

# CAHIERS DU BURO

G. KREWERAS

**Aires des chemins surdiagonaux à étapes  
obliques permises**

*Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.  
Série Recherche, tome 24 (1976), p. 9-18*

[http://www.numdam.org/item?id=BURO\\_1976\\_\\_24\\_\\_9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BURO_1976__24__9_0)

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1976,  
tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# AIRES DES CHEMINS SURDIAGONAUX A ÉTAPES OBLIQUES PERMISES

G. KREWERAS

## I – INTRODUCTION

Comme dans l'article précédent du même "Cahier", nous considérons ici les points  $(x, y)$  de  $\mathbb{Z}^2$  comme les sommets d'un graphe, mais avec trois arcs (au lieu de deux seulement) partant de chaque sommet  $(x, y)$  : l'un vers  $(x + 1, y)$  ("arc horizontal"), un autre vers  $(x + y, 1)$  ("arc vertical"), et un troisième vers  $(x + 1, y + 1)$  ("arc oblique") ; nous appellerons *chemin royal* tout chemin de ce graphe, par analogie avec la marche du roi aux échecs.

Les chemins royaux joignant  $(0, 0)$  à un point de coordonnées entières non-négatives  $(x, y)$  forment un ensemble de cardinal  $R(x, y)$ . Les nombres  $R(x, y)$  ont été fréquemment étudiés, notamment dans [2] et [1] ; nous en donnons un tableau plus loin.

Nous appelons *pont royal strict de portée n* tout chemin joignant  $(0, 0)$  à  $(n, n)$  tel que tout sommet *intermédiaire* satisfasse à  $x < y$  ; la fig. 1 en donne un exemple. Le nombre de ponts royaux stricts de portée  $n$  est donné par la suite des entiers  $b_n$  :

$$\begin{array}{cccccccc} n & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline b_n & = & 1 & 2 & 6 & 22 & 90 & 394 & 1806 & 8558 \end{array} ,$$

également étudiés dans [1] sous le nom de "nombres de Schröder doubles".

Lorsqu'un pont royal strict de portée  $n$ , soit  $P$ , est tracé dans  $\mathbb{R}^2 \supset \mathbb{Z}^2$ , il existe une aire  $S(P)$  comprise entre  $P$  et la diagonale  $y = x$ , aire qui peut

-----  
(\*) Le présent travail a pu être réalisé grâce à l'appui de la Sous-commission franco-québécoise de coopération scientifique et technologique.

se décomposer en triangles rectangles isocèles comme l'indique la fig. 1. Parmi ces triangles, dont chacun a pour aire  $1/2$ , nous distinguerons les triangles "sur-hypoténuse" et les triangles "sous-hypoténuse".

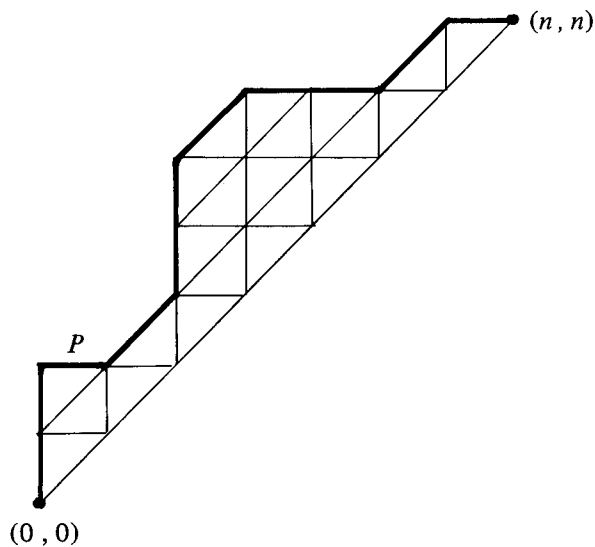


Fig. 1

L'objet principal de cet article est d'étudier la somme des aires  $\sum S(P)$  lorsque  $P$  décrit l'ensemble des  $b_n$  ponts royaux stricts de portée  $n$  ; on montrera en particulier que

$$\sum_P S(P) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i-1} C_{2n-1}^{2i} .$$

Cette étude constitue donc un prolongement naturel de la première partie de l'article précédent du même "Cahier" ; bien que l'expression finale soit ici un peu moins simple, la méthode suivie sera grosso modo la même .

## II – LES NOMBRES $A(x, y)$

Pour tout point entier  $(x, y)$  tel que  $0 \leq x < y$ , appelons  $A(x, y)$  le nombre de chemins royaux joignant  $(0, 0)$  à  $(x, y)$  et qui sont "surdiagonaux au sens fort", c'est-à-dire tels qu'en tout sommet  $(\xi, \eta)$  autre que  $(0, 0)$  on ait  $\xi < \eta$ .

Les nombres  $A(x, y)$  ont été spécialement étudiés dans [1] (où ils s'appellent  $A'_1(x, y)$ ) ; on y montre en particulier que

$$A(x, y) = R(x, y - 1) - R(x - 1, y). \quad (1)$$

Les deux tableaux ci-après donnent respectivement les premiers des nombres  $R(x, y)$  et  $A(x, y)$ .

8		1	17	145	833	3649				
7		1	15	113	575	2241	7183			
6		1	13	85	377	1289	3653	8989		
5		1	11	61	231	681	1683	3653	7183	
4		1	9	41	129	321	681	1289	2241	3649
3		1	7	25	63	129	231	377	575	833
2		1	5	13	25	41	61	85	113	145
1		1	3	5	7	9	11	13	15	17
$y = 0$		1	1	1	1	1	1	1	1	1
$R(x, y)$	$x = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	

8	1	14	96	430	1408	3534	6752	8558
7	1	12	70	264	714	1412	1806	
6	1	10	48	146	304	394		
5	1	8	30	68	90			
4	1	6	16	22				
3	1	4	6					
2	1	2						
$y = 1$	1							
$A(x, y)$	$x = 0$	1	2	3	4	5	6	7

Les nombres  $R$  et  $A$  font l'objet de deux lemmes simples, exposés dans les deux paragraphes suivants

### III – LEMME SUR LES $R$

Si l'on définit  $\varphi(x, y)$  par la somme alternée

$$\varphi(x, y) = R(x, y) - R(x - 1, y + 1) + \dots + (-1)^x R(0, y + x)$$

et  $\psi(x, y)$  par

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) + \varphi(x - 2, y),$$

le lemme énonce que

$$\psi(x, y) = R(x, y - 1) + R(x - 1, y - 1), \quad (2)$$

étant entendu que l'apparition d'un argument négatif rend nulle l'expression correspondante.

Ce lemme est trivialement vrai pour  $x = 0$  (les deux membres de (2) sont égaux à 1) et se démontre par récurrence sur  $x$ . En effet on a

$$\varphi(x, y) = R(x, y) - \varphi(x - 1, y + 1),$$

d'où

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= R(x, y) - \varphi(x - 1, y + 1) + R(x - 2, y) - \varphi(x - 3, y + 1) \\ &= R(x, y) + R(x - 2, y) - \psi(x - 1, y + 1). \end{aligned}$$

En remplaçant, en vertu de l'hypothèse de récurrence,  $\psi(x-1, y+1)$  par  $R(x-1, y) + R(x-2, y)$ , on trouve

$$\psi(x, y) = R(x, y) - R(x-1, y),$$

ce qui, compte tenu de la relation évidente

$$R(x, y) = R(x-1, y) + R(x, y-1) + R(x-1, y-1),$$

fait bien retomber sur l'expression (2).

#### IV – LEMME SUR LES $A$

Pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n-1$ , on a

$$A(k, 2n-k) = \sum_{\lambda=0}^k A(\lambda, \lambda+n-k) A(k-\lambda, n-\lambda).$$

Pour l'établir il suffit de remarquer que chacun des chemins royaux surdiagonaux au sens fort qui joignent  $(0, 0)$  à  $(k, 2n-k)$  a au moins un point sur la droite  $y = x + n - k$  et d'appeler  $\lambda$  l'abscisse du *dernier* de ces points, lequel décompose le chemin en deux tronçons indépendants ; pour  $\lambda$  donné, le nombre de possibilités est alors  $A(\lambda, \lambda + n - k)$  pour le premier tronçon et  $A(k - \lambda, n - k)$  pour le second (même raisonnement que pour la fig. 2 de l'article précédent).

#### V – SOMME DES AIRES

L'aire totale du triangle formé par  $(0, 0)$ ,  $(n, n)$  et  $(0, n)$  est découpée par les abscisses et ordonnées entières et par les obliques ( $y = x +$  entier constant) en  $n^2$  triangles rectangles isocèles, dont  $n(n+1)/2$  triangles sur-hypoténuse et  $n(n-1)/2$  triangles sous-hypoténuse. Dans la somme des aires  $S(P)$ , chacun de ces triangles est à compter autant de fois qu'il y a de ponts qui le "contournent" (par le haut et la gauche).

Ainsi par exemple, pour  $n = 4$ , on a inscrit sur la fig. 2 dans chacun des seize triangles le nombre de ponts qui le contournent ; la somme de ces nombres est 239, qui se trouve être aussi égal à la somme

$$1 + 2C_7^2 + 4C_7^4 + 8C_7^6.$$

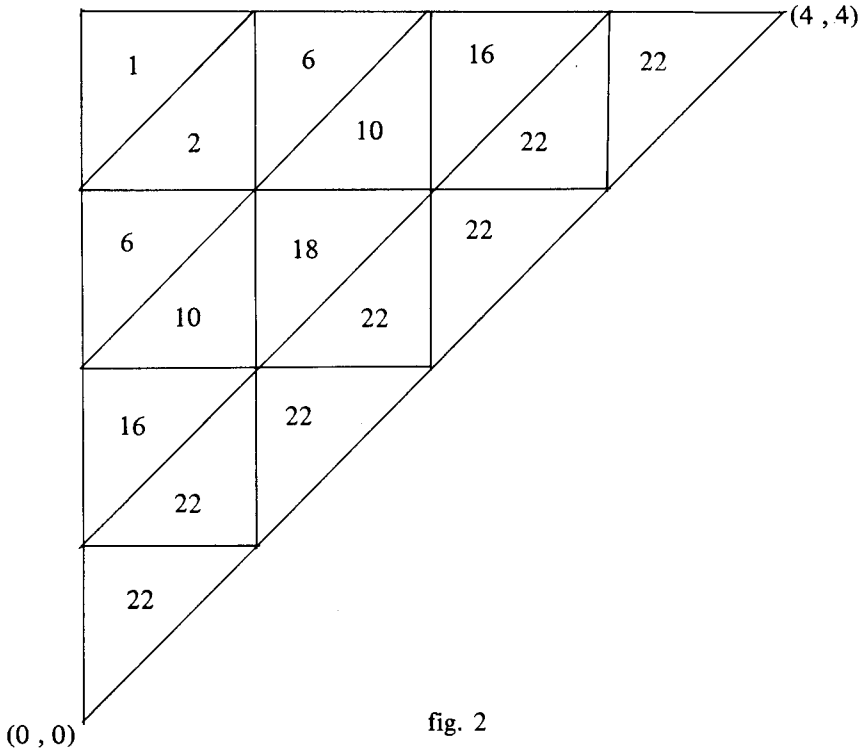


fig. 2

Pour établir un résultat analogue pour  $n$  quelconque, nous considérerons séparément les triangles sur-hypoténuse et sous-hypoténuse.

5.1. Soit  $T$  un triangle sur-hypoténuse, que nous définirons par les coordonnées  $(a, b)$  du sommet de l'angle droit ; ses deux autres sommets sont  $(a, b - 1)$  et  $(a + 1, b)$ . Les ponts  $P$  qui contournent  $T$  sont de deux sortes : ceux qui passent par un point  $(a - i, b + i)$  ( $i \geq 0$ ) et ceux pour lesquels le point  $(a - i - 1, b + i)$  est joint au point  $(a - i, b + i + 1)$  par une étape oblique.

Les premiers sont au nombre de

$$f_i(a, b) = A(a - i, b + i) A(n - b - i, n - a + i),$$

les seconds au nombre de

$$g_i(a, b) = A(a - i - 1, b + i) A(n - b - i - 1, n - a + i).$$

Le nombre  $m_T$  à inscrire dans le triangle  $T$  serait donc

$$m_T = \sum_{i \geq 0} [f_i(a, b) + g_i(a, b)].$$

Ce nombre n'a malheureusement pas d'expression simple en fonction de  $a$  et  $b$ . Par contre nous pourrons plus aisément calculer une expression de la somme des  $m_T$  lorsque  $T$  varie de manière que la différence  $b - a$  soit constante. Nous poserons  $b - a = n - h$ , avec  $1 \leq n - h \leq n$ , c'est-à-dire  $0 \leq h \leq n - 1$  ; on aura alors

$$M_h = \sum_{b-a=n-h} m_T = \sum_{(a,i)} f_i(a, a+n-h) + \sum_{(a,i)} g_i(a, a+n-h).$$

Ces deux dernières sommes se calculent plus aisément si l'on somme d'abord par rapport à  $a$ . La première d'entre elles donne alors

$$\sum_{a=i}^{h-i} A(a-i, a+n-h+i) A(h-a-i, n-a+i),$$

ce qui permet d'utiliser le "lemme sur les  $A$ " avec  $\lambda = a - i$  et  $k = h - 2i$  et de trouver

$$A(h-2i, 2n-h+2i) = R(h-2i, 2n-h+2i-1) - R(h-2i-1, 2n-h+2i).$$

La sommation de ce dernier membre par rapport à  $i$  donne la somme alternée qui a été appelée  $\varphi(h, 2n-h-1)$ .

La deuxième des sommes qui interviennent pour le calcul de  $M_h$  se traite par une méthode analogue ; mais pour pouvoir utiliser le "lemme sur les  $A$ " il faut cette fois poser  $\lambda = a - i - 1$ ,  $k = h - 2i - 2$  et remplacer  $n$  par  $n - 1$  ; on trouve alors  $A(h-2i-2, 2n-h+2i)$ , dont la traduction en différence de deux  $R$  et la sommation par rapport à  $i$  donne cette fois  $\varphi(h-2, 2n-h-1)$ .

Finalement  $M_h$  n'est autre que la somme de  $\varphi(h, 2n-h-1)$  et de  $\varphi(h-2, 2n-h-1)$ , c'est-à-dire

$$\psi(h, 2n-h-1) = R(h, 2n-h-2) + R(h-1, 2n-h-2)$$

(d'après le "lemme sur les  $R$ ").

5.2. Les triangles sous-hypoténuse donnent lieu au même type de calcul. Il sera commode de définir chacun d'eux, soit  $T'$ , par le sommet  $(a, b)$  de son angle droit, les deux autres sommets étant  $(a-1, b)$  et  $(a, b+1)$ , et de compter d'une part les ponts qui passent par  $(a-i, b+i)$ , d'autre part ceux qui ont une étape oblique joignant  $(a-i, b+i-1)$  à  $(a-i+1, b+i)$  ; mais  $i$  désigne cette fois obligatoirement un entier positif.

Le nombre à inscrire dans  $T'$  est



$$m_{T'} = \sum_{i>0} [f_i(a, b) + g'_i(a, b)],$$

$f_i(a, b)$  ayant la même expression que précédemment et  $g'_i(a, b)$  étant donné par

$$g'_i(a, b) = A(a - i, b + i - 1) A(n - b - i, n - a + i - 1).$$

Nous ferons de nouveau varier  $T'$  de façon que la différence  $b - a$  soit constante, mais nous poserons cette fois  $b - a = h - n$ , avec  $n \leq h \leq 2n - 2$ . La somme correspondante, que nous appelons de nouveau  $M_h$ , sera

$$M_h = \sum_{b-a=h-n} m_{T'} = \sum_{(a,i)} f_i(a, a + h - n) + \sum_{(a,i)} g'_i(a, a + h - n).$$

En procédant comme précédemment, avec les modifications nécessaires, on trouve par une première sommation par rapport à  $a$  :

$$A(2n - h - 2i, h + 2i) + A(2n - h - 2i, h + 2i + 2).$$

La seconde sommation, par rapport aux valeurs *positives* de  $i$ , donne cette fois

$$\begin{aligned} \varphi(2n - h - 2, h + 1) & \text{ pour les } f_i, \\ \varphi(2n - h - 2, h - 1) & \text{ pour les } g'_i. \end{aligned}$$

Mais on remarque que, lorsque la somme  $x + y$  est impaire, on a nécessairement

$$\varphi(x, y) = \varphi(y - 1, x + 1),$$

égalité qui résulte de la nullité de la somme alternée des  $R$  depuis  $(0, x + y)$  jusqu'à  $(x + y, 0)$  ; il s'ensuit que

$$\begin{aligned} M_h &= \varphi(h, 2n - h - 1) + \varphi(h - 2, 2n - h - 1) = \psi(h, 2n - h - 1) \\ &= R(h, 2n - h - 2) + R(h - 1, 2n - h - 2) \end{aligned}$$

(toujours d'après le "lemme sur les  $R$ ").

On constate que l'expression finale de  $M_h$  est la même dans les deux cas, mais avec  $0 \leq h \leq n - 1$  pour les alignements obliques de triangles sur-hypoténuse et avec  $n \leq h \leq 2n - 2$  pour les alignements obliques de triangles sous-hypoténuse.

On vérifie sur la figure 2 et le tableau des  $R(x, y)$  que l'on a bien, pour  $n = 4$  :

$$\begin{array}{l}
 \text{triangles} \\
 \text{sur} \\
 \text{hypoténuse}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{ll}
 h = 0 & 1 = 1 \\
 h = 1 & 6 + 6 = 11 + 1 \\
 h = 2 & 16 + 18 + 16 = 41 + 9 \\
 h = 3 & 22 + 22 + 22 + 22 = 63 + 25
 \end{array} \right.$$
  

$$\begin{array}{l}
 \text{triangles} \\
 \text{sous} \\
 \text{hypoténuse}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{ll}
 h = 4 & 22 + 22 + 22 = 41 + 25 \\
 h = 5 & 10 + 10 = 11 + 9 \\
 h = 6 & 2 = 1 + 1
 \end{array} \right.$$

## VI – SOMMATION FINALE

Dans le cas général la sommation finale par rapport à  $h$  donne la somme  $\rho_{2n-2} + \rho_{2n-3}$  des deux transversales consécutives  $x + y = 2n - 2$  et  $x + y = 2n - 3$  du tableau des  $R(x, y)$ .

Or la règle même de formation des  $R(x, y)$  comme sommes

$$R(x - 1, y) + R(x, y - 1) + R(x - 1, y - 1)$$

entraîne que

$$\rho_n = 2\rho_{n-1} + \rho_{n-2}.$$

On en conclut aisément que si l'on pose  $v_n = \rho_{2n-2} + \rho_{2n-3}$ , on a la récurrence

$$v_n = 6v_{n-1} - v_{n-2},$$

dont l'équation caractéristique  $r^2 - 6r + 1 = 0$  a pour zéros

$$(1 + \sqrt{2})^2 \quad \text{et} \quad (1 - \sqrt{2})^2.$$

De ce fait on sait que

$$v_n = A(1 + \sqrt{2})^{2n} + B(1 - \sqrt{2})^{2n},$$

et les conditions initiales  $v_1 = 1$  et  $v_2 = 7$  entraînent que

$$A = -\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad B = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2};$$

il en résulte que

$$v_n = \frac{1}{2} [(1 + \sqrt{2})^{2n-1} + (1 - \sqrt{2})^{2n-1}],$$

et en fin de compte, après développement binomial des parenthèses,

$$v_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i C_{2n-1}^{2i}. \quad (4)$$

Ainsi pour  $n = 4$  :

$$\begin{aligned} v_4 &= \rho_6 + \rho_5 = 169 + 70 (= 239) \\ &= 1 + 2 \times 21 + 4 \times 35 + 8 \times 7 (= 239). \end{aligned}$$

De l'expression finale (4) résulte bien l'expression annoncée de la somme des aires, puisque chacun des triangles  $T$  ou  $T'$  a pour aire  $1/2$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] KREWERAS G. — *Sur les hiérarchies de segments*, Cahiers du B.U.R.O., n° 20, Paris (1973).
- [2] MOSER et ZAYACHKOWSKI — *Lattice paths with diagonal steps*, Scripta M., n° 26 (1963), pp. 223-229.