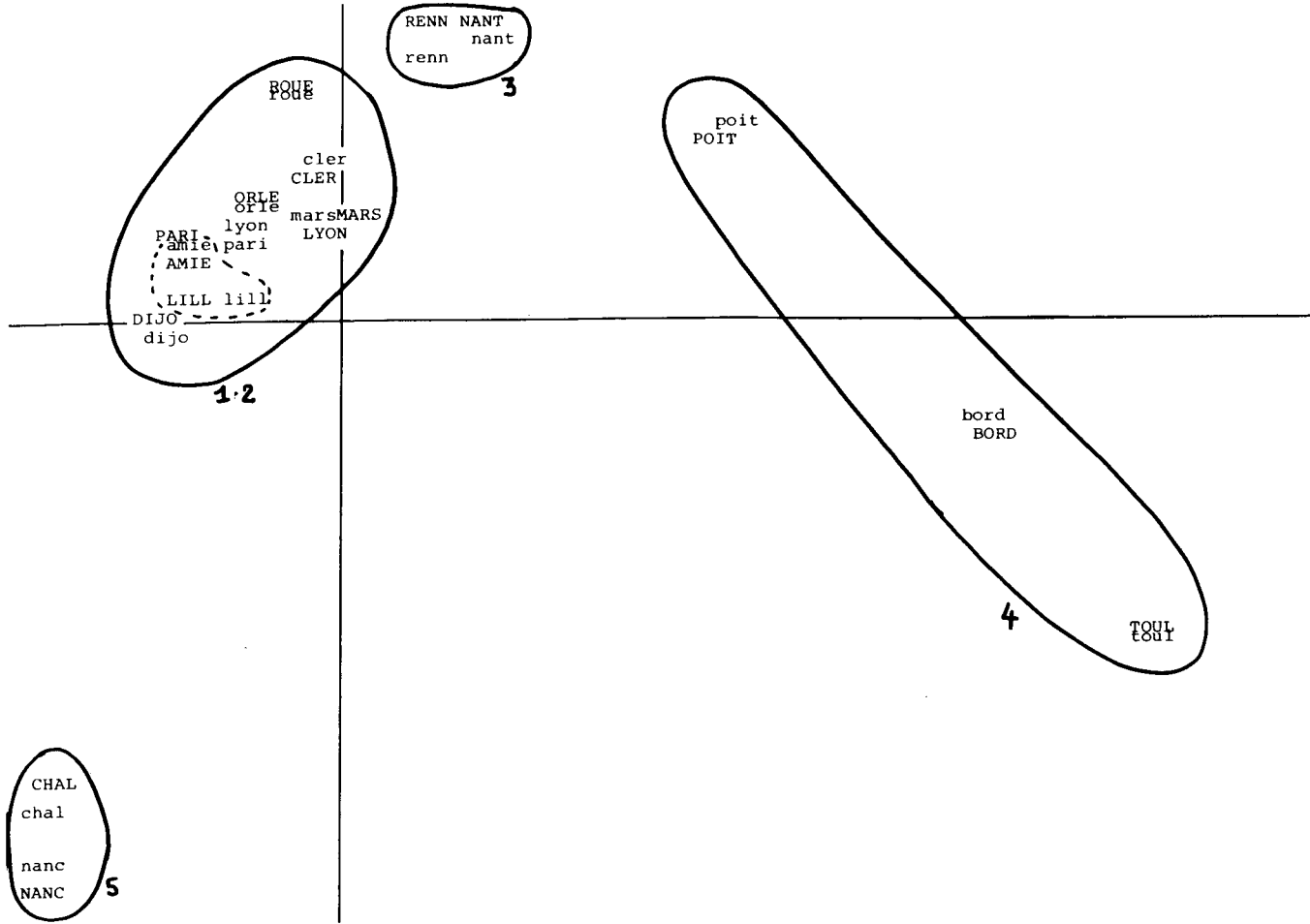


Figure 4. - Echanges de blé 1974
consommateurs/PRODUCTEURS A.F.C. (représentation simultanée) Axes 1 et 2

5. Le groupe de l'Est (Nancy-Chalons) se maintient dans son isolement : la région de Nancy est un gros consommateur qui absorbe l'essentiel de la production excédentaire de Chalons.

b) *TEI français* :

On fournit tout d'abord les résultats d'une analyse factorielle effectuée sur le tableau d'échanges inter-industriels français de l'année 1974 (figures 5 et 6) : les branches considérées en tant que consommatrices sont soulignées sur les graphiques, alors que les branches considérées en tant que fournisseurs de produits ne le sont pas.

Il apparaît clairement sur la figure 5 que certaines branches jouent un rôle très particulier ; c'est le cas de la branche "Agriculture" ("AGRI", à gauche du graphique) qui envoie aux "Industries Agricoles et Alimentaires" ("IAA") 84 % de sa production destinée aux consommations intermédiaires ; de même, la branche "Habillage" ("HABI", en haut du graphique) assure 86 % de l'ensemble de ses consommations intermédiaires auprès des deux seules branches "Textiles" ("TEXT") et "CUIRS". Les deux premiers axes rendent donc compte de ces comportements spéciaux ; les autres branches se disposent au centre du premier plan factoriel, qui est reproduit par la figure 6. Les proximités révèlent les principaux flux d'échanges : la branche "Bâtiment et Travaux Publics" ("BTP") reçoit des produits venus principalement des branches "Matériaux de construction" (MATC), "Constructions électriques" (C.EL), "Sidérurgie" (SIDE), "Constructions Mécaniques" (CMEC) ; la branche "Sidérurgie" (SIDE) s'approvisionne auprès de la branche "Combustibles minéraux solides" (CMS) ; la branche "Constructions navales et aéronautiques" (NAVA) auprès de la branche "Premières transformations" (PRTR) ; etc.

Des regroupements opérés entre des branches voisines (tant par leur nature que par leur rôle dans l'ensemble des échanges inter-industriels) permettent de ne plus considérer qu'un tableau à 16 branches :

1. Agriculture	AGRI
2. Industries agricoles et alimentaires	IAA
3. Combustibles minéraux solides + Gaz + Electricité	CHGE
4. Produits pétroliers	PTR
5. Matériaux de construction + Verre	MATE
6. Sidérurgie + Non ferreux	SIDE
7. Premières transformations	PRTR
8. Constructions mécaniques	MECA
9. Construction électrique + Automobile + Constructions navales et aéronautiques	CONS

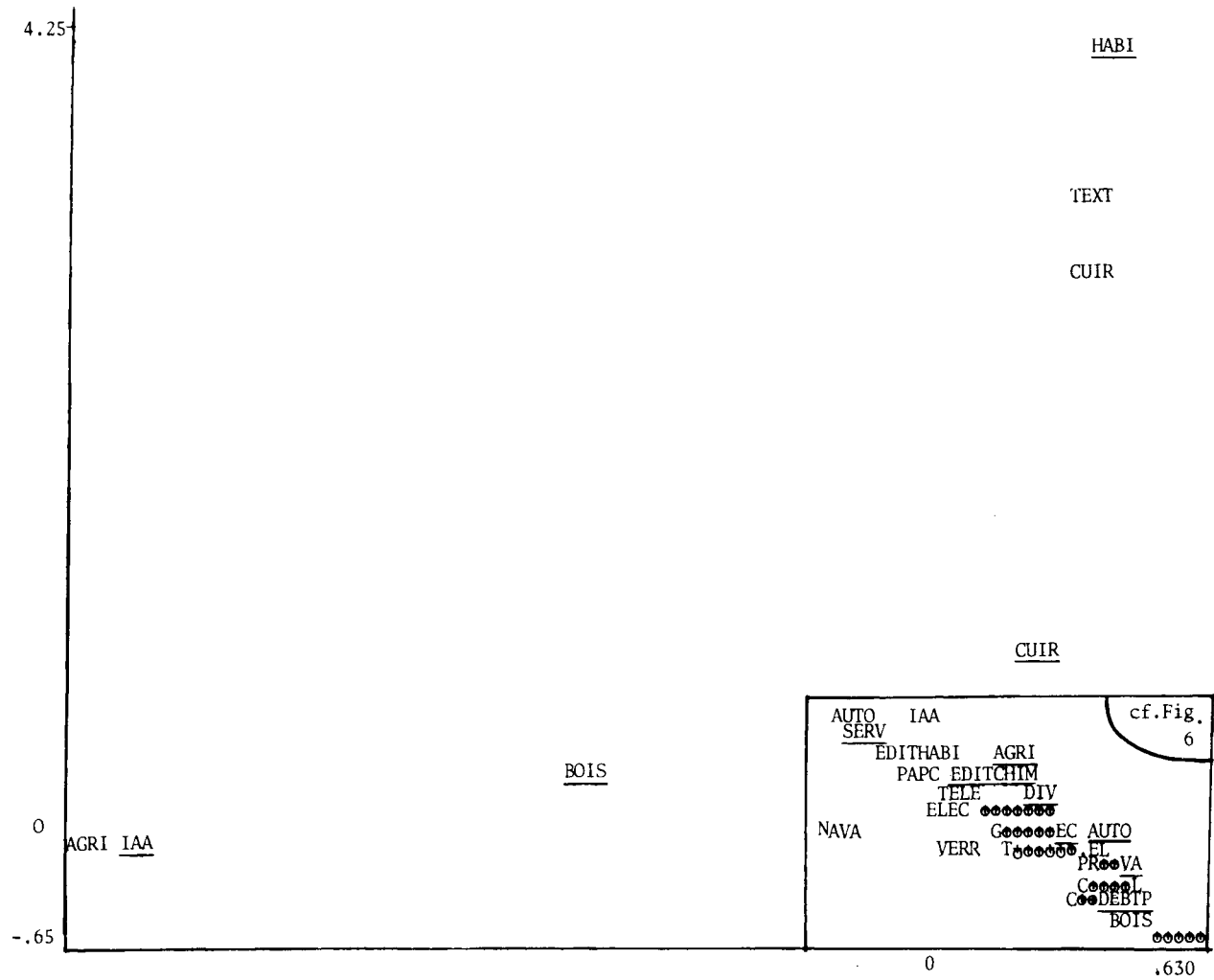


Figure 5. - Analyse factorielle des correspondances. Tableau d'échanges inter-industriels 1974

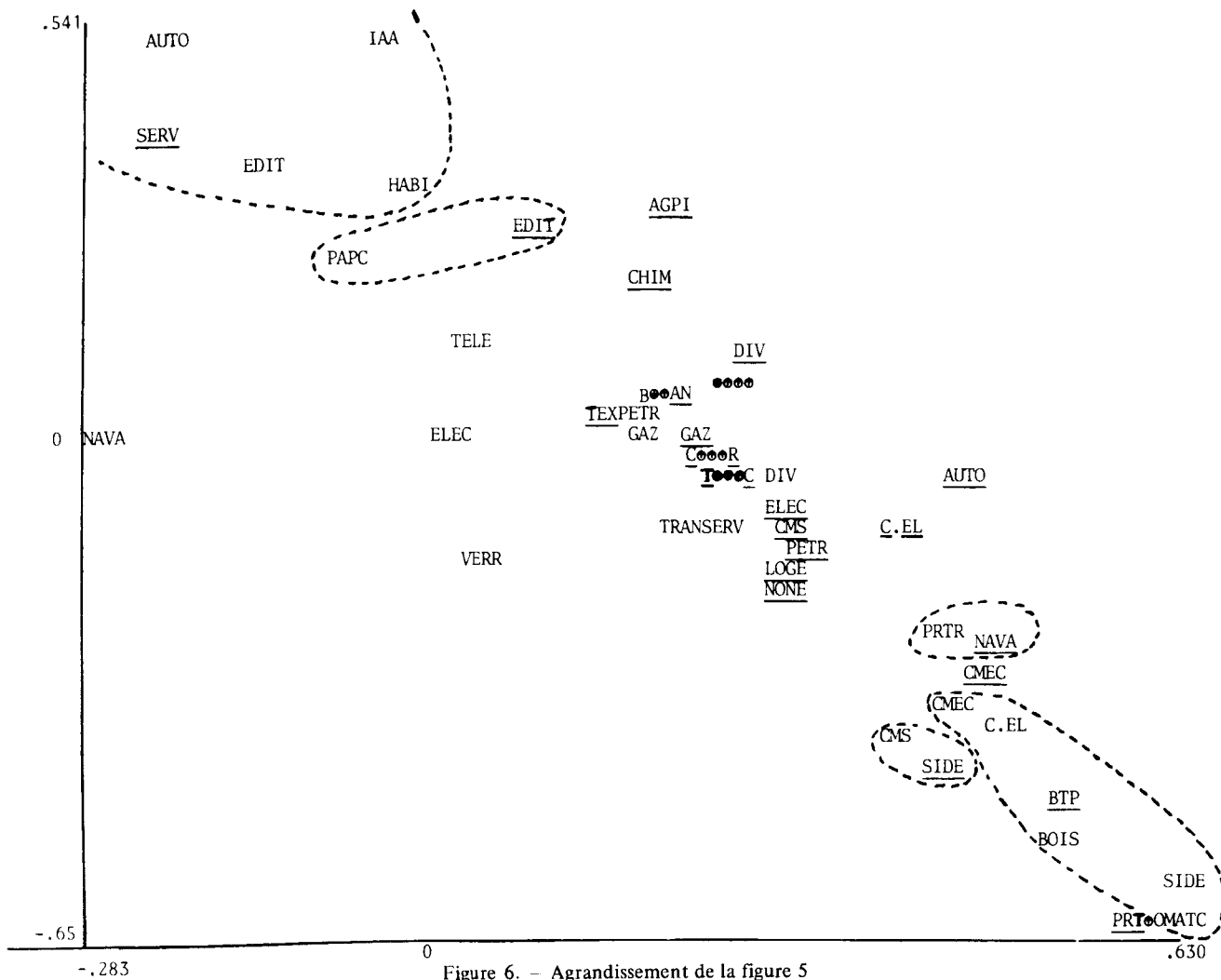


Figure 6. - Agrandissement de la figure 5

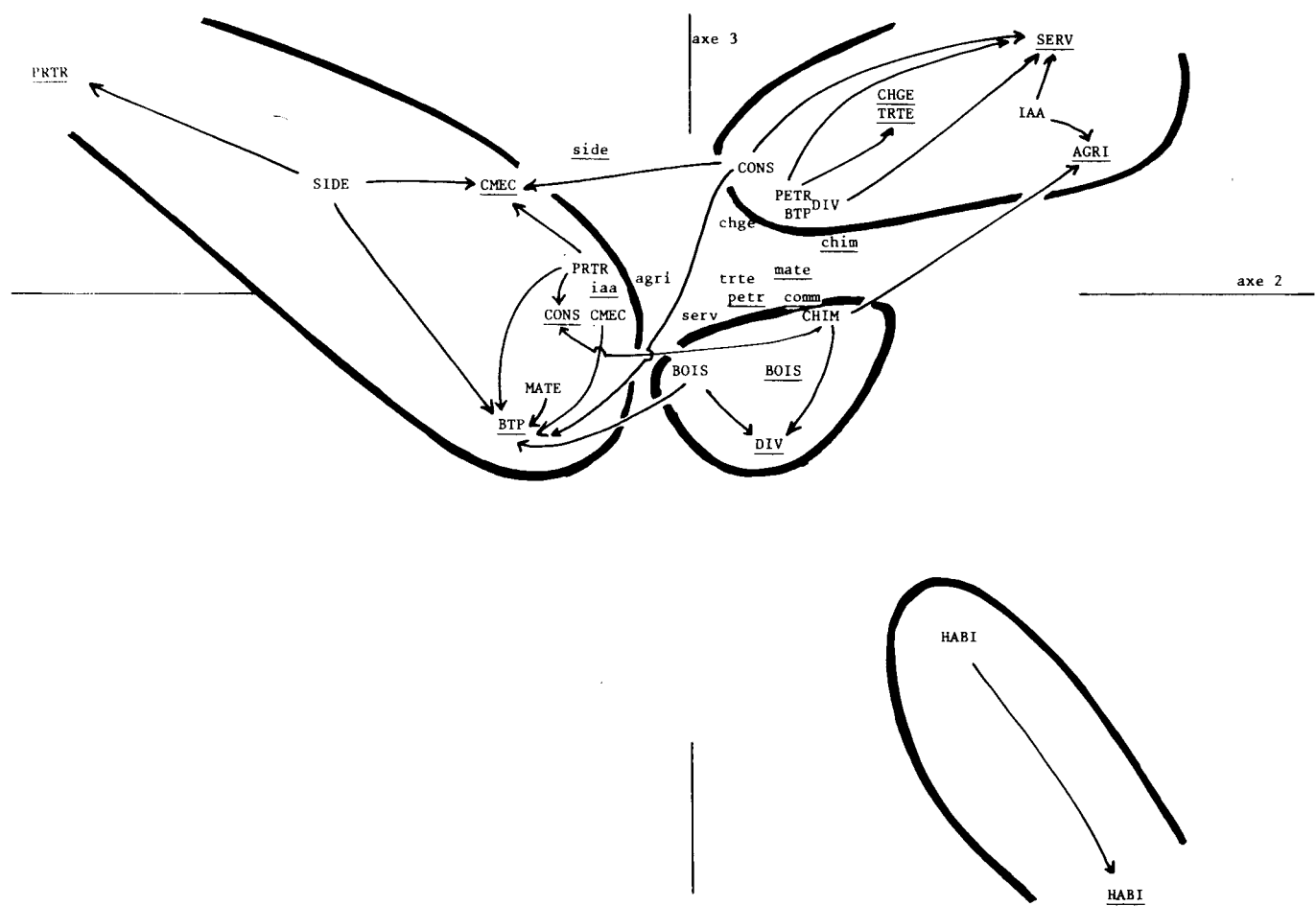


Figure 7. – Tableau d'échanges inter-industriels 1974 (réduit à 16 branches)
Analyse factorielle des correspondances (axes 2 et 3)

Les branches en tant que consommatrices sont soulignées. Les branches mal représentées sur ce plan sont en minuscules.

10. Chimie	CHIM
11. Textiles + Habillement + Cuirs	HABI
12. Bois + Papier carton	BOIS
13. Edition + Industries diverses	DIV
14. Bâtiment et travaux publics	BTP
15. Transports et télécommunications	TRTE
16. Services	SERV
(17). Commerces (colonne supplémentaire)	COMM

Une analyse factorielle des correspondances est effectuée sur ce TEI simplifié ; la figure 7 fournit la représentation graphique pour les axes 2 et 3 (parts d'inertie respectives : 16 % et 12 %).

Le premier axe n'a pas été considéré car il rend compte uniquement de l'échange "Agriculture" → "IAA". Sur ce graphique, les principaux échanges ont été figurés par des flèches et on a mis en évidence les grands regroupements entre branches révélés par l'AFC. Les branches qui ne figurent dans aucun de ces groupes (au centre du graphique) n'ont pas été éliminées au hasard ; ce sont celles qui sont mal représentées sur ce plan factoriel (angle avec ce plan supérieur à 80°) : par exemple, les points "AGRI" et "IAA" qui sont portés par le premier axe sont extrêmement mal représentés ici (angle pratiquement droit). La figure 7 fournit une bonne image des structures industrielles françaises :

- . les branches concernant l'habillement sont isolées ;
- . les branches de l'industrie lourde et des constructions sont liées entre elles par un réseau de consommations intermédiaires et leur activité est finalement très orientée vers le B.T.P. ;
- . la branche "Services" est un autre pôle important qui absorbe les productions de branches d'ordres assez diversifiés ;
- . les branches "Chimie" et "Constructions" interviennent à divers niveaux de l'activité industrielle ;
- . la branche "Produits pétroliers" ne joue en aucun cas le rôle essentiel que certains prétendent.

4.1.2 – Les opérateurs : exemples

a) *Les échanges de blé*

Nous avons utilisé la technique des opérateurs, décrite au paragraphe 1.2, pour décrire l'ensemble des tableaux d'échanges inter-régionaux de blé correspondant aux années 1965 à 1974 ; les régions en tant qu'importatrices sont considérées comme des "individus" ; le résultat est donné par la figure suivante qui représente le premier plan principal :

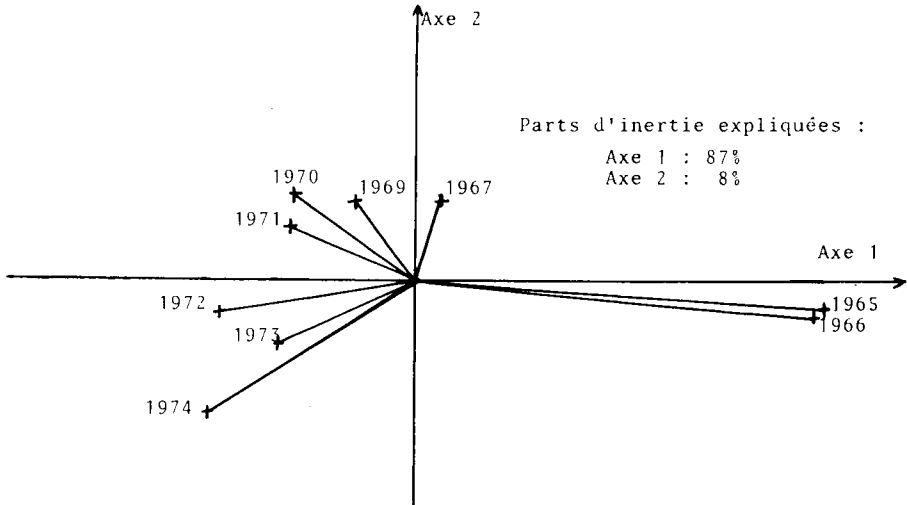


Figure 8. — Opérateurs : Echanges de blé

On constate immédiatement les positions excentrées des années 1965 et 1966 : or les données correspondant à ces années n'avaient pas été recueillies de la même façon que celles des années ultérieures. Ce simple fait n'était cependant pas connu des premiers utilisateurs de ces données et ce n'est qu'à l'occasion d'une analyse systématique de l'évolution des termes X_{ij} que la question de l'homogénéité des données avait été soulevée. L'Office national interprofessionnel des céréales nous avait alors confirmé la modification du mode de recueil en 1967, à l'occasion de la création du marché unique européen. Les opérateurs permettent instantanément de déceler cette hétérogénéité des données, ce qui doit être d'un grand secours pour le statisticien ou l'économiste qui ne peuvent toujours être sûrs de leurs sources.

Le second fait observé est la succession régulière des vecteurs correspondant aux années 1967 à 1974 ; les années ne sont nullement disposées au hasard : il existe donc bien une tendance évolutive et l'économiste peut envisager la prévision. Les causes de l'évolution des échanges sont développées au paragraphe 4.2.1.

b) *Le commerce mondial*

Les opérateurs ont été utilisés pour étudier les tableaux d'échanges des années 1958 et 1962 à 1974 ; les années 1958 à 1970 sont issues de l'annuaire de l'ONU de 1971 [47], les années 1970 à 1974 de celui de 1975 [46] : il y a donc deux données pour l'année 1970.

Les résultats sont fournis par le plan principal suivant (Fig. 9), où le symbole "0" représente le tableau 1970 selon l'annuaire 1975, et le symbole "0" représente le tableau 1970 selon l'annuaire de 1971.

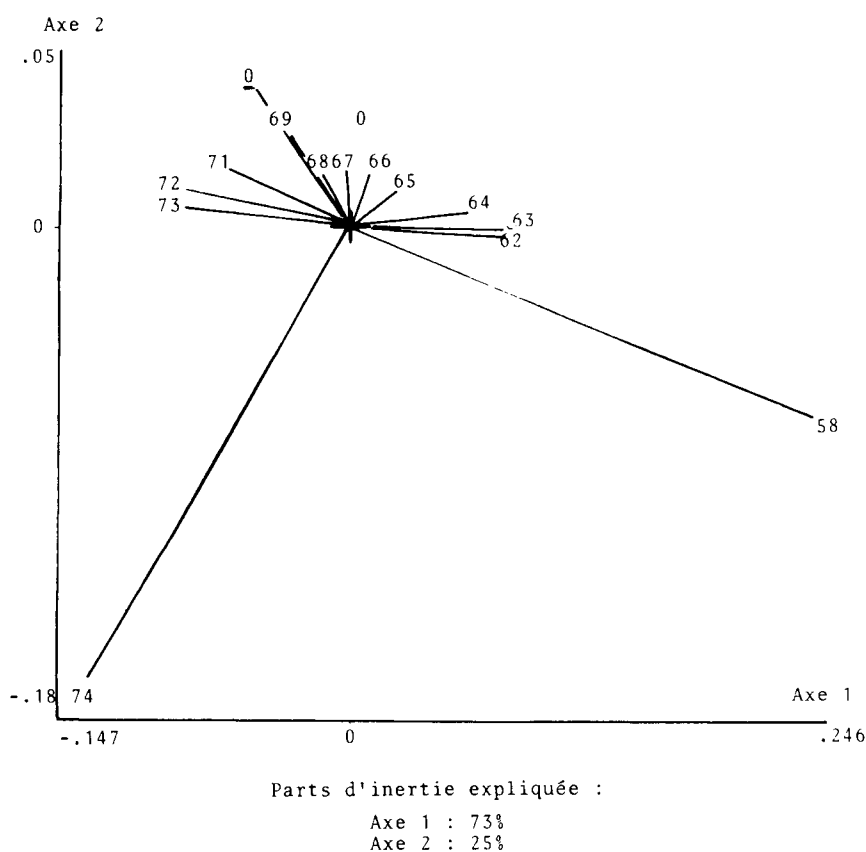


Figure 9. - Opérateurs : commerce mondial

La première constatation concerne l'année 1974 : alors que les années successives sont généralement très proches les unes des autres, l'année 1974 est extraordinairement éloignée de l'année 1973. Observons les deux tableaux d'échanges correspondants (en milliers de dollars) :

1974

	EURO	USA	JAP	EST	MOYO	DEV
EURO	183030	23010	4270	17360	11640	38150
USA	27630	0	10560	1430	4350	27340
JAP	8460	12930	0	1680	3380	21700
EST	17480	680	1400	33570	1940	6970
MOYO	41200	5030	17410	1280	3880	14280
DEV	43890	34080	15630	5400	2340	25910

1973

	EURO	USA	JAP	EST	MOYO	DEV
EURO	145050	19150	3650	11570	6700	26430
USA	20580	0	8180	1800	2210	17970
JAP	6470	9550	0	810	1610	14220
EST	11650	520	980	29940	1312	5468
MOYO	13790	1360	5300	590	1650	4200
DEV	28020	18980	9880	3670	1080	15880

Les pays du Moyen-Orient qui assuraient 6 % des exportations totales en 1973 passent à 12,4 % : on a entendu parler de la "crise du pétrole". . . Par ailleurs, si les autres termes de l'échange ne sont pas bouleversés en pourcentage, on peut constater qu'en valeur, le bond est impressionnant ; le commerce total passe de 449 milliards de dollars en 1973 à 669 milliards de dollars en 1974 : on connaît également la crise inflationniste mondiale. . .

La technique des opérateurs nous montre que la prévision des échanges pour 1974 s'avérait pratiquement impossible en n'utilisant que des méthodes statistiques : il y a rupture dans l'évolution du phénomène. Il faut alors envisager d'autres moyens, faisant appel à une réflexion d'ordre prospectif et plus "politique" qu'économétrique.

Par contre, l'évolution pendant les années précédentes s'est déroulée de façon très régulière et, jusqu'en 1973, la prévision des échanges internationaux était parfaitement envisageable.

Par ailleurs, ces données permettent de montrer une nouvelle utilisation pratique des opérateurs, cette fois-ci dans le choix des données lorsque plusieurs sources sont disponibles. Nous disposons en effet de deux données pour l'année 1970 : laquelle choisir ? aucun des deux tableaux n'est en soi "meilleur", les différences provenant essentiellement d'une légère modification dans la définition

de la zone Moyen-Orient (cf. Annexe II). Mais dans une optique de prévision, il faudra choisir le tableau de données qui respecte le mieux la tendance générale : l'observation de la figure 3 nous indique clairement que la donnée provenant de l'annuaire 1971 (point "Q") est celle qui convient, puisque le vecteur correspondant se situe entre le vecteur associé à l'opérateur 1969 et celui associé à l'opérateur 1971.

Notons enfin que ce choix pour la donnée 1970 peut être fait en utilisant uniquement l'ordre des tableaux sur le premier axe factoriel, qui exprime à lui seul 73 % de l'inertie. Voici les coordonnées des opérateurs sur ce premier axe :

Année	1974	1973	1972	1971	1970	1969	1968	
Coordonnée	-0,147	-0,098	-0,098	-0,071	-0,055	-0,042	-0,017	
Année	1967	(1970)	1966	1965	1964	1963	1962	1958
Coordonnée	-0,010	0,007	0,008	0,027	0,067	0,083	0,099	0,246

4.2 – LA PRATIQUE CLASSIQUE : EXEMPLES

4.2.1 – Un programme de transport

Reprenons le modèle du programme linéaire de transport (§ 2.2), en considérant les échanges X_{ij} comme solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{ij} X_{ij} C_{ij} \\ \sum_i X_{ij} = C_j \quad \text{pour tout } j \\ \sum_j X_{ij} = L_i \quad \text{pour tout } i \end{array} \right.$$

La difficulté d'utilisation d'un tel modèle réside dans la construction d'un *coût généralisé* C_{ij} qui tienne compte des paramètres physiques et économiques qui régissent le phénomène. Le problème est assez proche de celui posé par la notion de "distance" dans les modèles gravitationnels ; ces modèles s'expriment en effet de façon générale sous la forme suivante :

$$X_{ij} = G A_j^\alpha B_j^\beta d_{ij}^\gamma$$

où d_{ij} est un indice mesurant la *difficulté d'échange* entre la région i et la région j (cf. [7] 190-228). Cet indice —ou *distance de i à j* — sera fonction des divers paramètres intervenant dans le problème étudié ; chaque cas particulier nécessite donc une réflexion approfondie sur la signification et les composantes de cette distance d_{ij} .

Pour construire une distance au sens des modèles gravitationnels, ou un coût généralisé au sens des programmes de transport, dans le cas des “échanges de blé”, nous avons tiré parti des résultats des diverses A.F.C. effectuées (Figs. 2, 3 et 4).

La première constatation réside dans la proximité, sur les différents graphiques, des régions effectivement voisines au sens géographique : la simple distance kilométrique entre régions doit donc jouer un rôle essentiel. Nous avons donc tout d'abord calculé une distance kilométrique (k_{ij}) entre régions, plus précisément entre barycentres régionaux.

Ensuite, le phénomène d'absorption des régions du Nord par la zone d'influence de la région d'Orléans doit être expliqué : il s'agit, nous l'avons dit, d'un changement dans la qualité du blé produit dans le Nord. Un indice de qualité (q_i) était donc nécessaire ; nous avons utilisé celui déterminé par l'Institut technique des céréales et fourrages pour les différentes espèces de blé, afin de construire un indice régional, tenant compte des espèces cultivées dans chaque région.

La notion de qualité introduit la notion de prix ; les prix de vente à la production n'étant pas les mêmes pour toute la France, un indice (p_i) exprimant les rapports entre les prix a été également construit.

Un autre point essentiel apparaît sur les différents graphiques : la disposition relative des régions n'est pas considérablement modifiée d'une année à l'autre. Ainsi, les circuits commerciaux apparaissent-ils extrêmement rigides ; une enquête rapide auprès de producteurs et de minotiers a confirmé le poids important des habitudes commerciales, phénomène courant en ce qui concerne les échanges agricoles. Un indice de rigidité des circuits (r_{ij}) exprime donc cet état de fait.

Enfin, une région semble échapper à la loi générale des échanges “au plus près”, celle de Marseille, située à proximité d'Orléans sur les différents graphiques. Cette situation est surprenante : la région de Marseille s'approvisionne essentiellement auprès de la région d'Orléans, aux dépens de régions fortement productrices et plus proches géographiquement, telles que celles de Toulouse ou de Dijon. Nous pouvons alors penser aux modes de transport du blé : suivant le moyen utilisé, l'échange s'avérera plus ou moins coûteux, plus ou moins facile. Et, en effet, alors

que 80 % des échanges de blé transitent en France par camion, pour l'échange Orléans → Marseille, la part des transporteurs routiers n'est que de 5 %, au profit du chemin de fer et des transports fluviaux. Un indice (t_{ij}) sera donc introduit pour tenir compte des moyens de transport utilisés, plus précisément de la part prise par les transporteurs routiers.

Finalement, le coût généralisé sera posé égal à :

$$C_{ij} = k_{ij} q_i^{-\chi} p_i^{\Pi} r_{ij}^{-\rho} t_{ij}^{-\theta}$$

où les élasticités χ , Π , ρ et θ sont positives. On déterminera ces élasticités par essais successifs de différentes valeurs, pour retenir le coût C_{ij} donnant sur une année de référence les résultats les plus proches de la matrice réelle d'échanges (cf. [22]).

En mesurant l'écart entre la matrice que fournit le programme de transport, affecté du coût C_{ij} et des marges réelles 1974, et la matrice réelle d'échanges 1974, on a constaté, après plusieurs essais, que l'indice suivant donnait de bons résultats :

$$C_{ij} = 0,1 \times k_{ij} \times p_i^2 \times t_{ij}^{-1/2} \times q_i^{-2} \times r_{ij}^{-1}.$$

(On considère en fait l'entier le plus proche de C_{ij} pour des raisons de temps de calcul).

On constate que cet indice, construit avec des données datant pour la plupart de 1974/1975 donne des résultats de même qualité lorsqu'il est utilisé pour déterminer les échanges de diverses années, même éloignées dans le passé ; les hypothèses de grande stabilité des paramètres sont ainsi confirmées. Le tableau suivant indique les écarts entre le tableau prévu par le programme de transport, et le tableau de l'année t :

t	1967	1971	1974
Erreur en %	17,8	20,5	21,1

Les écarts sont exprimés au moyen d'un indice calculant l'erreur relative moyenne sur un ensemble de 40 termes des matrices d'échanges de blé ; ces termes représentent l'essentiel du commerce considéré : au moins 93 % de l'échange total pour les années 1967 à 1974. Cet indice élimine les erreurs commises sur les termes faibles, qui ont peu de signification (évolutions accidentelles, imprécisions au niveau du recueil de données, etc.)

4.2.2 – Méthodes structurelles et méthode RAS

Les applications sont connues et nombreuses – puisqu’il s’agit d’une “pratique classique” – on en trouvera des exemples intéressants dans [2], [7], [12], [13], [17], [18], [22], [31], [33]. Les résultats sont souvent de bonne qualité, pour peu que le phénomène d’échanges considéré soit relativement stable et à condition de n’envisager des prévisions qu’à court ou moyen terme.

Dans le cas des échanges de blé, nous avons testé l’ensemble des méthodes exposées aux paragraphes 2.3. et 2.4. Le tableau suivant fournit les erreurs constatées selon les différentes méthodes, l’objectif étant de prévoir le tableau de l’année 1974 à l’aide des données des années 1967 à 1971 ; les erreurs, exprimées en “pour cent” sont mesurées d’après l’indice précédemment décrit ; les marges utilisées pour la méthode RAS sont les marges réelles de l’année 1974.

Méthode \ Coeff.	$\frac{X_{ij}}{X_{..}}$	$\frac{X_{ij}}{X_{i.}}$	$\frac{X_{ij}}{X_{.j}}$	$\frac{X_{ij} X_{..}}{X_{i.} X_{.j}}$
Année 1971 + RAS	10,5	7,3	9,7	6,6
Extrapolation + RAS	10,0	7,6	8,8	6,2
Extrapolation seule	24	10,7	14,3	7,4

On constate que les coefficients de type $X_{ij} X_{..}/X_{i.} X_{.j}$ et $X_{ij}/X_{i.}$ fournissent les meilleurs résultats. La technique la plus efficace consiste à appliquer la méthode RAS à une matrice qui tient compte de l’évolution des échanges, c’est-à-dire à une matrice de coefficients extrapolés à l’année 1974, plutôt qu’à une matrice d’une année antérieure (ici 1971). Notons enfin que l’extrapolation seule des coefficients (il s’agissait ici d’une simple extrapolation linéaire) donne de moins bons résultats.

La précision atteinte (en supposant les marges connues) avec ces différentes méthodes est en général très satisfaisante pour l’exemple considéré ; elle est nettement supérieure à celle obtenue avec le programme de transport. Celui-ci a cependant l’avantage de fournir un modèle explicatif des échanges ; on peut ainsi

tester les effets de modifications importantes dans certains paramètres : par exemple, dans le cas du blé, on pourrait introduire un indice de qualité tenant compte d'un éventuel développement de la culture du blé fourrager et observer les conséquences sur la distribution du blé en France, ou encore rechercher les effets d'un changement dans la politique des transports, etc.

4.3 – FORMULE DE RECONSTRUCTION DE L'AFC : APPLICATIONS

4.3.1 – Premier exemple : les échanges de blé

4.3.1.1 – Nombre de valeurs propres à conserver

Le lien qui existe entre validité de la reconstruction et part d'inertie expliquée par les premières valeurs propres conservées a pu être vérifié empiriquement. En faisant varier le nombre de valeurs propres retenues pour la reconstruction d'une matrice d'échanges de blé (celle de l'année 1969) on a obtenu les résultats suivants :

p = nombre de valeurs propres :	3	4	5	6	8	11	15
I_p = part d'inertie, en %	34,3	44,3	52,8	60,7	74,6	89,8	100
e = erreur sur reconstruction :	89,2	77,0	65,4	54,5	35,6	18,4	0

L'erreur sur la reconstruction est mesurée non pas à l'aide de la distance du χ^2 (on connaît alors la liaison entre part d'inertie et erreur : § 3.1.1.), mais au moyen de l'indice d'erreur précédemment défini (§ 4.2.1).

Le lien entre part d'inertie expliquée et validité de la reconstruction est mis en évidence par le graphique ci-après (fig. 10).

On constate que l'erreur est voisine de :

$$e = 1,4 (1 - I_p).$$

Ainsi la mesure de l'erreur par l'indice e apparaît de bonne qualité, puisqu'elle possède une signification simple (erreur relative moyenne) et qu'elle est homothétique à l'erreur mesurée par la distance du χ^2 ; on a en effet ici :

$$d_{\chi^2}^2 = \text{Tr} (1 - I_p) = 6,98 (1 - I_p) \quad \text{soit} \quad e \sim \frac{1}{5} d_{\chi^2}^2.$$

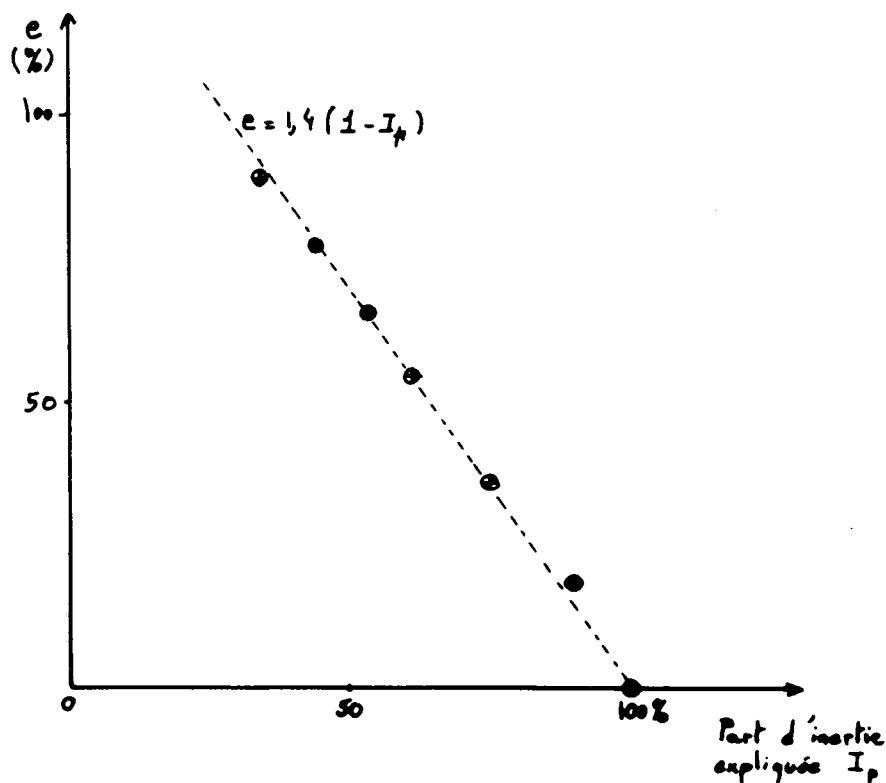


Figure 10. – Part d'inertie expliquée et validité de la reconstruction.

On constate malheureusement sur cet exemple que pour atteindre une part d'inertie fournissant une erreur de reconstruction acceptable (de l'ordre de 20 %), il faut utiliser les onze premières valeurs propres, ce qui est considérable. On est confronté ici à un problème inhérent à la méthode que l'on propose (cf. § 3.1.1) : peut-on opérer sur un tableau des transformations simples qui permettraient de maximiser la part d'inertie expliquée à l'aide d'un nombre donné de valeurs propres ? Ces transformations doivent en particulier être "réversibles" : on doit pouvoir effectuer la transformation inverse sur la matrice reconstruite.

4.3.1.2 – Un exemple de transformation : repondération de la diagonale

L'observation des matrices d'échanges de blé pour les années 1967 à 1974 révèle l'importance prise par les termes diagonaux, c'est-à-dire par les échanges

intra-régionaux. Le poids excessif de la diagonale diminue la qualité de l'AFC : à la limite, si la matrice d'échanges était diagonale, les valeurs propres seraient toutes égales à 1.

On vérifie sur le tableau et le graphique (fig. 11) suivants, l'influence du poids de la diagonale sur la part d'inertie expliquée à l'aide ici des trois premières valeurs propres :

Année	1967	1969	1970	1971	1972	1973	1974
(en %) D/T	65,3	61,8	59,5	60,5	58,9	58,7	57,3
(en %) I_3	32,9	34,3	36,0	36,4	35,3	36,9	38,2

$$\text{où } D = \sum_i X_{ii} \quad \text{et} \quad T = \sum_{ij} X_{ij}$$

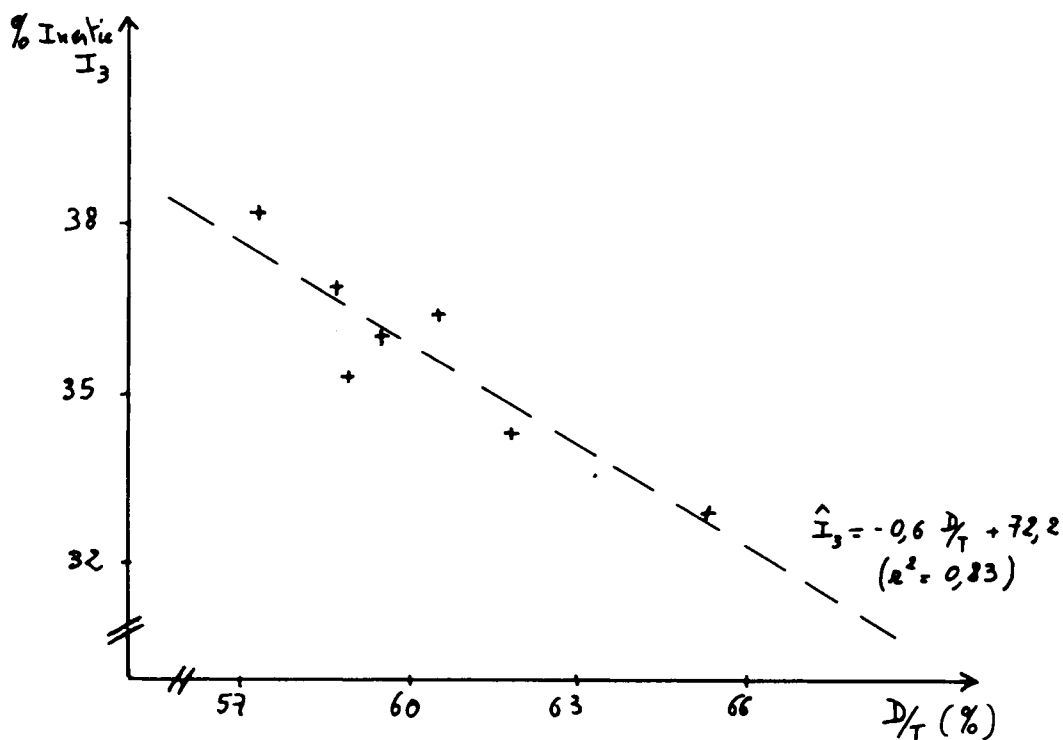


Figure 11. - Poids de la diagonale et part d'inertie exprimée

L'observation de ce graphique nous laisse supposer qu'en réduisant le poids des termes diagonaux, la part d'inertie expliquée devrait être améliorée.

Dans le cas d'une matrice carrée $n \times n$, le poids moyen d'un terme diagonal est égal à :

$$\frac{1}{n} \frac{D}{T},$$

le poids moyen d'un terme non diagonal est égal à :

$$\frac{1}{n(n-1)} \frac{T-D}{T}.$$

Si l'on veut modifier les termes X_{ii} de façon à ce que les nouveaux poids moyens soient égaux, il faut diviser chaque terme X_{ii} par un coefficient égal à :

$$k = (n-1) \frac{D}{T-D}.$$

Il était intéressant de procéder à une étude empirique de repondération de la diagonale : en travaillant sur la matrice de l'année 1969, on a observé les effets d'une division des termes diagonaux par des nombres variant entre 1 et 1000. Le tableau suivant fournit les résultats, en considérant la part d'inertie expliquée par les cinq premières valeurs propres :

X_{ii} divisé par	% inertie I	Erreur de reconstruction (%)
1	52,8	65,4
5	81,4	34,0
10	90,1	
12	91,1	18,9
15 et 16	91,7	19,8
20	91,5	21,2
$k = 24,2$	91,1	21,3
25	91,0	21,3
30	90,4	
50	88,8	
100	87,2	
200	86,2	
1 000	85,1	

(Semi-Log.)

Part d'Inertie
 I_5

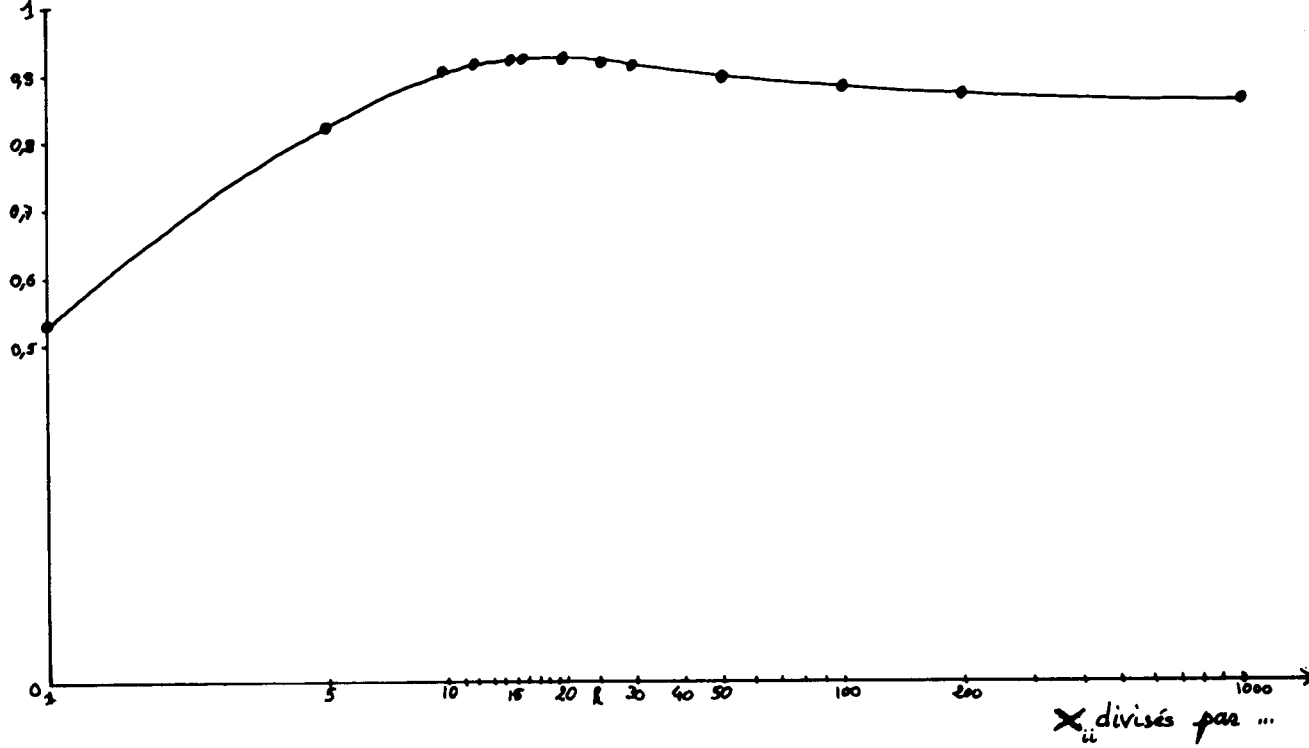


Figure 12.

Le graphique *supra* (figure 12) donne la part d'inertie expliquée en fonction du coefficient par lequel on a divisé les termes diagonaux.

On observe que les meilleurs résultats sont obtenus pour des valeurs du coefficient de repondération comprises entre 10 et 30 : l'expérience confirme donc la validité du critère simple (égalisation des poids moyens) que nous proposons. On doit également remarquer qu'un gain de l'ordre de 1 % dans la part d'inertie expliquée n'est pas significativement appréciable pour la reconstruction du tableau.

Les graphiques précédents donnent une idée empirique de l'influence des termes diagonaux sur la qualité de l'AFC. La part d'inertie expliquée s'accroît rapidement lorsque le poids moyen des termes diagonaux diminue et ceci jusqu'à un seuil qui correspond approximativement à un poids moyen des termes diagonaux égal au double du poids moyen des termes non diagonaux. Ensuite, lorsque le poids moyen des termes diagonaux continue à diminuer, la part d'inertie expliquée redevient plus faible, mais de façon extrêmement lente, la limite de cette décroissance correspondant à la part d'inertie expliquée lorsqu'on effectue une AFC sur le tableau dont on a annulé la diagonale.

Les résultats, pour différentes matrices, d'une repondération selon le critère d'égalisation des poids moyens sont maintenant donnés par le tableau suivant :

matrice de l'année	1967	1969	1970	1971	1972	1973	1974
valeur de $k = \frac{1}{n-1} \frac{T-D}{D}$	28,2	24,2	22,1	22,9	21,5	21,3	20,1
part d'inertie expliquée avant repondération (%)	50,5	52,8	55,2	55,5	54,2	56,1	57,1
après repondération (%)	89,0	91,1	90,4	89,5	86,8	90,4	89,0
erreur s/reconstruction (après repondération)	25,0	21,3	17,0	19,4	23,5	20,0	20,0

Le nombre des valeurs propres retenues était égal à 5 dans tous les cas : on vérifie à nouveau l'efficacité de la repondération.

4.3.1.3 – Utilisation de la méthode RAS

Lorsque la reconstruction est effectuée après repondération des termes diagonaux, les marges de la matrice reconstruite ne sont plus égales à celle de la matrice à reconstruire ; il est alors utile de procéder à un ajustement de ces marges au moyen de la méthode RAS : les résultats obtenus sont appréciables.

Ainsi, en appliquant la procédure RAS à la matrice reconstruite précédemment pour l'année 1970 (erreur sur la reconstruction : 17 %), on obtient une nouvelle matrice dont les marges sont celles de la matrice recherchée et qui est nettement plus proche de la réalité : l'erreur de reconstruction passe à 6,1 %.

De même, pour des matrices correspondant à l'année 1974, l'erreur de reconstruction passe de 20 % à 7,2 % après utilisation de la méthode RAS.

4.3.1.4 – Observation des résidus

On étudie les valeurs de :

$$e_{ij} = X_{ij} - \hat{X}_{ij}$$

où \hat{X}_{ij} est le terme obtenu dans la reconstruction de la matrice X , après repondération par le coefficient k précédemment défini.

Les graphiques suivants (figure 13) donnent les valeurs de e_{ij} pour les années 1967 à 1974 et pour les termes correspondant à 8 échanges parmi les plus importants.

Ces quelques graphiques révèlent les difficultés propres à la méthode. Lorsqu'une région est mal représentée par les premiers facteurs principaux, les échanges correspondants seront mal reconstruits ; lorsqu'une région contribue fortement à un axe principal non retenu et à composantes positives, les échanges correspondants seront systématiquement sous-estimés. Ces problèmes posés par la qualité de l'AFC à l'aide d'un faible nombre de valeurs propres peuvent difficilement être évités. Il faut surtout vérifier qu'il n'y a pas d'erreur systématique pour l'ensemble de la reconstruction ; les graphiques suivants (figs. 14 et 15) donnent les résidus ou les erreurs de reconstruction pour l'ensemble des 40 termes importants et pour deux années distinctes, 1969 et 1974. On peut considérer les résidus comme correctement répartis, avec cependant une tendance à la sous-estimation en 1969, et à la sur-estimation en 1974. De façon générale, la qualité de reconstruction est souvent médiocre : les graphiques 13, 14 et 15 correspondent à des tableaux reconstruits après repondération mais sans utilisation de la méthode RAS, l'erreur relative moyenne est de 20 %. On retrouve des répartitions de résidus de même configuration après utilisation de la méthode RAS, mais avec une meilleure qualité de reconstruction, en particulier pour les échanges très importants : cf. figure 16.

4.3.1.5 – Résultat des projections

- Un essai de prévision a été réalisé sur la base suivante : on a estimé, pour l'année 1974, les valeurs propres et facteurs principaux à l'aide de régressions

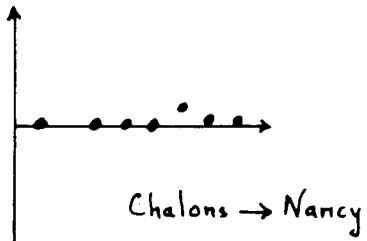
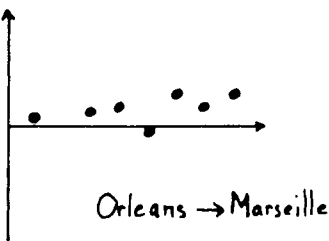
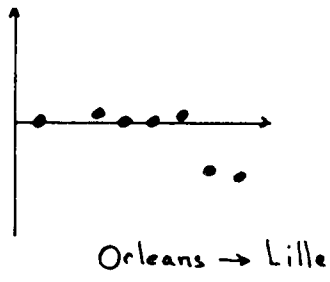
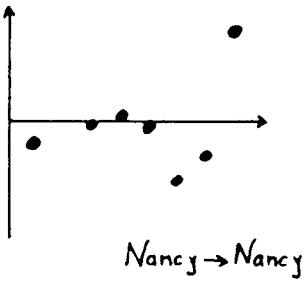
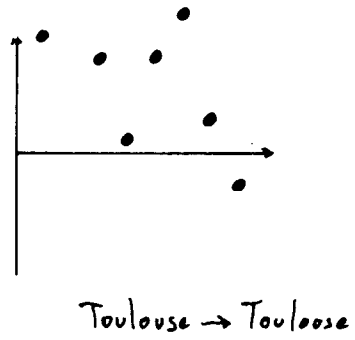
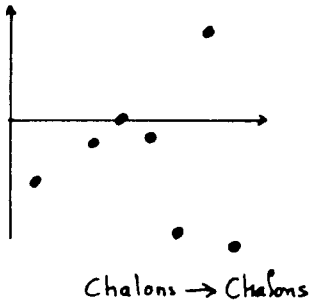
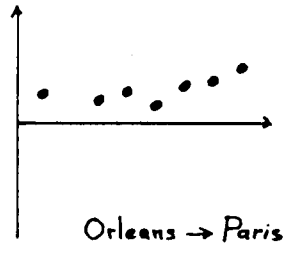
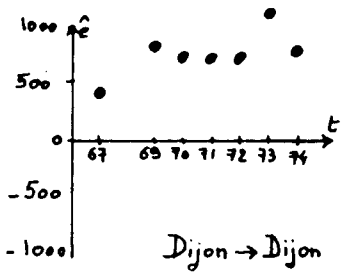


Figure 13.

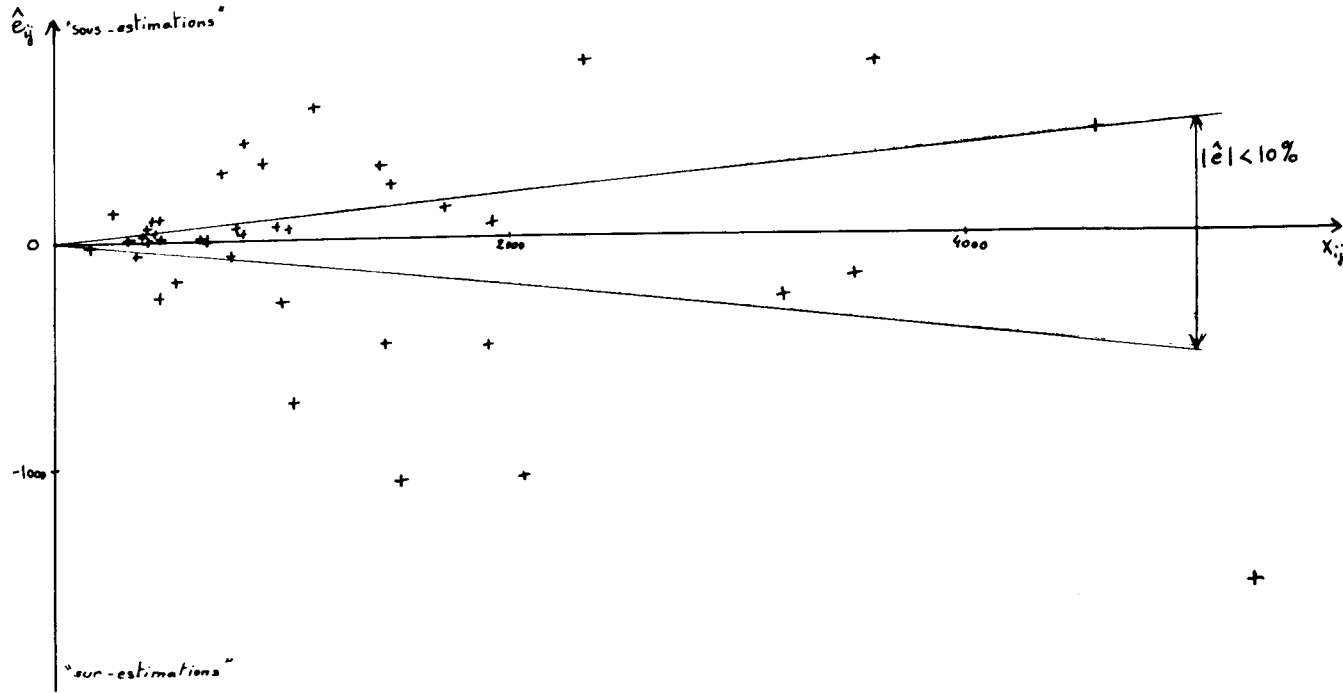


Figure 14. - Résidus pour les 40 termes importants

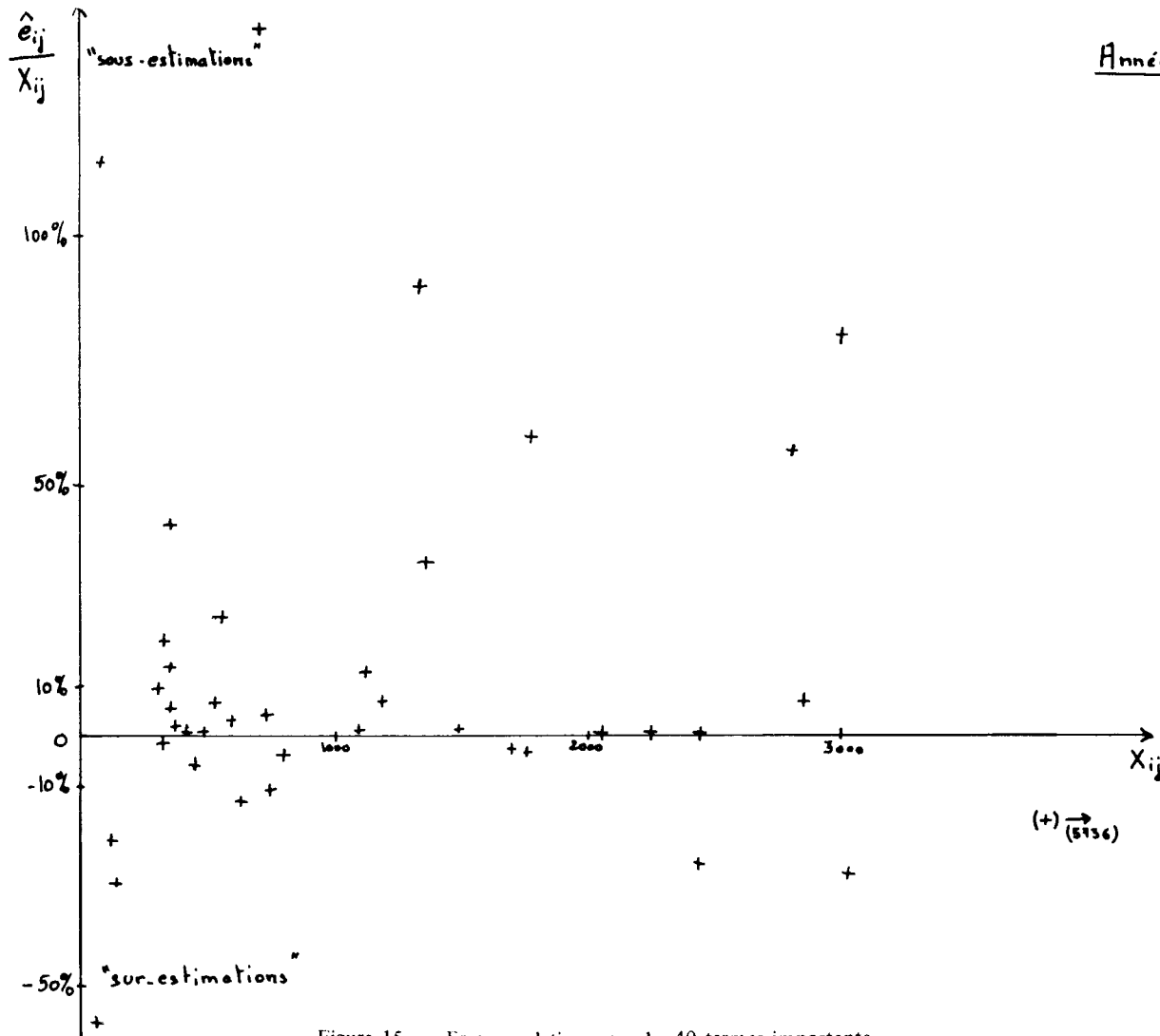


Figure 15. - Erreurs relatives pour les 40 termes importants

Année 1974

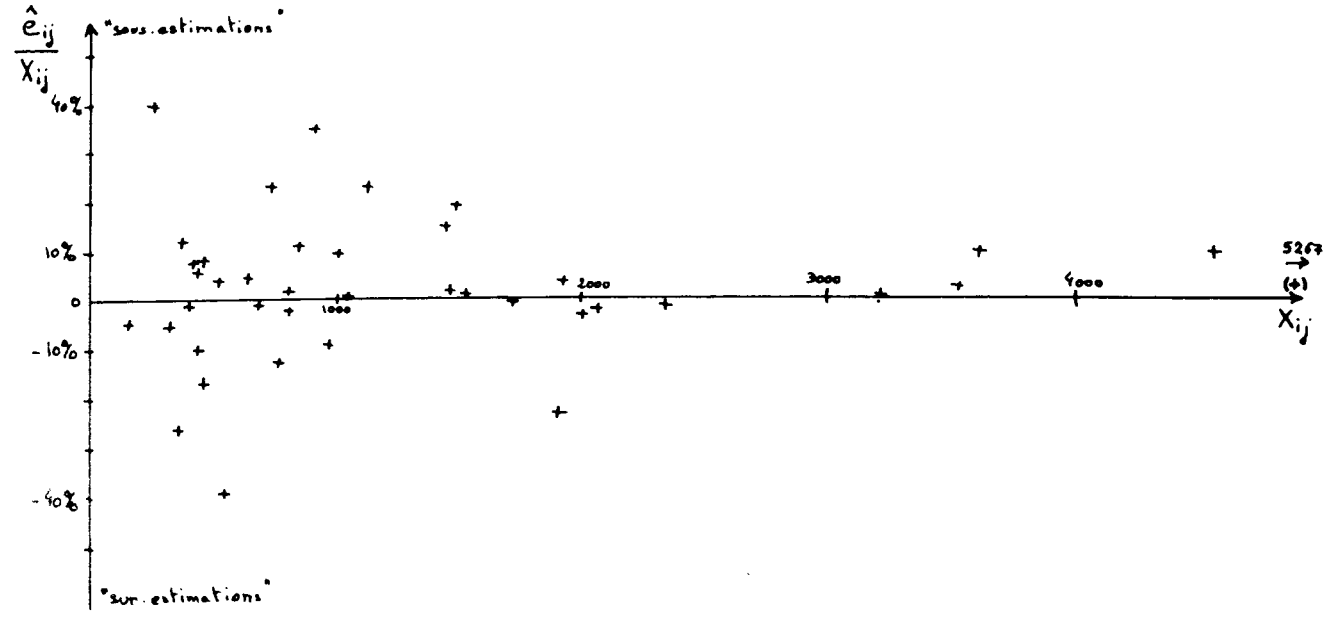


Figure 16. - Erreurs relatives pour les 40 termes importants (Après utilisation RAS)

linéaires sur les valeurs propres et facteurs principaux des années 1967, 1969, 1970 et 1971. On a retenu les cinq premières valeurs propres et les facteurs associés. Toutes les opérations ont été faites après repondération de la diagonale : les termes diagonaux ont été divisés par 12 avant d'extraire les valeurs propres (la qualité de l'AFC est alors optimale pour les années considérées).

La matrice 1974 est obtenue par la formule de reconstruction en utilisant les marges connues pour 1974. Les extrapolations des facteurs principaux ne sont évidemment plus centrées et les marges du tableau reconstruit ne sont pas les marges voulues : il faut donc procéder au réajustement des marges à l'aide de la méthode RAS.

Les résultats sont finalement les suivants :

MATRICE A RECONSTRUIRE

1457	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	32	
23	1432	97	11	0	410	139	0	0	0	1	23	14	1	2	29
0	9	3598	83	0	442	185	8	151	0	0	56	438	0	0	1
0	0	0	830	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	905	1041	0	0	11	43	0	0	2	543	0	7	0
2	38	40	0	0	1523	222	0	11	2	0	0	68	0	0	49
1	1	19	2	6	19	726	0	4	1	0	0	7	0	1	11
0	1	161	462	13	23	27	2066	1929	0	14	28	406	0	7	0
0	0	17	8	3	0	0	58	2333	0	0	0	25	0	0	0
0	0	0	0	1	2	0	0	0	802	45	0	2	0	1	0
0	0	0	14	0	0	9	0	0	1011	1996	8	40	12	291	0
162	446	128	1905	360	467	1483	14	264	769	387	3523	4561	28	968	85
0	0	54	170	139	9	4	36	16	10	0	21	5267	0	169	0
683	83	0	17	3	0	0	0	3	324	646	13	11	1716	1	3
0	0	0	4	9	0	0	4	0	53	37	37	31	0	1128	0
805	8	14	5	0	12	52	0	0	0	0	0	8	3	1	3208

MATRICE RECONSTRUITE

1309	20	4	6	0	11	17	0	8	59	29	6	0	14	0	34
19	1033	283	114	0	349	152	5	76	0	22	37	36	25	0	33
0	114	3442	85	25	390	268	13	141	0	0	54	409	16	0	30
0	0	6	798	6	7	3	1	0	0	0	1	18	0	0	0
0	1	38	1145	970	23	12	32	120	0	7	10	182	0	0	13
8	39	91	2	7	1529	88	1	29	0	1	17	119	5	0	18
10	20	39	0	5	57	556	0	15	0	1	9	71	3	0	11
0	4	163	1397	0	16	0	2014	1435	0	0	9	0	37	0	59
0	5	17	40	0	0	0	22	2232	89	3	4	0	20	7	0
0	2	3	0	0	1	0	0	0	776	22	2	23	6	24	0
29	25	17	30	11	15	3	0	0	506	2218	20	270	51	204	0
743	563	0	384	488	445	1489	79	417	554	458	3461	4901	173	1182	238
0	22	0	152	50	0	85	12	21	78	38	18	5255	2	140	0
459	79	22	206	0	0	0	18	88	773	269	31	0	1418	98	67
0	9	0	0	9	3	14	0	0	138	52	8	138	13	921	0
556	103	3	58	10	63	159	0	171	0	6	24	0	29	0	2916

L'erreur relative moyenne e est ici égale à 19,9 %, et la qualité de la prévision est convenable. Elle est proche de celle obtenue à l'aide d'un programme de transport (cf. 4.2.1), mais celui-ci nécessite la connaissance de divers paramètres physiques et économiques qu'il n'est pas toujours possible d'isoler.

Il est certainement possible d'améliorer la qualité de la prévision en utilisant des techniques de projection des facteurs plus adaptées au problème, et tenant compte par exemple des contraintes de normes, d'orthogonalité, de centrage, etc. On peut par ailleurs augmenter légèrement le nombre de valeurs propres retenues : la cinquième valeur propre reste, dans le cas étudié, assez élevée (de l'ordre de 0.2) et les risques de "chevauchement" sont donc encore limités.

L'observation plus précise des résultats nous montre que les termes très mal reconstruits concernent des échanges relativement faibles ; voici les erreurs les plus importantes :

Echange	Valeur prévue	Valeur réelle	E(%)
Orléans → Bordeaux	743	162	358
Chalons → Lille	1 397	462	202
Orléans → Lille	384	1 905	80
Poitiers → Reims	773	324	139
Chalons → Paris	0	406	100

Remarquons ici l'existence d'une "erreur en chaîne" : l'échange Orléans → Lille est nettement sous-estimé, ceci est "compensé" par la sur-estimation de Châlons → Lille qui nécessite à son tour la sous-estimation de Châlons → Paris... En fait, ces erreurs proviennent d'un réel changement dans la structure des échanges de blé : la région du Nord (Lille) qui s'approvisionnait traditionnellement sur place (Lille, Amiens, Châlons) se tourne maintenant vers les producteurs de la Beauce (Orléans) pour des raisons récentes de qualité du blé (cf. 4.1.). Les facteurs principaux des années 1967 à 1971 résument l'ancienne structure et il n'est donc pas possible de bien prévoir les échanges de 1974 relevant de la nouvelle structure : aucune méthode d'ordre économétrique ou statistique ne peut vraiment prévoir les ruptures de tendances.

4.3.2 – Deuxième exemple : le commerce mondial

On rappelle que les "opérateurs" nous ont appris que l'année 1974 était marquée par un net changement dans la structure des échanges : nous testerons donc la méthode de prévision à l'aide de l'AFC en nous basant sur les années 1962 à 1970, afin de prévoir le tableau correspondant à l'année 1973.

Les prévisions ici effectuées ont utilisé des tableaux non repondérés, les parts d'inertie expliquées étant suffisamment fortes : 75 % environ avec deux valeurs propres, 90 % environ avec trois valeurs propres. Les extrapolations à 1973 des valeurs propres et facteurs principaux sont issues de régressions linéaires terme à terme ; un terme est réellement extrapolé si on découvre une tendance significative, c'est-à-dire si le coefficient de corrélation est supérieur à 0,67 en valeur absolue ; lorsque la corrélation est trop faible, on prend la moyenne des valeurs correspondant aux années antérieures.

Une prévision est effectuée dans ces conditions, en ne retenant que trois valeurs propres : l'erreur moyenne (ici sur l'ensemble des termes du tableau) est égale à 13 %. En n'utilisant plus que deux valeurs propres, l'erreur est de 16.8 %.

Mais une part importante de l'erreur est ici due à la reconstruction de deux termes non nuls pour les échanges USA → USA et Japon → Japon qui devraient évidemment être égaux à zéro.

On peut corriger cette erreur en ramenant à zéro ces termes puis en réajustant les marges à l'aide de la méthode RAS.

Les résultats sont alors de bonne qualité (*erreur relative de 12,6 %*) ; on n'a pourtant utilisé ici que 2 valeurs propres et les facteurs principaux associés (il y a donc au total 26 termes à extrapoler) ; voici l'ensemble de ces résultats :

ERREUR MOYENNE SUR L'ENSEMBLE DES TERMES : 12.58 POUR CENT

MATRICE A RECONSTRUIRE

145050	19150	3650	11570	6700	26430
20580	0	8180	1800	2210	17970
6470	8550	0	810	1610	14220
11650	520	980	29940	1312	5468
13790	1360	5300	590	1650	4200
28020	18980	9880	3670	1080	15880

MATRICE RECONSTRUITE

147695	16970	10127	10910	6121	20637
23034	0	6573	1330	2153	17601
4501	10859	0	276	1366	14697
9950	750	1258	31927	1461	4596
12699	4532	2312	570	865	5913
27681	15449	7720	3366	2595	20724

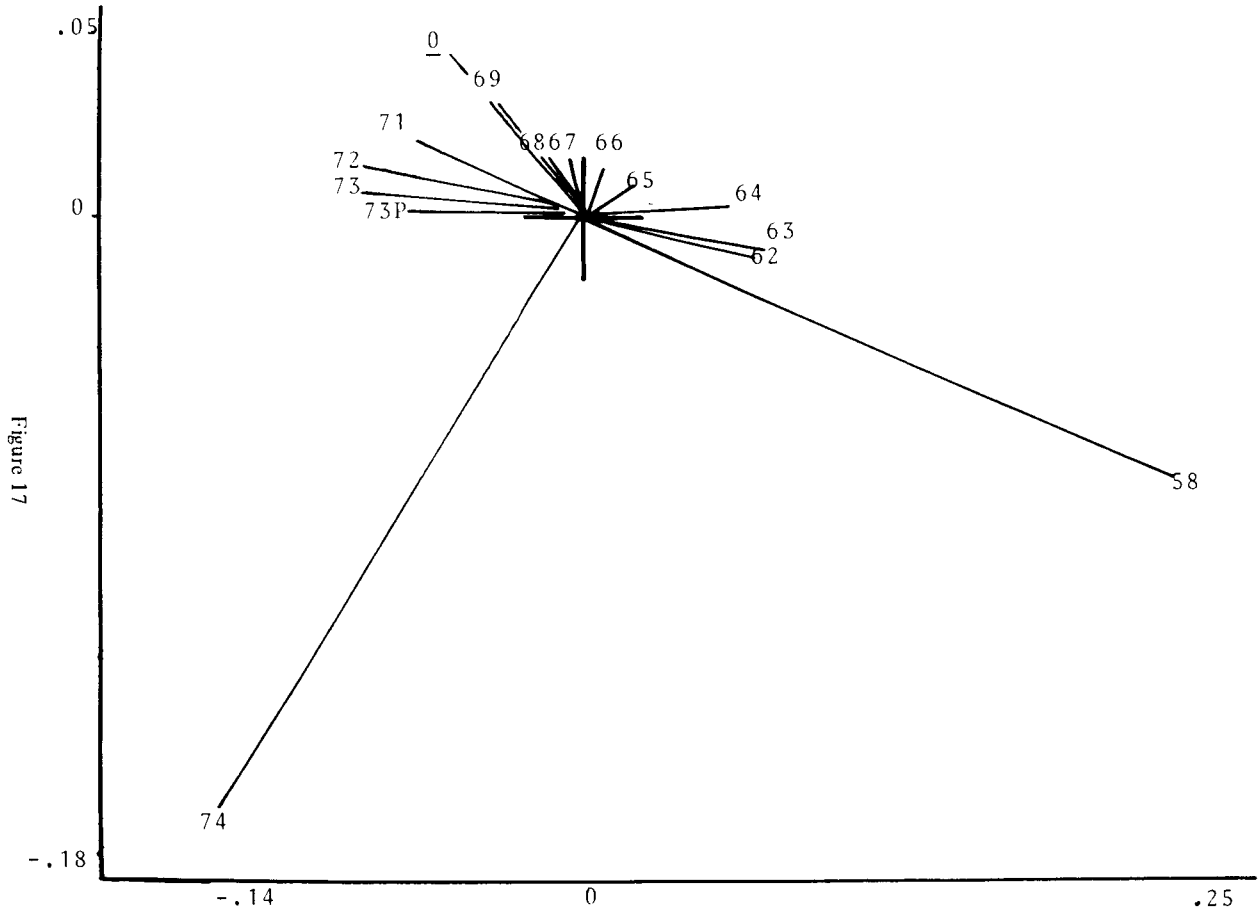


Figure 17

ERREURS RELATIVES POUR TOUS LES TERMES DU TABLEAU (en %)

2	- 11	177	- 6	- 9	- 22
12	0	- 20	- 26	- 3	- 2
- 30	27	0	- 66	- 15	3
- 15	44	28	7	11	- 16
- 8	233	- 56	- 3	- 48	41
- 1	- 19	- 22	- 8	140	31

On peut également vérifier la qualité de la prévision en utilisant à nouveau la technique des opérateurs : il suffit d'introduire le tableau prévu dans la série des tableaux donnés et d'observer la position du point correspondant sur le graphique issu de l'analyse factorielle du tableau de distances entre opérateurs. On constatera ainsi, en observant la figure 17, que la dernière prévision du tableau du commerce mondial pour 1973 (notée "73P" sur le graphique) est tout à fait correcte (comparer également avec la figure 9).

CONCLUSION

La technique que nous avons présentée au paragraphe 3 ne propose pas de modèle explicatif des échanges ; elle ne présuppose aucune structure et reconstruit ou prévoit un tableau à partir de ce que peut en dégager l'Analyse factorielle des correspondances. Il reste un *a priori* d'ordre mathématique : on suppose que l'essentiel au sens de l'Analyse des données est bien l'essentiel au sens de l'économiste, ce qui peut être discuté.

Les premiers résultats obtenus ici laissent penser que la méthode peut être retenue et approfondie. Un point théorique particulièrement important concernerait la projection des facteurs principaux : il serait certainement préférable de remplacer l'extrapolation linéaire simple par une technique de projection sous contraintes qui conserverait aux vecteurs projetés les propriétés essentielles des facteurs principaux (orthogonalité et centrage).

Enfin, nous n'avons pas testé l'utilisation conjointe des méthodes structurelles et de la prévision à l'aide de l'AFC (cf. § 3.2) : cette direction reste également à approfondir.

De toute façon, nous pensons que la démarche adoptée —aborder en parallèle théorie et pratique— est indispensable dans ce type de problème : nous avons voulu montrer ici que les données ne sont pas seulement utilisables à des fins de "test assez peu significatif" . . .

RÉFÉRENCES

La Pratique classique

- [1] M. BACHARACH. — “Estimating non negative matrices from marginal data”. *International Economic Review*, 1965, 6 (3), 294-310.
- [2] J. BENARD. — “Réseau des échanges internationaux et planification ouverte”. *Economie Appliquée*, Avril-Juin 1963, 16, 249-276.
- [3] H. CAUSSINUS. — “Contribution à l'analyse statistique des tableaux de corrélation”. *Annales Fac. Sciences, Université de Toulouse*, 1965, 29, 77-182.
- [4] C.W. CHURCHMAN, R.L. ACKOFF, E.L. ARNOFF. — “Eléments de recherche opérationnelle”. Dunod, Paris, 1960, 261-275.
- [5] G.B. DANTZIG. — “Applications et prolongements de la programmation linéaire”. Dunod, Paris, 1966, 195-210.
- [6] W.E. DEMING, F.F. STEPHAN. — On a least squares adjustment of a sampled frequency table when the expected marginal totals are known”. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1940, 11, 427-444.
- [7] P.H. DERYCKE, B. BOBE. — “Projection des échanges extérieurs et balances des paiements”. *Economica*, Paris, 1975.
- [8] M. FRECHET. — “Les tableaux de corrélation et les programmes linéaires”. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 1957, 25 (1/3), 23-40.
- [9] M. FRECHET. — “Sur les tableaux dont les marges et les bornes sont données”. *R.I.I.S.*, 1960, 28 (1/2), 10-32.
- [10] D. FRIEDLANDER. — “A technique for estimating a contingency table given the marginal totals”. *Journal Royal Stat. Soc.*, 1961, Séries A, 123, part 3, 412-420.

- [11] F. FROMENT, J. ZIGHERA. — “La structure du commerce mondial. Analyse et projections. Application de la formule de Léontief-Strout simplifiée”. *Conférence Européenne de la Société d’Econométrie*, Zürich, Sept 1964.
- [12] R. FROMENT, J. ZIGHERA. — “Une méthode d’analyse de l’évolution et de projection des structures et son application au commerce mondial”. *Cahiers d’Econométrie*, 1965, 8, 19-36.
- [13] A. GABUS, M. BORLIN, C. VELAY. — “Forecasting technical coefficients” in “Applications of Input-Output Analysis”, North Holland, Amsterdam, 1972, 331-345.
- [14] C.T. IRELAND, H.H. KU, S. KULLBACK. — “Symetry and marginal homogeneity of an $r \times r$ contingency table”. *Journal of the American Statistical Association*, 1969, 64, 1323-1341.
- [15] C.T. IRELAND, S. KULLBACK. — “Minimum discrimination information estimation”. *Biometrics*, 1968, 24, 707-713.
- [16] C.T. IRELAND, S. KULLBACK. — “Contingency tables with given marginals” *Biometrika*, 1968, 55, 179-188.
- [17] A. KOUEVI. — “Essai d’application prospective de la méthode RAS au commerce international”. Centre d’étude de la prospection économique à moyen et long terme (CEPREL), Paris, 23/03/65.
- [18] A. KOUEVI, M. FLORENZANO. — “Etude d’une méthode de projection du réseau des échanges internationaux”. CEPREL, Paris, 05/07/63.
- [19] S. KULLBACK. — “Information theory and applications”. Wiley, New York. 1959. Dover Publ., New York, 1968.
- [20] W. LEONTIEF, A. STROUT. — “Multiregional Input-Output Analysis”. in “Structural interdependence and economic development”. T. BARNA (ed.). Mac Millan, Londres, 1963.
- [21] W. LEONTIEF, A. STROUT. — “Multiregional Input-Output Analysis”. in “Input-Output Economics”. W. LEONTIEF (ed.), Oxford Univ. Press, New York, 1966, 223-257.
- [22] C. MACCIA, P. MAITRE, E. STEMMELEN. — “Contamination par la chaîne alimentaire. Prévision des échanges agricoles et calcul des doses délivrées. Le cas du blé en France”. Rapport Commissariat Energie Atomique, 1977, à paraître.
- [23] B. MARIN-CURTOUD. — “Sur les structures des tableaux d’échanges internationaux”. CEPREL, Paris, 22/05/64.
- [24] B. MARIN-CURTOUD. — “Les modèles prévisionnels des réseaux d’échanges internationaux et leur structure”. CEPREL, Paris, 23/03/65.

- [25] J.C. MILLERON. — “Recherche des extrêmes de fonctions”. (Annexe E. MALINVAUD [43]), 315-329.
- [26] A. NAGY. — “Internal and international consistency of foreign trade estimations”, in “Applications of Input-Output Analysis”, North-Holland, Amsterdam, 1972, 190-207.
- [27] J. PAELINCK. — “Recherches récentes en matière de modèles d’exploration”, *Cahiers d’Econométrie*, 1965, 8, 37-65.
- [28] K.R. POLENSKE. — “The implementation of a multiregional input-output model for the United States”, in “Applications of Input-Output Analysis”, North-Holland, Amsterdam, 1972, 171-189.
- [29] K.R. POLENSKE. — “A multiregional input-output model for the United States”. Harvard Economic Research Project, EDA Report, Dec. 1970; 21.
- [30] F.F. STEPHAN. — “An iterative methode of adjusting sample frequency tables when expected marginal total are known”. *Annals of Math. Stat.*, 1942, 13, 168-178.
- [31] R. STONE, J.A.C. BROWN. — “A long-term growth model for British economy” in “Europe’s future in figures”, North-Holland, London, 1962, 287-310.
- [32] R. TEEKENS. — “A note on the consistency of some international trade-flow models”, ECE, Genève 1970.
- [33] H. THEIL. — “Applied economic forecasting”. North-Holland, Amsterdam, 1966.
- [34] P. THIONET. — “L’ajustement des résultats des sondages sur ceux des dénombrements”. *Revue de l’Institut International de Statistique*, 1959, 27 (1/3), 8-25.
- [35] P. THIONET. — “Sur le remplissage d’un tableau à double entrée”. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, Oct. 1961, 102, 331-345.
- [36] P. THIONET. — “Sur la théorie des tableaux dont les marges sont connues”. Note interne du Service des Etudes Economiques et Financières (SEEF, Ministère des Finances), Paris, 02/09/63.
- [37] P. THIONET. — “Note sur un problème posé par la méthode RAS”. S.E.E.F., Paris, 03/09/63.
- [38] P. THIONET. — “Note sur le remplissage d’un tableau à double entrée”. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, Oct. 1964, 105, 228-247.
- [39] P. THIONET. — “Construction et reconstruction de tableaux statistiques”. INSEE, Nantes, 23/25 avril 1975. Journées d’étude sur les problèmes d’analyse et d’ajustement de tableaux statistiques — Université Paris IX Dauphine, Travaux du Laboratoire de Statistique.

Citations et Données

- [40] J. ATTALI, M. GUILLAUME. — “L’anti-économique”. P.U.F., Paris, 1975, p. 86.
- [41] R. BARRE. — “Economie politique”. P.U.F., Paris, 1958, Tome 2, p. 524-525.
- [42] P. DELATTRE. — “Système, structure, fonction, évolution”. Maloine-Doin, Paris, 1971.
- [43] E. MALINVAUD. — “Leçons de théorie microéconomique”. Dunod, Paris, 1975.
- [44] A. PEYREFITTE. — “Le mal français”. Plon, Paris, 1976.
- [45] L. STOLERU. — “L’équilibre et la croissance économique”. Dunod, Paris, 1973, p. 55.
- [46] “Annuaire Statistique des Nations-Unies — Année 1975”. New York, 1976. 438-441.
- [47] “Annuaire Statistique des Nations-Unies — Année 1971”. New York, 1972, 390-395.
- [48] “Rapport sur les comptes de la Nation de l’année 1974”. Ministère de l’Economie et des Finances. INSEE, Paris, 1975.

Analyse des données

- [49] M.S. BARTLETT. — The effect of standardization of an approximation in factor analysis”. *Biometrika*, 1951, 38, 337-344.
- [50] J.P. BENZECRI et collaborateurs. — “L’analyse des données”. Dunod, Paris, 1973, tome I : “La taxinomie”.
- [51] J.P. BENZECRI et collaborateurs. — “L’analyse des données”, tome 2 : “L’analyse des correspondances”.
- [52] J.M. BRAUN. — “Etude des séries chronologiques multiples par l’analyse des données”. Rapport C.E.A. R 4561, Paris, 1974.
- [53] J. BRENOT, P. CAZES, N. LACOURLY. — “Pratique de la régression : qualité et protection”. *Cahiers du BURO*, 1975, 23.
- [54] F. CAILLIEZ et J.P. PAGES. — “Introduction à l’analyse des données”. Société de Mathématiques Appliquées et de Sciences Humaines (SMASH), Paris, 1976.
- [55] P. CAZES, A. BAUMERDER, S. BONNEFOUS, J.P. PAGES. — “Codage et analyse des tableaux logiques. Introduction à la pratique des variables qualitatives”. *Cahiers du BURO*, 1977, 27.

- [56] Y. ESCOUFIER. — “Echantillonnage dans une population de variables aléatoires réelles”. Thèse de Doctorat d’Etat, Université de Montpellier, 1970.
- [57] L. LEBART et J.P. FENELON. — “Statistique et informatique appliquées”. Dunod, Paris, 2^{ème} édition, 1973.
- [58] J.P. MAILLES, D. MAILLES, S. BONNEFOUS. — “Analyse des données et A.P.L. : techniques, bibliothèque, exemples”. Rapport C.E.A. R 4573, Paris, 1976.
- [59] J.P. PAGES, Y. ESCOUFIER, P. CAZES. — “Opérateurs et analyse des tableaux à plus de deux dimensions”. *Cahiers du BUR0*, 1976, 25.