CAHIERS DU BURO

YVES POUPARD

Dénombrement de certaines applications multivoques et étude d'une classe de problèmes d'échantillonnage apparentés au problème dit du collecteur de coupons

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 26 (1976), p. 3-49
<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1976__26__3_0>

DÉNOMBREMENT DE CERTAINES APPLICATIONS MULTIVOQUES ET ÉTUDE D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES D'ÉCHANTILLONNAGE APPARENTÉS AU PROBLÈME DIT DU COLLECTEUR DE COUPONS

Yves POUPARD

Le thème principal de l'article est l'étude des problèmes de calcul des probabilités que l'on peut rencontrer lorsque l'on se propose de recouvrir dans une proportion donnée une partie spécifiée d'un ensemble au moyen d'échantillons de taille fixée constitués au hasard.

Ces problèmes, généralisant celui qui est souvent désigné sous le nom de "problème du collecteur de coupons" (collector's problem) et qui correspond au cas particulier où les échantillons sont des singletons, sont traités dans la section II.

Dans la section I, paragraphes 1 à 3, on expose les méthodes combinatoires nécessaires à ce traitement et l'on établit les formules énumératives correspondantes. Au paragraphe 2, on est conduit à introduire des nombres qui constituent une extension des nombres de Stirling.

Au cours des paragraphes 4 à 6, on poursuit l'étude de ces nombres en examinant comment se transposent, en ce qui les concerne, les propriétés classiques des nombres de Stirling.

Les paragraphes 7 et 8 sont consacrés à quelques problèmes de dénombrement voisins des précédents.

PRELIMINAIRES

Conformément à la notation dite "de Vandermonde", k étant un entier positif, nous désignons par $(x)_k$ le polynôme factoriel en x d'ordre k, c'est-à-dire le produit de k facteurs décroissants d'unité en unité à partir de x :

$$(x)_k = \prod_{j=1}^{k} (x - j + 1),$$

et nous posons, par convention : $(x)_o = 1$.

Si F est une fonction numérique d'une variable réelle x, nous appelons différence finie d'ordre 1 de $F(x)$ et nous notons $\Delta F(x)$ ou $\Delta^1 F(x)$ la différence $F(x+1) - F(x)$:

$$\Delta^1 F(x) = \Delta F(x) = F(x+1) - F(x),$$

et pour tout entier $l \geqslant 2$, nous appelons différence finie d'ordre l de $F(x)$ et nous notons $\Delta^l F(x)$ la différence finie d'ordre 1 de $\Delta^{l-1} F(x)$:

$$\Delta^l F(x) = \Delta\,[\Delta^{l-1} F(x)].$$

Enfin, nous convenons de poser $\Delta^\circ F(x) = F(x)$.

Ainsi, pour tout entier naturel l, on a l'égalité :

$$\Delta^l F(x) = \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j}\, C_l^j\, F(x+j).$$

En particulier, pour $x = 0$, on a :

$$(\Delta^l F(x))_{x=0} = \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j}\, C_l^j\, F(j),$$

soit encore (en posant $i = l - j$) :

$$(\Delta^l F(x))_{x=0} = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i\, C_l^i\, F(l-i).$$

Lorsque une différence finie sera prise par rapport à une variable autre que x, le nom de cette variable sera indiquée en indice inférieur après le symbole Δ.

Ainsi : $\quad \Delta F(x, y) = F(x+1, y) - F(x, y),$

mais : $\quad \Delta_y F(x, y) = F(x, y+1) - F(x, y).$

Nous rappelons les quelques résultats suivants, que nous aurons à utiliser :

1/ Si $F(x)$ est un polynôme en x de degré n, $\Delta F(x)$ est un polynôme en x de degré $n-1$ et plus généralement, pour tout entier l de 1 à n, $\Delta^l F(x)$ est un polynôme en x de degré $n-l$; en particulier $\Delta^n F(x)$ est une constante et par suite, pour tout entier $l > n$, on a $\Delta^l F(x) = 0$.

2/ On a : $$\Delta [(x)_k] = k\,(x)_{k-1}.$$

Plus généralement, pour tout entier l de 1 à k, on a :

$$\Delta^l [(x)_k] = (k)_l\ (x)_{k-l}.$$

En particulier on a :

$$\Delta^k\ [(x)_k] = k!$$

et par suite, pour tout entier $l > k$, on a $\Delta^l\ [(x)_k] = 0$.

Il en résulte que :

$$(\Delta^l\ [(x)_k])_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq l \\ l\,! & \text{pour } k = l \end{cases}$$

3/ De même, pour tout entier l de 1 à k, on a :

$$\Delta^l\ [(c+x)_k] = (k)_l\ (c+x)_{k-l}.$$

4/ Si k, p et x sont des entiers non-négatifs, on a :

$$\Delta\ [C^k_{p+x}] = C^{k-1}_{p+x},$$

et plus généralement, pour tout entier naturel l, on a :

$$\Delta^l\ [C^k_{p+x}] = C^{k-l}_{p+x}.$$

Il est à noter que ces relations restent valides pour $k < l$ en raison des conventions habituelles selon lesquelles on pose:

$$C^o_n = 1 \text{ et } C^m_n = 0 \text{ pour } n \geqslant 0 \text{ et } m < 0.$$

5/ Si $x \notin \{c, c-1\}$, on a:

$$\Delta\ \left[\frac{1}{c-x}\right] = \frac{1}{(c-x)_2},$$

et plus généralement, pour tout entier naturel l,

si $x \notin \{c - i \mid i$ entier $; 0 \leqslant i \leqslant l\}$, on a :

$$\Delta \left[\frac{(l-1)!}{(c-x)_l}\right] = \frac{l!}{(c-x)_{l+1}}$$

et par suite :

$$\Delta^l \left[\frac{1}{c-x}\right] = \frac{l!}{(c-x)_{l+1}} .$$

6/ Pour tout entier naturel l, si $x \notin \{c - i \mid i$ entier $; 0 \leqslant i \leqslant l\}$, on a :

$$\Delta^l \left[\frac{1}{(c-x)^2}\right] = \frac{l!}{(c-x)_{l+1}} \sum_{i=0}^{l} \frac{1}{c-x-i} .$$

Cette formule, triviale pour $l = 0$, peut se démontrer facilement par récurrence.

7/ Pour tout entier naturel l, si $x \notin \{c - i \mid i$ entier $; 0 \leqslant i \leqslant l\}$, on a :

$$\Delta^l \left[\frac{2}{(c-x)^3}\right] = \frac{l!}{(c-x)_{l+1}} \left[\sum_{i=0}^{l} \frac{1}{(c-x-i)^2} + \left(\sum_{i=0}^{l} \frac{1}{c-x-i}\right)^2\right]$$

Comme la précédente, cette formule, triviale pour $l = 0$, peut se démontrer facilement par récurrence.

SECTION I

DEFINITION ET DENOMBREMENT DE CERTAINES APPLICATIONS MULTIVOQUES.

Soient D un ensemble dit *ensemble de départ,* de cardinal d,
A un ensemble dit *ensemble d'arrivée,* de cardinal a,
et α un entier positif.

1. DEFINITION ET DENOMBREMENT DES α-APPLICATIONS.

1.1 Définition des α-applications – Image d'un élément – Image de l'ensemble de départ.

Nous appelons *α-application de l'ensemble de départ D dans l'ensemble d'arrivée A* toute relation binaire définie sur le produit cartésien $D \times A$ qui est telle que chaque élément de D soit en relation avec exactement α éléments de A.

Cette définition implique que l'entier α soit au plus égal au cardinal a de l'ensemble A.

Pour α égal à 1, la notion d'α-application se confond avec celle d'application.

Une α-application de D dans A étant donnée, nous appelons image d'un élément de D le sous-ensemble de A constitué des α éléments de A qui sont en relation avec cet élément, et nous appelons image de l'ensemble D la réunion des images des d éléments de D.

1.2 Dénombrement des α-applications.

Le nombre des α-applications de D dans A ne dépend évidemment que des entiers α, d et a et non de la nature des éléments de D et de A. Aussi pouvons-nous désigner ce nombre par $Q_\alpha(d, a)$.

Compte tenu de ce que l'existence d'une α-application de D dans A implique que l'on ait $\alpha \leqslant a$, nous pouvons déjà écrire :

$$Q_\alpha(d, a) = 0 \text{ pour } a < \alpha \qquad [Q\text{-}0]$$

Il ne reste à considérer que le cas où l'on a : $a \geqslant \alpha$. On vérifie aisément qu'alors on a la relation :

$$\boxed{Q_\alpha\ (d\,,a) = (C_a^\alpha)^d} \qquad [Q\ ]$$

En effet, pour définir une α-application de D dans A, il suffit de choisir successivement l'image de chacun des d éléments de D. Ces d choix successifs sont indépendants et chacun d'eux peut s'effectuer de C_a^α manières distinctes. Nous pouvons remarquer qu'en particulier, pour $\alpha = a$, on obtient :

$$Q_\alpha\ (d\,,\alpha) = 1 \qquad [Q\text{-}1]$$

Nous pouvons remarquer aussi que la relation $[Q]$ reste formellement exacte dans le cas où l'on a : $a < \alpha$, puisque l'on sait que pour $a < \alpha$, on a $C_a^\alpha = 0$.

2. DEFINITION ET DENOMBREMENT DES α-APPLICATIONS COUVRANTES.

2.1 Définition des α-applications couvrantes.

Nous disons qu'une α-application de l'ensemble de départ D dans l'ensemble d'arrivée A est *couvrante* si tout élément de A est en relation avec au moins un élément de D.

En d'autres termes, une α-application de D dans A est couvrante si l'image de l'ensemble D est l'ensemble A lui-même.

Cette définition implique que le produit αd soit au moins égal à a.

Pour α égal à 1, la notion d'α-application couvrante se confond avec celle d'application surjective.

2.2 Dénombrement des α-applications couvrantes.

Comme celui des α-applications quelconques de D dans A, le nombre des α-applications couvrantes de D dans A ne dépend évidemment que des entiers α, d et a et non de la nature des éléments de D et de A. Aussi pouvons-nous désigner ce nombre par $S_\alpha\ (d\,,a)$.

Compte tenu de ce que l'existence d'une α-application de D dans A, et a fortiori celle d'une α-application couvrante, implique que l'on ait $\alpha \leqslant a$, nous pouvons d'abord écrire :

$$S_\alpha\ (d\,,a) = 0 \text{ pour } a < \alpha \qquad [S\text{-}01]$$

Compte tenu de ce que l'existence d'une α-application couvrante de D dans A implique aussi que l'on ait $\alpha d \geqslant a$, nous pouvons ensuite écrire :

$$S_\alpha\ (d\,,a) = 0 \text{ pour } a > \alpha d \qquad [S\text{-}02]$$

Il ne resterait donc à considérer que le cas où l'on a à la fois $a \geqslant \alpha$ et $a \leqslant \alpha d$.

En fait, dans la suite de ce sous-paragraphe, nous supposerons seulement que l'on a : $a \geqslant \alpha$, sans supposer en outre $a \leqslant \alpha d$, et nous allons démontrer la relation :

$$\boxed{\text{Pour } a \geqslant \alpha, S_\alpha (d, a) = \sum_{i=0}^{a-\alpha} (-1)^i C_a^i (C_{a-i}^\alpha)^d} \qquad [S]$$

Toute α-application de D dans A peut être considérée comme une α-application couvrante de D dans un sous-ensemble de A, à savoir le sous-ensemble de A qui est l'image de l'ensemble D.

En considérant la partition de l'ensemble des α-applications de D dans A obtenue en rangeant dans une même classe toutes les α-applications pour lesquelles le cardinal de l'image de D a une même valeur i

$$[\alpha \leqslant i \leqslant \min (a, \alpha d)],$$

on obtient la relation :

$$Q_\alpha (d, a) = \sum_{i=\alpha}^{\min (a, \alpha d)} C_a^i S_\alpha (d, i) \qquad [Q \leftarrow S]$$

En effet, pour définir une α-application de D dans A pour laquelle le cardinal de l'image de D est égal à i, il suffit de choisir un sous-ensemble I de A de cardinal i, ce qui peut se faire de C_a^i manières distinctes, puis de définir une α-application couvrante de D dans I, ce qui peut se faire de $S_\alpha (d, i)$ manières distinctes.

Compte tenu de ce que l'on a $S_\alpha (d, i) = 0$ pour $i > \alpha d$, la relation $[Q \leftarrow S]$ peut encore s'écrire ;

$$Q_\alpha (d, a) = \sum_{i=\alpha}^{a} C_a^i S_\alpha (d, i) \qquad [Q \leftarrow S']$$

De la relation $[Q \leftarrow S']$, donnant l'expression du nombre $Q_\alpha (d, a)$ en fonction des $a - \alpha + 1$ nombres $S_\alpha (d, \alpha), S_\alpha (d, \alpha + 1), \ldots, S_\alpha (d, a)$, on déduit la relation $[S \leftarrow Q']$ donnant inversement l'expression du nombre $S_\alpha (d, a)$ en fonction des $a - \alpha + 1$ nombres $Q_\alpha (d, \alpha), Q_\alpha (d, \alpha + 1), \ldots, Q_\alpha (d, a)$:

$$S_\alpha (d, a) = \sum_{j=\alpha}^{a} (-1)^{a-j} C_a^j Q_\alpha (d, j) \qquad [S \leftarrow Q']$$

En posant $i = a - j$ et compte tenu de l'égalité $C_a^j = C_a^{a-j}$, la relation $[S \leftarrow Q']$ peut encore s'écrire :

$$S_\alpha (d, a) = \sum_{i=0}^{a-\alpha} (-1)^i C_a^i Q_\alpha (d, a-i) \qquad [S \leftarrow Q]$$

La relation $[S]$ se déduit de la relation $[S \leftarrow Q]$ en y remplaçant les nombres $Q_\alpha (d, a-i)$ par leurs expressions analytiques $(C_{a-i}^\alpha)^d$

Remarques :

1. Pour $a = \alpha$, on a évidemment, comme le confirme la relation $[S]$:

$$S_\alpha (d, \alpha) = 1 \qquad [S\text{-}1]$$

2. Compte tenu de la relation $[S\text{-}02]$, la relation $[S]$ donne l'identité :

$$\boxed{\text{Pour } a > \alpha d, \sum_{i=0}^{a-\alpha} (-1)^i C_a^i (C_{a-i}^\alpha)^d = 0} \qquad [A\text{-}0]$$

3. Compte tenu de ce que l'on a $C_{a-i}^\alpha = 0$ pour $\alpha > a - i$, c'est-à-dire pour $i > a - \alpha$, la relation $[S]$ peut encore s'écrire :

$$\boxed{S_\alpha (d, a) = \sum_{i=0}^{a} (-1)^i C_a^i (C_{a-i}^\alpha)^d} \qquad [S']$$

Cette relation $[S']$ reste formellement exacte dans le cas où l'on a : $a < \alpha$ puisque pour tout entier naturel i, on a alors $C_{a-i}^\alpha = 0$.

3. LES α-APPLICATIONS PARTIELLEMENT COUVRANTES.

Soit C un sous-ensemble spécifié de cardinal c de l'ensemble d'arrivée A $(0 \leqslant c \leqslant a)$.

Nous disons qu'une α-application de D dans A est *C-couvrante* si tout élément de C appartient à l'image de D pour cette application α-application.

Notons que cette notion d'α-application C-couvrante se confond dans le cas particulier où C est l'ensemble vide $(c = 0)$ avec celle d'α-application quelconque et dans le cas particulier où C est l'ensemble A lui-même $(c = a)$ avec celle d'α-application couvrante.

Désignons par $\pi_\alpha (d, a, c)$ le nombre des α-applications C-couvrantes de D dans A.

Pour $a < \alpha$ ou pour $c > \alpha d$, on a évidemment $\pi_\alpha (d, a, c) = 0$.

Pour $\alpha \leqslant a$ et $\alpha d \geqslant c$, nous allons établir les trois relations ci-après :

$$\pi_\alpha (d , a , c) = \sum_{i=\max(\alpha,c)}^{\min(a,\alpha d)} C_{a-c}^{i-c} \, S_\alpha (d , i) \qquad [\pi \leftarrow S]$$

$$\pi_\alpha (d , a , c) = \sum_{j=0}^{\min(c,a-\alpha)} (-1)^j \, C_c^j \, Q_\alpha (d , a - j) \qquad [\pi \leftarrow Q]$$

$$\pi_\alpha (d , a , c) = \sum_{j=0}^{c} (-1)^j \, C_c^j \, (C_{a-j}^{\alpha})^d \qquad [\pi]$$

La relation $[\pi \leftarrow S]$ s'obtient en considérant la partition de l'ensemble des α-applications C-couvrantes de D dans A obtenue en rangeant dans une même classe de la partition toutes les α-applications C-couvrantes pour lesquelles le cardinal de l'image de D a une même valeur i et en remarquant que C est alors nécessairement un sous-ensemble de cette image de D (par suite on a : $i \geqslant \max (\alpha , c)$.)

En raison de la convention habituelle selon laquelle on pose $C_n^m = 0$ pour $n \geqslant 0$ et $m < 0$ et de ce que l'on a $S_\alpha (d , i) = 0$ pour $i > \alpha d$, la relation $[\pi \leftarrow S]$ peut encore s'écrire :

$$\pi_\alpha (d , a , c) = \sum_{i=\alpha}^{a} C_{a-c}^{i-c} \, S_\alpha (d , i) \qquad [\pi \leftarrow S']$$

La relation $[\pi \leftarrow Q]$ se déduit de $[\pi \leftarrow S']$ en utilisant les deux égalités :

$$C_{a-c}^{i-c} = \sum_{j=0}^{\min(c,a-i)} (-1)^j \, C_c^j \, C_{a-j}^{i}$$

$$\sum_{i=\alpha}^{a-j} C_{a-j}^{i} \, S_\alpha (d , i) = Q_\alpha (d , a - j) \qquad \text{(d'après } [Q \leftarrow S']\text{)},$$

qui permettent d'écrire successivement, à partir de $[\pi \leftarrow S']$:

$$\pi_\alpha (d , a , c) = \sum_{i=\alpha}^{a} \left(\sum_{j=0}^{\min(c,a-i)} (-1)^j \, C_c^j \, C_{a-j}^{i} \right) S_\alpha (d , i)$$

$$= \sum_{j=0}^{\min(c,a-\alpha)} (-1)^j \, C_c^j \left(\sum_{i=\alpha}^{a-j} C_{a-j}^{i} \, S_\alpha (d , i) \right)$$

$$\pi_\alpha\,(d\,,a\,,c) = \sum_{j=0}^{\min(c,a-\alpha)} (-1)^j\, C_c^j\, Q_\alpha\,(d\,,a-j).$$

(La première des deux égalités utilisées :

$$C_{a-c}^{i-c} = \sum_{j=0}^{\min(c,a-i)} (-1)^j\, C_c^j\, C_{a-j}^i$$

peut se démontrer comme suit :

$$C_{a-c}^{i-c} = (\Delta^c\ [C_{a-c+x}^i])_{x=0}$$

$$= \sum_{j=0}^{c} (-1)^j\, C_c^j\, C_{a-\cancel{c}+\cancel{c}-j}^i$$

$$= \sum_{j=0}^{\min(c,a-i)} (-1)^j\, C_c^j\, C_{a-j}^i \text{ car pour } j > a-i, \text{ on a } C_{a-j}^i = 0).$$

Enfin, la relation $[\pi]$ se déduit de $[\pi \leftarrow Q]$ en remplaçant $Q_\alpha\,(d\,,a-j)$ par son expression analytique $(C_{a-j}^\alpha)^d$ et en utilisant le fait que pour $j > a-\alpha$, on a $C_{a-j}^\alpha = 0$.

Il est à noter que la relation $[\pi]$ reste valide pour $a < \alpha$ ou pour $c > \alpha d$.

En effet, pour $a < \alpha$ ou pour $c > \alpha d$, on a :

$$\sum_{j=0}^{c} (-1)^j\, C_c^j\, (C_{a-j}^\alpha)^d = 0.$$

(Pour $a < \alpha$, cette égalité résulte évidemment de ce que l'on a alors $C_{a-j}^\alpha = 0$ et pour $c > \alpha d$, elle résulte de ce que l'expression $\sum_{j=0}^{c} (-1)^j C_c^j (C_{a-j}^\alpha)^d$ est la valeur pour $x = 0$ de la différence finie d'ordre c (par rapport à x) de l'expression $\left[\dfrac{(a-c+x)_\alpha}{\alpha\,!}\right]^d$ qui est un polynôme de degré αd en x).

On peut vérifier aussi que chacune des trois relations $[\pi \leftarrow S]$, $[\pi \leftarrow Q]$ et $[\pi]$ montre que, comme il se doit, on a :

$$\begin{cases} \pi_\alpha\,(d\,,a\,,0) = Q_\alpha\,(d\,,a) & [Q \leftarrow \pi] \\ \pi_\alpha\,(d\,,a\,,a) = S_\alpha\,(d\,,a) & [S \leftarrow \pi] \end{cases}$$

Notons encore que, f désignant un entier compris entre 0 et c, on a la relation :

$$\sum_{k=f}^{c} C_{c-f}^{k-f} \; \pi_\alpha \,(d\,,\,a-c+k\,,\,k) = \pi_\alpha \,(d\,,\,a\,,\,f) \qquad [\pi \leftarrow \pi]$$

Pour s'en assurer, il suffit de considérer un sous-ensemble spécifié F, de cardinal f, du sous-ensemble C de A $(0 \leqslant f \leqslant c)$ et de répartir les α-applications F-couvrantes de D dans A selon les valeurs k du cardinal de l'intersection de l'image de D avec C.

Compte tenu de la relation $[\pi]$, la relation $[\pi \leftarrow \pi]$ conduit à l'identité :

$$\sum_{k=f}^{c} C_{c-f}^{k-f} \left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, C_k^i \, (C_{a-c+k-i}^{\alpha})^d \right] = \sum_{j=0}^{f} (-1)^j \, C_f^j \, (C_{a-j}^{\alpha})^d$$

| L'établissement direct de cette identité nécessite une suite assez longue de calculs.

On peut d'abord écrire :

$$\sum_{k=f}^{c} C_{c-f}^{k-f} \left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, C_k^i \, (C_{a-c+k-i}^{\alpha})^d \right]$$

$$= \sum_{k=f}^{c} C_{c-f}^{k-f} \left[\sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \, C_k^l \, (C_{a-c+l}^{\alpha})^d \right] \text{(avec } l = k-i\text{)}$$

$$= \sum_{l=0}^{c} (-1)^l \left[\sum_{k=\max(f,l)}^{c} (-1)^k \, C_{c-f}^{k-f} \, C_k^l \right] (C_{a-c+l}^{\alpha})^d,$$

puis :

$$\sum_{k=\max(f,l)}^{c} (-1)^k \, C_{c-f}^{k-f} \, C_k^l$$

$$= \sum_{k=f}^{c} (-1)^k \, C_{c-f}^{k-f} \, C_k^l \text{ (car } C_k^l = 0 \text{ pour } k < l\text{)}$$

$$= \sum_{u=0}^{c-f} (-1)^{f+u} \, C_{c-f}^{u} \, C_{f+u}^{l} \quad \text{(avec } u = k-f\text{)}$$

$$= (-1)^c \sum_{u=0}^{c-f} (-1)^{(c-f)-u} \, C_{c-f}^{u} \, C_{f+u}^{l}$$

$$= (-1)^c \sum_{u=0}^{c-f} (-1)^{(c-f)-u}\, C_{c-f}^u\, C_{f+u}^l$$

$$= (-1)^c\, (\Delta^{c-f}\, [C_{f+x}^l\,])_{x=0}$$

$$= (-1)^c\, C_f^{l-(c-f)} = (-1)^c\, C_f^{c-l},$$

et enfin, compte tenu de ce qui précède :

$$\sum_{l=0}^{c} (-1)^l \left[\sum_{k=\max(f,l)}^{c} (-1)^k\, C_{c-f}^{k-f}\, C_k^l\right] (C_{a-c+l}^{\alpha})^d$$

$$= \sum_{l=0}^{c} (-1)^{c-l}\, C_f^{c-l}\, (C_{a-c+l}^{\alpha})^d$$

$$= \sum_{j=0}^{c} (-1)^j\, C_f^j\, (C_{a-j}^{\alpha})^d \qquad (\text{avec } j = c-l)$$

$$= \sum_{j=0}^{f} (-1)^j\, C_f^j\, (C_{a-j}^{\alpha})^d$$

(car $C_f^j = 0$ pour $j > f$)]

Il peut être intéressant, à l'usage du calcul des probabilités, de déterminer le nombre, que nous noterons $\Gamma_\alpha(d, a, c, k)$, des α-applications de D dans A qui sont telles que le cardinal de l'intersection de l'image de D et du sous-ensemble spécifié C de A soit égal à k $(0 \leqslant k \leqslant c)$.

Pour $k + a - c < \alpha$ (c'est-à-dire pour $k < \alpha - a + c$) ou pour $k > \alpha d$, on a évidemment : $\Gamma_\alpha\,(d, a, c, k) = 0$.

Et pour $\max(0, \alpha - a + c) \leqslant k \leqslant \min(c, \alpha d)$, on s'assure facilement que l'on a :

$$\Gamma_\alpha\,(d, a, c, k) = C_c^k\, \pi_\alpha\,(d, a-c+k, k) \qquad [\Gamma \leftarrow \pi]$$

soit, compte tenu de $[\pi]$:

$$\Gamma_\alpha\,(d, a, c, k) = C_c^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j\, C_k^j\, (C_{a-c+k-j}^{\alpha})^d,$$

soit encore, en posant $l = k - j$:

$$\Gamma_\alpha\,(d, a, c, k) = C_c^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l}\, C_k^l\, (C_{a-c+l}^{\alpha})^d \qquad [\Gamma]$$

Il est à noter que la relation [Γ] reste valide pour $k < \alpha - a + c$ ou pour $k > \alpha d$.

En effet, pour $k < \alpha - a + c$ ou pour $k > \alpha d$, on a :

$$C_c^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l (C_{a-c+l}^{\alpha})^d = 0.$$

(Pour $k < \alpha - a + c$, cette égalité résulte de ce que l'on a alors $C_{a-c+l}^{\alpha} = 0$ et pour $k > \alpha d$, elle résulte de ce que l'expression $C_c^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l (C_{a-c+l}^{\alpha})^d$ est la valeur pour $x = 0$ de la différence finie d'ordre k (par rapport à x) de $C_c^k \left[\frac{(a-c+x)_\alpha}{\alpha\,!}\right]^d$ qui est un polynôme de degré αd en x).

On peut vérifier aussi que, comme il se doit, on a :

$$\begin{cases} \Gamma_\alpha(d, a, c, 0) = Q_\alpha(d, a-c) \text{ (pour } a > c) \\ \Gamma_\alpha(d, a, c, c) = \pi_\alpha(d, a, c) & [\pi \leftarrow \Gamma] \\ \displaystyle\sum_{k=\max(0,\alpha-a+c)}^{\min(c,\alpha d)} \Gamma_\alpha(d, a, c, k) = \sum_{k=0}^{c} \Gamma_\alpha(d, a, c, k) = Q_\alpha(d, a) & [Q \leftarrow \Gamma] \end{cases}$$

Il peut aussi être intéressant de considérer le nombre, que nous noterons $\Sigma_\alpha(d, a, c, m)$ des α-applications de D dans A qui sont telles que le cardinal de l'intersection de l'image de D et du sous-ensemble spécifié C de A soit au moins égal à m $(0 \leqslant m \leqslant c)$.

On peut remarquer que, pour $m \leqslant \max(0, \alpha - a + c)$, on a :

$$\Sigma_\alpha(d, a, c, m) = Q_\alpha(d, a),$$

et que pour $m > \min(c, \alpha d)$, on a :

$$\Sigma_\alpha(d, a, c, m) = 0.$$

Compte tenu du fait que l'on a $\Gamma_\alpha(d, a, c, k) = 0$ pour $k < \alpha - a + c$ et pour $k > \alpha d$, on peut toujours écrire :

$$\Sigma_\alpha(d, a, c, m) = \sum_{k=m}^{c} \Gamma_\alpha(d, a, c, k) \qquad [\Sigma \leftarrow \Gamma]$$

soit en particulier, pour $m = 0$:

$$\Sigma_\alpha (d, a, c, 0) = \sum_{k=0}^{c} \Gamma_\alpha (d, a, c, k) = Q_\alpha (d, a) \qquad [Q \leftarrow \Sigma]$$

et pour $m = c$:

$$\Sigma_\alpha (d, a, c, c) = \Gamma_\alpha (d, a, c, c) = \pi_\alpha (d, a, c) \qquad [\pi \leftarrow \Sigma]$$

Compte tenu de la relation [Γ] qui reste encore valide, comme nous l'avons noté, pour $k < \alpha - a + c$ et pour $k > \alpha c$, la relation [Σ ← Γ] permet d'écrire :

$$\Sigma_\alpha (d, a, c, m) = \sum_{k=m}^{c} C_c^k \left[\sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l (C_{a-c+l}^\alpha)^d \right]$$

ou, en permutant l'ordre des sommations par rapport à k et par rapport à l :

$$\Sigma_\alpha (d, a, c, m) = \sum_{l=0}^{c} (-1)^l \left[\sum_{k=\max(m,l)}^{c} (-1)^k C_c^k C_k^l \right] (C_{a-c+l}^\alpha)^d \qquad [\Sigma]$$

Pour $m \geqslant 1$, on peut aussi écrire :

$$\Sigma_\alpha (d, a, c, m) = \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l} C_c^l C_{c-l-1}^{c-m} (C_{a-c+l}^\alpha)^d + (C_a^\alpha)^d \qquad [\Sigma']$$

ou encore :

$$\Sigma_\alpha (d, a, c, m) = m C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l} C_{m-1}^l \frac{1}{c-l} (C_{a-c+l}^\alpha)^d + (C_a^\alpha)^d \qquad [\Sigma'']$$

La relation [Σ′] se déduit de [Σ] en remarquant que l'on a :

$$C_c^k C_k^l = C_c^l C_{c-l}^{k-l}$$

puisque, pour $l \leqslant m - 1$, on peut écrire successivement :

$$\sum_{k=\max(m,l)}^{c} (-1)^k C_{c-l}^{k-l} = \sum_{k=m}^{c} (-1)^k C_{c-l}^{k-l}$$

$$= (-1)^l \sum_{j=m-l}^{c-l} (-1)^j C_{c-l}^j$$

$$= (-1)^l (-1)^{m-l} C_{c-l-1}^{m-l-1}$$

$$= (-1)^m C_{c-l-1}^{c-m},$$

tandis que, pour $l \geqslant m$, on peut écrire :

$$\sum_{k=\max(m,l)}^{c} (-1)^k C_{c-l}^{k-l} = \sum_{k=l}^{c} (-1)^k C_{c-l}^{k-l}$$

$$= (-1)^l \sum_{j=0}^{c-l} (-1)^j C_{c-l}^j$$

$$= (-1)^l (1-1)^{c-l} = \begin{cases} 0 \text{ pour } l < c \\ (-1)^c \text{ pour } l = c \end{cases}$$

Quant à la relation $[\Sigma'']$, elle se déduit de $[\Sigma']$ en remarquant que l'on a :

$$C_c^l C_{c-l-1}^{c-m} = \frac{m}{c-l} C_c^m C_{m-1}^l$$

Il convient enfin de noter que les relations $[\Sigma]$, $[\Sigma']$ et $[\Sigma'']$ restent encore valides pour $m > \alpha d$ (et aussi, sous réserve pour $[\Sigma']$ et $[\Sigma'']$ que l'on ait toujours $m \geqslant 1$, pour $m < \alpha - a + c$).

4. RELATION DE RECURRENCE PERMETTANT DE CALCULER DE PROCHE EN PROCHE LES NOMBRES $S_\alpha (d, a)$.

Nous nous proposons d'établir la relation de récurrence portant sur le paramètre d et valide pour $a \geqslant \alpha + 1$ et $d \geqslant 2$ écrite ci-dessous :

$$\boxed{S_\alpha (d, a) = C_a^\alpha \left[\sum_{j=0}^{\alpha} C_\alpha^j S_\alpha (d-1, a-j) \right]} \qquad [S \leftarrow S]$$

Jointe aux trois relations $[S\text{-}01]$, $[S\text{-}1]$, $[S\text{-}02']$:

$$\begin{cases} S_\alpha (d, a) = 0 \text{ pour } a < \alpha \\ S_\alpha (d, \alpha) = 1 \\ S_\alpha (1, a) = 0 \text{ pour } a > \alpha \end{cases}$$

grâce auxquelles on peut amorcer la récurrence, la relation $[S \leftarrow S]$ permet de calculer de proche en proche les nombres $S_\alpha\ (d\,,a)$.

A l'occasion de la démonstration de la formule $[S \leftarrow S]$ nous allons introduire le nombre, que nous noterons $S_\alpha^*\ (d\,,a)$, des α-applications couvrantes de D dans A pour lesquelles l'image d'un élément spécifié e_o de D est un sous-ensemble spécifié A_o, de cardinal α, de l'ensemble A.

Les nombres $S_\alpha\ (d\,,a)$ et $S_\alpha^*\ (d\,,a)$ sont liés par la relation :

$$S_\alpha\ (d\,,a) = C_a^\alpha\ S_\alpha^*\ (d\,,a) \qquad [S \leftarrow S^*]$$

En effet pour définir une α-application couvrante de D dans A on peut, après avoir particularisé un élément e_o de D, commencer par choisir le sous-ensemble A_o, de cardinal α, de A que l'on prend pour image de cet élément particularisé e_o, ce qui peut se faire de C_a^α manières distinctes ; ce choix effectué, on est ramené au problème consistant à définir une α-application couvrante de D dans A qui soit telle que l'élément particularisé e_o ait pour image le sous-ensemble A_o choisi, problème qui admet $S_\alpha^*\ (d\,,a)$ solutions distinctes.

On a évidemment :

$$S_\alpha^*\ (d\,,a) = 0 \text{ pour } a < \alpha \qquad [S^*\text{-}01]$$

$$S_\alpha^*\ (d\,,\alpha) = 1 \qquad [S^*\text{-}1]$$

et

$$S_\alpha^*\ (1\,,a) = 0 \text{ pour } a > \alpha \qquad [S^*\text{-}02']$$

et pour $a \geqslant \alpha + 1$ et $d \geqslant 2$, on a la relation :

$$S_\alpha^*\ (d\,,a) = \sum_{j=0}^{\alpha} C_\alpha^j\ S_\alpha\ (d-1\,,a-j) \qquad [S^* \leftarrow S]$$

Pour établir cette relation, considérons l'ensemble $\mathcal{C}$ des α-applications couvrantes de D dans A pour lesquelles l'image de l'élément spécifié e_o est le sous-ensemble spécifié A_0, et les sous-ensembles $\mathcal{C}_o\,,\mathcal{C}_1\,,\ldots,\mathcal{C}_\alpha$ de l'ensemble $\mathcal{C}$ définis comme suit : pour tout j de 0 à α, $\mathcal{C}_j$ est constitué de celles des α-applications appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}$ pour lesquelles le nombre des éléments de A_o qui n'appartiennent pas à la réunion des images des d-1 éléments de D autres que e_o est égal à j.

Les sous-ensembles $\mathcal{C}_o\,,\mathcal{C}_1\,,\ldots,\mathcal{C}_\alpha$ constituent une pseudo-partition de l'ensemble $\mathcal{C}$. (Ce n'est pas nécessairement une vraie partition car il se peut qu'un ou plusieurs des sous-ensembles $\mathcal{C}_j$ soient vides ; en fait on voit que l'on a $\mathcal{C}_j \neq \emptyset$ si et seulement si l'on a :

$$\max\,[0\,,a-\alpha\,(d-1)] \leqslant j \leqslant \min\,[\alpha\,,a-\alpha]).$$

Par conséquent S_α^* (d, a), cardinal de l'ensemble $\mathcal{C}$, est égal à la somme des cardinaux de chacun de ces sous-ensembles.

Or, pour tout j de 0 à α, le cardinal de $\mathcal{C}_j$ est égal à C_α^j S_α $(d-1, a-j)$.

En effet, pour définir une α-application appartenant à $\mathcal{C}_j$, on peut d'abord choisir un sous-ensemble J, de cardinal j, de A_o, ce qui peut se faire de C_α^j manières distinctes, puis, ce choix effectué, définir une α-application couvrante de l'ensemble des d-1 éléments de D autres que e_o dans le complémentaire par rapport à A du sous-ensemble J choisi, ce qui peut se faire de S_α $(d-1, a-j)$ manières distinctes.

La relation $[S \leftarrow S]$ s'obtient évidemment en remplaçant dans $[S \leftarrow S^*]$, S_α^* (d, a) par l'expression donnée par $[S^* \leftarrow S]$.

Remarque :

La relation $[S \leftarrow S^*]$ montre que S_α (d, a) est divisible par C_a^α (pour $a \geqslant \alpha$) et que le quotient de la division de S_α (d, a) par C_a^α est S_α^* (d, a).

Par suite, les nombres S_α^* (d, a) pourraient aussi être commodes à considérer comme intermédiaires dans les calculs numériques.

On déduit immédiatement de la relation $[S \leftarrow S]$ que ces nombres $S_\alpha^*(d, a)$ satisfont à la relation de récurrence suivante, valide pour $a \geqslant \alpha + 1$ et $d \geqslant 2$:

$$S_\alpha^* (d, a) = \sum_{j=0}^{\alpha} C_\alpha^j \, C_{a-j}^\alpha \, S_\alpha^* (d-1, a-j) \qquad [S^* \leftarrow S^*].$$

Jointe aux trois relations $[S^*\text{-}01]$, $[S^*\text{-}1]$ et $[S^*\text{-}02']$ grâce auxquelles on peut amorcer la récurrence, cette relation $[S^* \leftarrow S^*]$ permet de calculer de proche en proche les nombres S_α^* (d, a).

Malheureusement, en raison de la présence des facteurs C_{a-j}^α, le mécanisme des calculs est un peu plus compliqué que celui auquel conduit l'utilisation de la relation $[S \leftarrow S]$.

5. QUELQUES PROPRIETES ENUMERATIVES DES NOMBRES Q_α (d, a) ET S_α (d, a).

5.1.

Q_α (d, a) est le nombre de suites $(A_1, A_2, \ldots, A_d)$ de d termes $A_1, A_2, \ldots, A_d$ où pour tout j de 1 à d, A_j est un sous-ensemble de cardinal α d'un ensemble A de cardinal a.

$S_\alpha(d, a)$ est le nombre de celles des suites $(A_1, A_2, \ldots, A_d)$ qui satisfont en outre à la condition $[A^+]$:

$[A^+]$: Les sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_d$ de l'ensemble A sont tels que tout élément de A appartient à l'un au moins de ces sous-ensembles.

En effet, D désignant ici l'ensemble $\{1, 2, \ldots, d\}$ des d premiers entiers positifs, en faisant correspondre à toute α-application de D dans A la suite $(A_1, A_2, \ldots, A_d)$ où, pour tout j de 1 à d, A_j est l'image de j, on définit une bijection de l'ensemble des α-applications de D dans A dans l'ensemble des suites $(A_1, A_2, \ldots, A_d)$ dont chaque terme A_j est un sous-ensemble de cardinal α de l'ensemble A.

De plus, aux α-applications couvrantes de D dans A correspondent ainsi celles des suites $(A_1, A_2, \ldots A_d)$ qui satisfont en outre à la condition $[A^+]$.

5.2.

$Q_\alpha(d, a)$ est le nombre de suites $(D_1, D_2, \ldots, D_a)$ de a termes $D_1, D_2, \ldots, D_a$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

[D-1] : chaque terme D_i est un sous-ensemble (éventuellement vide) d'un ensemble D de cardinal d.

[D-2] : Les sous-ensembles $D_1, D_2, \ldots, D_a$ de l'ensemble D sont tels que tout élément de D appartient à α termes de la suite $(D_1, D_2, \ldots, D_a)$.

$S_\alpha(d, a)$ est le nombre de celles des suites $(D_1, D_2, \ldots, D_a)$ qui satisfont en outre à la condition [D-3] :

[D-3] : Aucun des sous-ensembles $D_1, D_2, \ldots, D_a$ n'est vide.

En effet, A désignant ici l'ensemble $\{1, 2, \ldots, a\}$ des a premiers entiers positifs, en faisant correspondre à toute α-application de D dans A la suite $(D_1, D_2, \ldots, D_a)$ où, pour tout i de 1 à a, D_i est le sous-ensemble de D constitué de ceux des éléments de D dont i appartient à l'image, on définit une bijection de l'ensemble des α-applications de D dans A dans l'ensemble des suites $(D_1, D_2, \ldots, D_a)$ satisfaisant aux conditions [D-1] et [D-2].

De plus, aux α-applications couvrantes de D dans A correspondent ainsi celles des suites $(D_1, D_2, \ldots, D_a)$ qui satisfont en outre à la condition [D-3].

5.3.

$Q_\alpha(d, a)$ est le nombre de suites $(\sigma_o, \sigma_1, \ldots, \sigma_a)$ de $a + 1$ termes $\sigma_o, \sigma_1, \ldots, \sigma_a$ satisfaisant aux quatre conditions suivantes :

[σ-1] ... Chaque terme σ_i est lui-même une suite $(\tau_{i,1}, \tau_{i,2}, \ldots, \tau_{i,d})$ de d termes où chaque terme $\tau_{i,j}$ est un entier naturel :

$$\forall i \in [0\ ;a]\,,\ \sigma_i = (\tau_{i,1}\,,\tau_{i,2}\,,\ldots,\tau_{i,d})$$

$$\text{avec } \tau_{i,j} \in \mathbb{N}, \forall j \in [1\ ;d].$$

[σ-2] . . . Tous les termes de la suite σ_o sont nuls :

$$\forall j \in [1\ ;d]\,,\ \tau_{o,j} = 0.$$

[σ-3] . . . Pour tout i de 1 à a, tout terme de la suite σ_i est égal, soit au terme de même rang de la suite σ_{i-1}, soit à ce terme augmenté de un :

$$\forall i \in [1\ ;a]\,, \forall j \in [1\ ;d]\,,$$

$$\text{on a soit } \tau_{i,j} = \tau_{i-1,j}$$

$$\text{soit } \tau_{i,j} = \tau_{i-1,j} + 1.$$

[σ-4] . . . Tous les termes de la suite σ_a sont égaux à α :

$$\forall j \in [1\ ;d]\,,\ \tau_{a,j} = \alpha.$$

S_α $(d\,,a)$ est le nombre de celles des suites $(\sigma_o\,,\sigma_1\ldots,\sigma_a)$ qui satisfont en outre à la condition [σ-5] :

[σ-5] . . . Pour tout i de 1 à a, l'un au moins des d termes de la suite σ_i est supérieur d'une unité au terme de même rang de la suite σ_{i-1} :

$$\forall i \in [1\ ;a]\,, \exists j \in [1\ ;d] \text{ tel que } \tau_{i,j} = \tau_{i-1,j} + 1.$$

En effet, A désignant l'ensemble $\{1\,,2\,,\ldots,a\}$ des a premiers entiers positifs et D l'ensemble $\{1\,,2\,,\ldots,d\}$ des d premiers entiers positifs, en faisant correspondre à toute suite $(D_1\,,D_2\,,\ldots,D_a)$ satisfaisant aux conditions [D-1] et [D-2] la suite $(\sigma_o\,,\sigma_1\,,\ldots,\sigma_a)$ satisfaisant aux conditions [σ-1] et [σ-2] où pour tout i de 1 à a et tout j de 1 à d, on pose :

$$\tau_{i,j} = \tau_{i-1,j} + 1 \text{ si } j \in D_i\,,$$

$$\tau_{i,j} = \tau_{i-1,j} \text{ sinon,}$$

on définit une bijection de l'ensemble des suites $(D_1\,,D_2,\ldots,D_a)$ satisfaisant aux conditions [D-1] et [D-2] dans l'ensemble des suites $(\sigma_o\,,\sigma_1,\ldots,\sigma_a)$ satisfaisant aux conditions [σ-1], [σ-2], [σ-3] et [σ-4].

De plus, à celles des suites $(D_1\,,D_2,\ldots,D_a)$ qui satisfont en outre à la condition [D-3] correspondent ainsi celles des suites $(\sigma_0\,,\sigma_1\,,\ldots,\sigma_a)$ qui satisfont en outre à la condition [σ-5].

5.4. Considérons maintenant les nombres $\bar{Q}_\alpha (d, a)$ et $\bar{S}_\alpha (d, a)$ respectivement définis comme suit :

$$\bar{Q}_\alpha (d, a) = (\alpha !)^d \; Q_\alpha (d, a) \qquad [\bar{Q} \leftarrow Q]$$

$$\bar{S}_\alpha (d, a) = (\alpha !)^d \; S_\alpha (d, a) \qquad [\bar{S} \leftarrow S]$$

On vérifie immédiatement que :

$\bar{Q}_\alpha (d, a)$ est le nombre de manières d'associer à chacun des d termes de l'ensemble de départ D une suite de α termes distincts, chacun de ces α termes étant l'un des a éléments de l'ensemble d'arrivée A ;

et que :

$\bar{S}_\alpha (d, a)$ est le nombre de manières d'associer à chaque élément de D une suite de α termes distincts de A, en procédant de telle sorte que chacun des a éléments de A appartienne à l'une au moins des suites ainsi introduites,

ou encore que :

$\bar{Q}_\alpha (d, a)$ est le nombre de suites $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_d)$ de d termes $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_d$ où pour tout j de 1 à α, le terme $\bar{A}_j$ est lui-même une suite de α termes, dont chacun des termes est l'un des éléments d'un ensemble A de cardinal a ;

et que :

$\bar{S}_\alpha (\alpha, a)$ est le nombre de celles des suites $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_d)$ qui satisfont en outre à la condition :

les suites $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_d)$ sont telles que tout élément de A appartient à l'une au moins de ces suites.

Dans le paragraphe suivant, nous considérerons aussi le nombre $P_\alpha(d, a)$ défini comme suit :

$$P_\alpha (d, a) = \frac{\bar{S}_\alpha (d, a)}{a !} = \frac{(\alpha !)^d \; S_\alpha (d, a)}{a !} \qquad [P \leftarrow \bar{S}]$$

Notons seulement pour le moment que pour $\alpha = 1$ le nombre $P_1 (d, a)$ se confond avec le nombre de Stirling de 2ème espèce $P(d, a)$ ou P_a^d, nombre de partitions en a classes d'un ensemble de cardinal d.

6. PROPRIETES ALGEBRIQUES DES NOMBRES $P_\alpha (d, a)$ et $\bar{S}_\alpha (d, a)$.

Soit x une variable numérique réelle. Nous nous proposons de démontrer les propriétés suivantes :

1/ Les nombres $P_\alpha\,(d\,,\,i)$ permettent d'exprimer le polynôme $[(x)_\alpha]^d$ sous forme de combinaison linéaire de polynômes factoriels $(x)_i$ au moyen de la relation :

$$\boxed{[(x)_\alpha]^d = \sum_{i=\alpha}^{\alpha d} P_\alpha\,(d,\,i)\,(x)_i} \qquad [A\text{-}1]$$

2/ Le nombre $\overline{S}_\alpha\,(d\,,\,a)$ est la valeur, pour $x = 0$, de la différence finie d'ordre a du polynôme $[(x)_\alpha]^d$:

$$\boxed{[\Delta^a\,([(x)_\alpha]^d)]_{x=0} = \overline{S}_\alpha\,(d\,,a)} \qquad [A\text{-}2]$$

Notons d'abord que, puisque l'on a

$$P_\alpha\,(d\,,\,a) = \frac{\overline{S}_\alpha\,(d\,,\,a)}{a\,!}$$

et

$$\overline{S}_\alpha\,(d\,,\,a) = (\alpha\,!)^d\;S_\alpha\,(d\,,a),$$

après division des termes des égalités par $(\alpha\,!)^d$, la relation $[A\text{-}1]$ peut encore s'écrire :

$$\left[\frac{(x)_\alpha}{\alpha!}\right]^d = \sum_{i=\alpha}^{\alpha d} \frac{S_\alpha\,(d\,,\,i)}{i\,!}\,(x)_i \qquad [S\text{-}A\text{-}1]$$

et la relation $[A\text{-}2]$:

$$\left[\Delta^a\left(\left[\frac{(x)_\alpha}{\alpha\,!}\right]^d\right)\right]_{x=0} = S_\alpha\,(d\,,\,a) \qquad [S\text{-}A\text{-}2]$$

Démontrons maintenant la relation $[S\text{-}A\text{-}1]$.

Les deux expressions $\left[\dfrac{(x)_\alpha}{\alpha\,!}\right]^d$ et $\displaystyle\sum_{i=\alpha}^{\alpha d} \frac{S_\alpha\,(d\,,\,i)}{i\,!}\,(x)_i$ étant l'une et l'autre un polynôme en x de degré αd, il suffit, pour pouvoir affirmer qu'elles sont égales quel que soit x, de vérifier qu'elles sont égales pour $\alpha d + 1$ valeurs distinctes de x.

Considérons alors de nouveau la relation $[Q \leftarrow S]$ valide, rappelons-le, pour tout entier $a \geqslant \alpha$:

$$Q_\alpha\,(d\,,\,a) = \sum_{i=\alpha}^{\min\,(a,\alpha d)} C_a^i\;S_\alpha\,(d\,,\,i).$$

Compte tenu de ce que l'on a $C_a^i = 0$ pour $i > a$, cette relation peut aussi s'écrire :

$$Q_\alpha\,(d\,,\,a) = \sum_{i=\alpha}^{\alpha d} C_a^i\;S_\alpha\,(d\,,\,i) \qquad [Q \leftarrow S''],$$

ou encore, puisque l'on a $C_a^i = \frac{(a)_i}{i\,!}$ et $Q_\alpha(d\,,a) = (C_a^\alpha)^d = \left[\frac{(a)_\alpha}{\alpha\,!}\right]^d$:

$$\left[\frac{(a)_\alpha}{\alpha\,!}\right]^d = \sum_{i=\alpha}^{\alpha d} \frac{S_\alpha(d\,,i)}{i\,!}\,(a)_i \qquad [Q \leftarrow S''']$$

Cette relation $[Q \leftarrow S''']$ montre que les deux polynômes $\left[\frac{(x)_\alpha}{\alpha\,!}\right]^d$ et $\sum_{i=\alpha}^{\alpha d} \frac{S_\alpha(d\,,i)}{i\,!}\,(x)_i$ sont égaux pour toute valeur entière a de x au moins égale à α ; par conséquent, ces deux polynômes sont bien égaux pour tout x.

Démontrons ensuite la relation [S-A-2].

La relation [S-A-1] nous permet d'écrire :

$$\left[\Delta^a\left(\left[\frac{(x)_\alpha}{\alpha\,!}\right]^d\right)\right]_{x=0} = \sum_{i=\alpha}^{\alpha d} \frac{S_\alpha(d\,,i)}{i\,!}\,(\Delta^a\,[(x)_i\,])_{x=0}\,.$$

Compte tenu de ce que l'on a, comme rappelé précédemment :

$$(\Delta^a\,[(x)_i])_{x=0} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq a \\ a\,! & \text{pour } i = a\,, \end{cases}$$

on voit que l'on a :

$$\left[\Delta^a\left(\left[\frac{(x)_\alpha}{\alpha\,!}\right]^d\right)\right]_{x=0} = \begin{cases} S_\alpha(d\,,a) \text{ pour } a \in [\alpha\,;\alpha d]. \\ 0 \text{ pour } a < \alpha \text{ ou pour } a > \alpha d. \end{cases}$$

La relation [S-A-2] est ainsi établie puisque pour $a < \alpha$ et pour $a > \alpha d$, on a aussi $S_\alpha(d\,,a) = 0$.

On peut encore démontrer la relation [S-A-2] sans utiliser la relation [S-A-1] mais en utilisant par contre l'égalité déjà rappelée :

$$[\Delta^l\,F(x)]_{x=0} = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i\,C_l^i\,F(l-i).$$

En effet en partant de l'égalité ci-dessus, en y remplaçant l par a et en posant $F(x) = \left[\frac{(x)_\alpha}{\alpha\,!}\right]^d$ et en tenant compte aussi de la relation [S'], nous pouvons écrire successivement :

$$\left[\Delta^a \left(\left[\frac{(x)_\alpha}{\alpha !}\right]^d \right)\right]_{x=0} = \sum_{i=0}^{a} (-1)^i C_a^i \left[\frac{(a-i)_\alpha}{\alpha !}\right]^d$$

$$= \sum_{i=0}^{a} (-1)^i C_a^i (C_{a-i}^\alpha)^d$$

$$= S_\alpha (d, a)$$

7. DEFINITION ET DENOMBREMENT DES α-APPLICATIONS INJECTIVES.

7.1 Définitions et notations.

Nous disons qu'une α-application de l'ensemble de départ D dans l'ensemble d'arrivée A est *injective* si tout sous-ensemble de cardinal α de l'ensemble A est l'image d'au plus un élément de l'ensemble D.

Ainsi l'existence d'une α-application injective de D dans A nécessite que l'on ait non seulement $a \geqslant \alpha$, mais aussi $d \leqslant C_a^\alpha$.

Une α-application de D dans A peut être à la fois injective et couvrante.

L'existence d'une α-application de D dans A qui soit à la fois injective et couvrante nécessite que l'on ait $a \geqslant \alpha$, $\alpha d \geqslant a$ et $d \leqslant C_a^\alpha$.

Nous désignerons par $Q_\alpha^I (d, a)$ le nombre des α-applications injectives de D dans A ($Q_\alpha^I (d, a) = 0$ pour $a < \alpha$ et pour $d > C_a^\alpha$) et par $S_\alpha^I (d, a)$ le nombre des α-applications injectives et couvrantes de D dans A. ($S_\alpha^I (d, a) = 0$ pour $a < \alpha$, pour $a > \alpha d$ et pour $d > C_a^\alpha$).

7.2 Dénombrement des α-applications injectives.

A l'aide de considérations analogues à celles développées en 1.2 et 2.2., on peut démontrer facilement les résultats suivants :

$$Q_\alpha^I (d, a) = (C_a^\alpha)_d \qquad [Q^I]$$

$$Q_\alpha^I (d, a) = \sum_{i=1}^{a} C_a^i \, S_\alpha^I (d, i) \qquad [Q^I \leftarrow S^I]$$

$$S_\alpha^I (d, a) = \sum_{i=0}^{a-1} (-1)^i \, C_a^i \, Q_\alpha^I (d, a-i) \qquad [S^I \leftarrow Q^I]$$

$$S_\alpha^I (d, a) = \sum_{i=0}^{a} (-1)^i \, C_a^i \, (C_{a-i}^\alpha)_d \qquad [S^I]$$

En désignant toujours par P_k^d le nombre de partitions de l'ensemble D en k classes et, pour une α-application donnée de D dans A, en considérant la partition de D obtenue en rangeant dans une même classe tous les éléments de D qui ont même image, on obtient les deux égalités :

$$Q_\alpha (d, a) = \sum_{k=1}^{d} P_k^d \, Q_\alpha^I (k, a) \qquad [Q \leftarrow Q^I]$$

$$S_\alpha (d, a) = \sum_{k=1}^{d} P_k^d \, S_\alpha^I (k, a) \qquad [S \leftarrow S^I]$$

7.3 Les α-applications injectives et partiellement couvrantes.

Soit C un sous-ensemble spécifié de cardinal c de l'ensemble d'arrivée A.

Si l'on désigne par $\pi_\alpha^I (d, a, c)$ le nombre des α-applications injectives et C-couvrantes de D dans A, par $\Gamma_\alpha^I (d, a, c, k)$ le nombre des α-applications injectives de D dans A qui sont telles que le cardinal de l'intersection de l'image de D et du sous-ensemble spécifié C soit égal à k et par $\Sigma_\alpha^I (d, a, c, m)$ le nombre des α-applications injectives de D dans A qui sont telles que le cardinal de l'intersection de l'image de D et du sous-ensemble spécifié C soit au moins égal à m, en s'inspirant si besoin des développements de 1.3, on démontre immédiatement les résultats suivants :

$$\pi_\alpha^I (d, a, c) = \sum_{i=\max(\alpha, c)}^{a} C_{a-c}^{i-c} \, S_\alpha^I (d, i) \qquad [\pi^I \leftarrow S^I]$$

$$\pi_\alpha^I (d, a, c) = \sum_{j=0}^{\min(c, a-\alpha)} (-1)^j \, C_c^j \, Q_\alpha^I (d, a-j) \qquad [\pi^I \leftarrow Q^I]$$

$$\pi_\alpha^I (d, a, c) = \sum_{j=0}^{c} (-1)^j \, C_c^j \, (C_{a-j}^\alpha)_d \qquad [\pi^I]$$

$$\pi_\alpha^I (d, a, 0) = Q_\alpha^I (d, a) \qquad [Q^I \leftarrow \pi^I]$$

$$\pi_\alpha^I (d, a, a) = S_\alpha^I (d, a) \qquad [S^I \leftarrow \pi^I]$$

$$\sum_{k=f}^{c} C_{c-f}^{k-f} \, \pi_\alpha^I (d, a-c+k, k) = \pi_\alpha^I (d, a, f) \qquad [\pi^I \leftarrow \pi^I]$$

$$\Gamma_\alpha^I (d, a, c, k) = C_c^k \, \pi_\alpha^I (d, a-c+k, k) \qquad [\Gamma^I \leftarrow \pi^I]$$

$$\Gamma_\alpha^I (d, a, c, k) = C_c^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \, C_k^l \, (C_{a-c+l}^\alpha)_d \qquad [\Gamma^I]$$

$$\Gamma^I_\alpha\,(d\,,a\,,c\,,c) = \pi^I_\alpha\,(d\,,a\,,c) \qquad [\pi^I \leftarrow \Gamma^I]$$

$$\sum_{k=0}^{c} \Gamma^I_\alpha\,(d\,,a\,,c\,,k) = Q^I_\alpha\,(d\,,a) \qquad [Q^I \leftarrow \Gamma^I]$$

$$\Sigma^I_\alpha\,(d\,,a\,,c\,,m) = \sum_{k=m}^{c} \Gamma^I_\alpha\,(d,a\,,c\,,k) \qquad [\Sigma^I \leftarrow \Gamma^I]$$

$$\Sigma^I_\alpha\,(d\,,a\,,c\,,0) = Q^I_\alpha\,(d\,,a) \qquad [Q^I \leftarrow \Sigma^I]$$

$$\Sigma^I_\alpha\,(d\,,a\,,c\,,c) = \pi^I_\alpha\,(d,a,c) \qquad [\pi^I \leftarrow \Sigma^I]$$

et pour $m \geqslant 1$:

$$\Sigma^I_\alpha\,(d\,,a\,,c\,,m) = \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l}\, C^l_c\, C^{c-m}_{c-l-1}\, (C^\alpha_{a-c+l})_d + (C^\alpha_a)_d \qquad [\Sigma'^I]$$

ou :

$$\Sigma^I_\alpha\,(d\,,a\,,c\,,m) = m\,C^m_c \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l}\, C^l_{m-1} \times \frac{1}{c-l}\, (C^\alpha_{a-c+l})_d + (C^\alpha_a)_d$$

$$[\Sigma''^I]$$

7.4 Relation de récurrence permettant de calculer de proche en proche les nombres $S^I_\alpha\,(d\,,a)$.

Nous nous proposons d'établir la relation de récurrence portant sur le paramètre d et valide pour $a \geqslant \alpha + 1$ et $d \geqslant 2$ écrite ci-dessous :

$$\boxed{S^I_\alpha\,(d\,,a) = C^\alpha_a \left[\sum_{j=0}^{\alpha} C^j_\alpha\, S^I_\alpha\,(d-1\,,a-j)\right] - (d-1)\, S^I_\alpha\,(d-1\,,a)}$$

$$[S^I \leftarrow S^I]$$

Jointe aux quatre relations :

$$\begin{cases} S^I_\alpha\,(d\,,a) = 0 \text{ pour } a < \alpha \\ S^I_\alpha\,(1\,,\alpha) = 1 \\ S^I_\alpha\,(d\,,\alpha) = 0 \text{ pour } d > 1 \\ S^I_\alpha\,(1\,,a) = 0 \text{ pour } a > \alpha \end{cases}$$

grâce auxquelles on peut amorcer la récurrence, la relation $[S^I \leftarrow S^I]$ permet de calculer de proche en proche les nombres $S^I_\alpha\,(d\,,a)$.

Par analogie avec ce qui a été fait en 4, nous introduisons le nombre, que nous noterons $S_\alpha^{I*}(d, a)$, des α-applications injectives et couvrantes de D dans A pour lesquelles l'image d'un élément spécifié e_o de D est un sous-ensemble spécifié A_o, de cardinal α, de l'ensemble A.

Nous sommes amené à introduire aussi le nombre, que nous noterons $S_\alpha^{I+}(d, a)$, des α-applications injectives et couvrantes de D dans A pour lesquelles un sous-ensemble spécifié A_o, de cardinal α, de A est l'image d'un élément de D (et bien sûr d'un seul), et le nombre, que nous noterons $S_\alpha^{I-}(d, a)$, des α-applications injectives et couvrantes de D dans A qui sont telles, au contraire, qu'aucun élément de D n'ait pour image ce sous-ensemble spécifié A_o.

Les nombres $S_\alpha^{I}(d, a)$, $S_\alpha^{I+}(d, a)$, $S_\alpha^{I-}(d, a)$ et $S_\alpha^{I*}(d, a)$ sont liés par les relations :

$$S_\alpha^{I}(d, a) = S_\alpha^{I+}(d, a) + S_\alpha^{I-}(d, a) \qquad [S^I \leftarrow S^{I+} ; S^{I-}]$$

$$S_\alpha^{I}(d, a) = C_a^\alpha \, S_\alpha^{I*}(d, a) \qquad [S^I \leftarrow S^{I*}]$$

$$S_\alpha^{I+}(d, a) = d \, S_\alpha^{I*}(d, a) \qquad [S^{I+} \leftarrow S^{I*}]$$

$$S_\alpha^{I-}(d, a) = (C_a^\alpha - d) \, S_\alpha^{I*}(d, a) \qquad [S^{I-} \leftarrow S^{I*}]$$

La première de ces relations est évidente.

La seconde se démontre en remarquant que pour définir une α-application injective et couvrante de D dans A on peut, après avoir particularisé un élément e_o de D, commencer par choisir le sous-ensemble A_o, de cardinal α, de A que l'on prend pour image de cet élément particularisé e_o, ce qui peut se faire de C_a^α manières distinctes ; ce choix effectué, on est ramené au problème consistant à définir une α-application injective et couvrante de D dans A qui soit telle qu'un élément spécifié e_o ait pour image un sous-ensemble spécifié A_o.

La troisième relation se démontre en remarquant que pour définir une α-application injective et couvrante de D dans A qui soit telle qu'un élément de D ait pour image le sous-ensemble spécifié A_o de A, on peut choisir d'abord l'élément e_o de D qui a A_o pour image, ce qui peut se faire de d manières distinctes ; ce choix effectué, on est ramené de nouveau au problème consistant à définir une α-application injective et couvrante de D dans A qui soit telle qu'un élément spécifié e_o ait pour image un sous-ensemble spécifié A_o.

Quant à la quatrième relation, elle est une conséquence immédiate des trois précédentes.

Les trois relations $[S^I \leftarrow S^{I*}]$, $[S^{I+} \leftarrow S^{I*}]$ et $[S^{I-} \leftarrow S^{I*}]$ permettent aussi d'écrire, à condition que l'on ait $a \geqslant \alpha$:

$$S_\alpha^{I*}(d, a) = \frac{1}{C_a^\alpha} S_\alpha^{I}(d, a) \qquad [S^{I*} \leftarrow S^I]$$

$$S_{\alpha}^{I+}(d,a) = \frac{d}{C_a^{\alpha}} S_{\alpha}^{I}(d,a) \qquad [S^{I+} \leftarrow S^{I}]$$

$$S_{\alpha}^{I-}(d,a) = \frac{C_a^{\alpha} - d}{C_a^{\alpha}} S_{\alpha}^{I}(d,a) \qquad [S^{I-} \leftarrow S^{I}]$$

Il résulte de cette dernière relation que pour $d \geqslant 2$, on a :

$$C_a^{\alpha}\, S_{\alpha}^{I-}(d-1\,,a) = [C_a^{\alpha} - (d-1)]\, S_{\alpha}^{I}(d-1\,,a) \quad [S^{I'-} \leftarrow S^{I}]$$

D'autre part, on a évidemment :

$$S_{\alpha}^{I*}(d\,,a) = 0 \text{ pour } a < \alpha$$
$$S_{\alpha}^{I*}(1\,,\alpha) = 1$$
$$S_{\alpha}^{I*}(d\,,\alpha) = 0 \text{ pour } d > 1$$
$$S_{\alpha}^{I*}(1\,,a) = 0 \text{ pour } a > \alpha,$$

et pour $a \geqslant \alpha + 1$ et $d \geqslant 2$, on a la relation :

$$S_{\alpha}^{I*}(d\,,a) = S_{\alpha}^{I-}(d-1\,,a) + \sum_{j=1}^{\alpha} C_{\alpha}^{j}\, S_{\alpha}^{I}(d-1\,,a-j)$$

$$[S^{I*} \leftarrow S^{I-}; S^{I}]$$

Pour établir cette relation, considérons l'ensemble $\mathcal{C}^I$ des α-applications injectives et couvrantes de D dans A pour lesquelles l'image de l'élément spécifié e_o est le sous-ensemble spécifié A_o, et les sous-ensembles $\mathcal{C}_o^I, \mathcal{C}_1^I, \ldots, \mathcal{C}_\alpha^I$ de l'ensemble $\mathcal{C}^I$ définis comme suit : pour tout j de 0 à α, $\mathcal{C}_j^I$ est constitué de celles des α-applications appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}^I$ pour lesquelles le nombre des éléments de A_o qui n'appartiennent pas à la réunion des images des d-1 éléments de D autres que e_o est égal à j.

Les sous-ensembles $\mathcal{C}_o^I, \mathcal{C}_1^I, \ldots, \mathcal{C}_\alpha^I$ constituent une pseudo-partition de l'ensemble $\mathcal{C}^I$.

Par conséquent $S_{\alpha}^{I*}(d\,,a)$, cardinal de l'ensemble $\mathcal{C}^I$, est égal à la somme des cardinaux de chacun de ces sous-ensembles.

Or le cardinal de $\mathcal{C}_o^I$ est égal à $S_{\alpha}^{I-}(d-1\,,a)$: en effet définir une α-application appartenant à $\mathcal{C}_o^I$ revient à définir une α-application injective et couvrante de l'ensemble D' constitué des d-1 éléments de D autres que l'élément e_o dans A qui soit telle qu'aucun des d-1 éléments de D' n'ait A_o pour image, ce qui peut se faire de $S_{\alpha}^{I-}(d-1\,,a)$ manières distinctes.

Et pour tout j de 1 à α, le cardinal de $\mathcal{C}_j^I$ est égal à $C_{\alpha}^{j}\, S_{\alpha}^{I}(d-1\,,a-j)$: en effet pour définir une α-application appartenant à $\mathcal{C}_j^I$, pour $j \geqslant 1$, on peut d'abord choisir un sous-ensemble J, de cardinal j, de A_o, ce qui peut se faire de C_α^j manières distinctes, puis, ce choix effectué, définir une α-application injective et couvrante de l'ensemble D' des d-1 éléments de D autres que e_o dans le complémentaire par rapport à A du sous-ensemble J choisi, ce qui peut se faire de $S_\alpha^I\,(d-1\,,a-j)$ manières distinctes.

En remplaçant, dans $[S^I \leftarrow S^{I*}]$, $S_\alpha^{I*}\,(d, a)$ par l'expression donnée par $[S^{I*} \leftarrow S^{I-}; S^I]$, on obtient la relation, valide pour $a \geqslant \alpha + 1$ et $d \geqslant 2$:

$$S_\alpha^I\,(d\,,a) = C_a^\alpha\,[S_\alpha^{I-}\,(d-1\,,a) + \sum_{j=1}^{\alpha} C_\alpha^j\; S_\alpha^I\,(d-1\,,a-j)] \qquad [S^I \leftarrow S^{I'};\; S^I]$$

Il suffit alors de remplacer dans cette relation $C_a^\alpha\; S_\alpha^{I-}\,(d-1\,,a)$ par $C_a^\alpha\;\; C_\alpha^o\;\; S_\alpha^I\,(d-1\,,a) - (d-1)\;\; S_\alpha^I\,(d-1\,,a)$, comme nous autorise à le faire la relation $[S^{I-} \leftarrow S^I]$ pour obtenir la relation $[S^I \leftarrow S^I]$.

Remarque :

La relation $[S^I \leftarrow S^{I*}]$ montre que le nombre $S_\alpha^I\,(d\,,a)$ est divisible par C_a^α (pour $a \geqslant \alpha$) et que le quotient de la division est $S_\alpha^{I*}\,(d, a)$.

Par suite on pourrait envisager de considérer aussi le nombre $S_\alpha^{I*}\,(d, a)$ comme intermédiaire dans les calculs numériques.

Toutefois nous verrons en 7.5 que $S_\alpha^I\,(d, a)$ est également divisible par d ! et que, de par sa signification énumérative, le quotient de la division de $S_\alpha^I\,(d\,,a)$ par d ! présente sans doute plus d'intérêt que $S_\alpha^{I*}\,(d, a)$.

On peut s'assurer immédiatement, en considérant par exemple le cas limite correspondant à $d = C_a^\alpha$, que $S_\alpha^I\,(d, a)$ n'est pas toujours divisible par $d\,!\;\; C_a^\alpha$.

7.5 Nombre de recouvrements d'un ensemble A de cardinal a au moyen d'un nombre donné de sous-ensembles de même cardinal spécifié.

En transposant ce qui a été dit en 5.1, on peut montrer sans difficulté que :

$Q_\alpha^I\,(d\,,a)$ est le nombre de suites $(A_1\,,A_2\,,\ldots,A_d)$ de d termes tous distincts $A_1\,,A_2\,,\ldots A_d$ où, pour tout j de 1 à d, A_j est un sous-ensemble de cardinal α d'un ensemble A de cardinal a,

et que :

$S_\alpha^I\,(d\,,a)$ est le nombre de celles de ces suites qui sont "couvrantes", c'est-à-dire qui sont telles que tout élément de A appartient à l'un au moins des d termes de la suite.

Désignons alors par $R_\alpha\,(d, a)$ le nombre de recouvrements de l'ensemble A au moyen de d sous-ensembles (tous distincts) de même cardinal α.

On a évidemment la relation :

$$S^I_\alpha (d, a) = d\,!\ R_\alpha (d, a) \qquad [S^I \leftarrow R]$$

Il suffit pour s'en assurer de considérer la partition de l'ensemble des suites couvrantes $(A_1, A_2, \ldots, A_d)$ introduites ci-dessus qui est obtenue en rangeant dans une même classe de la partition toutes les suites qui ne diffèrent entre elles que par l'ordre des termes ; le nombre des classes de la partition est égal à $R_\alpha (d, a)$ et dans chaque classe, il y a d ! suites couvrantes.

De la relation $[S^I \leftarrow R]$, il résulte que l'on a :

$$R_\alpha (d, a) = \frac{S^I_\alpha (d, a)}{d\,!} \qquad [R \leftarrow S^I]$$

soit, compte tenu de $[S^I]$:

$$R_\alpha (d, a) = \sum_{i=0}^{a} (-1)^i\, C^i_a\, \frac{(C^\alpha_{a-i})_d}{d\,!} \qquad [R]$$

soit encore :

$$R_\alpha (d, a) = \sum_{i=0}^{a} (-1)^i\, C^i_a\, C^d_{C^\alpha_{a-i}} \qquad [R']$$

D'autre part, on déduit immédiatement de la formule $[S^I \leftarrow S^I]$ que les nombres $R_\alpha (d, a)$ satisfont à la relation de récurrence suivante, valide pour $a \geqslant \alpha + 1$ et $d \geqslant 2$:

$$R_\alpha (d, a) = \frac{C^\alpha_a}{d} \sum_{j=0}^{\alpha} C^j_\alpha\, R_\alpha (d-1, a-j) - \frac{d-1}{d} R_\alpha (d-1, a) \qquad [R \leftarrow R]$$

Jointe aux quatre relations :

$$\begin{cases} R_\alpha (d, a) = 0 \text{ pour } a < \alpha \\ R_\alpha (1, \alpha) = 1 \\ R_\alpha (d, \alpha) = 0 \text{ pour } d > 1 \\ R_\alpha (1, a) = 0 \text{ pour } a > \alpha \end{cases}$$

grâce auxquelles on peut amorcer la récurrence, la relation $[R \leftarrow R]$ permet de calculer de proche en proche les nombres $R_\alpha (d, a)$.

7.6 Propriétes algébriques des nombres $S^I_\alpha (d, a)$.

En transposant les démonstrations faites en 6, il est facile de démontrer les deux relations suivantes :

$$\left[\frac{(x)_\alpha}{\alpha!}\right]_d = \sum_{i=\alpha}^{\alpha d} \frac{S^I_\alpha(d\,,a)}{i\,!}\,(x)_i \qquad [S^I\text{-}A\text{-}1]$$

$$\left[\Delta^a\left(\left[\frac{(x)_\alpha}{\alpha!}\right]_d\right)\right]_{x=0} = S^I_\alpha(d\,,a) \qquad [S^I\text{-}A\text{-}2]$$

8.. LES α-APPLICATIONS COUVRANTES MINIMALES.

Après l'étude des α-applications couvrantes et injectives, on est naturellement conduit à considérer les α-applications couvrantes minimales de D dans A, c'est-à-dire les α-applications couvrantes qui sont telles que l'image de chaque élément de D comprend un ou plusieurs éléments de A qui n'appartiennent pas à la réunion des images des autres éléments, et à chercher à déterminer leur nombre, que nous notons $S^m_\alpha(d, a)$.

Malheureusement, nous n'avons réussi ni à déterminer l'expression analytique de $S^m_\alpha(d, a)$, ni à trouver une formule de récurrence en permettant le calcul de proche en proche qui soit aussi simple que celles concernant les nombres $S_\alpha\ (d, a)$ et $S^I_\alpha\ (d, a)$.

Nous avons été amené à considérer les α-applications de D dans A qui sont telles que l'image de chaque élément de D comprend en propre un ou plusieurs éléments d'un sous-ensemble spécifié C non vide, de cardinal c, de A, α-applications que nous qualifierons de C-minimales.

Notons que cette notion d'α-application C-minimale se confond avec celle d'α-application minimale dans le cas particulier où C est l'ensemble A lui-même. Notons aussi que l'existence d'une α-application C-minimale implique que l'on ait $c \geqslant d$.

Désignons alors par $T^m_\alpha(d, a\,, c)$ le nombre des α-applications couvrantes et C-minimales de D dans A.

Compte tenu des remarques précédentes, on peut d'abord écrire :

$$T^m_\alpha(d, a\,, a) = S^m_\alpha(d, a) \qquad [S^m \leftarrow T^m]$$

$$S^m_\alpha(d, a\,, c) = 0 \text{ pour } c < d. \qquad [T^m\text{-}03]$$

On peut ensuite établir la relation de récurrence suivante, valide pour $a \geqslant \alpha + 1$, $d \geqslant 2$ et $c \geqslant 1$:

$$\boxed{T^m_\alpha(d, a\,, c) = \sum_{\gamma=1}^{\min(\alpha,c)} C^\gamma_c\, C^{\alpha-\gamma}_{a-c}\left[\sum_{j=1}^{\alpha}(C^j_\alpha - C^j_{\alpha-\gamma})\, T^m_\alpha(d-1, a-j, c-\gamma)\right] \qquad [T^m \leftarrow T^m]}$$

Pour justifier cette relation, il suffit de particulariser un élément de D et de considérer d'abord la pseudo-partition de l'ensemble des α-applications couvrantes et C-minimales obtenue en rangeant dans une même classe $\mathcal{K}_\gamma$ toutes les α-applications pour lesquelles le cardinal de l'intersection de l'image de l'élément particularisé et du sous-ensemble C est égal à $\gamma\,(1 \leqslant \gamma \leqslant \min(\alpha, c))$ puis la sous-pseudo-partition de chaque classe $\mathcal{K}_\gamma$ obtenue en rangeant dans une même sous-classe $\mathcal{K}_{\gamma,j}$ toutes celles des α-applications appartenant à la classe $\mathcal{K}_\gamma$ pour lesquelles le cardinal de l'intersection de l'image de l'élément particularisé de D et du complémentaire par rapport à A de la réunion des images des autres éléments de D est égal à $j\ (1 \leqslant j \leqslant \alpha)$; il ne faut pas oublier que l'un au moins des γ éléments de C qui appartiennent à l'image de l'élément particularisé de D n'appartient pas à la réunion des images des autres éléments de D.

Jointe à la convention :

$$T_\alpha^m\,(d, a, 0) = 0$$

et, pour $c \geqslant 1$, aux relations :

$$\begin{cases} T_\alpha^m\,(d, a, c) = 0 \text{ pour } a < \alpha \\ T_\alpha^m(1, \alpha, c) = 1 \\ T_\alpha^m\,(d, \alpha, c) = 0 \text{ pour } d > 1 \\ T_\alpha^m\,(1, a, c) = 0 \text{ pour } a > \alpha \end{cases}$$

grâce auxquelles on peut amorcer les récurrences, la relation $[T^m \leftarrow T^m]$ permet de calculer de proche en proche les nombres $T_\alpha^m\,(d, a, c)$ et par suite de calculer $S_\alpha^m\,(d, a)$.

SECTION II

ETUDE DE DEUX VARIABLES ALEATOIRES LIEES A LA CONSTITUTION D'UNE SUITE D'ECHANTILLONS EXHAUSTIFS PRELEVES AU HASARD DANS UNE POPULATION. GENERALISATION DU PROBLEME DIT DU "COLLECTEUR DE COUPONS".

1. PRESENTATION.

Soit A une population composée de a individus et C une sous-population spécifiée de A, composée de c individus. Nous supposons que la sous-population considérée C est non vide, mais nous n'excluons pas a priori qu'elle soit confondue avec la population A tout entière.

Ainsi l'on a : $1 \leqslant c \leqslant a$.

Par tirage au sort dans la population A, on constitue une suite d'α-échantillons exhaustifs et non ordonnés $S_1, S_2, \ldots$ (on a évidemment : $1 \leqslant \alpha \leqslant a$) ; les individus prélevés lors du tirage d'un échantillon S_i sont remis dans la population avant qu'il ne soit procédé au tirage de l'échantillon S_{i+1}.

Ainsi chaque échantillon est constitué de α individus distincts, mais un même individu peut se retrouver dans plusieurs échantillons. Les échantillons $S_1, S_2, \ldots$ sont donc des sous-ensembles de cardinal α de la population A, mais ces sous-ensembles ne sont pas nécessairement disjoints.

Nous nous proposons de considérer d'une part le nombre x_d d'individus de la sous-population C qui sont prélevés au moins une fois lors de la constitution des d premiers échantillons $S_1, S_2, \ldots, S_d$ et d'autre part le nombre minimum y d'échantillons à constituer pour qu'au moins un nombre donné m (avec $m \leqslant c$) des c individus de la sous-population C soient prélevés au moins une fois.

Le nombre x_d est donc égal au cardinal de l'intersection de la sous-population C et de la réunion des d échantillons $S_1, S_2, \ldots, S_d$:

$$x_d = \text{card}\left[C \cap \left(\bigcup_{i=1}^{d} S_i\right)\right],$$

et le nombre y est égal au plus petit entier positif d pour lequel on a $x_d \geqslant m$:

$$y = \min \{d \mid d \in \mathbf{N}^* ; x_d \geqslant m\}$$

Dans le cas particulier où l'on a : $\alpha = a$, chacun des échantillons successifs S_1 , S_2 , . . . est la population A elle-même.

Dans ce cas on a : $x_d = c$ (pour tout $d \geqslant 1$)
et : $y = 1$ (pour tout $m \leqslant c$).

Aussi, excluant ce cas trivial, nous supposons dorénavant que l'on a : $1 \leqslant \alpha < a$.

Il convient alors de considérer les nombres x_d et y comme réalisations de variables aléatoires puisque la composition des échantillons successifs S_1 , S_2 , . . . résulte d'un tirage au sort.

Nous désignons par X_d la variable aléatoire dont x_d est la réalisation et par Y celle dont y est la réalisation.

L'étude de ces variables aléatoires nous semble n'avoir été menée jusqu'à maintenant que dans le cas très particulier où l'on a : $\alpha = 1$ (avec, de plus, $m = c$ ou $c = a$).

Notre propos est précisément de poursuivre cette étude pour une valeur quelconque de α comprise entre 1 et $a - 1$.

2. FORMALISATION DU MODELE PROBABILISTE.

Soit $\mathcal{A}_1$ l'épreuve aléatoire élémentaire consistant à prélever par tirage au sort dans la population A un échantillon exhaustif de taille α, en retenant comme résultat la liste des α individus de A qui appartiennent à l'échantillon.

L'ensemble fondamental Ω_1 de cette épreuve élémentaire $\mathcal{A}_1$ est l'ensemble $\mathcal{P}_\alpha(A)$ des C_a^α sous-ensembles de cardinal α de la population A.

A cette épreuve élémentaire $\mathcal{A}_1$ nous pouvons associer l'espace probabilisé $(\Omega_1 , \mathcal{E}_1 , P_1)$:

– Ω_1 est, comme nous venons de le dire, l'ensemble $\mathcal{P}_\alpha(A)$ défini ci-dessus,

– $\mathcal{E}_1$ est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega_1)$ des sous-ensembles de Ω_1,

– P_1 est la mesure de probabilité construite en affectant, en raison du mode de prélèvement par tirage au sort, à chacun des C_a^α résultats possibles de l'épreuve $\mathcal{A}_1$ la même probabilité, soit $1/C_a^\alpha$.

La procédure adoptée pour constituer une suite d'α-échantillons exhaustifs S_1 , S_2 , . . . définit, puisque l'on retient pour résultat la suite des listes des individus appartenant à chacun des échantillons successifs S_1 , S_2 , . . . , une épreuve aléatoire qui est le produit d'épreuves aléatoires indépendantes et toutes identiques à l'épreuve élémentaire $\mathcal{A}_1$.

Soit en particulier $\mathcal{A}_d$ l'épreuve aléatoire consistant à constituer, en procédant toujours comme décrit ci-dessus, une suite finie de d α-échantillons exhaustifs $S_1, S_2, \ldots, S_d$.

Cette épreuve $\mathcal{A}_d$ est le produit de d épreuves aléatoires indépendantes et toutes identiques à $\mathcal{A}_1$. L'ensemble fondamental Ω_d de l'épreuve $\mathcal{A}_d$ est par conséquent la puissance $d^{\text{ème}}$ de l'ensemble fondamental Ω_1 de l'épreuve $\mathcal{A}_1$:

$$\Omega_d = (\Omega_1)^d = [\mathcal{P}_\alpha(A)]^d.$$

Le cardinal de Ω_d est donc égal à $(C_a^\alpha)^d$, c'est-à-dire à $Q_\alpha(d, a)$.

Ainsi, à l'épreuve $\mathcal{A}_d$, nous pouvons associer l'espace probabilisé $(\Omega_d, \mathcal{E}_d, P_d)$ où Ω_d est, comme nous venons de le dire, l'ensemble $[\mathcal{P}_\alpha(A)]^d$, où $\mathcal{E}_d$ est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega_d)$ des sous-ensembles de Ω_d et où P_d est la mesure de probabilité construite en affectant à chacun des $Q_\alpha(d, a)$ résultats possibles de l'épreuve $\mathcal{A}_d$ la même probabilité $1/Q_\alpha(d, a)$.

Remarques :

Désignons par D l'ensemble des d premiers entiers positifs :

$$D = \{1, 2, \ldots, d\}.$$

Nous savons que $Q_\alpha(d, a)$ est le nombre des α-applications de D dans A.

Le fait que le cardinal de l'ensemble fondamental Ω_d de l'épreuve aléatoire $\mathcal{A}_d$ soit égal au nombre des α-applications de D dans A s'explique aisément par le fait que moyennant la convention d'identifier, pour tout entier i de 1 à d, l'échantillon S_i et l'image de l'élément i de D par l'α-application, il revient au même de définir une α-application de D dans A ou une suite $(S_1, S_2, \ldots, S_d)$ de d α-échantillons exhaustifs constitués d'individus appartenant à A.

Pour la même raison, $\Gamma_\alpha(d, a, c, k)$, nombre des α-applications de D dans A qui sont telles que le cardinal de l'intersection du sous-ensemble C de cardinal c de A et de la réunion des images des d éléments de D soit égal à k, est aussi le nombre des suites $(S_1, S_2, \ldots, S_d)$ de d α-échantillons exhaustifs prélevés dans A qui sont telles que le cardinal de l'intersection de la sous-population C et de la réunion $\bigcup_{i=1}^{d} S_i$ des d échantillons soit égal à k.

3. LOIS DE PROBABILITE DES VARIABLES ALEATOIRES X_d ET Y.

Les deux variables X_d et Y étant discrètes, la loi de probabilité de chacune d'elles peut être définie par la donnée de l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire et de la probabilité afférente à chacune de ces valeurs possibles.

3.1 Loi de probabilité de la variable aléatoire X_d.

Désignons par $\mathfrak{X}_d$ l'ensemble des valeurs possibles de X_d et, pour tout x appartenant à $\mathfrak{X}_d$, par $p_d(x)$ la probabilité afférente à x, c'est-à-dire la probabilité de réalisation de l'événement $[X_d = x]$.

Il est facile de vérifier que l'on a :

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathfrak{X}_d = \{x \mid x \in \mathbf{N}, \max(0, \alpha - a + c) \leqslant x \leqslant \min(c, \alpha d)\} \\ \forall x \in \mathfrak{X}_d, \; p_d(x) = \dfrac{\Gamma_\alpha(d, a, c, x)}{Q_\alpha(d, a)} \end{array}}$$

En effet, d'une part il est aisé de s'assurer que $\mathfrak{X}_d$ est l'ensemble des entiers qui sont non-négatifs et au plus égaux à c, au moins égaux à α- $(a - c)$ et au plus égaux à αd.

D'autre part, pour tout x appartenant à $\mathfrak{X}_d$, l'événement $[X_d = x]$ est réalisé si et seulement si la suite $(S_1, S_2, \ldots, S_d)$ des d α-échantillons exhaustifs prélevés est telle que l'on ait :

$$\text{card}\left[C \cap \left(\bigcup_{i=1}^{d} S_i\right)\right] = x.$$

Or, nous venons de mentionner (en remarque au § 2) que parmi les $Q_\alpha(d, a)$ suites $(S_1, S_2, \ldots, S_d)$ de d α-échantillons exhaustifs, il y en a $\Gamma_\alpha(d, a, c, x)$ qui vérifient cette condition, d'où l'expression de $p_d(x)$.

Compte tenu des expressions analytiques de $Q_\alpha(d, a)$ et de $\Gamma_\alpha(d, a, c, x)$ (cf. formules $[Q]$ en I-§1-2 et $[\Gamma]$ en I-§3), on peut encore écrire :

$$\boxed{\forall x \in \mathfrak{X}_d, \; p_d(x) = \dfrac{C_c^x \sum_{l=0}^{x} (-1)^{x-l} C_x^l (C_{a-c+l}^{\alpha})^d}{(C_a^\alpha)^d}}$$

Remarques :

1/ Pour tout entier x continuons à désigner par $p_d\,(x)$ la probabilité de réalisation de l'événement $[X_d = x]$. Pour $x \notin \mathfrak{X}_d$, l'événement $[X_d = x]$ est impossible et par suite on a $p_d\,(x) = 0$.

Pour tout entier x compris, au sens large, entre 0 et c on peut continuer à écrire :

$$p_d\,(x) = \frac{\Gamma_\alpha\,(d\,,a\,,c\,,x)}{Q_\alpha\,(d\,,a)}$$

ou :

$$p_d\,(x) = \frac{C_c^x \sum\limits_{l=0}^{c} (-1)^{x-l}\; C_x^l\; (C_{a-c+l}^\alpha)^d}{(C_a^\alpha)^d}$$

puisque pour $x < \alpha - a + c$ et pour $x > \alpha d$, on a d'une part :

$$\Gamma_\alpha\,(d\,,a\,,c\,,x) = 0$$

et que d'autre part la relation $[\Gamma]$ utilisée pour passer de l'une à l'autre des expressions de $p_d\,(x)$ reste valide.

2/ On vérifie immédiatement que, comme il se doit, on a bien :

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}_d} p_d\,(x) \left(= \sum_{x=0}^{c} p_d\,(x) \right) = 1$$

Ceci résulte par exemple de la relation $[Q \leftarrow \Gamma]$ (cf. *I*-§3) :

$$\sum_{x=\max(0,\alpha-a+c)}^{\min(c,\alpha d)} \Gamma_\alpha\,(d\,,a\,,c\,,x) \left(= \sum_{x=0}^{c} \Gamma_\alpha\,(d\,,a\,,c\,,x) \right) = Q_\alpha\,(d\,,a)$$

3/ Il découle de la définition des variables aléatoires $X_1\,, X_2\,, \ldots X_d\,, \ldots$ que la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 est la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(a\,,\alpha\,,c/a)$ et que, pour tout entier $d \geqslant 2$, la loi de probabilité conditionnelle, supposant réalisé l'événement $[X_{d-1} = u]$, de la variable aléatoire $X_d - X_{d-1}$ est la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(a\,,\alpha\,,(c-u)/a)$.

On peut vérifier que l'on a bien, comme il se doit :

$$p_1\,(x) = \frac{C_c^x\; C_{a-c}^{\alpha-x}}{C_a^\alpha} \quad \forall x \in \mathfrak{X}_1$$

et, pour tout entier $d \geqslant 2$:

$$p_d(x) = \sum_{u=0}^{x} p_{d-1}(u) \times \frac{C_{c-u}^{x-u}\ C_{a-c+u}^{\alpha-x+u}}{C_a^{\alpha}} \quad \forall x \in \mathscr{X}_d .$$

La première de ces deux égalités résulte de ce que l'on a :

$$\sum_{l=0}^{x} (-1)^{x-l}\, C_x^l\, C_{a-c+l}^{\alpha} = (\Delta_y^x\, [C_{a-c+y}^{\alpha}])_{y=0} = C_{a-c}^{\alpha-x} .$$

Pour la seconde, compte tenu de ce que l'on peut d'abord écrire :

$$\sum_{u=0}^{x} \left\{ C_c^u \sum_{l=0}^{u} [(-1)^{u-l}\, C_u^l\, (C_{a-c+l}^{\alpha})^{d-1}]\, C_{c-u}^{x-u}\, C_{a-c+u}^{\alpha-x+u} \right\}$$

$$= \sum_{l=0}^{x} \left[\sum_{u=l}^{x} (-1)^{u-l}\, C_c^u\, C_u^l\, C_{c-u}^{x-u}\, C_{a-c+u}^{\alpha-x+u} \right] (C_{a-c+l}^{\alpha})^{d-1}$$

il suffit de vérifier que l'on a :

$$\sum_{u=l}^{x} (-1)^{u-l}\, C_c^u\, C_u^l\, C_{c-u}^{x-u}\, C_{a-c+u}^{\alpha-x+u} = (-1)^{x-l}\, C_c^x\, C_x^l\, C_{a-c+l}^{\alpha} ,$$

soit encore plus simplement, en raison de l'égalité :

$$C_c^u\, C_u^l\, C_{c-u}^{x-u} = C_c^x\, C_x^l\, C_{x-l}^{u-l} ,$$

de vérifier que l'on a :

$$\sum_{u=l}^{x} (-1)^{u-l}\, C_{x-l}^{u-l}\, C_{a-c+u}^{\alpha-x+u} = (-1)^{x-l}\, C_{a-c+l}^{\alpha} .$$

Or, l'on peut écrire successivement :

$$\sum_{u=l}^{x} (-1)^{u-l}\, C_{x-l}^{u-l}\, C_{a-c+u}^{\alpha-x+u}$$

$$= \sum_{v=0}^{x-l} (-1)^{v}\, C_{x-l}^{v}\, C_{a-c+l+v}^{\alpha-x+l+v} \text{ (avec } v = u - l)$$

$$= (-1)^{x-l} \sum_{v=0}^{x-l} (-1)^{(x-l)-v}\, C_{x-l}^{v}\, C_{a-c+l+v}^{a-c-\alpha+x}$$

$$= (-1)^{x-l} \left(\Delta_y^{x-l} \left[C_{a-c+l+y}^{a-c-\alpha+x}\right]\right)_{y=0}$$
$$= (-1)^{x-l} C_{a-c+l}^{a-c-\alpha+x-(x-l)}$$
$$= (-1)^{x-l} C_{a-c+l}^{a-c+l-\alpha} = (-1)^{x-l} C_{a-c+l}^{\alpha}.$$

4/ Pour tout entier m compris, au sens large, entre 0 et c désignons par $P_d\,(m)$ la probabilité de réalisation de l'événement $[X_d \geqslant m]$.

En appelant toujours $\Sigma_\alpha\,(d, a, c, m)$ le nombre des α-applications de D dans A qui sont telles que le cardinal de l'intersection de l'image de D et du sous-ensemble C de A soit au moins égal à m, on a :

$$P_d\,(m) = \frac{\Sigma_\alpha\,(d, a, c, m)}{Q_\alpha\,(d, a)}.$$

En effet, compte tenu de la relation $[\Sigma \leftarrow \Gamma]$ (cf. *I*-§3), on peut écrire successivement :

$$P_d\,(m) = \sum_{x=m}^{c} p_d\,(x) = \frac{\sum_{x=m}^{c} \Gamma_\alpha\,(d, a, c, x)}{Q_\alpha\,(d, a)} = \frac{\Sigma_\alpha\,(d, a, c, m)}{Q_\alpha\,(d, a)}.$$

5/ Pour tout entier $m \leqslant \max(0, \alpha - a + c)$, on a : $P_d\,(m) = 1$ (pour tout entier positif d).

On peut s'en assurer en remarquant que la plus petite valeur possible de X_d étant $\max(0, \alpha - a + c)$, l'événement $[X_d \geqslant m]$ est alors certain, ou encore en se rappelant que pour $m \leqslant \max(0, \alpha - a + c)$, on a :

$$\Sigma_\alpha\,(d, a, c, m) = Q_\alpha\,(d, a).$$

6/ Pour tout entier $m \geqslant \min(c, \alpha d)$, on a $P_d\,(m) = 0$.

On peut s'en assurer en remarquant que la plus grande valeur possible de X_d étant $\min(c, \alpha d)$, l'événement $[X_d \geqslant m]$ est alors impossible, ou encore en se rappelant que pour $m > \min(c, \alpha d)$, on a : $\Sigma_\alpha\,(d, a, c, m) = 0$.

3.2 Loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

Remarque préliminaire.

Pour $m \leqslant \max(0, \alpha - a + c)$, il suffit de constituer un seul α-échantillon exhaustif pour qu'au moins m des c individus de la sous-population C de A soit prélevé une fois. Ainsi dans ce cas, Y prend la seule valeur 1 avec la probabilité 1.

Aussi supposerons-nous dans la suite de l'étude de la variable aléatoire Y que l'on a $m > \max(0, \alpha - a + c)$.

Désignons par $\mathcal{Y}$ l'ensemble des valeurs possibles de Y et, pour tout y appartenant à $\mathcal{Y}$, par $q(y)$ la probabilité afférente à y, c'est-à-dire la probabilité de réalisation de l'événement $[Y = y]$.

Nous allons montrer que l'on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{Y} = \left\{ y \mid y \in \mathbf{N}, y \geqslant \dfrac{m}{\alpha} \right\} \\[2ex] \forall y \in \mathcal{Y},\ q(y) = \dfrac{\Sigma_\alpha(y, a, c, m)}{Q_\alpha(y, a)} - \dfrac{\Sigma_\alpha(y-1, a, c, m)}{Q_\alpha(y-1, a)} \end{array}}$$

En effet, d'une part, puisque chaque échantillon est constitué de α individus, la plus petite valeur possible de Y est le plus petit entier au moins égal à m/α et puisque les échantillons successifs $S_1, S_2, \ldots$ ne sont pas nécessairement des sous-ensembles disjoints, l'ensemble des valeurs possibles de Y n'est pas borné supérieurement.

D'autre part, pour tout y appartenant à $\mathcal{Y}$, l'événement $[Y = y]$ est réalisé si et seulement si l'événement $[X_y \geqslant m]$ est réalisé sans que l'événement $[X_{y-1} \geqslant m]$ ne le soit. Comme la réalisation de l'événement $[X_{y-1} \geqslant m]$, implique celle de l'événement $[X_y \geqslant m]$, la probabilité de réalisation de l'événement $[Y = y]$ est égale à la probabilité de réalisation de l'événement $[X_y \geqslant m]$ diminuée de la probabilité de réalisation de l'événement $[X_{y-1} \geqslant m]$. Compte tenu de la remarque 4 du § 3-1, on peut donc écrire successivement :

$$\begin{aligned} q(y) &= P_y(m) - P_{y-1}(m) \\ &= \frac{\Sigma_\alpha(y, a, c, m)}{Q_\alpha(y, a)} - \frac{\Sigma_\alpha(y-1, a, c, m)}{Q_\alpha(y-1, a)}. \end{aligned}$$

Compte tenu des expressions analytiques de $Q_\alpha(d, a)$ et de $\Sigma_\alpha(d, a, c, m)$ (cf. formules $[Q]$ en I-§ 1.2 et $[\Sigma']$ ou $[\Sigma'']$ en I-§ 3), après simplification et mise en facteur, on peut aussi écrire :

$$\boxed{\forall y \in \mathcal{Y},\ q(y) = \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l-1}\, C_c^l\, C_{c-l-1}^{c-m} \cdot \frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \left(\frac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha}\right)^{y-1}}$$

ou encore :

$\forall y \in \mathcal{Y}$,

$$q(y) = m\, C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-1-l}\, C_{m-1}^l \cdot \frac{1}{c-l} \cdot \frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \left(\frac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha}\right)^{y-1}$$

Remarques :

1/ Pour tout entier positif y, continuons à désigner par $q(y)$ la probabilité de réalisation de l'événement $[Y = y]$.

Pour $y \notin \mathcal{Y}$, l'événement $[Y = y]$ est impossible et par suite on a $q(y) = 0$.

Pour $y < m/\alpha$ (d'où $m > \alpha y$ et a fortiori $m > \alpha(y-1)$) on peut continuer à écrire :

$$q(y) = \frac{\Sigma_\alpha(y, a, c, m)}{Q_\alpha(y, a)} - \frac{\Sigma_\alpha(y-1, a, c, m)}{Q_\alpha(y-1, a)}$$

ou

$$q(y) = \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l-1}\, C_c^l\, C_{c-l-1}^{c-m} \frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \left(\frac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha}\right)^{y-1},$$

ou encore :

$$q(y) = m\, C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l-1}\, C_{m-1}^l \frac{1}{c-l} \frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \left(\frac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha}\right)^{y-1}$$

puisque pour $m > \alpha y$, on a d'une part :

$$\Sigma_\alpha(y, a, c, m) = \Sigma_\alpha(y-1, a, c, m) = 0$$

et que d'autre part, les relations $[\Sigma']$ ou $[\Sigma'']$ utilisées pour passer de la première de ces trois expressions de $q(y)$ à l'une ou l'autre des deux suivantes restent valides.

2/ On peut vérifier que l'on a bien, comme il se doit :

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}} q(y) = 1.$$

En effet, compte tenu de la remarque précédente, on peut écrire successivement :

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}} q(y) = \sum_{y=1}^{\infty} q(y)$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} \left[m\, C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l-1}\, C_{m-1}^l \frac{1}{c-l} \frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \left(\frac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha}\right)^{y-1} \right]$$

$$= mC_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l-1} C_{m-1}^l \frac{1}{c-l} \frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \left[\sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha}\right)^{y-1} \right]$$

$$= mC_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l-1} C_{m-1}^l \frac{1}{c-l} \frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \frac{1}{1 - \dfrac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha}}$$

$$= mC_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-l-1} C_{m-1}^l \frac{1}{c-l}$$

$$= mC_c^m \left(\Delta^{m-1} \left[\frac{1}{c-x}\right]\right)_{x=0}$$

$$= mC_c^m \times \frac{(m-1)!}{(c)_m} = 1.$$

4. MOMENTS DES VARIABLES ALEATOIRES X_d et Y.

Nous poursuivons l'étude des variables aléatoires X_d et Y en cherchant à déterminer leurs principaux moments et en particulier, comme il est d'usage de le faire lorsqu'il s'agit de variables discrètes, les moments factoriels d'ordre quelconque.

4.1 Moments de la variable aléatoire X_d.

Nous nous proposons de déterminer l'espérance mathématique, la variance et, pour tout entier positif f, le moment factoriel d'ordre f de la variable aléatoire X_d, que nous désignerons respectivement par $E[X_d]$, $V[X_d]$ et $E[(X_d)_f]$.

Notons d'abord que l'on a :

$$E[(X_d)_f] = \frac{(c)_f \; \pi_\alpha(d, a, f)}{Q_\alpha(d, a)}$$

(d'où en particulier, pour $f \geqslant c+1$, $E[(X_d)_f] = 0$ puisqu'alors $(c)_f = 0$).

En effet, par définition du moment factoriel, on peut écrire :

$$E[(X_d)_f] = \sum_{x \in \mathfrak{X}_d} (x)_f \; p_d(x),$$

soit, compte tenu de l'expression de $\mathscr{X}_d$ et de ce que pour $x \notin \mathscr{X}_d$ on a $p_d(x) = 0$:

$$E[(X_d)_f] = \sum_{x=0}^{c} (x)_f \, p_d(x).$$

Or pour $f \geqslant x + 1$, on a : $(x)_f = 0$.

Il en résulte que pour $f \geqslant c + 1$, on a bien $E[(X_d)_f] = 0$ et que pour $f \leqslant c$, $E[(X_d)_f]$ se réduit à $\sum\limits_{x=f}^{c} (x)_f \, p_d(x)$.

Et, compte tenu de l'expression de $p_d(x)$, des relations $[\Gamma \leftarrow \pi]$ et $[\pi \leftarrow \pi]$ établies en *I*-§3 et de l'égalité bien connue : $(x)_f \, C_c^x = (c)_f \, C_{c-f}^{x-f}$, on peut écrire successivement :

$$
\begin{aligned}
E[(X_d)_f] &= \sum_{x=f}^{c} (x)_f \, p_d(x) \\
&= \sum_{x=f}^{c} (x)_f \, \frac{\Gamma_\alpha(d, a, c, x)}{Q_\alpha(d, a)} \\
&= \sum_{x=f}^{c} (x)_f \, \frac{C_c^x \, \pi_\alpha(d, a - c + x, x)}{Q_\alpha(d, a)} \\
&= \frac{(c)_f}{Q_\alpha(d, a)} \sum_{x=f}^{c} C_{c-f}^{x-f} \, \pi_\alpha(d, a - c + x, x) \\
&= \frac{(c)_f \, \pi_\alpha(d, a, f)}{Q_\alpha(d, a)} .
\end{aligned}
$$

Notons ensuite qu'en remplaçant $Q_\alpha(d, a)$ et $\pi_\alpha(d, a, f)$ par leurs expressions analytiques (cf. formules $[Q]$ en *I*-§ 1-2 et $[\pi]$ en *I*-§ 3), on peut aussi écrire :

$$E[(X_d)_f] = \frac{(c)_f}{(C_a^\alpha)^d} \sum_{j=0}^{f} (-1)^j \, C_f^j \, (C_{a-j}^\alpha)^d ,$$

soit encore, après simplification par $(\alpha\,!)^d$:

$$E[(X_d)_f] = (c)_f \sum_{j=0}^{f} (-1)^j \, C_f^j \left[\frac{(a-j)_\alpha}{(a)_\alpha}\right]^d .$$

Déduisons-en enfin l'expression de l'espérance mathématique et celle de la variance de X_d.

En posant $f = 1$, on obtient directement :

$$E[X_d] = c \left[1 - \left(\frac{a-\alpha}{a}\right)^d\right],$$

et en posant $f = 2$, on obtient :

$$E[X_d(X_d - 1)] = c(c-1)\left[1 - 2\left(\frac{a-\alpha}{a}\right)^d + \left(\frac{(a-\alpha)(a-\alpha-1)}{a(a-1)}\right)^d\right],$$

d'où, en utilisant la formule bien connue :

$$V[X_d] = E[X_d(X_d-1)] + E[X_d] - (E[X_d])^2,$$

et après quelques transformations élémentaires et simplifications :

$$V[X_d] = c\left(\frac{a-\alpha}{a}\right)^d \left[(c-1)\left(\frac{a-\alpha-1}{a-1}\right)^d - c\left(\frac{a-\alpha}{a}\right)^d + 1\right].$$

Remarque :

Il est aisé de vérifier que dans le cas particulier correspondant à $d = 1$, en utilisant les formules générales établies ci-dessus, on obtient :

$$E[X_1] = \frac{\alpha c}{a}$$

$$V[X_1] = \frac{a-\alpha}{a-1}\alpha\frac{c}{a}\left(1 - \frac{c}{a}\right)$$

$$E[(X_1)_f] = \frac{(\alpha)_f\,(c)_f}{(a)_f} \quad (\text{pour } f \leqslant c \leqslant a),$$

comme il se doit puisque la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 est la loi hypergométrique $\mathcal{H}(a, \alpha, c/a)$.

La vérification de chacune des deux premières égalités est immédiate.

Pour la troisième, on peut écrire successivement :

$$E[(X_1)_f] = (c)_f \sum_{j=0}^{f} (-1)^j C_f^j \frac{(a-j)_\alpha}{(a)_\alpha}$$

$$= \frac{(c)_f}{(a)_\alpha}\left(\Delta^f\left[(a-f+x)_\alpha\right]\right)_{x=0}$$

$$= \frac{(c)_f}{(a)_\alpha} (\alpha)_f \, (a - f)_{\alpha - f}$$

$$= \frac{(c)_f \, (\alpha)_f}{(a)_f} \text{ puisque } (a - f)_{\alpha - f} = \frac{(a)_\alpha}{(a)_f}.$$

4.2 Moments de la variable aléatoire Y.

Nous nous proposons maintenant de déterminer l'espérance mathématique $E[Y]$ et plus généralement, pour tout entier positif f, le moment factoriel d'ordre f, $E[(Y)_f]$ de la variable aléatoire Y.

Montrons d'abord que l'on a :

$$E[(Y)_f] = f!\; C_a^\alpha \, m \, C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-1-l} \, C_{m-1}^l \, \frac{1}{c-l} \, \frac{(C_{a-c+l}^\alpha)^{f-1}}{(C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha)^f}.$$

En effet, compte tenu de la définition de $E[(Y)_f]$, des expressions de $\mathcal{Y}$ et de $q(y)$, de ce que l'on a $(y)_f = 0$ pour $y \leqslant f-1$ et de ce que, pour tout nombre réel u tel que $|u| < 1$, on a

$$\sum_{y=f}^{\infty} (y)_f \, u^{y-f} = f!\, (1-u)^{-f-1}$$

on peut écrire successivement :

$$E[(Y)_f] = \sum_{y \in \mathcal{Y}} (y)_f \, q(y)$$

$$= \sum_{y=f}^{\infty} (y)_f \left[m \, C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-1-l} \, C_{m-1}^l \, \frac{1}{c-l} \, \frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \left(\frac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \right)^{y-1} \right]$$

$$= m \, C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-1-l} \, C_{m-1}^l \, \frac{1}{c-l} \, \frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \left[\sum_{y=f}^{\infty} (y)_f \left(\frac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \right)^{y-1} \right]$$

$$= m \, C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-1-l} \, C_{m-1}^l \, \frac{1}{c-l} \, \frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \left(\frac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \right)^{f-1} \left[\sum_{y=f}^{\infty} (y)_f \left(\frac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \right)^{y-f} \right]$$

$$= m \, C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-1-l} \, C_{m-1}^l \, \frac{1}{c-l} \, \frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \left(\frac{C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \right)^{f-1} f! \left(\frac{C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha}{C_a^\alpha} \right)^{-f-1}$$

$$= f\,!\; C_a^\alpha \; m C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-1-l}\; C_{m-1}^l \frac{1}{(c-l)} \frac{(C_{a-c+l}^\alpha)^{f-1}}{(C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha)^f}$$

Après simplification par $(\alpha\,!)^f$, on peut aussi écrire :

$$E[(Y)_f] = f\,!\; (a)_\alpha\; m C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-1-l}\; C_{m-1}^l \frac{1}{(c-l)} \frac{[(a-c+l)_\alpha]^{f-1}}{[(a)_\alpha - (a-c+l)_\alpha]^f}$$

ou encore :

$$E[(Y)_f] = f\,!\; (a)_\alpha\; m\, C_c^m \left\{ \Delta^{m-1} \left[\frac{1}{(c-x)} \frac{[(a-c+x)_\alpha]^{f-1}}{[(a)_\alpha - (a-c+x)_\alpha]^f} \right] \right\}_{x=0}$$

L'espérance mathématique $E\,[Y]$ de la variable aléatoire Y a donc pour expression :

$$E\,[Y] = C_a^\alpha\; m C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-1-l}\; C_{m-1}^l \times \frac{1}{(c-l)\,(C_a^\alpha - C_{a-c+l}^\alpha)}$$

ou

$$E\,[Y] = (a)_\alpha\; m C_c^m \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^{m-1-l}\; C_{m-1}^l \times \frac{1}{(c-l)\;[(a)_\alpha - (a-c+l)_\alpha]}$$

ou encore :

$$E\,[Y] = (a)_\alpha\; m\, C_c^m \left\{ \Delta^{m-1} \left[\frac{1}{(c-x)\;[(a)_\alpha - (a-c+x)_\alpha]} \right] \right\}_{x=0}$$

Remarque :

Dans le cas particulier où l'on a $\alpha = 1$, la constitution d'une suite d'α-échantillons $S_1, S_2, \ldots, S_d, \ldots$ se réduit à une succession de prélèvements avec remise d'un seul individu dans la population A.

Désignons par T_1 la variable aléatoire dont la réalisation représente le nombre de prélèvements à effectuer pour obtenir un premier individu appartenant à la sous-population C et pour tout k de 2 à m, par T_k la variable aléatoire dont la réalisation représente le nombre de prélèvements supplémentaires à effectuer, lorsque l'on a déjà obtenu $k-1$ individus tous distincts provenant de C, pour en obtenir un $k^{\text{ème}}$ distinct des $k-1$ précédents.

Il est clair que :

– Pour tout k de 1 à m, la loi de probabilité de la variable aléatoire

T_k est la loi géométrique (ou loi de Pascal) de paramètre $p_k = \dfrac{c-k+1}{a}$.

– Les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots T_m$ sont indépendantes.

– La variable aléatoire Y est la somme de ces m variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

Or l'espérance mathématique $E[T]$ et la variance $V[T]$ d'une variable aléatoire T dont la loi de probabilité est la loi géométrique de paramètre p ont respectivement pour expression :

$$E[T] = \frac{1}{p}\ ;\ V[T] = \frac{1-p}{p^2}\ .$$

Il en résulte que pour $\alpha = 1$, on obtient :

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{m} \frac{a}{c-k+1}$$

$$V[Y] = \sum_{k=1}^{m} \frac{a\,(a-c+k-1)}{(c-k+1)^2}.$$

(Les formules correspondant aux deux cas particuliers définis par $a = c$ ou $c = m$ sont mentionnées par W. FELLER [cf. "An Introduction to Probability Theory and its Applications". Vol. 1, 2ème édition p. 211 et 224 (n° 24) ou p. 446 (n° 25)]).

Il est aisé de vérifier que nous retrouvons bien ces deux expressions.

En effet, compte tenu de ce que l'on a :

$$\frac{1}{(c-x)[a-(a-c+x)]} = \frac{1}{(c-x)^2}$$

et :
$$\frac{a-c+x}{(c-x)[a-(a-c+x)]^2} = \frac{a}{(c-x)^3} - \frac{1}{(c-x)^2}.$$

on peut écrire d'une part :

$$E[Y] = a\,m\,C_c^m \left(\Delta^{m-1}\left[\frac{1}{(c-x)^2}\right]\right)_{x=0}$$

$$= a\,m\,C_c^m \left(\frac{(m-1)!}{(c-x)_m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{c-x-i}\right)_{x=0}$$

$$= a \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{c-i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a}{c-k+1},$$

et d'autre part : $E[Y(Y-1)] =$

$$= 2am\, C_c^m \left(\Delta^{m-1} \left[\frac{a}{(c-x)^3} - \frac{1}{(c-x)^2} \right] \right)_{x=0}$$

$$= a^2 m\, C_c^m \left(\Delta^{m-1} \left[\frac{2}{(c-x)^3} \right] \right)_{x=0} - 2E[Y]$$

$$= a^2 m\, C_c^m \left(\frac{(m-1)!}{(c-x)_m} \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{(c-x-i)^2} + \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{c-x-i} \right)^2 \right] \right)_{x=0} - 2E[Y]$$

$$= a^2 \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{(c-i)^2} + (E[Y])^2 - 2E[Y]$$

d'où :

$$V[Y] = E[Y(Y-1)] + E[Y] - (E[Y])^2$$

$$= a^2 \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{(c-i)^2} - E[Y]$$

$$= a^2 \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{(c-i)^2} - a \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{c-i}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{a(a-c+k-1)}{(c-k+1)^2}$$