CAHIERS DU BURO

M. SERFATI

Introduction aux algèbres de Post et à leurs applications

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 21 (1973), p. 3-100

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1973__21__3_0>

INTRODUCTION

Nous nous proposons ici de consacrer une étude aux Algèbres de Post, qui sont une extension naturelle des Algèbres de Boole.

Il est d'abord intéressant de revenir sur ce que recouvre le terme d'Algèbres de Boole. On distingue, par ordre de complexité croissante :

– l'algèbre $<2> = \{0,1\}$, sous-algèbre (totalement ordonnée) de toute autre algèbre ;

– les algèbres finies, nécessairement isomorphes à $<2>^n$, ou bien à $\mathcal{P}(E)$ (card $(E) = n$), où l'on n'a plus l'ordre total ;

– les algèbres "ensemblistes" du type $\mathcal{P}(E)$, où E est alors un ensemble quelconque, isomorphes à $<2>^E$ (*) ;

– les algèbres de Boole quelconques définies par exemple, comme treillis distributifs et complémentés, représentables seulement par un clan de parties d'un ensemble (Théorème de Stone).

La structure booléenne s'est construite peu à peu à partir de l'Algèbre $<2>$, support de la logique binaire. Il était naturel d'envisager la construction de logiques à r valeurs ($r \in N$; $r \geqslant 2$), où, dès que $r \geqslant 3$, il y a des degrés entre le vrai et le faux. Le support primitif a donc été, de façon naturelle, un ensemble $<r> = \{e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{r-1} = 1\}$, chaîne à r éléments, muni, comme on le verra, d'opérations supplémentaires dont les nécessités (du point originel de la logique) apparaîtront clairement. Mais, à partir de $<r>$, sera définie une structure algébrique **P** dénommée r-Algèbre de Post, qui est à $<r>$ ce qu'une algèbre de Boole est à $<2>$. De même, l'analogue "ensembliste" de $\mathcal{P}(E)$ sera en algèbre de Post $\mathcal{P}_r(E)$, ensemble des *partitions* ordonnées d'un ensemble E en r sous ensembles.

Comme, par ailleurs, une 2-Algèbre de Post n'est autre (à une bijection près) qu'une Algèbre de Boole, on voit bien quelle est la place des Algèbres de Post dans la catégorie des treillis distributifs.

(*) F^E désignera dans toute la suite l'ensemble des applications de E dans F

L'article de Post [14] consacré aux logiques à n-valeurs ne s'étendait guère sur le support algébrique nécessaire à leur étude. Ce fut Rosenbloom qui parla le premier [15] d'Algèbre de Post, mais en en donnant une axiomatique si obscure que pendant vingt ans, ce sujet tomba dans l'oubli. Il fut repris dans un excellent article d'Epstein [[3]] par la voie des treillis. Epstein démontra l'équivalence de la définition de Rosenbloom et d'un ensemble de propriétés simples. C'est cette définition qui a été utilisée ici.

Dans la première partie de cette étude, nous avons tâché de donner les outils de calcul postien : comme en algèbre de Boole, les techniques de calcul (et leur facilité d'emploi) sont ici essentielles. Mais le manque de référence dans la littérature mathématique (et aussi le souhait que ce papier soit "autonome") nous a conduit à développer un peu la partie "structure" (sous-algèbres, homomorphisme, structure produit et image) sans laquelle rien de solide ne peut être fait; on y verra aussi une forme de codage (postien vers booléen) dans le paragraphe consacré à la sous-diagonale qui permet de traduire en booléen tout problème postien. Les applications sont nombreuses. Enfin, il était important de noter l'existence d'un anneau postien, prolongement de l'anneau booléen usuel : La différence symétrique booléenne, dont on sait combien elle est précieuse, y trouve son extension.

La seconde partie traite des polynômes et des équations postiens. On y montre que tout polynôme a une décomposition canonique (forme normale disjonctive) qui est unique et possède des propriétés de "transparence" (homomorphisme) vis à vis des opérations postiennes usuelles : tous ceux qui ont dû manipuler les fonctions booléennes savent combien est utile, notamment pour la résolution des équations fonctionnelles. L'étude des polynômes conduit naturellement à celle des équations : on y montre comment l'on peut résoudre complètement un système algébrique quelconque de p équations et q inéquations postiennes à n inconnues ; on trouvera plusieurs exemples dans le texte.

Ces résultats pourront naturellement s'appliquer tout d'abord au cas où $\mathbf{P} = \langle r \rangle$ (et donc résoudre les équations sur un ensemble fini totalement ordonné), mais aussi au cas où $\mathbf{P}$ est une algèbre de fonctions (d'où à nouveau un procédé de résolution des équations fonctionnelles) et encore au cas où $\mathbf{P} = \mathfrak{P}_r(E)$, où les inconnues sont des partitions ordonnées d'un ensemble (en r sous-ensembles).

Un dernier chapitre enfin expose une application des résultats obtenus à une extension de la notion de graphe orienté, ici appelée r-graphoïdes : l'idée de cette extension est de graduer la notion de descendance. Dans un graphe orienté ordinaire, on utilise une logique à deux valeurs : la proposition "le sommet j descend du sommet i" est vraie ou fausse et prend donc sa valeur de vérité dans $\{0,1\} = \langle 2 \rangle$. Si on la value dans $\langle r \rangle$, on obtient la notion de "degré de descendance". A tout couple (i, j) de sommets on associe un élément $e_k \in \langle r \rangle$. Entre les cas $e_0 = 0$ (resp. $e_{r-1} = 1$) qui sont usuellement le cas de la non-descendance (resp. de la "pleine" descendance), il y a des degrés.

On voit aisément quel est le type de problèmes qui peuvent se poser : problèmes de cheminement à l'intérieur d'un graphoïde en n'empruntant que des chemins de poids au plus (resp. au moins) égal à un poids e_k donné (problème de l'e_k forte connexité) etc... ce qui est intéressant à constater c'est que l'on sait effectivement mettre en équation et résoudre les problèmes précédents : la technique consiste à utiliser des matières postiennes au lieu de matrices booléennes.

Qu'il me soit permis pour terminer, de remercier ici Monsieur KREWERAS qui, par l'intérêt qu'il a porté à mon travail m'a permis de mener à bien la rédaction de cet article.

RAPPELS ET NOTATIONS BOOLEENS

Si B est une algèbre de Boole, on désignera par $x \vee y$ la disjonction (sup.) de deux éléments, par $x \,.\, y$ leur conjonction (inf.), $\bar{x}$ le complément de x, 0 et 1 les éléments universels. On rappelle que :

$$(x \leqslant y) \Leftrightarrow (x \,.\, y = x) \Leftrightarrow (x \vee y = y) \Leftrightarrow (x \,.\, \bar{y} = 0).$$

Désignant par $<2> = \{0,1\}$ la sous-algèbre minimale, on définit une application *(exponentielle)* [[6]]

$$\mathrm{B} \times <2> \rightarrow \mathrm{B} \qquad (x\,,\,\alpha) \rightsquigarrow x^{\alpha}$$

par $$x^1 = x \qquad \text{et} \qquad x^0 = \bar{x}$$

On la prolonge ([[8]]) en une application :

$$\mathrm{B}^n \times <2>^n \rightarrow \mathrm{B}$$

par $$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{B}^n \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in <2>^n$$

$$\boxed{x^{\alpha} = \prod_1^n x_i^{\alpha_i} = (x_1^{\alpha_1}) \,.\, (x_2^{\alpha_2}) \ldots (x_n^{\alpha_n})} \qquad (\rho.\ 1)$$

On montre facilement que

$$x^{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = x \qquad (\rho.\ 2)$$

$$\bigvee_{\alpha \in <2>^n} x^{\alpha} = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha \neq \beta \Rightarrow x^{\alpha} \,.\, x^{\beta} = 0\,.$$

$$(\rho.\ 3) \text{ et } (\rho.\ 3')$$

Cette "orthonormalité" des x^{α} sera très utile dans la suite.

Cette notation exponentielle permet de simplifier considérablement certaines écritures puisque par exemple le théorème de la forme normale disjonctive (ou de Lagrange) s'écrit (voir [[11]], par exemple).

$$(\forall x \in \mathbf{B}^n) \qquad f(x) = \bigvee_{\alpha \in <2>^n} x^\alpha . f(\alpha).$$

Par exemple, pour $n = 2$ ce théorème dit que :

$$f(x_1, x_2) = \overline{x}_1 . \overline{x}_2 . f(0, 0) \vee x_1 . \overline{x}_2 . f(1, 0) \vee \overline{x}_1 . x_2 . f(0, 1) \vee x_1 . x_2 \, f(1, 1) .$$

Une forme modifiée de ce théorème fournit la décomposition canonique d'un élément de l'algèbre de Boole produit $\mathbf{B}^n$:

$$(\forall x \in \mathbf{B}^n) \qquad x = \bigvee_{\alpha \in <2>^n} x^\alpha . \alpha \qquad (\rho. 4)$$

Par exemple, pour $n = 2$, on a $(\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{B}^2)$:

$$(x_1, x_2) = \overline{x}_1 . \overline{x}_2 . (0, 0) \vee x_1 . \overline{x}_2 . (1, 0) \vee \overline{x}_1 . x_2 . (0, 1) \vee x_1 . x_2 . (1, 1) .$$

On rappelle par ailleurs que si $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}'$ sont deux Algèbres de Boole, une application φ de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{B}'$ sera appelée un *homomorphisme booléen* si

$$(\forall (x, y) \in \mathbf{B}^2)$$

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \qquad \text{et} \qquad \varphi(\overline{x}) = \overline{\varphi(x)} .$$

On en déduit alors

$$\varphi(x . y) = \varphi(x) . \varphi(y)$$

$$\varphi(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(1) = 1 .$$

Il y a "compatibilité" complète avec les structures booléennes.

I – PROPRIÉTÉS DES ALGÈBRES DE POST

Une fois donnée la définition d'une Algèbre de Post, on étudie essentiellement dans le début de ce chapitre les techniques de *calcul* postien. On ne peut rien faire en postien (comme ailleurs) sans une certaine aisance de calcul ; les Algèbres de Post sont de ce point de vue, un peu moins facile d'accès que d'autres structures : le nombre des opérations de base et des éléments distingués y est en effet relativement élevé – l'habitude du calcul booléen aide néanmoins à la compréhension.

Signalons que les sections A et B du présent chapitre sont dues à Epstein : il s'agit de la définition et des propriétés essentielles des Algèbres de Post, que nous avons cru bon de reprendre ici de façon à rendre cet article, autant que possible, autonome. Pour le reste, il s'agit essentiellement de résultats inédits, ou figurant dans la thèse [8].

A – DEFINITION

Soit r un entier supérieur ou égal à 2, fixé dans toute la suite.

Définition (1).

On appelle *r-Algèbre* de Post un treillis distributif **P**

$$(\text{on note } x \vee y = \sup.\{x\,,y\} \qquad \text{et} \qquad x\,.\,y = \inf.\{x\,,y\})$$

avec éléments universels (0 et 1) tels que :

a) il existe r applications de **P** dans **P** :

$$0 \leqslant i \leqslant r-1 \qquad x \rightsquigarrow x^i$$

telles que

$$(\forall x \in P) \quad \begin{cases} \bigvee\limits_{i=0} x^i = 1 & \text{(A1)} \\ i \neq j \Rightarrow x^i\,.\,x^j = 0 & \text{(A2)} \end{cases}$$

b) il existe dans **P** une chaîne $<r>$:

$$<r> = \{e_0 , e_1 , \ldots , e_{r-1}\}$$

$$0 = e_0 \leqslant e_1 \leqslant \ldots \leqslant e_{r-1} = 1 \qquad \text{(A3)}$$

et l'on a :

a) $(x \,.\, e_1 = 0) \Rightarrow (x = 0)$ (A4)

b) $(\forall\, i)\ (1 \leqslant i \leqslant r - 1)\ (x \vee e_{i-1} = e_i) \Rightarrow (x = e_i)$ (A5)

c) $(\forall\, x \in \mathbf{P}) \qquad x = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i \,.\, e_i$ (A6) .

Interprétation

En logique à r valeurs, il y a r valeurs de "vérité" formant un ensemble totalement ordonné qui est $<r>$. Les relations (A1) et (A2) assurent que *de r choses, l'une et l'une seulement.* La proposition (A6) permet effectivement l'écriture de la valeur de vérité (x) de toute proposition suivant une décomposition canonique.

Les propriétés (A4) et (A5) sont *techniques.* Elles permettent d'assurer par exemple que tous les éléments de $<r>$ sont distincts.

Remarque

Si $r = 2$, les conditions précédentes s'écrivent :

$$x^0 \vee x^1 = 1 \qquad x^0 \,.\, x^1 = 0$$

x^0 et x^1 sont donc compléments l'un de l'autre. On a aussi

$$(\forall\, x \in \mathbf{P}) \qquad x^0 . \, e_0 \vee x^1 . e_1 = x^1 \, .$$

P est donc une algèbre de Boole (tous ses éléments sont complémentés).

Définition (2) :

r s'appelle le *module* de **P**, les x^i s'appellent les *composantes postiennes* de x.

Les propriétés (A4) et (A5) s'étendent de façon simple. On a

Proposition :

si $\qquad x \,.\, e_i = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant r - 1)$

alors $\qquad x = 0$

En effet

$$x \, . \, e_i = 0 \Rightarrow (x \, . \, e_i) \, . \, (e_1) = 0 \Rightarrow x \, . \, e_1 = 0 \Rightarrow x = 0 \, .$$

Proposition :

si $\quad x \vee e_i = e_j \quad$ et $\quad i < j$

alors $\quad x = e_j$

En effet

$$x \vee e_i \vee e_{j-1} = e_j \vee e_{j-1} = e_j$$

et $\quad (i \leqslant j - 1) \Rightarrow x \vee (e_i \vee e_{j-1}) = x \vee e_{j-1} = e_j$

donc $\quad x = e_j \, .$

B – LE CENTRE D'UNE ALGEBRE DE POST.

L'ensemble **B** des éléments complémentés d'une r-Algèbre de Post est fondamental dans la suite. Nous l'appellerons le *centre* de **P**. On a un théorème qui est bien connu :

Proposition :

L'ensemble des éléments complémentés d'un treillis distributif est une algèbre de Boole.

La démonstration est très simple et ressemble par exemple à celle qui prouve que dans un monoïde, l'ensemble des éléments inversibles est un groupe. Par exemple, le centre de $<r>$ est $<2>$ (la démonstration est triviale). Voici maintenant un théorème [1] qui démontre que **B** est exactement l'ensemble des composantes postiennes des éléments de **P**.

Théorème [1]

Soit $y \in \mathbf{P}$. Pour que y appartienne à **B**, il faut et il suffit qu'il existe $x \in \mathbf{P}$ et $i \in [0 \, , r - 1]$ tels que

$$y = x^i \, .$$

Démonstration

Supposons d'abord que l'on ait $y = x^i$.

Alors, si l'on pose $z = \bigvee\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{r-1} x^j$, il vient:

$$y \vee z = 1 \qquad \text{et} \qquad y \,.\, z = \bigvee_{j \neq i} x^i \,.\, x^j = 0$$

et y est complémenté.

En sens inverse, supposons y complémenté. Donc il existe $\bar{y}$ tel que

$$y \vee \bar{y} = 1 \qquad \text{et} \qquad y \,.\, \bar{y} = 0 \,.$$

Je dis qu'alors : $$y = y^{r-1} \,. \tag{B1}$$

En effet

$$y = y^0 . e_0 \vee y^1 . e_1 \vee \ldots \vee y^{r-2} . e_{r-2} \vee y^{r-1} \geqslant y^{r-1}.$$

Mais, d'autre part :

$$y \leqslant y^0 . e_{r-2} \vee y^1 . e_{r-2} \vee \ldots \vee y^{r-2} . e_{r-2} \vee y^{r-1}$$

$$y \leqslant (y^0 \vee y^1 \vee \ldots \vee y^{r-2}) \,.\, e_{r-2} \vee y^{r-1}$$

$$y \leqslant (y^0 \vee y^1 \vee \ldots \vee y^{r-2} \vee y^{r-1}) \,.\, (e_{r-2} \vee y^{r-1}) = e_{r-2} \vee y^{r-1} \,.$$

Alors

$$1 = y \vee \bar{y} \leqslant e_{r-2} \vee y^{r-1} \vee \bar{y}$$

et donc $$(y^{r-1} \vee y) \vee e_{r-2} = 1 = e_{r-1} \Rightarrow y^{r-1} \vee \bar{y} = 1 \,.$$

En complémentant (y^{r-1} et $\bar{y}$ sont tous deux complémentés), il vient

$$\overline{y^{r-1}} \,.\, y = 0 \qquad \text{soit} \qquad y \leqslant y^{r-1} \,.$$

Remarque :

On utilisera souvent dans la suite une propriété demontrée en cours de calcul : la disjonction de certains des y^i admet pour complémentaire (booléen) la disjonction des autres. C'est-à-dire (si $I \subset [0,\ r-1]$ est un ensemble d'indices)

$$\left[\overline{\bigvee_{j \in I} x^j}\right] = \bigvee_{j \notin I} x^j \,.$$

Nous allons maintenant démontrer un résultat fondamental (encore du à Epstein), concernant l'unicité des composantes postiennes

Lemme

Si $b \,.\, e_i = b \,.\, e_j$ (avec $b \in \mathrm{B}$ et $i \neq j$) alors $b = 0$

Supposons $i < j$ et

$$e_j = e_j \,.\, (b \vee \bar{b}) = e_j \,.\, b \vee e_j \,.\, \bar{b} = e_i \,.\, b \vee e_j \bar{b} \leqslant e_i \vee e_j \,.\, \bar{b} \leqslant e_j \vee e_j = e_j$$

Donc $\quad e_i \vee e_j \,.\, \bar{b} = e_j \quad$ et $\quad e_j \,.\, \bar{b} = e_j$

Ceci implique

$$b \,.\, e_j = 0 \qquad \text{et donc} \qquad b = 0\,, \qquad \text{car} \qquad j \geqslant 1\,.$$

Théorème [2]

Les composantes postiennes d'un élément sont uniques.

Démonstration :

$$x = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i \,.\, e_i \qquad x = \bigvee_{i=0}^{r-1} y^i \,.\, e_i$$

et $\quad \bigvee_i x^i = \bigvee_i y^i = 1 \quad$ avec $\quad x^i \,.\, x^j = y^i \,.\, y^j = 0 \quad (i \neq j)\,.$

Soit

$$j \neq k\,. \qquad x^j \,.\, y^k \,.\left[\bigvee_{i=0}^{r-1} x^i \,.\, e_i\right] = x^j \,.\, y^k \,.\left[\bigvee_{i=0}^{r-1} y^i \,.\, e_i\right].$$

Donc $\qquad x^j \,.\, y^k \,.\, e_j = x^j \,.\, y^k \,.\, e_k\,,$

et comme $\quad x^j \,.\, y^k \in \mathbf{B} \quad$ on a $\quad x^j \,.\, y^k = 0\,, \quad$ d'après le lemme précédent.

Mais comme

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} x^i = 1\,, \qquad \text{on en déduit :}$$

$$y^k = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i \,.\, y^k = y^k \,.\, x^k \qquad \text{et donc} \qquad y^k \leqslant x^k\,.$$

On démontre l'inégalité inverse de la même façon. L'unicité des composantes postiennes (extension de l'unicité du complémentaire booléen) est une propriété importante : elle va permettre d'identifier les composantes (et les décompositions canoniques). Par exemple si x est un élément complémenté de **P**, x s'écrit :

$$x = \bar{x} \,.\, 0 \vee x \,.\, 1 = \bar{x} \,.\, e_0 \vee 0 \,.\, e_1 \vee \ldots \vee 0 \,.\, e_{r-2} \vee x \,.\, e_{r-1}$$

et donc :

$$x^0 = x\,;\ (1 \leqslant i \leqslant r-2)\, x^i = 0\ ;\ x^{r-1} = x\,.$$

De même, si l'on recherche les composantes des éléments de $<r>$, on a :

$$e_i = 0 \,.\, e_0 \vee \ldots \vee 0 \,.\, e_{i-1} \vee 1 \,.\, e_i \vee 0 \,.\, e_{i+1} \vee \ldots \vee 0 \,.\, e_{r-1}$$

et donc

$$(e_i)^j = \delta_i^j \text{ (symbole de Krönecker)}\,. \qquad \text{(B2)}$$

Le théorème "technique" qui suit permet, à partir d'une décomposition quelconque : du type

$$x = \bigvee_1^{r-1} b_i \,.\, e_i \qquad \text{où} \qquad b_i \in \mathrm{B}$$

de donner la décomposition canonique (unique) de x.

Théorème [3]

Si $\quad x = \bigvee_1^{r-1} b_i \,.\, e_i \quad$ alors

$$x^0 = \prod_1^{r-1} \overline{b_j} \quad ; \quad x^i = b_i \,.\, \prod_{j \geqslant i+1} \overline{b_j} \quad (1 \leqslant i \leqslant r-2)$$

$$x^{r-1} = b_{r-1}\ ; \qquad \text{(relations (B3))}$$

Démonstration :

Observons d'abord que les x^i ainsi définis vérifient bien les conditions d'*orthonormalité* (A1-A2). Car $(1 \leqslant i \leqslant r-1)$

$$x^0 \,.\, x^{r-1} \leqslant \overline{b}_{r-1} \,.\, b_{r-1} = 0 \qquad x^0 \,.\, x^i \leqslant \overline{b}_i \,.\, b_i = 0$$

et si $\quad 1 \leqslant j \leqslant r-2\,,\quad$ et, par exemple : $\ i < j \quad (i+1 \leqslant j)$

$$x^i \,.\, x^j \leqslant \overline{b}_j \,.\, b_j = 0\,.$$

De plus

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} x^i = b_{r-1} \vee b_{r-2} \,.\, \overline{b}_{r-1} \vee b_{r-3} \,.\, \overline{b}_{r-2} \,.\, \overline{b}_{r-1} \vee \ldots \vee \overline{b}_1 \,.\, \overline{b}_2 \ldots \overline{b}_{r-1}\,.$$

Or on a

$$b_{r-1} \vee b_{r-2} \,.\, \overline{b_{r-1}} = (\overline{b_{r-1}} \vee b_{r-2}) \,.\, (b_{r-1} \vee \overline{b_{r-1}}) \quad \text{(distributivité)}$$
$$= b_{r-1} \vee b_{r-2} \,.$$

La disjonction des trois premiers termes conduit à :

$$b_{r-1} \vee b_{r-2} \vee b_{r-3} \,.\, \overline{b_{r-2}} \,.\, \overline{b_{r-1}} = b_{r-1} \vee b_{r-2} \vee b_{r-3}$$

et, par récurrence, si l'on suppose alors

$$\bigvee_{i=r-k}^{r-1} x^i = b_{r-1} \vee \ldots \vee b_{r-k}$$

$$\bigvee_{i=r-k-1}^{r-1} x^i = (b_{r-1} \vee \ldots b_{r-k}) \vee b_{r-k-1} \cdot \left[\prod_{j \geqslant r-k} \overline{b_j} \right]$$

qui se réduit encore par distributivité et vaut :

$$(b_{r-1} \vee \ldots \vee b_{r-k} \vee b_{r-k-1}) \,.\, (b_{r-1} \vee \ldots \vee b_{r-k} \vee \overline{b_{r-k}} \ldots \overline{b_{r-1}})$$

et le second facteur vaut 1. On trouve donc :

$$\bigvee_{i=1}^{r-1} x^i = b_{r-1} \vee b_{r-2} \vee \ldots \vee b_1 \,, \qquad \text{et donc :}$$

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} x^i = (b_{r-1} \vee b_{r-2} \vee \ldots \vee \overline{b_1}) \vee \overline{b_1} \,.\, \overline{b_2} \,.\,.\,.\,.\,.\, \overline{b_{r-1}} = 1$$

Reste maintenant à démontrer que les x^i sont effectivement les composantes postiennes de x, donc que l'on a :

$$\bigvee_{i=1}^{r-1} b_i \,.\, e_i = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i \,.\, e_i \,.= \bigvee_{i=1}^{r-1} x^i \,.\, e_i$$

Or, on a démontré au cours du calcul précédent que :

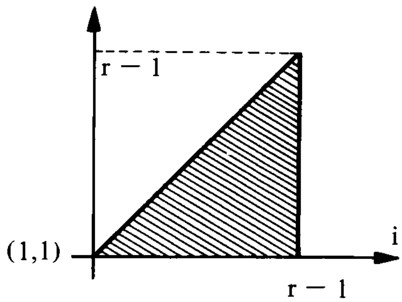
$$\bigvee_{i=r-k}^{r-1} x^i = \bigvee_{i=r-k}^{r-1} b_i$$

et on utilise le fait que, comme $<r>$ est totalement ordonné :

$$e_i = \bigvee_{j \leqslant i} e_j \,.$$

Donc $$\bigvee_{i=1}^{r-1} x^i \,.\, e_i = \bigvee_{i=1}^{r-1} x^i \,.\, \left[\bigvee_{j \leqslant i} e_j \right] \,,$$

et la transformation qui suit est une manipulation sur les indices que l'on peut suivre sur le schéma ci-dessous.



$$\bigvee_{i=1}^{r-1} x^i . \left[\bigvee_{j\leqslant i} e_j\right] = \bigvee_{j=1}^{r-1} e_j . \left[\bigvee_{i=j}^{i=r-1} x^i\right] = \bigvee_{j=1}^{r-1} e_j . \left[\bigvee_{i=j}^{i=r-1} b_i\right] =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{r-1} b_i . \left[\bigvee_{j\leqslant i} e_j\right] = \bigvee_{i=1} b_i . e_i$$

Le théorème précédent va nous permettre d'identifier les composantes postiennes d'une disjonction et d'une conjonction. Si en effet

$$x = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i . e_i \qquad \text{et} \qquad y = \bigvee_{i=0}^{r-1} y^i . e_i$$

alors
$$x \vee y = \bigvee_{i=0}^{r-1} (x^i \vee y^i) . e^i \, ,$$

mais les $x^i \vee y^i$ ne vérifient *pas nécessairement* les conditions d'orthonormalité (A1-A2). Le théorème précédent nous permet cependant de conclure, (car $x^i \vee y^i \in \mathbf{B}$) et l'on a :

$$(x \vee y)^0 = \prod_1^{r-1} \overline{(x^i \vee y^i)} = \prod_1^{r-1} \bar{x}^i . \bar{y}^i = \left[\prod_1^{r-1} \bar{x}^i\right] . \left[\prod_1^{r-1} \bar{y}^i\right]$$

$$(x \vee y)^0 = x^0 . y^0 .$$

Si maintenant $1 \leqslant i \leqslant r-2$, alors :

$$(x \vee y)^i = (x^i \vee y^i) . \prod_{j \geqslant i+1} \overline{(x^j \vee y^j)} = (x^i \vee y^i) . \left[\prod_{j\geqslant i+1} \overline{x^j}\right] . \left[\prod_{j \geqslant i+1} \overline{y^j}\right]$$

$$= (x^i \vee y^i) . \left[\bigvee_{j\leqslant i} x^j\right] . \left[\bigvee_{j \leqslant i} y^j\right],$$

et par distributivité et absorbtion :

$$(x \vee y)^i = x^i \,.\, \Big[\bigvee_{j \leqslant i} y^j\Big] \vee y^i \,.\, \Big[\bigvee_{j \leqslant i} x^j\Big] \,.$$

De même :

$$(x \vee y)^{r-1} = x^{r-1} \vee y^{r-1}$$

Un calcul analogue peut être fait pour la conjonction. Il sera plus simple d'observer (cf. paragraphe. I.F.) qu'il existe une dualité δ du treillis **P**. On a les résultats ci-dessous :

Théorème [4]

Si

$$x = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i \,.\, e_i \qquad \text{et} \qquad y = \bigvee_{i=0}^{r-1} y^i \,.\, e_i \,, \qquad \text{alors (relations B4)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (x \vee y)^0 = x^0 \,.\, y^0 \\ (x \vee y)^i = x^i . \Big[\bigvee_{j \leqslant i} y^j\Big] \vee y^i . \Big[\bigvee_{j \leqslant i} x^j\Big] \\ (x \vee y)^{r-1} = x^{r-1} \vee y^{r-1} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} (x \,.\, y)^0 = x^0 \vee y^0 \\ (x \,.\, y)^i = x^i . \Big[\bigvee_{j \geqslant i} y^j\Big] \vee y^i . \Big[\bigvee_{j \geqslant i} \Big. \\ (x \,.\, y)^{r-1} = x^{r-1} \,.\, y^{r-1} \end{array}\right.$$

On observera que ces formules sont peu simples et permettent malaisement de traduire des inégalités, puisque une inégalité postienne du type $x \leqslant y$ doit en principe s'écrire :

$$x \leqslant y \Leftrightarrow (x \vee y = y) \Leftrightarrow (x \vee y)^i = y^i$$

C – STRUCTURE DE SOUS-DIAGONALE

Soit **B** une algèbre de Boole ; on va lui associer une structure, dite de *sous-diagonale* qui est un treillis distributif contenu dans $\mathbf{B}^{r-1}$ et contenant **B** (à un isomorphisme près) comme ensemble d'éléments complémentés. L'intérêt d'une telle structure est qu'elle est une r-algèbre de Post, et qu'un sens inverse toute r-Algèbre de Post est isomorphe à une certaine sous-diagonale. Ce théorème fondamental de représentation, donné en [8] a été repris ici par une voie plus simple. Il a des applications pratiques (codage booléen) importantes.

Définition (3)

Soit **B** une algèbre de Boole et r un entier $\geqslant 2$. On appelle *sous-diagonale d'ordre* $(r-1)$ de **B** (et l'on note $\Delta^{(r-1)}$ (**B**)) l'ensemble ;

$$\Delta^{(r-1)}(\mathbf{B}) = \{(x_1 , \ldots , x_{r-1}) \in \mathbf{B}^{r-1} \mid x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{r-1}\}$$

Théorème [5]

$\Delta^{(r-1)}$ (B) est un treillis distributif avec éléments maximum et minimum, dont l'ensemble des éléments complémentés est la diagonale $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{B}^{r-1}$.

En effet si

$$x = (x_1 , \ldots , x_{r-1}) \qquad \text{et} \qquad y = (y_1 , \ldots , y_{r-1})$$

le calcul de $x \vee y$ dans l'algèbre de Boole produit $\mathbf{B}^{r-1}$ conduit à

$$x \vee y = (x_1 \vee y_1 , \ldots , x_{r-1} \vee y_{r-1})$$

et si : $\qquad x_i \leqslant x_{i+1} \qquad \text{et} \qquad y_i \leqslant y_{i+1}$

alors : $\qquad x_i \vee y_i \leqslant x_{i+1} \vee y_{i+1}$,

par compatibilité de l'ordre et de la disjonction. On a une propriété analogue pour la conjonction ; par ailleurs les éléments extrema de $\mathbf{B}^{r-1}$

$$0 = (0 , 0 , \ldots , 0) \qquad \text{et} \qquad 1 = (1 , 1 , \ldots , 1)$$

appartiennent à $\Delta^{(r-1)}$ (B). Enfin la recherche des éléments complémentés et un problème naturel dans tout treillis distributif. Elle conduit à :

$$\bar{x} = (\bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \ldots , \bar{x}_{r-1})$$

et pour que $\bar{x}$ appartienne à $\Delta^{(r-1)}$, il *faut* que $\bar{x}_i \leqslant \bar{x}_{i+1}$. Mais comme :

$$x_i \leqslant x_{i+1} \qquad \text{implique} \qquad \overline{x_{i+1}} \leqslant \bar{x}_i ,$$

il en résulte que l'ensemble des éléments complémentés est l'ensemble $\mathbf{B}'$ des éléments de la forme

$$(a , a , \ldots , a) \qquad \text{où} \qquad a \in \mathbf{B} .$$

On sait que tout élément x de $\mathbf{B}^{r-1}$ peut s'écrire (d'après (p. 4)) sous la forme :

$$x = \bigvee_{\alpha \in \langle 2 \rangle^{r-1}} x^{\alpha} . \alpha \tag{C1}$$

On va maintenant tâcher d'identifier sous la forme disjonctive précédente les éléments de $\Delta^{(r-1)}$ (B). Autrement dit, à quelle conditions sur ses composantes disjonctives x^{α}, un élément de $\mathbf{B}^{r-1}$ appartient-il au sous-treillis $\Delta^{(r-1)}$ (B) ?

La réponse est très simple, comme on va le voir. Les seules composantes éventuellement non nulles x^α seront celles *où α lui même appartient à* $\Delta^{(r-1)}$ (B).

Théorème [6]

Les deux propriétés ci-dessous sont équivalentes :

a) x appartient à $\Delta^{(r-1)}$ (B)

b) $\alpha \notin \Delta^{(r-1)}$ (B) $\Rightarrow x^\alpha = 0$.

Démonstration :

Supposons d'abord que x appartienne à $\Delta^{(r-1)}$ (B) et soit :

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} . x_2^{\alpha_2} \dots . x_{r-1}^{\alpha_{r-1}}$$

Supposons que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})$ n'appartienne pas à $\Delta^{(r-1)}$ (B). Ceci veut dire qu'il existe i et j ($i < j$) tel que

$$\alpha_i = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_j = 0 \qquad (\text{car } \alpha \in \langle 2 \rangle^{r-1})$$

Alors, dans la conjonction donnant x^α :

On a

$$x^\alpha \leqslant (x_i)^{\alpha_i} . (x_j)^{\alpha_j} = x_i^1 . x_j^0 = x_i . \bar{x}_j$$

et comme $x_i \leqslant x_j$ (puisque $i < j$) on a $x^\alpha = 0$.

En sens inverse si la propriété b) est vraie, on va démontrer par exemple que $x_1 \leqslant x_2$, (ce qui simplifiera nos problèmes d'indices).

Retenons en effet *tous* les $\alpha \in \langle 2 \rangle^{r-1}$ tels que :

$$\alpha_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = 0 .$$

Soit $\Omega \subset \langle 2 \rangle^{r-1}$ l'ensemble ainsi défini. Il est clair que

$$\Omega \cap \Delta^{(r-1)} (\mathrm{B}) = \emptyset$$

et donc que

$$(\forall \alpha \in \Omega) \quad x^\alpha = 0 = x_1 . \bar{x}_2 . x_3^{\alpha_3} \dots . x_{r-1}^{\alpha_{r-1}} .$$

Formons alors la disjonction (sur Ω) de tous les termes précédents

$$0 = x_1 . \bar{x}_2 . \bigvee_{(\alpha_3, \dots, \alpha_{r-1})} x_3^{\alpha_3} \dots x_{r-1}^{\alpha_{r-1}} .$$

Or la disjonction $\bigvee_{(\alpha_3 \ldots \alpha_{r-1})}$ est égale à 1 (c'est la propriété (ρ. 3)) avec des notations un peu différentes). Il reste donc

$$x_1 \,.\, \bar{x}_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad x_1 \leqslant x_2 \,.$$

On voit bien que la démonstration est vraie pour $x_i \leqslant x_{i+1}$.

Théorème [7]

$\Delta^{(r-1)}$ (B) est une r-algèbre de Post.

Démonstration

En effet dans la décomposition canonique (C1), il ne reste plus d'après le théorème précédent que r termes au plus, non nuls (ceux pour lesquels $\alpha \in \langle 2 \rangle^{r-1} \cap \Delta^{(r-1)}$ (B)). Il reste donc :

$$(C2) \quad \begin{cases} e_0 = (0\,,0\,,\ldots,0) = 0 \\ e_1 = (0\,,0\,,\ldots,1) \\ \\ e_{r-1} = (1\,,1\,,\ldots,1) = 1 \end{cases}$$

notant $\qquad x^{e_i} = x^i \qquad (0 \leqslant i \leqslant \mathrm{r} - 1) \qquad$ (C3)

il vient $\qquad x = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i \,.\, e_i$

Les conditions $x^i \,.\, x^j = 0$ et $\bigvee_{i=0}^{i-1} x^i = 1$ sont vérifiées : elles proviennent d'une propriété plus générale sur les x^α qui avait été soulignée ($\rho 3$ et $\rho 3'$)

Il faut maintenant vérifier les autres conditions. On a, par structure même :

$$0 = e_0 \leqslant e_1 \leqslant \ldots \leqslant e_{r-1} = 1 \,.$$

De plus, si $\qquad x = (x_1, \ldots, x_{r-1}) \in \Delta^{(r-1)}$ (B)

et si $\qquad x \,.\, e_1 = 0$

alors $\quad (x_1\,, \ldots, x_{r-1}) \,.\, (0\,,0\,,\ldots,0\,,1) = (0\,,\ldots,0\,,x_{r-1}) = 0 \,.$

Ceci implique $x_{r-1} = 0$ et donc $x = 0$ car $x \in \Delta^{r-1}$ (B) et

$$x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{r-1} \,.$$

Si, maintenant, l'on a $x \vee e_{i-1} = e_i$, on sait que, par définition :

$$(e_i)_j = 1 \quad \text{si} \quad j \geqslant r - i \quad \text{et} \quad (e_i)_j = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant j \leqslant r - i - 1.$$

Donc

$$(x \vee e_{i-1})_j = x_j \qquad \text{si} \qquad 0 \leqslant j \leqslant r-i$$
$$(x \vee e_{i-1})_j = 1 \qquad\qquad j \geqslant r-i+1$$

On est conduit aux conditions :

$$0 \leqslant j \leqslant r-i-1 : x_j = 0 \; ; j = r-i : x_{r-i} = 1 \; ; j \geqslant r-i+1 : 1 = 1$$

Donc $$x = e_i \, .$$

Définition (4)

Un élément x de $\Delta^{(r-1)}$ (**B**) possède donc deux types de composantes :

– ses r composantes dites *postiennes*, notées x^i et vérifiant des conditions *d'orthonormalité.*

– ses $(r-1)$ composantes dites *booléennes*, notées x_i et vérifiant la condition de *croissance* $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{r-1}$.

On va maintenant donner la relation entre les deux types de composantes : elles proviennent, naturellement, dans un sens, de l'interprétation de $x^i = x^{e_i}$. En effet :

$$x^0 = x^{e_0} = (x_1)^0 \, . \, (x_2)^0 \ldots (x_{r-1})^0 = \overline{x_1} \, . \, \overline{x_2} \, \ldots \, \overline{x_{r-1}}$$

Mais $\overline{x_{r-1}} \leqslant \ldots \leqslant \overline{x_1}$, et donc : $x^0 = \overline{x_{r-1}}$.

Si $1 \leqslant k \leqslant r-2$, e_k est définie par :

$$\begin{cases} (e_k)_i = 0 & 0 \leqslant i \leqslant r-k-1 \\ (e_k)_i = 1 & r-k \leqslant i \leqslant r-1 \, . \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} x^k = x^{e_k} &= (x_1)^0 \ldots\ldots (x_{r-k-1})^0 \, . \, (x_{r-k})^1 \ldots\ldots (x_{r-1})^1 \\ &= \overline{x_1} \ldots\ldots \overline{x_{r-k-1}} \, . \, x_{r-k} \ldots\ldots x_{r-1} = x_{r-k} \, . \, \overline{x_{r-k-1}} \, . \end{aligned}$$

Si $k = r-1$,

$$x^{r-1} = x_1 \, . \, x_2 \ldots\ldots x_{r-1} = x_1 \, .$$

On vient donc de calculer les composantes postiennes à partir des composantes booléennes par le système :

$$\begin{cases} x^0 = \overline{x_{r-1}} \\ x^k = x_{r-k} \cdot \overline{x_{r-k-1}} \qquad 1 \leqslant k \leqslant r-2 \\ x^{r-1} = x_1 \,. \end{cases} \tag{C4}$$

On va maintenant résoudre ce système en sens inverse :

on a

$$x_1 = x^{r-1} \qquad \text{et} \qquad x^{r-2} = x_2 \,.\, \overline{x_1}$$

et $\qquad x^{r-1} \vee x^{r-2} = x_1 \vee x_2 \,.\, \overline{x_1} = x_1 \vee x_2 = x_2 \qquad (\text{car } x_1 \leqslant x_2)$

Une récurrence immédiate (il suffit de disjoncter) montre que :

$$\boxed{x_k = \bigvee_{j \geqslant r-k} x^j} \tag{C5}$$

Théorème [8]

Les formules (C4) et (C5) fournissent une bijection entre

$$\Delta^{(r-1)}\,(\mathbf{B}) \qquad \text{et} \qquad L_r\,(\mathbf{B})\,.$$

Exemple

Si $\mathbf{B} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'algèbre de Post $P = \Delta^{(r-1)}\,(\mathcal{P}(\Omega))$ sera l'ensemble des éléments de la forme :

$$(X_1 \ldots, X_{r-1}) \qquad \text{où} \qquad X_i \in \mathcal{P}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_{r-1}\,.$$

Supposons Ω fini ($\text{Card}(\Omega) = n$) et dénombrons P, par récurrence. Pour $r = 3$, il s'agit de décompter l'ensemble des couples (X_1, X_2) de parties de Ω telles que $X_1 \subset X_2$.

Le décompte sera fait en fixant le "majorant" X_2, et soit :

$$\text{Card}(X_2) = k \qquad 0 \leqslant k \leqslant n\,.$$

Alors $\qquad \text{Card}\{X_1 \subset \Omega \mid (X_1 \subset X_2)\} = 2^k\,.$

En effet, il suffit de compter les parties de X_2. Il suffit ensuite de faire varier X_2 dans l'ensemble des parties de Ω de cardinal k, puis k lui-même de 0 à n pour avoir le résultat

$$\text{Card}\,\Delta^{(2)}\,(\mathcal{P}(\Omega)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \,.\, 2^k = (r+1)^n = 3^n\,.$$

Ce résultat s'étend aisément par récurrence. Si l'on suppose

$$\mathrm{Card}\,(\Delta^{(r-1)}(\mathcal{P}(\Omega))) = r^n \tag{C6}$$

Alors, pour décompter l'ensemble des $(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ tels que :

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_r$$

on fixe X_r, et soit $k = \mathrm{Card}\,(X_r)$. Le nombre de sous-ensembles $(X_1, \ldots, X_{r-1})$ satisfaisant à la condition précédente est alors égal à :

$$\mathrm{Card}\,[\Delta^{(r-1)}(\mathcal{P}(X_r))] = r^k$$

et donc par un raisonnement analogue

$$\mathrm{Card}\,(\Delta^{(r)}(\mathcal{P}(\Omega))) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \,.\, r^k = (r+1)^n \,.$$

D – EXPONENTIELLE EN ALGEBRE DE POST

On va maintenant étendre la notation exponentielle définie pour les Algèbres de Boole en introduction. On a vu d'ailleurs qu'une telle extension s'introduisait naturellement à propos des sous-diagonales.

D'abord, définissons pour $x \in \mathbf{P}$ et $\alpha \in \, <r>$ l'élément $x^\alpha \in \mathbf{P}$ par

$$x^{e_i} = x^i \tag{D1}$$

Ces deux notations seront utilisées concurremment suivant le cas. On prolonge la notation exponentielle de la façon suivante:

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{P}^n$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \, <r>^n$

Définition (5)

On définit une application de

$$\mathbf{P}^n \times <r>^n \quad \text{dans} \quad \mathbf{P}$$

$$(x, \alpha) \rightsquigarrow x^\alpha \quad (\textit{exponentielle} \text{ de } x)$$

par

$$\boxed{x^\alpha = (x_1)^{\alpha_1} \,.\, (x_2)^{\alpha_2} \,.\, \ldots \,.\, (x_n)^{\alpha_n}} \tag{D2}$$

Propriétés de l'exponentielle

a) $$\boxed{x^\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = x} \qquad \text{(D3)}$$

En effet

$$x^\alpha = 1 \Leftrightarrow (\forall i)\ (x_i)^{\alpha_i} = 1\ .$$

Or $(x_i)^{\alpha_i} = 1$ si et seulement si $x_i = \alpha_i$ (d'après B2)

b) $$\alpha \neq \beta \quad \text{implique} \quad \boxed{x^\alpha \,.\, x^\beta = 0} \qquad \text{(D4)}$$

En effet si α est différent de β, il existe $j\,(0 \leqslant j \leqslant r-1)$

$$\alpha_j \neq \beta_j$$

et

$$x^\alpha \,.\, x^\beta \leqslant (x_j)^{\alpha_j} \,.\, (x_j)^{\beta_j}\ .$$

et le dernier terme est nul, d'après la définition même des composantes postiennes.

c) $$\boxed{\bigvee_{\alpha \in < r >^n} x^\alpha = 1} \qquad \text{(D5)}$$

Cette dernière proposition se démontre par récurrence. Pour $n = 1$ elle s'écrit en effet

$$x^0 \vee x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^{r-1} = 1$$

Supposons la vraie à l'ordre $(n-1)$, et soit

$$z = \bigvee_{\alpha \in < r >^n} (x_1)^{\alpha_2} \ldots\ldots (x_n)^{\alpha_n}$$

et séparons (associativité et distributivité) selon les diverses composantes de x_1. Il vient

$$z = (x_1)^0 \,.\, \left[\bigvee_{(\alpha_2, \ldots \alpha_n) \in < r >^{n-1}} (x_2)^{\alpha_2} \ldots\ldots (x_n)^{\alpha_n}\right] \vee \ldots\ldots \vee (x_1)^{r-1} \,.\, \left[\bigvee_{(\alpha_2, \ldots \alpha_n) \in < r >^{n-1}} (x_2)^{\alpha_2} \ldots (x_n)^{\alpha_n}\right]$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, chaque crochet vaut 1. Donc il reste

$$z = (x_1)^0 \vee \ldots \vee (x_1)^{r-1} = 1 \qquad \square$$

ces propriétés d'"orthonormalité" des x^α sont essentielles dans la suite

E – SOUS-ALGEBRES ET HOMOMORPHISMES

L'étude d'une structure quelconque entraîne en général la définition des sous-structures et des morphismes. Les définitions que nous avons choisies ici sont un peu redondantes mais elles présentent l'avantage d'être simples et de n'utiliser pour leur expression que les opérations postiennes usuelles.

Définition (6)

Une partie β non vide d'une r-algèbre de Post $\mathbf{P}$ sera dite *sous r-algèbre de Post* si :

a) β est un sous treillis de $\mathbf{P}$

b) $x \in \beta \Rightarrow (\forall i)\ (0 \leqslant i \leqslant r-1)\ x^i \in \beta$ (E1)

c) $<r> \subset \beta$ (E2)

Cette définition permet de démontrer les propriétés suivantes, dont la démonstration et immédiate

Propriété

Une sous-r-algèbre de Post est une algèbre de Post pour la restriction des lois.

Propriété

Toute intersection de sous-algèbres de Post est une sous-algèbre de Post.

Propriété

Etant donnée une partie A d'une sous-algèbre de Post $\mathbf{P}$, il existe une plus petite sous-algèbre de $\mathbf{P}$ contenant A ; on l'appelle *sous-algèbre engendrée* par A.

Voici quelques commentaires : on peut d'abord observer que les démonstrations de ces propriétés font partie de celles qui sont soit fausses, soit triviales. Ici elles sont exactes, parce que le choix de la définition (6) à été convenable. On voit ainsi, et c'est important à noter, que l'ensemble $<r>$ est lui-même une algèbre de Post, sous-algèbre de toute autre algèbre, de même que $<2>$, (resp. $\{0\}$) est sous-algèbre de Boole (resp. sous-espace vectoriel) de toute algèbre de Boole (resp. tout espace vectoriel)).

Observons enfin que le centre de $<r>$ est $<2>$, puisque seuls les éléments 0 et 1 de $<r>$ sont complémentés.

Propriété

Si β est une sous-algèbre de Post de **P**, alors $\beta \cap \mathbf{B}$ est une sous-algèbre de Boole de **B**.

En effet $\beta \cap \mathbf{B}$ est un sous-treillis de **P** (intersection de sous-treillis). Il reste à montrer que le complémentaire d'un élément de $\beta \cap \mathbf{B}$ est encore dans $\beta \cap \mathbf{B}$.

Si $x \in \beta \cap \mathbf{B}$ alors $\bar{x} = x^0$

et $x^0 \in \beta$ (définition d'une sous-algèbre de Post)

$x^0 \in \mathbf{B}$ (définition d'une algèbre de Boole)

Le théorème qui suit permet de donner une caractérisation de la sous-algèbre engendrée par une partie finie. Il sera en particulier utilisé à propos des polynômes postiens; il est la source du théorème sur la forme normale disjonctive.

Théorème [9]

Soit $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$ une partie finie d'une r-algèbre de Post **P**. Pour que x appartienne à $\beta(A)$, sous-algèbre de Post engendrée par A, il faut et il suffit qu'il existe des coefficients $x_j \in \langle r \rangle$ tels que x s'écrive sous la forme

$$\boxed{x = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j \,.\, x_j} \qquad \text{(E3)}$$

Rappelons, pour expliciter la notation précédente que si :

$$j = (j_1, \ldots, j_n) \in \langle r \rangle^n$$

$$p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{P}^n$$

alors $$p^j = p_1^{j_1} \,.\, p_2^{j_2} \ldots\ldots p_n^{j_n} \,.$$

La démonstration est d'un type classique. Désignons par Ω l'ensemble des éléments des **P** qui s'écrivent sous la forme (E3). On va montrer :

a) que toute sous-algèbre de Post K (de **P**) contenant A, contient Ω.

b) que Ω est-elle même une sous-algèbre de Post de **P** contenant A.

D'abord il est clair que, si K contient A, K contient tous les $(p_i)^{\alpha_i}$, donc tous les p^α, et aussi les termes de la forme $p^\alpha \,.\, x_\alpha$ (si $x_\alpha \in \langle r \rangle$), d'après la structure de sous-algèbre. Donc $K \supset \Omega$. Montrons que Ω est elle-même une sous-algèbre de Post.

Soit

$$x = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j \,.\, x_j \qquad \text{et} \qquad y = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j \,.\, y_j$$

alors

$$x \vee y = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j (x_j \vee y_j) \quad \text{et} \quad x \vee y \in \Omega \quad \text{car} \quad x_j \vee y_j \in \langle r \rangle . \tag{E4}$$

De même

$$x \,.\, y = \bigvee_{j,k} p^j \,.\, p^k \,[x_j \,.\, y_k]$$

Mais

$$p^j \,.\, p^k = \delta_j^k \,.\, p^j$$

et

$$x \,.\, y = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j \,.\, [x_j \,.\, y_j] \,. \tag{E5}$$

On a ainsi montré que Ω était un sous-treillis de **P**. Je dis, par ailleurs, que $(\forall k)$ $(0 \leqslant k \leqslant r-1)$:

$$x^{e_k} = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j (x_j)^{e_k} . \tag{E6}$$

On va utiliser pour cela l'unicité des composantes postiennes. En effet, posant :

$$y^k = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j \,.\, (x_j)^{e_k}$$

On a

$$\bigvee_{k=0}^{r-1} y^k = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j \,.\left[\bigvee_{k=0}^{r-1} (x_j)^{e_k}\right] = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j = 1 \,. \tag{E7}$$

D'autre part si $k \neq l$, et d'après (D4)

$$y^k \,.\, y^l = \bigvee_j p^j \,.\, (x_j)^{e_k} \,.\, (x_j)^{e_l} = 0 \,. \tag{E8}$$

Enfin

$$\bigvee_{k=0}^{r-1} y^k \,.\, e_k = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j \,.\left[\bigvee_{k=0}^{r-1} (x_j)^{e_k} \,.\, e_k\right] = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j \,.\, x_j = x \tag{E9}$$

L'ensemble des conditions (E7), (E8) et (E9) assurent, d'après l'unicité des composantes postiennes que (E6) est vraie. Il faut encore démontrer que $<r> \subset \Omega$. Or e_i s'écrit

$$e_i = e_i \,.\, 1 = e_i \,.\left[\bigvee_{j \in <r>^n} p^j\right] = \bigvee_{j \in <r>^n} p^j \,.\, e_i \,.$$

Un raisonnement tout à fait analogue prouve, pour terminer, que Ω contient A. Par exemple p_1 s'écrit :

$$p_1 = p_1 \,.\, 1 = p_1 \,.\left[\bigvee_{(j_2, \dots j_n)} p_2^{j_2} \dots p_n^{j_n}\right]$$

$$= \bigvee_{(j_1, \dots j_n)} (p_1^{j_1} \,.\, p_2^{j_2} \,.\, p_n^{j_n}) \,.\, x_{j_1}$$

où $\begin{cases} x_{j_1} = 1 & \text{si } j_1 = 1 = e_{r-1} \\ x_{j_1} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Remarques

1) Une décomposition du type (E3) n'est en général pas unique. L'étude de cette question, trop longue à développer ici, amène à introduire la notion d'algèbre de Post *libre* (au sens ou un module ou une algèbre de Boole est libre (cf. [9]).

2) Le théorème précédent est important non seulement pour ses conclusions, mais encore quant à ses résultats intermédiaires. On tire, en effet du calcul précédent la règle suivante, sans intérêt théorique, mais d'une grande importance pratique.

Règle [1]

Pour conjoncter, disjoncter, (resp. prendre la $i^{ème}$ composante postienne) deux (resp. d'une) décompositions du type (E3) il suffit de conjoncter, disjoncter (resp. prendre la $i^{ème}$ composante postienne) des composantes (c'est-à-dire les x_α).

Soient **P** et **P′** deux r-algèbres de Post.

Définition [7]

Une application φ de **P** vers **P′** sera appelée *homomorphisme postien* si

a) φ est un homomorphisme de treillis, c'est-à-dire $(\forall (x, y) \in \mathbf{P}^2)$

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \qquad \varphi(x \,.\, y) = \varphi(x) \,.\, \varphi(y)$$

b) $(\forall i)\ (0 \leqslant i \leqslant r-1) \qquad \varphi(x^i) = [\varphi(x)]^i$

c) $\varphi(e_i) = e'_i$.

Les relations entre une algèbre de Post et son centre sont éclairées par les théorèmes qui suivent. Le premier est donné sans démonstration. Celle-ci est à la fois longue et simple. Nous n'avons pas cru utile de la reproduire ici.

Théorème [10]

Si φ est un homomorphisme postien de **P** dans **P′** alors la restriction de φ à **B** (centre de **P**) est un homomorphisme booléen de **B** dans **B′**.

Il est beaucoup plus intéressant d'observer que la réciproque est exacte, c'est-à-dire :

Théorème [11] :

Soient **P** et **P′** deux r-algèbres de Post dont les centres sont **B** et **B′**. Tout homomorphisme (resp. isomorphisme) booléen φ_0 de **B** sur **B′** se prolonge d'une et d'une seule façon en un homomorphisme (resp. isomorphisme) postien φ de **P** sur **P′**.

En effet, si $\varphi_0 \in$ Hom (**B** , **B′**), φ (s'il existe) est unique.

En effet

$$x = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i \,.\, e_i \Rightarrow \varphi(x) = \bigvee_{i=0}^{r-1} [\varphi_0(x^i)] \,.\, e'_i$$

Reste à vérifier que φ est un homomorphisme postien. On vérifie d'abord que $\varphi(e_i) = e'_i$, et que :

$$[\varphi(x)]^i = \varphi_0(x^i)$$

Pour prouver cette dernière relation, on utilise l'unicité des composantes postiennes.

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} \varphi_0(x^i) = \varphi_0\Big(\bigvee_{i=0}^{r-1} x^i\Big) = \varphi_0(1) = 1$$

$$\varphi_0(x^i) \,.\, \varphi_0(x^j) = \varphi_0(x^i \,.\, x^d) = 0$$

Ensuite on utilise l'écriture des composantes postiennes de $x \vee y$ et $x \,.\, y$, on a [cf (1)] :

$$\begin{cases} x \vee y = x^i . \bigvee\limits_{j \leqslant i} y^j \vee y^i . \bigvee\limits_{j \leqslant i} x^j & (2) \\ x . y = x^i . \bigvee\limits_{j \geqslant i} y^j \vee y^i . \bigvee\limits_{j \geqslant i} y^j & (2) \end{cases}$$

On prouve alors que :

$$[\varphi(x \vee y)]^i = \varphi_0[(x \vee y)^i] = [\varphi(x) \vee \varphi(y)]^i$$

On prouve ainsi que φ est un homomorphisme de treillis. On montre facilement que si φ_0 est bijective, alors φ est bijective.

En effet si $\varphi(x) = \varphi(y)$ alors

$$\varphi_0(x^i) = \varphi_0(y^i) \qquad \text{et} \qquad x^i = y^i$$

Réciproquement si y est un élément de $\mathbf{P}'$, on définit les x^i par

$$x^i = \varphi_0^{-1}(y_i)$$

et les x^i forment un système de composantes orthonormales d'un élément x de $\mathbf{P}$ tel que $\varphi(x) = y$.

Le théorème précédent montre donc qu'une algèbre de Post est entièrement déterminée, à un isomorphisme près, par la donnée du couple $(\mathbf{B}, r)$. Il est intéressant de donner un représentant d'une telle structure. Le résultat est fourni par le théorème suivant.

Théorème [12]

Toute r-algèbre de Post est isomorphe à la sous diagonale $\Delta^{(r-1)}(\mathbf{B})$ où $\mathbf{B}$ est son centre.

En effet, à tout élément x de $\mathbf{B}$, j'associe l'élément $(x, x, \ldots, x)$ de la diagonale $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{B}^{r-1}$. L'application φ_0 ainsi définie est manifestement un isomorphisme booléen de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{B}'$. Mais $\mathbf{B}'$ le centre de $\Delta^{(r-1)}(\mathbf{B})$, d'où la conclusion. De ce théorème (et du théorème de Stone sur la représentation des Algèbres de Boole ([5]), on tire le théorème [12A] ci-dessous qui résout completement sur le plan théorique le problème de la représentation des Algèbres de Post.

Théorème [12 A]

Pour toute r-Algèbre de Post $\mathbf{P}$, il existe un ensemble E et un clan F de parties de E tels que $\mathbf{P}$ soit isomorphe à $\Delta^{(r-1)}(F)$.

(Rappelons qu'un clan de partie de E est une famille de parties de E fermée pour réunion, intersection et complémentation.)

Abandonnons les problèmes théoriques pour constater que les conséquences *pratiques* du théorème [12] sont très grandes. (Nous en avons donné quelques exemples dans [[8]]). La raison est qu'il est difficile de manipuler directement les éléments postiens à cause de la complexité des formules (B4). En codant chaque x appartenant à **P** par la suite $(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$ de ses composantes booléennes (soumises à la condition $x_1 \leqslant \dots \leqslant x_{r-1}$) on ramène tout problème postien à un problème booléen pour lequel les règles de calculs sont à la fois plus simples et mieux connues. Nous avons montré dans [[8]] comment ce procédé pouvait s'étendre au codage de matrices postiennes et permettre d'établir des résultats sur les équations et inéquations matéricielles postiennes.

Une autre application du théorème de représentation précédent est l'introduction dans le paragraphe qui suit de deux opérations importantes (négation et dualité) sur une r-algèbre de Post. Bien qu'il eut été possible de les définir directement (à l'aide des formules (B4)), cette introduction nous a toujours semblé très peu naturelle, alors qu'elles apparaissent comme des opérations quasi-nécessaires lorsqu'on les formule en terme de sous-diagonale.

F – OPERATIONS DE NEGATION ET DE DUALITE

On sait que sur un treillis avec élément minimum (0),on appelle *négation* d'un élément u la plus grande solution (si elle existe) de l'équation

$$u \,.\, x = 0 \,.$$

Autrement dit

$$\boxed{u \,.\, x = 0 \Longleftrightarrow x \leqslant u' \,.} \tag{F1}$$

Nous allons montrer que dans une algèbre de Post tout élément possède une négation et que celle-ci définit une dualité de treillis, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} (u \vee v)' = u' \,.\, v' \quad \text{et} & \text{(F2)} \\ (u \,.\, v)' = u' \vee v' & \text{(F3)} \end{cases}$$

qui sont analogues aux lois de Morgan.

Théorème [13]

Tout élément d'une r-Algèbre de Post **P** possède une négation et l'opération de négation est une dualité.

On va raisonner (par isomorphisme) sur la sous-diagonale et résoudre l'équation $u \,.\, x = 0$ sur celle-ci

$$(u_1 \,, u_2 \,, \ldots, u_{r-1}) \,.\, (x_1 \,, x_2 \,, \ldots, x_{r-1}) = 0 \,.$$

Donc

$$(\forall i)\ (0 \leqslant i \leqslant r-1) \qquad u_i \,.\, x_i = 0$$

$$(\forall i)\ (0 \leqslant i \leqslant r-1) \qquad x_i \leqslant \overline{u_i}$$

Mais on a

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{r-1} \qquad \text{et}$$

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_{r-1} \qquad \text{soit}$$

$$\overline{u_{r-1}} \leqslant \overline{u_{r-2}} \leqslant \ \leqslant \overline{u_1} \,.$$

Il en résulte que l'on a

$$(\forall i)\ (0 \leqslant i \leqslant r-1) \qquad x_i \leqslant x_{r-1} \leqslant \overline{u_{r-1}}$$

et la plus grande solution est $u' = (\overline{u_{r-1}}, \ldots, \overline{u_{r-1}})$ qui est l'image de l'élément *complémenté* $\overline{u_{r-1}}$ de **P**. En revenant en composantes postiennes, on trouve

$$\boxed{u' = u^0 = \overline{u_{r-1}}} \tag{F4}$$

ou encore

$$u' = u_{r-1} \,.\, e_0 \vee \overline{u_{r-1}} . e_{r-1} \,.$$

On a

$$(u \vee v)' = (u \vee v)^0 = u^0 \,.\, v^0 = u' \,.\, v'$$

$$(u \,.\, v)' = (u \,.\, v)^0 = u^0 \vee v^0 = u' \vee v' \,.$$

et la négation est bien une dualité. Ceci s'étend à :

$$\Big(\bigvee_i x_i\Big)' = \prod_i x_i' \quad \text{et} \quad \Big(\prod_i x_i\Big)' = \bigvee_i x_i' \,. \tag{F5}$$

Autres propriétés de la négation

1) $u' \in \mathbf{B}$ donc $u'' = \overline{u'}$ (F6) et $u''' = u'$

$$2)\ \Big(\bigvee_i x_i\Big)'' = \Big(\overline{\bigvee_i x_i}\Big)' = \Big(\prod_i \overline{x_i}\Big)' = \bigvee_i (\overline{x_i})' = \bigvee_i x_i'' \tag{F7}$$

et de même

$$\Big(\prod_i x_i\Big)'' = \prod_i x_i'' . \tag{F8}$$

3) On a bien $$u' = 1 \Longleftrightarrow u = 0 \tag{F9}$$

mais, par contre $u' = 0$ ne permet guère de conclusions.

Dualité

Sur la sous-diagonale $\Delta^{(r-1)}(\mathbf{B})$, il est une bijection involutive δ qui apparaît naturellement :

$$\delta(x) = \delta(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) = (\overline{x_{r-1}}, \overline{x_{r-2}}, \dots, \overline{x_1})$$

car

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_{r-1} \quad \text{équivaut à} \quad \overline{x_{r-1}} \leqslant \dots \leqslant \overline{x_1} .$$

δ est de plus une dualité car les propriétés de la complémentation booléenne montrent

$$\begin{aligned}\delta(x \vee y) &= (\overline{x_{r-1} \vee y_{r-1}}, \dots, \overline{x_1 \vee y_1}) = (\overline{x_{r-1}} \,.\, \overline{y_{r-1}}, \dots, \overline{x_1} \,.\, \overline{y_1}) \\ &= (\overline{x_{r-1}}, \dots, \overline{x_1}) \,.\, (\overline{y_{r-1}}, \dots, \overline{y_1}) = \delta(x) \,.\, \delta(y) .\end{aligned}$$

et de même

$$\delta(x \,.\, y) = \delta(x \vee y) .$$

L'application δ (dualité) est donc une dualité involutive de treillis. En revenant, par isomorphisme à une algèbre de Post quelconque on voit que :

$$[\delta(x)]^0 = [\delta(x)]_{r-1} = \overline{x_1} = x^{r-1}$$

$$[\delta(x)]^k = [\delta(x)]_{r-k} \,.\, [\delta(x)]_{r-k-1} = \overline{x_k} \cdot x_{k+1} = x^{r-k-1}$$

$$[\delta(x)]^{r-1} = [\delta(x)]_1 = \overline{x_{r-1}} = x^0$$

D'où le théorème :

Théorème [14]

L'application $\delta : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ où

$$\delta(x) = x^{r-1} . e_0 \vee x^{r-2} . e_1 \vee \ldots \vee x^1 . e_{r-2} \vee x^0 . e_{r-1} \qquad \text{(F10)}$$

(autrement dit $[\delta(x)]^k = x^{r-k-1}$)

est une dualité involutive de treillis.

La règle [1] trouve ici un prolongement

Règle [2]

Pour prendre la négation (resp. la duale) d'une décomposition du type (E3), il suffit de prendre la négation (resp. la duale) des composantes.

En effet, si :

$$x = \bigvee_{j \in <r>^n} p^j . x_j$$

on a (d'après (F4)) :

$$x' = x^0 = \bigvee_{j \in <r>^n} p^j . (x_j)^0 = \bigvee_{j \in <r>^n} p^j . (x_j)'.$$

Pour la duale, il suffit pareillement d'observer que :

$$[\delta(x)]^k = x^{r-k-1} = \bigvee_{j \in <j>^n} p^j (x_j)^{r-k-1} = \bigvee_{j \in <r>^n} p^j . \delta(x_j) .$$

On voit bien ici que les décompositions canoniques du type (E3) sont privilégiées. La dualité permet alors de démontrer les formules (B4) relatives à la conjonction.

Pour la conjonction, en effet

$$(x . y)^i = [\delta(x . y)]^{r-1-i} = [\delta(x) \vee \delta(y)]^{r-1-i}$$

si $1 \leqslant r-1-i \leqslant r-2$, soit $1 \leqslant i \leqslant r-2$, on a:

$$[\delta(x) \vee \delta(y)]^{r-1-i} = \left[[\delta(x)]^{r-1-i} \bigvee_{j \leqslant r-i-1} [\delta(y)]^j \right] \vee \left[[\delta(y)]^{r-1-j} \bigvee_{j \leqslant r-i-1} [\delta(x)]^j \right]$$

$$= x^i . \bigvee_{r_j \leqslant r-i-1} y^{r-1-j} \vee y^i . \bigvee_{j \leqslant r-i-1} x^{r-1-j}$$

$$= x^i . \bigvee_{j \geqslant i} y^j \vee y^i . \bigvee_{j \geqslant i} x^j$$

Si $i = 0$

$$(x \,.\, y)^0 = [\delta(x) \vee \delta(y)]^{r-1} = [\delta(x)]^{r-1} \vee [\delta(y)]^{r-1}$$
$$= x^0 \vee y^0$$

Si $i = r - 1$

$$(x \,.\, y)^{r-1} = [\delta(x) \vee \delta(y)]^0 = [\delta(x)]^0 \,.\, [\delta(y)]^0$$
$$= x^{r-1} \,.\, y^{r-1}$$

Remarque :

Observons que si x est un élément complémenté de **B**, négation et dualité se confondent en complémentation

$$x \in \mathbf{B} \Rightarrow \delta(x) = x' = \bar{x} = x^0 \,.$$

G – L'ALGEBRE DE POST DES r-PARTITIONS ORDONNEES D'UN ENSEMBLE

Soit une algèbre de Post *ensembliste* **P**, c'est-à-dire dont le centre soit de la forme $\mathbf{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ où Ω est un ensemble. A tout X de **P** on associe

$$\varphi(X) = (X^0 \,, X^1 \,, \ldots, X^{r-1}) \in L_r(\mathcal{P}(\Omega))$$

où les X^i (composantes postiennes de X) vérifient

$$i \neq j \Rightarrow X^i \cap X^j = \phi \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=0}^{r-1} X^i = \Omega \,.$$

Les $\{X^i\}$ forment donc une partition ordonnée de Ω en r sous-ensembles. Comme φ est une bijection (Th. [3]) elle permet de munir $L_r(\mathcal{P}(\Omega))$ d'une structure d'algèbre de Post (par isomorphisme), comme on le précise ci-dessous.

On note $L_r(\mathcal{P}(\Omega)) = \mathcal{P}_r(\Omega)$ ensemble des *r-partitions ordonnées* d'un ensemble.

Voici les opérations postiennes définies sur $\mathcal{P}_r(\Omega)$. Soient deux *r-partitions*

$$A = (X^0 , X^1 , \ldots , X^{r-1})$$

$$B = (Y^0 , Y^1 , \ldots , Y^{r-1})$$

$$A \vee B = ((X \vee Y)^0 , (X \vee Y)^1 , \ldots , (X \vee Y)^{r-1})$$

$$A \,.\, B = ((X \,.\, Y)^0 , (X \,.\, Y)^1 , \ldots , (X \,.\, Y)^{r-1}) .$$

$$A^i = (\overline{X^i}, \phi, \ldots . \phi, X^i)$$

Les éléments distingués sont les r-partitions fondamentales

$$\{E_0 , E_1 , \ldots , E_{r-1}\}$$

où $$E_i = (\phi , \ldots , \phi , \Omega , \phi , \ldots , \phi)$$

Par exemple pour $r = 3$, soient A et B deux 3-partitions

$$A = (X^0 , X^1 , X^2) \quad \text{et} \quad B = (Y^0 , Y^1 , Y^2) .$$

On a pour la disjonction, (resp. conjonction) de ces deux partitions

$$A \vee B = (X^0 \cap Y^0 , [(X^1 \cap (Y^0 \cup Y^1)] \cup [Y^1 \cap (X^0 \cup X^1)] , X^2 \cup Y^2)$$

$$A \,.\, B = (X^0 \cup Y^0 , [X^1 \cap [Y^1 \cup Y^2] \cup [Y^1 \cap [Y^1 \cup Y^2]] , X^2 \cap Y^2) .$$

Ces résultats proviennent du théorème [4].

On comprend bien comment en est faite la partition :

$$A \vee B = \text{Sup.}\ (A , B)$$

Disons que si x appartient à A^j, alors x est de poids j dans la partition A. Pour que x soit de poids k dans $A \vee B$ ($x \in (A \vee B)^k$) il faut que l'une des deux conditions ci-dessous soit réalisée:

– ou bien x est de poids k dans A et de poids k au *plus* dans B.

– ou bien x est de poids k dans B et de poids k au plus dans A.

Voici un exemple où $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et deux 3-partitions de Ω A et B ci-dessous définies :

$$A = (\{4 , 5\} , \{1, 2\} , \{3\}) \ ; B = (\{3, 4\} , \{5\} , \{1, 2\})$$

On a pour la disjonction (Sup.) et la conjonction (inf.) de ces deux partitions :

$$A \vee B = (\{4\} , \{5\} , \{1, 2, 3\}) \ ; A \,.\, B = (\{3, 4, 5\} , \{1, 2\} , \{\phi\})$$

En termes de sous-diagonale, on a :

$$\varphi(A) = (\{3\}, \{1, 2, 3\}) \quad \varphi(B) = (\{1, 2\}, \{1, 2, 5\})$$

et

$$\varphi(A \vee B) = (\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 5\})\ ; \varphi(A \,.\, B) = (\phi, \{1, 2\})\,.$$

Remarques :

1) La 2-Algèbre de Post $\mathcal{P}_2(\Omega)$ est l'ensemble des couples de la forme $(\bar{X}, X)$ où X est une partie de Ω et $\bar{X}$ sur complémentaire dans Ω. L'ensemble obtenu est naturellement isomorphe à l'Algèbre de Boole $\mathcal{P}(\Omega)$.

2) Dans une r- algèbre de Post $\mathcal{P}_r(\Omega)$, le centre, est l'ensemble des éléments de la forme

$$(\bar{S}, \phi, \ldots, \phi, S) \quad \text{où} \quad S \text{ parcourt } \mathcal{P}(\Omega)\,.$$

C'est donc $\mathcal{P}(\Omega)$ à un isomorphisme près.

H – ANNEAU POSTIEN

On sait bien que si $(\mathbf{B}, \vee, ., \bar{\ })$ est une algèbre de Boole, alors il y a sur **B** une structure sous-jacente d'anneau $(\mathbf{B}, \oplus, .)$ ou $\oplus$ est la différence symétrique :

$$x \oplus y = x \,.\, \bar{y} \vee \bar{x} \,.\, y\,.$$

L'anneau ainsi associé est unitaire et commutatif (il n'est intégre que si et seulement si $\mathbf{B} = \langle 2 \rangle$) et est appelé *anneau booléen.* Il est idempotent $((\forall x)\, x \,.\, x = x)$ et de caractéristique 2 (*) (c'est-à-dire : $(\forall x)\, x \oplus x = 0$) . Cette structure *algébrique* développée parallélement à la structure *ordonnée* (booléene) est très importante dans la pratique du calcul booléen. Nous allons maintenant voir qu'il y a pour les algèbres de Post une extension parallèle avec existence d'un anneau de caractéristique r dit anneau postien.

Le théorème ci-dessous est construit sur une idée de Foster [4]. Nous avons transcrit en postien des propriétés que Foster avait établies en booléen

----

(*) Rappelons que la *caractéristique* d'un *anneau* commutatif A est le plus petit entre $p > 0$ (s'il existe) tel que

$$(\forall x \in A)\ p \,.\, x = x + x + \ldots + x = 0\,.$$

(et dans un tout autre but) et adapté la démonstration en utilisant des propriétés matricielles.

Théorème [15]

Soient x et y deux éléments d'une r-algèbre de Post **P**. On définit deux lois notées $\boxplus$ et $*$ par :

$$\begin{cases} (x \boxplus y)^i = \bigvee\limits_{(s+t \equiv i\,[r])} x^s \,.\, y^t & \text{(H1)} \\ \\ (x * y)^i = \bigvee\limits_{(s\,.\,t \equiv i\,[r])} x^s \,.\, y^t & \text{(H2)} \end{cases}$$

alors $\boxplus$ et $*$ sont des lois de composition interne sur **P** et $(\mathbf{P}, \boxplus, *)$ est un *anneau commutatif unitaire de caractéristique r*. Si, de plus, le module r est un nombre premier, alors

$$(\forall\, x \in \mathbf{P}) \quad x^{(r)} = x * \ldots * x = x\,.$$

Démonstration :

Dans la définition de $\boxplus$ ou de $*$, il est clair que la disjonction doit être étendue à l'ensemble des indices (s, t) tels que $s + t$ soit congru à i, modulo r et qu'on égalera à zéro le résultat si l'ensemble des indices est vide (*).

Démontrons d'abord que $\boxplus$ est une loi interne.

Soit $i \neq j$:

$$(x \boxplus y)^i \,.\, (x \boxplus y)^j = \bigvee_{\substack{(s_1 + t_1 \equiv i\,[r]) \\ (s_2 + t_2 \equiv j\,[r])}} x^{s_1} \,.\, x^{s_2} \,.\, y^{t_1} \,.\, y^{t_2}$$

Mais

$$x^{s_1} \,.\, x^{s_2} = 0 \quad \text{si} \quad s_1 \neq s_2 \quad \text{et} \quad y^{t_1} \,.\, y^{t_2} = 0 \quad \text{si} \quad t_1 \neq t_2$$

Pour avoir une conjonction non nulle, il *faut* donc $s_1 = s_2$ et $t_1 = t_2$ ce qui contredit l'hypothèse $i \neq j$. Le résultat est donc nul.

Ensuite

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} (x \boxplus y)^i = \bigvee_{i=0}^{r-1} \left[\bigvee_{(s+t \equiv i\,[r])} x^s \,.\, y^t \right] = \left[\bigvee_{s=0}^{r-1} x^s \right] . \left[\bigvee_{t=0}^{r-1} y^t \right] = 1$$

- - - - - - - - - - - - - -

(*) Le lecteur trouvera en fin du présent paragraphe un exemple de calcul de $\boxplus$ et $*$ pour $r = 3$.

L'associativité se démontre alors

$$\{x \boxplus (y \boxplus z)\}^i = \bigvee_{s+t\equiv i} x^s \,.\, [y \boxplus z]^t = \bigvee_{s+t\equiv i} x^s \,.\, \left[\bigvee_{p+q\equiv t} y^p \,.\, z^q\right]$$

$$= \bigvee_{s+p+q\equiv i} x^s \,.\, y^p \,.\, z^q = \{(x \boxplus y) \boxplus z)\}^i$$

On observera que toutes les propriétés n'utilisent pour leur démonstration que le fait que $Z/r.Z$ est un anneau unitaire et commutatif.

L'élément neutre est $e_0 = 0$. Une vérification suffit, puisque $\boxplus$ est associative. Alors ($e_0^j = \delta_0^j$)

$$(x \boxplus 0)^i = \bigvee_{s+t\equiv i} x^s \,.\, (e_0)^t = \bigvee_{s+t\equiv i} x^s \,.\, \delta_0^t = x^i \,.$$

Enfin tout élément a possède un symétrique x. En effet soit à résoudre

$$a \boxplus x = 0$$

qui s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} a^0 \,.\, x^0 \vee a^{r-1} \,.\, x^1 \quad \vee \;\ldots\; \vee a^1 \,.\, x^{r-1} = (a \boxplus x)^0 = 1 \\ a^1 \,.\, x^0 \vee a^0 \quad x^1 \quad \vee \;\ldots\; \vee a^2 \,.\, x^{r-1} = (a \boxplus x)^1 = 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a^{r-1} \,.\, x^0 \vee a^{r-2} \,.\, x^1 \vee \;\ldots\; \vee a^0 \,.\, x^{r-1} = (a \boxplus x)^{r-1} = 0 \end{array}\right.$$

Ce système (aux inconnues x^i) s'écrit comme un produit matriciel booléen :

$$A \circledast X = E_0 \,.$$

Or la matrice A est **orthogonale**, donc inversible (c'est même cf [7], en algèbre de Boole, une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité). Donc ${}^tA = A^{-1}$, et :

$$X = A^{-1} \circledast E_0 = {}^tA \circledast E_0 \,.$$

Soit

$$x^0 = a^0 \;;\; x^1 = a^{r-1} \;;\ldots;\; x^{r-1} = a^1$$

et donc $$x = a^0 . e_0 \vee a^{r-1} . e_1 \vee \ldots \vee a^1 . e_{r-1} \cdot \qquad \text{(H3)}$$

on notera $$x = \boxminus a \quad \text{et} \quad a \boxplus (\boxminus b) = a \boxminus b$$

L'anneau est de caractéristique r

Soit $$r . a = a \boxplus a \boxplus \ldots \boxplus a .$$

On a, par récurrence :

$$[2 . a]^i = \bigvee_{s+t \equiv i} a^s . a^t = \bigvee_{2.s \equiv i} a^s \qquad \text{et donc :}$$

$$[r . a]^i = \bigvee_{r.s \equiv i} a^s . \qquad \text{Or il est clair que}$$

$$(\forall s) \quad r . s \equiv 0 \quad [r] . \quad \text{Donc}$$

$$i \neq 0 \Rightarrow [r . a]^i = 0 \quad \text{et} \quad [r\,a]^0 = \bigvee_{s=0}^{r-1} a^s = 1 .$$

Etude du produit (loi$*$)

On montre, comme plus haut, que la loi $*$ est interne, commutative, et associative. Les démonstrations en sont laissées au lecteur. Elles sont tout à fait analogues aux propriétés correspondantes pour $\boxplus$ et ne font intervenir là aussi que la structure de $\mathbf{Z}/r.\mathbf{Z}$.

L'élément unité est e_1

Il suffit de vérifier (l'unicité vient de l'associativité);on sait que:

$$(e_1)^i = \delta^i_1 \ , \quad \text{et donc :}$$

$$(x * e_1)^i = \bigvee_{s.t \equiv i} x^s . (e_1)^t = \bigvee_{s \equiv i} x^s = x^i$$

Le produit est distributif vis à vis de la somme

$$\{x * (y \boxplus z)\}^i = \bigvee_{s.t \equiv i} x^s . (y \boxplus z)^t = \bigvee_{s.t \equiv i} x^s . \left[\bigvee_{p+q \equiv t} y^p . z^q \right]$$

$$= \bigvee_{s.(p+q) \equiv i} x^s . y^p . z^q$$

or $$(x * y)^a = \bigvee_{s.p \equiv a} x^s . y^p \quad (x * z)^b = \bigvee_{tq \equiv b} x^t . z^q$$

$$[(x * y) \boxplus (x * z)]^i = \bigvee_{a+b \equiv i} \left[\left(\bigvee_{s.p \equiv a} x^s . y^p\right) \cdot \left(\bigvee_{t.q \equiv b} x^t . z^q\right)\right]$$

$$= \bigvee_{a+b \equiv i} \left[\bigvee_{\substack{s.p \equiv a \\ t.q \equiv b}} x^s . y^p . z^q\right] \qquad \text{(c.q.f.d)}$$

Cas du module premier :

On sait que si le module r est premier $\mathbf{Z}/r.\mathbf{Z}$ est alors un corps fini. Il n'en est pas de même pour $\mathbf{P}$ (en général), mais on va établir la propriété.

$$(\forall\, a \in \mathbf{P}) \quad a^{(r)} = a * a * , \ldots * a = a$$

qui généralise l'idempotence $(a.a = a)$ d'un anneau booleen. La démonstration utilise le théorème de Fermat que nous rappelons ici :

Si r est premier et $s \in \mathbf{N}$, alors : $x^r \equiv s \quad [r]$

On a

$$[a^{(r)}]^i = \bigvee_{s^r \equiv i} a^s = \bigvee_{s \equiv i} a^s = a^i .$$

Remarques :

1) On a

$$(e_i \boxplus e_j)^k = \bigvee_{s+t \equiv k} (e_i)^s . (e_j)^t = \bigvee_{s+t \equiv k} \delta_i^s . \delta_j^t = \delta_{i+j}^k$$

et donc $e_i \boxplus e_j = e_{i+j\,[r]}$. En particulier $e_2 = 2 . e_1$

De même

$$(e_i * e_j)^k = \bigvee_{s.t \equiv [k]} (e_i)^s . (e_j)^t = \delta_{i.j}^k \quad \text{et donc} \quad e_i * e_j = e_{i.j\,[r]} .$$

2) Voici, à titre d'exemple le calcul de $x \boxplus y$ et $x * y$ dans le cas $r = 3$.

$$\text{(H4)} \begin{cases} (x \boxplus y)^0 = x^0 . y^0 \vee x^2 . y^1 \vee x^1 . y^2 \\ (x \boxplus y)^1 = x^1 . y^0 \vee x^0 . y^1 \vee x^2 . y^2 \\ (x \boxplus y)^2 = x^2 . y^0 \vee x^1 . y^1 \vee x^0 . y^2 \end{cases}$$

$$\text{(H5)}\begin{cases}(x * y)^0 = x^0 . y^0 \vee x^0 . y^2 \vee x^2 . y^0 \vee x^0 . y^1 \vee x^1 . y^0 = x^0 \vee y^0\\ (x * y)^1 = x^1 . y^1 \vee x^2 . y^2\\ (x * y)^2 = x^1 . y^2 \vee x^2 . y^1\end{cases}$$

3) Bien que l'anneau postien ($\mathbf{P}$, ⊞ , $*$) soit une généralisation de l'anneau booléen, il importe de souligner que la restriction de ⊞ au centre $\mathbf{B}$ de $\mathbf{P}$ n'est *pas* la différence symétrique. Prenons, pour un contre-exemple $r = 3$ et deux éléments complémentés x et y. On a donc

$$x = \bar{x} . e_0 \vee 0 . e_1 \vee x . e_2 \quad ; \quad y = \bar{y} . e_0 \vee 0 . e_1 \vee y . e_2$$

on en tire (voir remarque n° 2 ci-dessus) :

$$(x \boxplus y)^0 = \bar{x} . \bar{y}$$

$$(x \boxplus y)^1 = x . y$$

$$(x \boxplus y)^2 = x\bar{y} \vee \bar{x}y$$

On voit donc que $x \boxplus y$ est distinct de l'élément $x \oplus y$ qui est un élément complémenté avec :

$$(x \oplus y)^0 = \bar{x}\bar{y} \vee xy \qquad (x \oplus y)^1 = 0 \qquad (x \oplus y)^2 = x\bar{y} \vee \bar{x}y$$

4) Si β est une sous-algèbre de $\mathbf{P}$ alors les relations donnant $x \boxplus y$ et $x * y$ montrent que ces éléments appartiennent encore à β. On a même

Théorème [16]

Si β est une sous-algèbre de Post de $\mathbf{P}$, (β, ⊞, $*$) est un sous anneau de ($\mathbf{P}$, ⊞, $*$). En particulier ($\langle r \rangle$, ⊞, $*$) et un sous anneau fini,isomorphe à $\mathbf{Z}/r . \mathbf{Z}$.

Les règles (1) et (2) se complètent ici de façon simple

Règle [3]

Pour prendre la somme (⊞) on le produit (*) de deux décompositions du type (E3) il suffit de prendre la somme (resp. le produit des composantes) :

En effet, si

$$x = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j . x_j \quad \text{et} \quad y = \bigvee_{j \in \langle r \rangle^n} p^j y_j ,$$

$$(x \boxplus y)^i = \bigvee_{s+t \equiv i} x^s \cdot y^t = \bigvee_{s+t \equiv i} \left[\bigvee_j p^j \cdot [x_j]^s \right] \cdot \left[\bigvee_k p^k [y_k]^t \right]$$

$$= \bigvee_{s+t \equiv i} \left[\bigvee_{(j,k)} p^j \cdot p^k \cdot (x_j)^s \cdot (y_k)^t \right]$$

$$= \bigvee_{s+t \equiv i} \left[\bigvee_{j=0}^{r-1} p^j (x_j)^s \cdot (y_j)^t \right] = \bigvee_{j=0}^{r-1} p^j \left[\bigvee_{s+t \equiv i} (x_j)^s \cdot (y_j)^t \right]$$

$$= \bigvee_{j=0}^{r-1} p^j \, [x_j \boxplus y_j]^i$$

La démonstration est analogue pour le produit.

I – ALGEBRE DE POST PRODUIT. ALGEBRE IMAGE.

A partir d'une famille de r-algèbres de Post (il est essentiel que le module soit le même pour toutes), on va définir une structure d'algèbre de Post sur le produit cartésien, suivant un procédé simple.

Soient $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ n algèbres de Post de même module r et

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \times \ldots \times \mathbf{P}_n \, .$$

On définit, si

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

sont deux éléments de $\mathbf{P}$:

$$(\mathrm{I1}) \left\{ \begin{array}{ll} x \vee y = (x_1 \vee y_1, x_1 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n) \\ x \cdot y = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n) \\ (x)^i = ((x_1)^i, (x_2)^i, \ldots\ldots, (x_n)^i) \\ E_i = (e_i, e_i, \ldots\ldots\ldots\ldots, e_i) \end{array} \right.$$

On démontre alors très facilement le théorème suivant :

Théorème [17]

Ainsi structuré, $\mathbf{P}$ est une r-Algèbre de Post appelée *algèbre produit.*

Remarque 1 :

Si $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2 = \ldots = \mathbf{P}_n = p$ et si l'on considère $\mathbf{P} = p^n$, alors $\mathbf{P}$ contient naturellement deux sous-algèbres fondamentales

– d'une part $<r>_{\mathrm{p}}$ à r éléments

– d'autre part $[<r>_p]^n$ à r^n éléments.

Remarque 2 :

Le centre de $<r>^n$ est $<2>^n$ (immédiat)

Voici encore une autre notion tout à fait usuelle et simple, qui sera bien commode dans la suite : étant donné un ensemble quelconque E et une r-algèbre de Post $\mathbf{P}$, on va munir l'ensemble $\mathbf{P}^E$ de toutes les applications de E dans $\mathbf{P}$, d'une structure d'algèbre de Post. Le procédé est sans surprise. Définissons (si f et g sont deux éléments de $\mathbf{P}^E$) $f \vee g$, $f \,.\, g$, f^i, et ϵ_i par :

$$(\mathrm{I2}) \quad \left\{ \begin{array}{lll} (\forall\, x \in E) & (f \vee g)\,(x) & = f(x) \vee g(x) \\ \quad " & (f\,.\,g)\,(x) & = f(x)\,.\,g(x) \\ \quad " & f^i(x) & = [f(x)]^i \\ \quad " & \epsilon_i\,(x) & = e_i \end{array} \right.$$

L'ensemble $<r>_{\mathbf{P}^E}$ est par exemple ici l'ensemble des r applications constantes $\{\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{r-1}\}$.

Remarque :

Le centre de $<r>^E$ est $<2>^E$.

En effet, si f est un élément complémenté de $<r>^E$, alors il existe $g \in <r>^E$ telle que

$$f \vee g = \epsilon_{r-1} \qquad\qquad f\,.\,g = \epsilon_0$$

Donc $(\forall x \in E)$ $f(x) \vee g(x) = 1$ et $f(x)\,.\,g(x) = 0$

$f(x)$ et $g(x)$ sont donc complémentés dans $<r>$. Ils appartiennent donc nécessairement à $<2>$, qui est le centre de $<r>$.

Théorème [18]

Ainsi structuré, $\mathbf{P}^E$ est une r-algèbre de Post appelée *algèbre image*.

Ce théorème sera souvent appliqué au cas $<r>^E$ (où $\mathbf{P} = <r>$) ensemble des applications d'un ensemble quelconque E vers l'ensemble totalement ordonné $<r>$, de cardinal r, muni de la structure d'Algèbre de Post.

J – DIVERS EXEMPLAIRES D'ALGEBRES DE POST FINIES

Soit $\mathbf{P}$ une r-algèbre de Post finie. Son centre $\mathbf{B}$ est alors lui-même fini, et l'on sait que $\mathbf{B}$ est isomorphe à l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties d'un ensemble Ω (*). Donc il existe $n \in \mathbf{N}^*$ ($n = \mathrm{card}(\Omega)$) tel que

$$\mathrm{Card}(\mathbf{B}) = 2^n$$

et donc, d'après (C6) :

$$\mathrm{Card}(\mathbf{P}) = r^n .$$

Par ailleurs toutes les algèbres de Boole finies de même cardinal sont isomorphes. Il résulte du théorème [11]:

Théorème [19]

Toutes les r-algèbres de Post finies de même cardinal sont isomorphes et ce cardinal est de la forme r^n ($n \in \mathbf{N}^*$).

Corollaire [19A]

Les algèbres $<r>^n$, $<r>^\Omega$, $\Delta^{(r-1)}(\mathcal{P}(\Omega))$, $\mathcal{P}_r(\Omega)$ (où $\mathrm{Card}(\Omega) = n$) sont quatre exemplaires de l'algèbre de Post à r^n éléments.

On a des résultats plus fins en ce qui concerne d'une part les algèbres libres [9] d'autre part le cas où Ω n'est plus nécessairement fini. Nous ne les développerons pas ici, mais nous nous intéresserons à expliciter l'un des isomorphismes annoncés dans le corollaire précédent.

Observons d'abord que si $\mathcal{P}_r(\Omega)$ désigne l'algèbre des r-partitions ordonnées de Ω, dont le centre est $H_r(\Omega)$, il existe un isomorphisme booléen ω de $H_r(\Omega)$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

$$\omega(\bar{X}, \phi, \phi, \ldots, \phi, X) = X$$

Puis il existe un isomorphisme booléen φ de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $<2>^\Omega$ (application caractéristique)

(*) Par exemple, l'ensemble des atomes de $\mathbf{B}$.

$$X \subset \Omega \qquad \varphi(X)(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in X .$$

Alors $h = \varphi_0 \, \omega$ est un isomorphisme booléen de $\mathcal{P}(\Omega)$ sur $<2>^{\Omega}$; il se prolonge d'une et d'une seule façon en un isomorphisme postien de $\mathcal{P}_r(\Omega)$ sur $<r>^{\Omega}$ que nous détaillons ci-dessous :

Soit

$$A = (X^0 , X^1 , \ldots , X^{r-1}) \in \mathcal{P}_r(\Omega)$$

$$A = \bigvee_{i=0}^{n-1} A^i . E_i .$$

Le prolongement de h est donné par :

$$h\Big(\bigvee_{i=0}^{r-1} A^i . E_i\Big) = \bigvee_{i=0}^{r-1} h(A^i) . \epsilon_i$$

or $$A^i = (\overline{X^i} , \phi , \ldots , \phi , X^i) .$$

et donc $$\begin{cases} h(A^i)(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in X^i \\ h(A^i)(x) = 0 \Longleftrightarrow x \notin X^i \end{cases}$$

Donc $$\begin{aligned} &[h(A^i) . \epsilon_i](x) = e_i \Longleftrightarrow x \in X^i \\ &[h(A^i) . \epsilon_i](x) = 0 \Longleftrightarrow x \notin X^i \end{aligned}$$

En fin de compte :

$$\Big\{ \Big(\bigvee_{i=0}^{r-1} h(A^i) . \epsilon_i\Big)(x) = e_k \Big\} \Longleftrightarrow x \in X^k .$$

On a donc le théorème :

Théorème [20]

L'application $h : \mathcal{P}_r(\Omega) \to <r>^{\Omega}$

où, si $$X = (X^0 , X^1 , \ldots , X^{r-1}) \in \mathcal{P}_r(\Omega)$$

$$h(X)(a) = e_k \Longleftrightarrow a \in X^k$$

est un isomorphisme postien (*).

(*) h est appelée la *fonction caractéristique* de la r-partition X.

Ce théorème permet de mieux comprendre comment est faite la disjonction (ou la conjonction) de deux r-partitions. Les formules du théorème [4] sont apparues comme relativement compliquées. Mais elles sont telles qu'à la disjonction de deux partitions (X et Y par exemple) correspond la disjonction des fonctions caractéristiques, or cette dernière opération est définie de façon naturelle :

$$\{(\forall a \in \Omega)\} \quad [h(X) \vee h(Y)](a) = \mathrm{Sup.}\{h(X)(a)\ ,\ h(Y)(a)\}\,.$$

K – MATRICES POSTIENNES

Il y aurait beaucoup à dire sur les matrices postiennes, notamment sur les équations matricielles. Il n'est pas possible de développer ici un sujet un peu trop particulier (on pourra consulter [8]). Les seules propriétés établies ici le sont en vue du chapitre sur les r-graphoïdes.

Définition [8]

On appelle *matrice postienne* d'ordre $(n\ ,\ p)$ sur une algèbre de Post $\mathbf{P}$, *un élément de* $\mathbf{P}^{n.p.}$

On désignera par $M_{n,p}(\mathbf{P})$ l'ensemble de toutes les matrices d'ordre $(n\,,p)$ sur $\mathbf{P}$. On a l'habitude de ranger les éléments d'une matrice en un tableau.

si $$A \in M_{n,p}(\mathbf{P})\ ,\quad [A]_{i,j}$$

sera l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On définit sur $M_{n,p}(\mathbf{P})$ des opérations postiennes de la façon suivante :

$$A \in M_{n,p}(\mathbf{P}) \qquad \text{et} \qquad B \in M_{n,p}(\mathbf{P})$$

$$(\mathrm{K1})\ \begin{cases} [A \vee B]_{i,j} = A_{ij} \vee B_{ij} & [A\,.\,B]_{i,j} = A_{ij}\,.\,B_{ij} \\ [A^k]_{i,j} = [A_{ij}]^k & [E_k]_{i,j} = e_k \end{cases}$$

On a alors, tout à fait simplement :

Théorème [21]

Ainsi structuré, $M_{n,p}(\mathbf{B})$ est une r-algèbre de Post.

Il faut bien dire que ce théorème, pris isolément, n'a guère d'intérêt. En effet $M_{n,p}(\mathbf{P})$ n'est alors qu'une autre écriture de $\mathbf{P}^{n \times p}$. L'intérêt de la notion de matrice vient de ce qu'on définit une nouvelle opération, le *produit matriciel.*

Définition [9]

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbf{P})$ et $B i \in M_{p,q}(\mathbf{P})$. On définit le *produit matriciel* $A \circledast B$ comme une matrice de $M_{n,q}(\mathrm{B})$ par

$$\boxed{(A \circledast B)_{i,j} = \bigvee_{k=1}^{p} (A)_{ik} \, . \, (B_{kj})} \tag{K2}$$

Les règles usuelles concernant les ordres des matrices sont conservées.

Remarques :

L'apparente évidence de la définition (K2) ne doit pas masquer qu'elle marque une rupture de symétrie entre disjonction et conjonction (lesquelles sont pourtant des opérations duales sur une algèbre de Post). Il était tout aussi légitime de définir.

$$(A \boxtimes B)_{i,j} = \prod_{k=1}^{p} (A_{ik} \vee B_{kj}) \tag{K3}$$

L'opération $\boxtimes$ sera appelée opération *duale du produit matriciel.* En fait, la définition (K2) est faite en terme de "maximin", et en terme de "minimax" pour (K3).

Aussi peut-on s'attendre de la part du produit matriciel à des propriétés diverses vis-à-vis de la disjonction et de la conjonction (voir ci-dessous).

Proposition

Le produit matriciel est *associatif.*

Il suffit de faire la vérification au niveau des coefficients.

Théorème [22]

Le produit matriciel est *distributif* (à droite et à gauche) *vis-à-vis de la disjonction* (ceci est faux pour une conjonction).

Démonstration :

$$[A \otimes (B \vee C)]_{i,j} = \bigvee_k A_{ik} \,.\, (B \vee C)_{kj} = \bigvee_k A_{ik} \,.\, (B_{kj} \vee C_{kj})$$

$$= \bigvee_k A_{ik} \,.\, B_{kj} \vee \bigvee_k A_{ik} \,.\, C_{kj} = (A \otimes B)_{i,j} \vee (A \otimes C)_{i,j} .$$

On a une démonstration analogue pour la distributivité à droite. Ce théorème à un corollaire fondamental :

Théorème [23]

Le produit matriciel est *compatible* (à droite et à gauche) *avec la relation d'ordre,* c'est-à-dire que :

$$A \leqslant B \Rightarrow \begin{cases} A \otimes C \leqslant B \otimes C \\ C \otimes A \leqslant C \otimes B . \end{cases}$$

En effet, $A \leqslant B$ équivaut à $A \vee B = B$

et $(A \vee B) \otimes C = B \otimes C = (A \otimes C) \vee (B \otimes C)$

Donc $A \otimes C \leqslant B \otimes C$.

On a une démonstration analogue pour la compatibilité de l'autre côté. On peut observer que ce théorème reste vrai en y remplaçant "produit matriciel" par "opération duale du produit matriciel", qui est alors distributif vis-à-vis de la conjonction : on utilise alors $A \leqslant B \Longleftrightarrow A \,.\, B = A$.

Dans le cas des matrices carrées, on note $M_n(\mathbf{P}) = M_{n,n}(\mathbf{P})$ et on a :

Théorème [24]

$(M_n(\mathbf{P}), \otimes)$ est une monoïde non commutatif (*).

Rappelons qu'un monoïde est la structure constituée par un ensemble muni d'une loi de composition *interne* (ce qui est vrai ici), associative, et pourvue d'un élément unité qui est ici la matrice unité ordinaire définie par :

$$(I)_{i,j} = \delta_i^j .$$

- - - - - - - - - - - - - -

(*) Il n'y a commutativité que si et seulement si $n = 1$.

On définira donc le carré ($A^2 = A \otimes A$), la puissance $p^{\text{ième}}$ d'une matrice carrée (A^p). On aura besoin dans le chapitre sur les graphoïdes de la structure de l'élément courant de A^p. Les résultats sont très simples :

$$(A^2)_{i,j} = \bigvee_{k=1}^{n} A_{ik} \, . \, A_{kj}$$

$$(A^3)_{i,j} = \bigvee_{k} (A^2)_{i.k}(A)_{kj} = \bigvee_{k} \left[\bigvee_{e} A_{ie} \, . \, A_{ek} \right] . \, A_{kj}$$

et donc

$$(A^3)_{i,j} = \bigvee_{(k,e)} A_{ie} \, . \, A_{ek} \, . \, A_{kj}$$

où (k, l) décrit $[1, n] \times [1, n]$ (il y a donc n^2 termes dans la disjonction). Par une récurrence très simple, on montre que

$$(A^p)_{i,j} = \bigvee_{(i_1, \ldots, i_{p-1})} A_{ii_1} \, . \, A_{i_1 i_2} \, . \ldots . \, A_{i_{p-1}.j}$$

où $\qquad (i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}) \in [1, n]^{p-1}$.

II – FONCTIONS POSTIENNES

I. – DEFINITION DES POLYNOMES POSTIENS

On s'intéresse ici aux applications de $\mathbf{P}^n$ dans $\mathbf{P}$ d'un type particulier, dit *polynomial*. On a l'habitude de définir un polynôme à n variables f par le fait que $f(x_1, \dots, x_n)$ peut s'écrire *à l'aide des seules variables x_i, et des symboles postiens usuels :* $\vee, . , (x)^k$ *et* $\{e_j\}$. Il faut en effet remarquer que, dans le cas général (et ceci avait été souligné, dans le cas booléen, par Hammer et Rudeanu) toute application de $\mathbf{P}^n$ dans $\mathbf{P}$ n'est *pas* du type polynomial. Néanmoins la définition donnée plus haut n'est pas satisfaisante car elle est mathématiquement imprécise (comment s'assurer par exemple qu'une fonction donnée par sa *table* est, ou non, polynomiale?) et ensuite peu exploitable. Nous lui préfèrerons une définition plus compliquée, certes, mais qui présente l'avantage de permettre une utilisation directe des théorèmes déjà donnés : le théorème sur la forme normale disjonctive apparaîtra par exemple comme la simple adaptation du théorème [9].

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{P}^n$. On définit une famille de n applications *(projections)* de $\mathbf{P}^n$ dans $\mathbf{P}$ par

$$p_i : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P} \qquad p_i(x) = x_i\ .$$

Soit $E \subset \mathbf{P}^{(\mathbf{P}^n)}$. On considèrera, bien entendu, que $(\mathbf{P})^{(\mathbf{P}^n)}$ est muni de la structure d'algèbre image

Soit

$$E = \{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbf{P}^{(\mathbf{P}^n)}$$

Définition [10]

On appelle *polynôme postien élémentaire à n variables* (*) *un élément de la sous-algèbre engendrée dans* $(\mathbf{P})^{(\mathbf{P}^n)}$ *par la famille des projections.* On notera $\Pi_n(\mathbf{P})$ l'ensemble de tous les polynômes à n variables.

(*) Il est possible d'étendre tous les résultats qui suivent à une famille d'applications bien plus large. Mais le "prix" à payer en est une construction bien moins naturelle. Aussi m'abstiendrai-je ici.

Explicitons sur un exemple : p_1, p_2 et p_3 sont trois projections. Donc $(p_1)^2, (p_2)^0, (p_2)^1, (p_3)^2$ sont (par exemple) des éléments de $\Pi_n(\mathbf{P})$, donc, aussi, (par structure de sous-algèbre), l'application f :

$$f = (p_1)^2 \vee (p_2)^0 \,.\, (p_3)^2 \vee (p_2)^1 \,.$$

Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= [(p_1)^2 \vee (p_2)^0 \,.\, (p_3)^2 \vee (p_2)^1](x_1, \ldots, x_n) \\ &= (x_1)^2 \vee (x_2)^0 \,.\, (x_3)^2 \vee (x_2)^1 \end{aligned}$$

On a bien la coïncidence de notre définition *abstraite* avec la définition plus concrète évoquée plus haut.

Théorème [25] (forme normale disjonctive).

Pour que f appartienne à $\Pi_n(\mathbf{P})$, il faut et il suffit que

$$(\forall\, x \in \mathbf{P}^n) \quad f(x) = \bigvee_{\alpha \in <r>^n} x^\alpha \,.\, f(\alpha) \tag{L1}$$

et $$(\alpha \in <r>^n \Rightarrow f(\alpha) \in <r>)$$

Commentaires :

Avant de donner la démonstration de ce théorème (l'un des plus importants), explicitons un peu. L'écriture (L1) signifie que f a une décomposition canonique en une disjonction de r^n termes – l'index de disjonction étant $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in <r>^n$) – et l'on a donc :

$$x^\alpha \,.\, f(\alpha) = (x_1)^{\alpha 1} \,.\, (x_2)^{\alpha 2} \,.\,.\,.\,.\,.\, (x_n)^{\alpha n} \,.\, f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \,.$$

Par exemple pour $n = 1$, on a (relation (L2)) :

$$(\forall f \in \Pi_1(\mathbf{P})) \quad f(x) = x^0 \,.\, f(e_0) \vee x^1 \,.\, f(e_1) \vee \ldots \vee x^{r-1} \,.\, f(e_{r-1}) \,.$$

Par exemple aussi, pour $n = 2$ et $r = 3$ (relation (L3)) :

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & x^0 \,.\, y^0 \,.\, f(e_0, e_0) \vee x^0 \,.\, y^1 \,.\, f(e_0, e_1) \vee x^0 \,.\, y^2 \,.\, f(e_0, e_2) \\ & \vee x^1 \,.\, y^0 \,.\, f(e_1, e_0) \vee x^1\, y^1 \,.\, f(e_1, e_1) \vee x^1 \,.\, y^2 \,.\, f(e_1, e_2) \\ & \vee x^2 \,.\, y^0 \,.\, f(e_2, e_0) \vee x^2 \,.\, y^1 \,.\, f(e_2, e_1) \vee y^2 \,.\, y^2 \,.\, f(e_2, e_2) \,. \end{aligned}$$

Démonstration du théorème [25]

On utilise le théorème [9] qui caractérise l'élément courant de la sous-algèbre engendrée par une partie finie.

On a

$$f = \bigvee_{\alpha \in <r>^n} p^\alpha \, . \, f_\alpha \qquad \text{où} \qquad f_\alpha \in <r> \tag{L4}$$

donc

$$f(x) = \bigvee_{\alpha \in <r>^n} p^\alpha \, . (x) \, . f_\alpha = \bigvee_{\alpha \in <r>^n} x^\alpha \, . \, f_\alpha \, .$$

Il reste à démontrer que $f(\alpha) = f_\alpha$ si $\alpha \in <r>^n$.

Prenons donc (A'4) :

$$x = \gamma \in <r>^n \, .$$

On a

$$f(\gamma) = \bigvee_{\alpha \in <r>^n} \gamma^\alpha \, . \, f_\alpha = \gamma^\gamma \, . \, f_\gamma = f_\gamma \qquad (\text{car } \gamma^\alpha = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta)$$

On peut commenter ici, comme on le fait dans le cas booléen : l'écriture d'un polynôme f sous forme disjonctive n'est certainement pas la façon la plus simple de l'écrire (c'est même la plus longue), mais elle présente d'immenses avantages, qui sont résumés dans la règle ci-dessous – conséquence des règles diverses obtenues en considérant la sous algèbre engendrée par une partie – qui manifeste la *transparence* des formes disjonctives par rapport aux opérations postiennes usuelles.

Règle [4]

Une décomposition normale disjonctive est unique. Pour disjoncter (v), *conjoncter* (.), *sommer* (⊞), *multiplier* (∗) *(resp. prendre la $i^{\text{ième}}$ composante postienne, la négation, la duale) de deux (resp. une) décomposition normale disjonctive, il suffit d'effectuer la même opération sur les composantes.*

Exemple 1 :

Soit l'expression

$$y = a \, . \, x^0 \vee b \, . \, x^1 \vee c \, . \, x^2 \qquad \text{où} \qquad a, b \quad \text{et} \quad c \in <r>$$

Calculer y^1 et y' .

Posons $y = f(x)$. On a, d'après l'unicité :

$$a = f(e_0) \; ; \quad b = f(e_1) \; ; \quad c = f(e_2)$$

et

$$y^1 = [f(x)]^1 = a^1 \, . \, x^0 \vee b^1 \, . \, x^1 \vee c^1 \, . \, x^2 \, .$$

De même

$$y' = a' . x^0 \vee b' . x^1 \vee c'x^2 .$$

On voit bien (même sur cet exemple où $n = 1$) combien un calcul direct aurait été long.

Exemple 2. Equations fonctionnelles.

Soit à résoudre, par exemple, l'équation fonctionnelle :

$$(\forall (a , b) \in \mathbf{P}^2) : \quad f(a , f(b , a)) = f(a^0 , b^2) \quad \text{où} \quad f \in \Pi_2(\mathbf{P}) .$$

La technique consistera à écrire $f(x , y)$ suivant la forme (L3) (*) puis à écrire $x = a$ et $y = f(b , a)$, lui même écrit sous forme disjonctive. La substitution n'est pas trop laborieuse si l'on observe que pour calculer $y^i = [f(b , a)]^i$ on utilise à nouveau la règle précédente. Les calculs étant effectués des deux côtés, on obtient une équation de la forme :

$$(\forall (a , b) \in \mathbf{P}^2) \quad H_1(a , b) = H_2(a , b)$$

où H_1 et H_2 sont sous forme disjonctive. L'unicité entraîne alors qu'il suffit d'égaler les coefficients de même rang, pour avoir un système de 9 équations à 9 inconnues dont le chapitre qui suit nous donne une méthode complète de résolution – dans la pratique, il arrive souvent qu'il ne soit pas nécessaire d'utiliser à ce niveau la méthode générale et que des considérations "locales" suffisent à résoudre.

Observons maintenant que si l'algèbre support $\mathbf{P} = \langle r \rangle$ (cas fréquent), $\Pi_n \langle r \rangle$ coïncide avec l'ensemble de *toutes* les applications de $\langle r \rangle^n$ dans $\langle r \rangle$. Autrement dit *toute* application de $\langle r \rangle^n$ dans $\langle r \rangle$ est polynomiale. En effet :

Théorème [26] $$\boxed{\Pi_n \langle r \rangle = [\langle r \rangle]^{[\langle r \rangle]^n}}$$

Démonstration :

Soit f une application de $\langle r \rangle^n$ dans $\langle r \rangle$, et le polynôme g ($g \in \Pi_n \langle r \rangle$).

$$(\forall x \in \langle r \rangle^n \qquad g(x) = \bigvee_{\alpha \in \langle r \rangle^n} x^\alpha . f(\alpha)$$

(*) A l'aide de neuf coefficients indéterminés.

Alors

$$(\forall\, \beta \in \langle r\rangle^n) \qquad g(\beta) = \bigvee_{\alpha \in \langle r\rangle^n} \beta^{\alpha} \,.\, f(\alpha) = \beta^{\beta} \,.\, f(\beta) = f(\beta)$$

et donc $f = g$.

Corollaires

1) Card $(\Pi_n \langle r\rangle) = (r)^{(r^n)}$

2) Le théorème de la forme normale disjonctive est vrai, sans restriction, pour toutes les applications de $\langle r\rangle^n$ dans $\langle r\rangle$.

M – SYSTEMES D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS POSTIENNES ALGEBRIQUES

Soient f et g deux polynômes postiens à n variables, et $x \in \mathbf{P}^n$. Une *équation* (resp. inéquation) *postienne algébrique* sera une relation de la forme :

$$f(x) = g(x) \qquad (\text{resp. } f(x) \leqslant g(x)).$$

On va montrer dans ce chapitre que l'on peut résoudre *tout* système d'équations et d'inéquations postiennes. La méthode, qui s'inspire de techniques booléennes, consiste en des réductions successives (cf. [7]).

– d'abord on réduit le système à une équation unique et qui est du type $\omega(x) = 0$ (ceci n'est pas trivial, puisqu'il n'y a pas en général de *différence* sur un treillis).

– On montre que la résolution de $\omega(x) = 0$ (où $x \in \mathbf{P}^n$) se ramène à la résolution en cascade de n équations à *une* inconnue (méthode des éliminations successives).

– On a enfin une méthode de résolution des équations à une inconnue qui fournit la solution générale sous forme paramétrique.

1. Réduction des systèmes postiens à une forme canonique

Théorème [27]

Tout système de p équations et de q inéquations postiennes à n inconnues du type :

$$f_k(x) = g_k(x) \qquad 1 \leqslant k \leqslant p$$

$$m_k(x) \leqslant n_k(x) \qquad 1 \leqslant k \leqslant q$$

est équivalent à une *seule* equation, du type :

$$\omega(x) = 0 \qquad \text{où} \qquad \omega \in \Pi_n(\mathbf{P}) \qquad \text{et} \qquad x \in \mathbf{P}^n .$$

Démonstration :

Observons d'abord que chaque équation

$$f_k(x) = g_k(x)$$

est équivalente à

$$(f_k \boxminus g_k)(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_k \boxminus g_k = \lambda_k$$

est un polynôme. De même pour une inéquation

$$m_k(x) \leqslant n_k(x) \Longleftrightarrow [m_k \vee n_k](x) = n_k(x) \Longleftrightarrow [(m_k \vee n_k) \boxminus n_k](x) = 0 .$$

Dans la première étape de la réduction, on voit que le système est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda_k(x) = 0 & 1 \leqslant k \leqslant p \\ \mu_k(x) = 0 & 1 \leqslant k \leqslant q . \end{cases}$$

Ces $p + q$ équations sont alors équivalentes à

$$\Big(\bigvee_{k=1}^{p} \lambda_k \vee \bigvee_{k=1}^{q} \mu_k\Big)(x) = 0 = \omega(x)$$

et ω est bien un polynôme.

Exemple :

Prenons $r = 3$ et $n = 1$ (*)

$$\begin{cases} x^1 \vee x^2 . e_1 = x^1 \vee x^0 . e_1 \\ \quad x^0 . e_1 \leqslant x^1 . \end{cases}$$

Mettons l'équation sous forme de l'égalité de deux formes normales disjonctives

$$x^0 . (e_0) \vee x^1 . (e_2) \vee x^2 . (e_1) = x^0 . (e_1) \vee x^1 . (e_2) , x^2 . (e_0) .$$

Soit

$$x^0 . (e_0 \boxminus e_1) \vee x^1 . (e_2 \boxminus e_2) \vee x^2 . (e_1 \boxminus e_0) = 0$$

(*) La méthode adoptée n'est pas ici la plus courte : nous avons seulement voulu montrer l'emploi de la méthode générale.

Rappelons que $\langle r \rangle$ muni de la structure d'anneau postien est isomorphe à $\mathbf{Z}/r\,.\,\mathbf{Z}$. Donc

$$x^0\,.\,(e_2) \vee x^1\,.\,(e_0) \vee x^2\,.\,(e_1) = 0\,. \tag{M1}$$

Pour l'inéquation, on obtient :

$$x^0.\,(e_1) \vee x^1.\,(e_0) \vee x^2.\,(e_0) \leqslant x^0.\,(e_0) \vee x^1.\,(e_2) \vee x^2.\,(e_0)$$

ou

$$x^0.\,(e_1 \vee e_0) \vee x^1.\,(e_0 \vee e_2) \vee x^2.\,(e_0 \vee e_0) = x^0.\,(e_0) \vee x^1.\,(e_2) \vee x^2.\,(e_0)$$

$$x^0\,.\,(e_1) \vee x^1\,.\,(e_2) \vee x^2\,.\,(e_0) = x^0\,.\,(e_0) \vee x^1\,.\,(e_2) \vee x^2\,.\,(e_0)$$

$$x^0.\,[e_1 \boxminus e_0] \vee x^1\,[e_2 \boxminus e_2] \vee x^2[e_0 \boxminus e_0] = 0$$

$$x^0\,.\,(e_1) \vee x^1\,.\,(e_0) \vee x^2\,.\,(e_0) = 0 \tag{M2}$$

L'ensemble de $(B'1)$ et $(B'2)$ est équivalent à

$$x^0\,.\,(e_1 \vee e_2) \vee x^1\,.\,(e_0 \vee e_0) \vee x^2\,.\,(e_1 \vee e_0) = 0$$

soit, finalement

$$x^0\,.\,(e_2) \vee x^1\,.\,(e_0) \vee x^2.\,(e_1) = 0$$

Remarque

Dans le cas où l'équation proposée est du type

$$f(x) = e_k \qquad (k \geqslant 1)$$

il n'est pas nécessaire d'appliquer la méthode générale précédente, pour la ramener à la forme canonique. En effet

$$f(x) = e_k \qquad \text{équivaut à} \qquad [f(x)]^k = 1$$

soit $\overline{[f(x)]^k} = 0\,.$

2. Résolution des équations à une inconnue (résultats généraux)

Soit f un polynôme à une variable. Nous devons donc résoudre

$$f(x) = 0 = \bigvee_{\alpha \in \langle r \rangle} x^\alpha.\,f(\alpha) \tag{M3}$$

que l'on écrit plutôt sous la forme équivalente :

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} x^i.\,z_i = 0 \qquad (z_i = f(\alpha_i))$$

Théorème [28]

Une condition nécessaire et suffisante pour que (M3) admette des solutions est que :

$$\boxed{\prod_{0}^{r-1} z_i = 0} \tag{M4}$$

Une solution particulière est alors

$$\hat{X} = \bigvee_{0}^{r-1} z_i' \,.\, e_i \,. \tag{M5}$$

Démonstration :

Supposons d'abord qu'il y ait une solution à l'équation proposée. Alors :

$(\forall\, i)\ \ (0 \leqslant i \leqslant r-1) \qquad x^i .\, z_i = 0 \quad$ est équivalent à : $\quad x^i \leqslant z_i'$

Ceci implique :

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} x^i = 1 = \bigvee_{i=0}^{r-1} z_i'$$

or

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} z_i' = \Big(\prod_{i=0}^{r-1} z_i\Big)' = 1$$

qui équivaut à la condition annoncée. En sens inverse, si la condition (M5) est remplie, vérifions que $\hat{X}$ est une solution.

$$\hat{X} = \bigvee_{i=0}^{r-1} z_i' \,.\, e_i$$

Pour pouvoir vérifier, il faut calculer les $(\hat{X})^i$ car $\hat{X}$ n'est *pas* sous forme canonique. Les formules (B4) donnent :

$$(\hat{X})^{r-1} = z_{r-1}' \qquad (\hat{X})^0 = z_1'' \,.\, z_2'' \ldots z_{r-1}''$$

et $\qquad 1 \leqslant k \leqslant r-2 \qquad (\hat{X})^k = z_k' \,.\, z_{k+1}'' \ldots z_{r-1}''$

Formons alors

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} (\hat{X})^i \,.\, z_i \,.$$

On voit directement que tous les termes sont nuls pour $i \geqslant 1$. Quant au cas $i = 0$, il vient :

$$(\hat{X})^0 . z_0 = z_1'' . z_2'' \dots z_{r-1}'' . z_0$$

or, la condition : $z_0 . [z_1 . z_2 \dots z_{r-1}] = 0$

implique : $\quad z_0 \leqslant (z_1 . z_2 \dots z_{r-1})' = z_1' \vee z_2' \vee z_{r-1}'$

qui implique à nouveau :

$$z_0 . (z_1' \vee z_2' \vee \dots \vee z_{r-1}')' = 0 , \qquad \text{soit :}$$

$$z_0 . z_1'' . z_2'' . \qquad z_{r-1}'' = 0$$

Exemple 1 :

Reprenons l'équation

$$x^0 . (e_2) \vee x^1 . (e_0) \vee x^2 . (e_1) = 0$$

on a $\qquad e_2 . e_0 . e_0 = 0$

et la condition (M4) est bien réalisée. On a, par ailleurs :

$$\hat{X} = (e_2') . e_0 \vee (e_0') . e_1 \vee (e_1') . e_2$$

mais $\qquad e_2' = e_1' = 0 \qquad e_0' = 1 . \qquad$ D'où $\qquad \hat{X} = e_1$.

Exemple 2 :

Proposons-nous de résoudre plus généralement :

$$\boxed{x^0 . z_0 \vee x^1 . z_1 \vee x^2 . z_2 = 0} \tag{M6}$$

sachant que : $\qquad z_0 . z_1 . z_2 = 0 . \qquad$ (M6A)

Alors : $\qquad \hat{X} = z_0' . e_0 \vee z_1' . e_1 \vee z_2' . e_2$

et

$$(\hat{X})^2 = z_2' . \qquad (\hat{X})^1 = z_1' . z_2'' \qquad (\hat{X})^0 = z_1'' . z_2'' .$$

Donc : $\qquad \boxed{\hat{X} = (z_1'' . z_2'') . e_0 \vee (z_1' . z_2'') . e_1 \vee (z_2') . e_2} \qquad$ (M7)

Le théorème précédent a donné, à la fois une condition nécessaire et suffisante d'existence des solutions et une solution particulière $(\hat{X})$, mais n'a pas fourni la solution générale : ce problème est en effet plus délicat ; nous exposerons en détail la méthode de résolution pour $r = 3$ de l'équation la plus générale et renvoyons le lecteur à l'annexe pour la démonstration dans le cas où r est quelconque.

3. Résolution de l'équation la plus générale à une inconnue, si $r = 3$.

Notons (en vue d'une récurrence) $\hat{X} = X_2$ et observons que :

$$(X_2)^0 \leqslant z_2'' . \quad (X_2)^1 \leqslant z_2'' \quad \text{et} \quad (X_2)^2 = z_2' .$$

Prenons alors : $\quad y = \theta(x) = e_1 \boxplus x$

Soit $\quad y^0 = x^2 \quad ; \quad y^1 = x^0 \quad ; \quad y^2 = x^1$

et prenons la transformée de l'équation proposée par θ :

$$y^1 . z_0 \vee y^2 . z_1 \vee y^0 . z_2 = 0$$

soit $$y^0 . z_2 \vee y^1 . z_0 \vee y^2 . z_1 = 0$$

qui fournit comme solution fondamentale (en y)

$$y^0 = z_0'' . z_1'' \quad ; \quad y^1 = z_0' . z_1'' \quad ; \quad y^2 = z_1' .$$

Soit, en revenant en x : $x = \theta^{-1}(y) = e_{r-1} \boxplus x$

$$x^0 = z_0' . z_1'' \quad ; \quad x^1 = z_1' \quad ; \quad x^2 = z_0'' . z_1''$$

qui fournit donc une seconde solution notée X_1, vérifiant

$$(X_1)^1 = z_1' \qquad (X_1)^i \leqslant z_1'' \qquad (i \neq 1) .$$

et $$\boxed{X_1 = (z_0' z_1'') . e_0 \vee z'_1 . (e_1) \vee (z_0'' . z_1'') . e_2} \tag{M8}$$

De la même façon, en prenant la transformée de l'équation initiale par θ^2, on a :

$$y = \theta^2(x) = e_2 \boxplus x$$

$$y^0 = x^1 \qquad y^1 = x^2 \qquad y^2 = x^0$$

$$y^2 . z_0 \vee y^0 . z_1 \vee y^1 . z_2 = 0 = y^0 . z_1 \vee y^1 . z_2 \vee y^2 . z_0$$

et une autre solution fondamentale

$$y^0 = z_2'' . z_0'' \quad ; \quad y^1 = z_2' . z_0'' \quad ; \quad y^2 = z_0'$$

et pour la troisième solution X_0

$$(X_0)^0 = z_0' \quad (X_0)^1 = z_0'' . z_2'' \quad (X_0)^2 = z_2' . z_0''$$

où l'on observe encore (c'est important) :

$$(X_0)^0 = z'_0 \quad (X_0)^i \leqslant z''_0 \quad (i \neq 0) .$$

et $$\boxed{X_0 = (z'_0) . (e_0) \vee (z''_0 . z'_2) . (e_1) \vee (z'_2 . z''_0) . (e_2)} \tag{M9}$$

On va maintenant montrer que les trois solutions X_0 , X_1 , X_2 trouvées *engendrent* l'ensemble de toutes les solutions de la façon suivante : Pour que X soit solution de (M3) il faut et il suffit qu'il soit *barycentre* des solutions X_0 , X_1 , X_2 donc qu'il existe $d = d^0 . e_0 \vee d^1 . e_1 \vee d^2 . e_2$ tel que X s'écrive

$$\boxed{X = d^0 . X_0 \vee d^1 . X_1 \vee d^2 . X_2} \tag{M10}$$

Observons d'abord que ($\forall$ d) tout X s'écrivant sous la forme (M10) est solution (ceci serait vrai même si les solution X_0, X_1, X_2 n'étaient pas fondamentales). En effet, on tire de la règle ① la propriété:

$$X^i = (d^0 . X_0 \vee d^1 . X^1 \vee d^2 . X_2)^i = d^0 . (X_0)^i \vee d^1 . (X_1)^i \vee d^2 . (X_2)^i$$

Donc

$$\begin{aligned} f(X) &= X^0 . z_0 \vee X^1 . z_1 \vee X^2 . z_2 \\ &= [d^0 . (X_0)^0 \vee d^1 . (X_1)^0 \vee d^2 . (X_2)^0] . z_0 \vee \\ &\quad [d^0 . (X_0)^1 \vee d^1 . (X_1)^1 \vee d^2 (X_2)^1] . z_1 \vee \\ &\quad [d^0 . (X_0)^2 \vee d^1 . (X_1)^2 \vee d^2 (X_2)^2] \\ &= d^0 . f(X_0) \vee d^1 . f(X_1) \vee d^2 . f(X_2) = 0 \quad \text{car} \quad X_0, X_1 \end{aligned}$$

et X_2 sont trois solutions. En sens inverse, soit u une solution de (M6). Il faut montrer que l'on peut trouver d tel que u s'écrive sous la forme (M10). Nous allons prouver en fait que l'on peut choisir $d = u$ autrement dit que toute solution u de (M6) peut s'écrire sous la forme :

$$u = u^0 . X_0 \vee u^1 . X_1 \vee u^2 . X_2 .$$

Comme u est solution, on a :

$$u^0 . z_0 \vee u^1 . z_1 \vee u^2 . z_2 = 0$$

et donc

$$u^j \leqslant z'_j \qquad \text{ce qui implique à la fois :}$$

$$u^j . z'_j = u^j \qquad \text{et} \qquad u^j . z''_j = 0$$

Donc

$$\begin{aligned} u^0 . X_0 &= u^0 . (z'_0 . e_0 \vee z''_0 . z''_2 . e_1 \vee z'_2 . z''_0 . e_2) \\ &= (u^0 . z'_0) . e_0 = u^0 . e_0 \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} u^1 . X_1 &= u^1 . (z'_0 . z''_1 e_0 \vee z'_1 . e_1 \vee z''_0 . z''_1 . e_2) \\ &= u^1 . z'_1 . e_1 = u^1 . e_1 \end{aligned}$$

Donc

$$u^0 . X_0 \vee u^1 . X_1 \vee u^2 . X_2 = u^0 . e_0 \vee u^1 . e_1 \vee u^2 . e_2 = u .$$

Théorème [29]

L'ensemble des solutions de (M6) s'écrit, moyennant la condition (M6A) sous la forme

$$\boxed{x = d^0 . X_0 \vee d^1 . X_1 \vee d^2 . X_2}$$

où d est un paramètre arbitraire de **P** et X_0, X_1, X_2 les trois solutions fondamentales précédemment définies.

Nous avons pris pour expliquer la méthode l'exemple où $r = 3$. Il permet d'éluder les problèmes d'indiciation qui masquent les articulations de la démonstration, qui reste vraie sur toute r-algèbre de Post. Le lecteur en trouvera une *démonstration* en annexe. On verra que la formulation en est nécessairement plus compliquée.

Remarque :

Il existe d'autres formes de la solution paramétrique (M10) qui peuvent sembler plus simples. Celle-ci présente l'avantage d'être considérée comme une fonction de d sous forme normale disjonctive, donc aisément manipulable notamment pour la recherche des composantes postiennes de X.

4. Cas des équations à n inconnues. Méthode des éliminations successives.

On a vu précédemment que tout système (équations et inéquations) postien était *équivalent* à une seule équation du type $\omega(x) = 0$ où ω est un polynôme à n variables. On va maintenant montrer comment on peut ramener la résolution d'une telle équation à la résolution successive (c'est-à-dire au produit de composition) de n équations à *une* inconnue. Le paragraphe précédent nous ayant donné une méthode de résolution des équations à une inconnue, on a donc un procédé complet de résolution.

Nous commencerons par un lemme.

Lemme

Si $f \in \Pi_n(\mathbf{P})$ alors

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{j=0}^{r-1} (x_i)^j . f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, e_j, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Explicitons d'abord sur un exemple. Prenons $n = 4$ et $r = 3$. Le lemme précédent affirme que si l'on *particularise* l'une des inconnues x_i (prenons par exemple ici x_2), on a une décomposition par rapport à cette variable :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2)^0 . f(x_1, e_0, x_3, x_4) \vee (x_2)^1 . f(x_1, e_1, x_3, x_4)$$
$$\vee\ (x_2)^2 . f(x_1, e_2, x_3, x_4) \vee (x_2)^3 . f(x_1, e_3, x_3, x_4)$$

Sous cette forme, il apparaît clairement que le lemme proposé est une conséquence du théorème de la forme normale disjonctive. En effet, dans l'écriture :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\alpha \in <r>^n} (x_1)^{\alpha 1} . (x_1)^{\alpha 2} . \ldots . (x_n)^{\alpha_n} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

distinguons suivant les valeurs de $\alpha_i \in <r>$. En "mettant en facteur" $(x_i)^0$ (resp. $(x_i)^1, (x_i)^2$ etc. . .) dans les termes qui les contiennent, on a :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_i)^0 g_0(x_1, \ldots, x_n) \vee (x_1)^1 . g_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots$$
$$\vee\ (x_1)^{r-1} g_{r-1}(x_1, \ldots, x_n) .$$

où, chaque g_k ne dépend pas de x_i.

Si l'on fait alors $x_i = e_j$, il vient (comme $(e_j)^k = \delta_j^k$) :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, e_j, x_{i+1}, - x_n) = g_j(x_1, \ldots, x_n)$$

Application : méthode des éliminations successives.

Soit à résoudre $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. On l'écrit, grâce au lemme précédent, comme une équation en x_1

$$\bigvee_{j=0}^{r-1} (x_1)^j . g_j(x_2, \ldots, x_n) = 0 .$$

La condition de compatibilité est (d'après le théorème 28)

$$\prod_{j=0}^{r-1} g_j(x_2, \ldots, x_n) = 0$$

qui est de la forme $f_2(x_2, \ldots, x_n) = 0$, où f_2 est un polynôme à $(n - 1)$ variables (on a *éliminé* x_1). On itère le procédé. On a donc trouvé une méthode répétitive d'éliminations. On parvient à :

$$f_{n-1}(x_{n-1}, x_n) = \bigvee_{i=0}^{r-1} (x_{n-1})^j . f_{n-1}(e_j, x_n) = 0 \qquad \text{(M11)}$$

dont la condition de compatibilité est :

$$0 = \prod_{j=0}^{r-1} f_{n-1}(e_j, x_n) = f_n(x_n) \qquad \text{(M12)}$$

Reste *une* équation à *une* inconnue. Pour qu'il y ait des solutions, il faut et il suffit que $\prod_{\alpha \in <r>} f_n(\alpha) = 0$. [toujours d'après le th. [28]).

Si cette dernière condition est réalisée, on résout $f_n(x_n) = 0$, suivant les méthodes données précédemment. Les solutions en x_n (dépendant d'un paramètre d_n) sont substitués dans (M11) qui fournit x_{n-1} à l'aide d'un nouveau paramètre x_{n-1}, etc. . .

Les calculs effectifs sont grandement facilités à l'aide des deux remarques suivantes qui ne sont que le prolongement (postien) de remarques équivalentes faites dans [[6]] à propos du cas booléen.

D'abord il est fréquent que l'équation proposée ne se présente pas sous forme disjonctive. Bien qu'il soit toujours théoriquement possible de l'y ramener, c'est souvent assez long et l'on peut s'en dispenser.

Supposons en effet que f s'écrive

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1)^0 . g_0(x_2, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee (x_1)^{r-1} . g_{r-1}(x_2, \ldots, x_n) \vee k(x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{(M13)}$$

alors, on écrit : $k = 1 . k = [(x_1)^0 \vee \ldots \vee (x_1)^{r-1}] . k$

et, donc :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1)^0 . [g_0 \vee k] \vee (x_1)^1 . [g_1 \vee k] \vee \ldots \vee (x_1)^{r-1} . [g_{r-1} \vee k]$$

et le résultat de l'élimination de x_1 est, toujours d'après le théorème 28 :

$$(g_1 \vee k) . (g_2 \vee k) . \dots . (g_{r-1} \vee k) = 0 \qquad \text{soit (distributivité)}$$

$$k \vee g_1 . g_2 . \dots . g_{r-1} = 0 . \qquad \text{D'où la règle :}$$

Règle 1 **En éliminant x_1 dans (M13), on trouve :**

$$\boxed{k \vee g_0 . g_1 . \dots . g_{r-1} = 0} \tag{M14}$$

L'équation précédente à $(n-1)$ inconnues se réduit à son tour, etc. . . Puis vient le moment, où remontant les calculs, on doit substituer dans (M13) les inconnues $(x_2, \dots, x_n)$ par $(x_2^*, \dots, x_n^*)$ solution de (M14) pour résoudre l'équation à *une* inconnue en x_1 correspondante.

Or, la relation (M14) prouve que :

Règle 2

$$k(x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \tag{M15}$$

Il en résulte qu'il sera inutile de substituer dans le dernier terme de (M13).

Exemple :

Soit à résoudre sur une 3-algèbre de Post **P** quelconque l'équation à deux inconnues (x et y) :

$$x^0 . y^2 \vee x^2 . y^0 \vee x^1 . y^1 . e_1 \vee a . x^0 \vee \bar{a} . y^0 = 0$$

où a est un paramètre de **P**, que l'on suppose complémenté ($a \in$ **B**);ordonnons par rapport aux x^i

$$x^0 . (y^2 \vee a) \vee x^1 . (y^1 . e_1) \vee x^2 . y^0 \vee \bar{a} . y^0 = 0 \tag{M16}$$

La règle (1) fournit, après élimination de x

$$\bar{a} . y^0 \vee (y^2 \vee a) . (y^1 . e_1) . y^0 = \bar{a} . y^0 \qquad (\text{car } y^0 . y^1 = 0)$$

Pour résoudre cette équation à une inconnue du type (M6), on peut appliquer la méthode au théorème [29] [bien qu'il y ait ici un moyen plus court]. Prenons pour retrouver les notations du théorème [29] :

$$z_0 = \bar{a} \qquad z_1 = 0 \qquad z_2 = 0 \qquad \text{on trouve}$$

$$(Y_2)^0 = 0 \qquad (Y_2)^1 = 0 \qquad (Y_2)^2 = 1$$

$$(Y_1)^0 = 0 \qquad (Y_1)^1 = 1 \qquad (Y_1)^1 = 0$$

$$(Y_0)^0 = a \qquad (Y_0)^1 = 0 \qquad (Y_0)^2 = \bar{a}$$

Soit $\quad Y_2 = e_2 = 1 \quad ; \quad Y_1 = e_1 \quad ; \quad Y_0 = \bar{a}$

et la solution générale à l'aide du paramètre $d\,(d \in \mathbf{P})$

$$\boxed{y = d^0 . \bar{a} \vee d^1 . e_1 \vee d^2}$$

Il faut alors substituer dans (M16). On a, d'abord :

$y^0 = d^0 . (\bar{a})^0 \vee d^1 . (e_1)^0 \vee d^2 . (e_2)^0 = d^0 . a$ et, de même

$y^1 = d^1 \quad ; \quad y^2 = d^0 . \bar{a} \vee d^2 .$

Il vient (en utilisant la règle (2)) :

$$x^0 . [d^0 . \bar{a} \vee d^2 \vee a] \vee x^1 . [d^1 . e_1] \vee x^2 [d^0 . a] = 0$$

Observons que l'on peut simplifier le facteur de x^0

$d^0 . \bar{a} \vee a = d^0 \vee a$ et $d^0 \vee d^2 = \bar{d^1}$. Donc reste

$x^0 . [\bar{d^1} \vee a] \vee x^1 . [d^1 . e_1] \vee x^2 [d^0 . a] = 0$ on a

$$\begin{cases} z_0 = \bar{d^1} \vee a \\ z_1 = d^1 . e_1 \\ z_2 = d^0 . a \end{cases} \qquad \begin{cases} z'_0 = d^1 . \bar{a} \\ z'_1 = \bar{d^1} \vee e'_1 = \bar{d^1} \\ z'_2 = \bar{d^0} \vee \bar{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} z''_0 = \bar{d}_1 \vee a \\ z''_1 = d^1 \\ z''_2 = d^0 . a \end{cases}$$

On trouve

$X_2 = d^0 . a . e_1 \vee (\bar{d^0} \vee \bar{a}) . e_2$

$X_1 = (d^1 . \bar{a}) . e_0 \vee \bar{d^1} . e_1 \vee (a . d^1) . e_2$

$X_0 = (d^1 . \bar{a}) . e_0 \vee (a . d^0) . e_1 \vee (d^2 \vee a . \bar{d^0} \vee \bar{a} . d^1) . e_2$

et la solution générale à l'aide d'un nouveau paramètre C :

$$x = C^0 . X_0 \vee C^1 . X_1 \vee C^2 . X_2 \quad \text{soit}$$

$$x = [C^0 . (d^1 . \bar{a}) \vee C^1 . d^1 . \bar{a}] . e_0 \vee [C^0 . (a . d^0) \vee C^1 . \bar{d^1} \vee C^2 . d^0 . a] . e_1$$
$$\vee\ [C^0 . (d^2 \vee a . \bar{d^0} \vee \bar{a} . \bar{d^1}) \vee C^1 . a . d^1 \vee C^2 . (\bar{d^0} \vee \bar{a})] . e_2$$

Remarque :

Pour savoir si une équation admet des solutions on doit attendre, si l'on applique la méthode des éliminations successives d'avoir effectuée n réductions. On peut démontrer ([[10]]) le théorème suivant qui généralise de façon évidente le résultat obtenu au théorème [28] pour $n = 1$.

Théorème [30]

Pour que l'équation

$$f(x) = 0 \qquad (\text{où } f \in \Pi_n(\mathbf{P}) \qquad \text{et} \qquad x \in \mathbf{P}^n)$$

admette des solutions, il faut et il suffit que

$$\boxed{\prod_{\alpha \in <r>^n} f(\alpha) = 0}$$

III – LES r-GRAPHOIDES, EXTENSION DES GRAPHES ORIENTÉS

Dans un graphe orienté usuel le support logique est binaire : un sommet est ou n'est pas descendant d'un autre. On le voit mieux encore lorsque l'on veut coder un graphe orienté : on utilise une matrice booléenne bivalente.

La notion de graphoïde développée ci-après est une extension de celle de graphe dans la mesure où l'on y établit des degrés dans la descendance : ici *tout* sommet i sera descendant (et donc ascendant) de *tout autre* j, mais au couple (i, j) sera attaché de façon unique au *degré de descendance,* ou *poids* qui sera un élément d'un ensemble totalement ordonné à r éléments que l'on prendra conventionnellement identique à $<r>$.

Si $r = 2$, et, si au couple (i, j) est attaché $e_0 = 0$, on dit usuellement que j est un non-descendant de i, si $e_1 = 1$ que j est un descendant de i. On voit donc que la notion de graphoïde orienté recouvre celle des graphes orientés usuels.

Etant donnés deux sommet i et j est un entier $l \geqslant 1$, on définit (voir ci-dessous) de façon naturelle la notion de chemin de longueur l allant de i à j, et le poids d'un chemin de longueur l comme celui du plus *faible* de ses arcs.

On s'intéressera alors à des problèmes du type suivant : au couple (i, j) et à l'entier l on associe un $e_k \in <r>$ tel qu'il existe un chemin de longueur l, de poids e_k de i à j et que tout autre chemin de longueur l de i à j est de poids inférieur ou égal à e_k. On reconnaît un problème de type maximin. Un certain nombre de problèmes se posent alors. Par exemple :

– entre deux sommets fixés y-a-t-il un chemin (de longueur quelconque, c'est-à-dire que l parcourt N^*) de poids au moins égal à e_k, où e_k est fixé ?

– Peut-on se déplacer dans *tout* le graphoïde avec des chemins de poids e_k au moins (problème de la e_k-connexité ?) etc. . .

On verra que pour formaliser et résoudre ce type de problèmes, la méthode est ici un codage postien.

N – DEFINITION D'UN r-GRAPHOIDE ORIENTE

Soit X un ensemble (dont les éléments sont appelés *sommets*) et r un entier fixé supérieur ou égal à 2.

Définition (11)

On appelle *r-graphoïde orienté* le couple :

$$G = (X, \Gamma)$$

où Γ est une application de X dans $\mathcal{P}_r(X)$, ensemble des r-partition ordonnées de X muni de la structure d'Algèbre de Post.

Autrement dit l'image $\Gamma(x)$ d'un sommet $x \in X$ est

$$\Gamma(x) = ([\Gamma(x)]^0, [\Gamma(x)]^1, \ldots, [\Gamma(x)]^{r-1})$$

avec les conditions de partition :

$$\bigcup_{j=0}^{r-1} [\Gamma(x)]^j = X \qquad \text{et} \qquad (i \neq j) \Rightarrow [\Gamma(x)]^i \cap [\Gamma(x)]^j = \phi$$

Exemple

Prenons $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $r = 3$

Voici l'exemple d'un 3-graphoïde à 5 sommets :

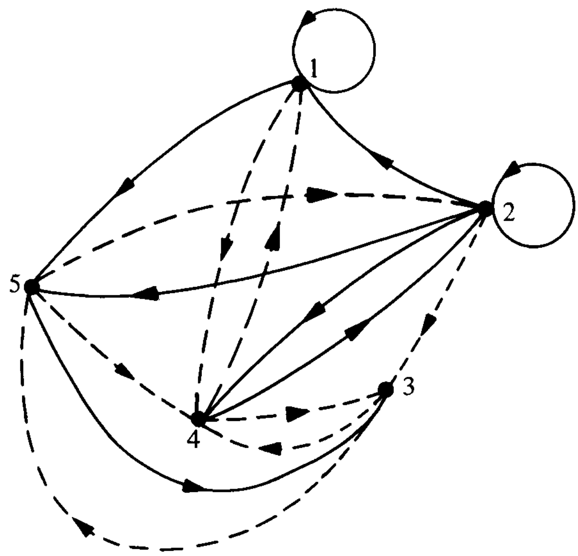
$$\Gamma(1) = (\{2, 3\}, \{4\}, \{1, 5\})$$
$$\Gamma(2) = (\phi, \{3\}, \{1, 2, 4, 5\})$$
$$\Gamma(3) = (\{1, 2, 3\} \{4,5\}, \phi)$$
$$\Gamma(4) = (\{4, 5\}, \{1, 3\}, \{2\})$$
$$\Gamma(5) = (\{5, 1\}, \{2, 4\}, \{3\})$$

On a adopté pour le représenter la convention graphique suivante :

i j		implique	$j \in [\Gamma(i)]^0$
i .....> ..... j		"	$j \in [\Gamma(i)]^1$
i ——>—— j		"	$j \in [\Gamma(i)]^2$

on trouvera une autre définition équivalente un peu plus loin.

D'où



Le cardinal de X sera appelé l'*ordre* du graphe.

Un *arc* sera par définition un élément (i, j) du produit cartésien $X \times X$. (Aucune condition supplémentaire du type $j \in \Gamma(i)$, par exemple, n'est évidemment à écrire ici).

P – CHEMINS ET CIRCUITS

On voit, d'après la définition que, pour tout couple i et j de sommets, il existe un et un seul $k \in [0, r-1] \cap \mathrm{N}$ tel que :

$$j \in [\Gamma(i)]^k$$

Associons alors au couple (i, j) l'élément $e_k \in \langle r \rangle$.

On a aussi défini une application θ

$$\theta : X \times X \to \langle r \rangle$$

$$\boxed{\theta_{ij} = e_k \iff [j \in \Gamma(i)]^k}$$

θ_{ij} sera appelé le *poids de l'arc* (i, j), θ la *fonction caractéristique* du r-graphoïde.

On voit facilement que la donnée de l'application θ est équivalente à celle de Γ ; on aurait donc pu aussi utiliser la définition suivante :

Définition (11 bis)

On appelle r-graphoide orienté le couple

$$G = (X , \theta)$$

où θ est une application de X^2 vers $<r>$

Remarque

Si l'on s'intéresse (ce qui est un problème en général plus théorique), à la famille $\Omega_r(X)$ de *tous* les graphoïdes sur X, alors il faut examiner la correspondance $X \to \theta$. Or θ décrit l'ensemble d'applications $<r>^{X^2}$.

$\Omega_r(X)$ peut être muni de la structure de r-Algèbre de Post "image". En effet l'application Γ qui sert à définir tout graphoïde décrit l'ensemble $[\mathcal{P}_r(X)]^x$, ensemble d'applications que l'on munit de la structure image. Cela veut dire par exemple que, si l'on veut définir, *par exemple* la disjonction $G_1 \vee G_2$ de deux r-graphoïdes, on a

$$G_1 \vee G_2 = (X , \Gamma_1 \vee \Gamma_2)$$

où $\qquad (\forall\, i \in X) \qquad (\Gamma_1 \vee \Gamma_2)\,(x) = \Gamma_1(x) \vee \Gamma_2(x)$

et la disjonction de deux r-partitions $\Gamma_1(x)$ et $\Gamma_2(x)$ est effectuée sur l'Algèbre $\mathcal{P}_r(X)$.

Définition (12)

Soit l un entier $\geqslant 1$. Un *chemin* γ *de longueur* l *allant de* i *à* j est, par définition, un élément de X^{l+1} (*suite de* $l + 1$ *sommets*) :

$$\gamma = (i_0 , i_1 , i_2 , \dots , i_l) \qquad (\text{où} \quad i_k \in X)\ (i_0 = i , i_l = j) .$$

Définition (13)

Le poids d'un chemin γ est celui du plus "faible" de ses arcs. Donc

$$\theta(\gamma) = \inf[\theta_{ii_1} , \theta_{i_1 i_2} , \dots , \theta_{i_{l-1}, j}]$$

Soit, en termes de treillis (borne inférieure) :

$$\theta(\gamma) = \theta_{ii_1} \cdot \theta_{i+i_2} \cdot \dots \cdot \theta_{i_{l-1} j}$$

Les notions de circuit de longueur l (où : $i_0 = i_l$) de chemin, ou de circuit élémentaire se définissent sans difficulté comme à l'ordinaire.

Soit maintenant un entier l fixé ($l \geqslant 1$) et deux sommets i et j, appelons Ω^l_{ij} l'ensemble de *tous* les chemins de longueur l joignant i à j (cet ensemble n'est jamais vide) et considérons :

$$\theta^l_{ij} = \operatorname*{Sup}_{\gamma \in \Omega^l_{ij}} [\theta(\gamma)] \qquad (\theta^l_{ij} \in \langle r \rangle)$$

Cela veut dire qu'on cherche dans la famille de tous les chemins de i à j le poids de celui (ou de ceux) qui sont de plus grand poids. Observons que θ^l_{ij} existe toujours, quel que soit le cardinal de X, car $\langle r \rangle$ est fini.

Tout chemin de longueur l (de i à j) et de poids θ^l_{ij} sera appelé *l-meilleur chemin* de i à j.

Donc, si $\theta^l_{ij} = e_k$, cela veut dire qu'il existe au moins un chemin de longueur l (joignant i à j) et de poids e_k et que tout autre chemin de longueur l (joignant i à j) est de poids inférieur ou égal à e_k. On reconnaît un problème de *maximin.*

Pour tout l fixé ($l \geqslant 1$) l'application

$$X^2 \to \langle r \rangle \qquad (i, j) \to \theta^l_{ij}$$

définit un nouveau r-graphoïde orienté, noté $G^{[l]}$

$$G^{[l]} = (X, \Gamma^{[l]})$$

où $$\Gamma^{[l]}(i) = ((\Gamma^{[l]}(i))^0, (\Gamma^{[l]}(i))^1, \ldots, (\Gamma^{[l]}(i))^{r-1})$$

avec $$\boxed{j \in (\Gamma^{[l]}(i))^k \Longleftrightarrow (\theta^l_{ij} = e_k)}$$

Définition (14)

$G^{[l]}$ est appelé la $l^{\text{ième}}$ puissance du graphoïde G.

Les sommets i et j restant fixés il est maintenant naturel de faire varier l dans $\mathbf{N}^*$, et de définir :

$$\hat{\theta}_{ij} = \operatorname*{Sup.}_{l \geqslant 1} \theta^l_{ij} = \bigvee_{l \geqslant 1} \theta^l_{ij}$$

Autrement dit :

$\hat{\theta}_{ij} = e_k$ équivaut à l'ensemble des deux conditions:

– il existe *un* chemin (rien n'est dit sur sa longueur) de i à j, de poids e_k

– toute autre chemin de i à j est de poids inférieur ou égal à e_k.

L'application $\quad X^2 \to <r> \quad (i, j) \to \hat{\theta}_{ij}$
définit un nouveau r-graphoïde $\hat{G} = (X, \hat{\Gamma})$

où $$\hat{\Gamma}(i) = ((\hat{\Gamma}(i))^0, \ldots, (\hat{\Gamma}(i))^{r-1})$$

avec $$\boxed{j \in [\hat{\Gamma}(i)]^k \Longleftrightarrow (\hat{\theta}_{ij} = e_k)}$$

Définition (15)

$\hat{G}$ est appelé la fermeture algébrique de G.

Q – TRADUCTIONS MATRICIELLES

Supposons maintenant que X soit fini (Card $(X) = n$). On peut alors écrire les θ_{ij} sous forme matricielle. On obtient une matrice carrée à coefficients dans $<r>$ (donc un élément de $M_n<r>$).

Définition (16)

La matrice carrée θ $(\theta \in M_n<r>)$ obtenue par :

$$(\theta_{ij} = e_k) \Longleftrightarrow (j \in [\Gamma(i)]^k)$$

est appelée la *matrice d'incidence de G.*

Exemple : reprenons le graphoïde précédent. On obtient

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e_1 & 1 \\ 1 & 1 & e_1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ e_1 & 1 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 1 & e_1 & 0 \end{bmatrix}$$

(rappelons que $e_0 = 0$ et $e_2 = 1$) .

On peut démontrer le théorème suivant:

Théorème (31)

Pour tout ordre fixé des sommets, l'application

$$\theta : \omega_r(X) \to M_n<r> \qquad G \to \theta(G)$$

qui, à tout r-graphoïde fait correspondre sa matrice d'incidence est un isomorphisme d'Algèbres de Post.

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce Théorème. Il assure que la correspondance est non seulement une bijection mais encore un isomorphisme : toutes les propriétés postiennes des matrices seront donc interprétables.

Mais c'est surtout dans le théorème qui suit que la correspondance entre graphoïdes et matrices d'incidence trouve sur intérêt essentiel.

Théorème (32)

La matrice d'incidence du graphoïde $G^{[l]}$ est égale à $l^{\text{ième}}$ puissance (au sens du produit matriciel postien) de la matrice d'incidence de G.

En effet soit H la matrice d'incidence des $G^{[l]}$. On a, par définition :

$$\sup_{\gamma \in \Omega_{ij}^{l}} \theta(\gamma) = e_k \text{ équivaut à :}$$

$$\bigvee_{(i_1, \ldots, i_{l-1}) \in [1, n]^{l-1}} \theta_{ii_1} \theta_{i_1 i_2}, \ldots, \theta_{i_{l-1} j} = e_k$$

L'ensemble des chemins de longueur l joignant i à j est en effet ici obtenu en faisant varier l'ensemble $(i_1, \ldots, i_{l-1})$ dans $[1, n]^{l-1}$. Or la disjonction précédente est le coefficient :

$$([\theta]^l)_{i,j}$$

d'ordre (i, j) de la $l^{\text{ième}}$ puissance de θ

Corollaire

Si $\hat{\theta}$ désigne la matrice d'incidence de $\hat{G}$, on a

$$\hat{\theta} = \bigvee_{l \geqslant 1} \theta^l$$

Observons que, dans un graphe fini d'ordre n :

– la longueur d'un chemin élémentaire est $(n - 1)$ au plus

– tout chemin de i à j contient un chemin élémentaire de i à j.

– le poids d'un chemin quelconque est toujours inférieur ou égal au poids d'un chemin élémentaire qu'il contient. Il résulte que l'on peut remplacer l'écriture précédente par

$$\boxed{\hat{\theta} = \bigvee_{l=1}^{n-1} \theta^l}$$

L'algorithme de Roy [[6]] pour la détermination de la matrice de la fermeture transitive d'un graphe orienté reste valable dans les treillis distributifs et on a, là aussi, un moyen plus rapide de calculer $\hat{\theta}$.

Définition (17)

On dit que G est *e_k-fortement connexe* (f.c) (resp. *e_k-unilatéralement connexe* (u.c.)) si

$$\hat{\theta} \geqslant E_k \qquad \text{(resp.} \quad \hat{\theta} \vee {}^t\hat{\theta} \geqslant E_k)$$

où E_k désigne (voir (K1)) la matrice dont tous les éléments sont égaux à e_k.

Explicitons, pour le cas de la forte connexité (par exemple). Dire que

$$(\forall\,(i\,,j) \in X^2) \qquad \text{on a} \qquad \hat{\theta}_{ij} \geqslant e_k$$

cela veut dire que pour tout couple de sommets (i et j), il y a dans le graphoïde initial G un chemin de i à j de poids e_k au moins. (Pour la connexité unilatère, comme à l'ordinaire, l'expression "il existe un chemin (etc. . .) de i à j" est remplacée par "il existe un chemin de i à j, ou de j à i").

Exemple (on reprend l'exemple précédent) :

$$\theta^2 = \begin{bmatrix} 1 & e_1 & 1 & e_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_1 & e_1 & e_1 & 0 \\ 1 & 1 & e_1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_1 & e_1 & e_1 & e_1 \end{bmatrix} \qquad \theta^3 = \begin{bmatrix} 1 & e_1 & 1 & e_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_1 & e_1 & e_1 & e_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_1 & e_1 & e_1 & e_1 \end{bmatrix} = \theta^4$$

D'où $$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & e_1 & 1 & e_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_1 & e_1 & e_1 & e_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_1 & 1 & e_1 & e_1 \end{bmatrix} = \theta \vee \theta^2 \vee \theta^3 \vee \theta^4$$

Ce 3-graphoïde est e_1-fortement connexe.

Définition (18)

On définit le *poids de forte connexité* (resp. de *connexité unilatère*) d'un r-graphoïde comme $e_\gamma \in \langle r \rangle$ où γ

$$\gamma = \text{Sup } \{k \in \mathbf{N} \mid 0 \leqslant k \leqslant r-1 \mid G \quad \text{soit} \quad e_k - f.c \text{ (resp. } e_k - u.c)\}$$

Dans l'exemple précédent les poids de forte connexité et de connexité unilatère sont égaux à e_1 .

R – GRAPHOIDES DERIVES D'UN GRAPHOIDE DONNE

A partir d'un r-graphoïde donné on peut lui associer divers autres graphoïdes.

Le *symétrique* (ou réciproque de G) sera $G^- = (X , \Gamma^-)$

où $$(j \in \{\Gamma^-(i)\}^k) \iff i \in [\Gamma(j)]^k$$

(on inverse le sens des flèches)

Le *symétrisé* de G sera $G_s = (X , \Gamma_s)$

où $$\Gamma_s = \Gamma \vee \Gamma^-$$

La *négation* de G sera $G' = (X , \Gamma')$

où $\Gamma'(x) = (\Gamma(x))'$ la négation étant prise sur l'algèbre de Post $\mathcal{P}_r(X)$

Le *graphoïde dual* de G sera $\delta(G) = (X , \delta(\Gamma))$

où $$\delta(\Gamma)(i) = \delta[\Gamma(i)]$$

cela veut dire par exemple que :

$$y \in [\delta(\Gamma)(i)]^k \iff y \in [\Gamma(i)]^{r-k-1}$$

où l'on inverse l'ordre d'importance des poids

L'opposé de G : $\boxminus G = (X , \boxminus \Gamma)$

Le théorème d'isomorphisme entre l'ensemble des matrices de $M_n\langle r \rangle$ et l'ensemble $\omega_r(X)$ de tous les r-graphoïdes sur X assure des traductions matricielles simples que nous donnons ci-dessous ($\theta(G)$ désignant la matrice d'incidence du graphe G)

$$\theta(G^{-1}) = {}^t[\theta(G)] \qquad \text{(transposée)}$$

$$\theta(G') = [\theta(G)]' \qquad \theta[\delta(G)] = \delta[\theta(G)]$$

$$\theta(\boxminus G) = \boxminus(\theta(G)) .$$

S – IMAGE D'UNE r-PARTITION PAR UN GRAPHOIDE

Pour introduire cette notion, il est d'abord nécessaire de faire un rappel sur les *graphes orientés.* Pour définir ceux-ci on a utilisé une application *ponctuelle* : $\Gamma : X \to \mathcal{P}(X)$.

Puis on a *prolongé* Γ en une application *ensembliste* de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$

$$\Gamma(S) = \bigcup_{x \in S} \Gamma(x) \qquad (\text{où} \quad S \subset X)$$

autrement dit $\quad y \in \Gamma(S) \Longleftrightarrow (\exists x \in S) \quad (y \in \Gamma(x)).$

La nouvelle application Γ (appelée "induite") jouit d'un certain nombre de propriétés. En particulier si $v(S)$ est le *vecteur caractéristique* de S alors, si A désigne la matrice d'incidence du graphe fini G, on a ([[11]])

$$\boxed{{}^tA \otimes v(S) = v[\Gamma(S)]} \tag{S1}$$

On rappelle que le vecteur caractéristique d'un sous-ensemble S de X est une matrice-colonne $v(S)$ d'ordre n à éléments dans $<2>$ telle que :

$$[v(S)]_i = 1 \Longleftrightarrow i \in S$$

(on a noté ici, pour plus de commodité $X = \{1, 2, \ldots, n\}$)

La correspondance

$$v : \quad \mathcal{P}(X) \to M_{n,1} <2> (*)$$

est ([[11]]) un *isomorphisme booléen.*

La formule ($S1$) interprète le produit de la transposée de la matrice d'incidence d'un graphe par une matrice colonne. La matrice colonne produit est le vecteur caractéristique de $\Gamma(S)$, image par Γ du sous-ensemble S.

C'est cette notion qu'il s'agit de prolonger ici, mais, évidemment, à la place de $\Gamma(S)$, il faudra definir $\Gamma(\Omega)$ où Ω est une r-partition ordonnée de l'ensemble X des sommets. Cette définition est relativement délicate. Aussi procéderons-nous par étapes.

a. Vecteur caractéristique d'une r-partition

Soit $\qquad \Omega = (T^0, T^1, \ldots, T^{r-1}) \in \mathcal{P}_r(X)$

(*) $M_{n,1}<2>$ est, conformément aux notations de tout l'article l'ensemble des matrices colonnes booléennes, d'ordre n, à éléments dans $<2> = \{0,1\}$.

on explicite l'application v déjà définie (c'est φ^{-1} du théorème [20]) :

$$v : \quad \mathcal{P}_r(X) \to M_{n,1} <r>$$

définie par :

$$[v(T)]_i = e_k \iff i \in T^k$$

(on a noté : $X = \{1 , 2 , . . . , n\}$)

Explicitons sur un exemple. Soit

$$X = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5\} \qquad \text{et}$$

$$\Omega = \{ \{1 , 5\}, \{3\}, \{2 , 4\}\}$$

alors
$$v(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ e_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{n,1} <3>$$

On a montré (th. [20]) que l'application v était non seulement une bijection, mais encore un isomorphisme postien.

b. Image d'un sous-ensemble de X

Soit S un sous-ensemble de l'ensemble X des sommets on définira $\Gamma(S)$ (image par le r-graphoïde G d'un sous-ensemble S) comme étant une *r-partition ordonnée* de X définie de la façon suivante :

Définition (19)

On dira que

$$i \in [\Gamma(S)]^k \qquad (\text{ou que} \quad (v(\Gamma(S)])_i = e_k)$$

si k est *le plus grand indice tel qu'il existe au sommet $j \in S$ et* :

$$i \in [\Gamma(j)]^k \; ,$$

Remarque : pour tout autre sommet ω de S (avec $i \in [\Gamma(\omega)]^t$) , on a

$$t \leqslant k \, .$$

L'image d'un sous-ensemble est donc une *r-partition* (voir exemple 1 à la fin du présent chapitre).

Traduction matricielle (Card $(X) = n$) .

Appelons A la matrice d'incidence du r-graphoïde G.

on a

$$[v(\Gamma(S))]_i = e_k \iff \operatorname*{Sup}_{j \in S} [A_{ji}] = e_k$$

$$\iff \bigvee_{j=0}^{r-1} A_{ji} \cdot x_j = e_k$$

(la deuxième équivalence provient de ce que x_j est égal à 0 ou 1 selon que j appartient ou non à S (on a noté ici aussi $X = \{1, 2, \ldots, n\}$).

Autrement dit

$$\boxed{v[\Gamma(S)] = {}^tA \otimes v(S)}$$

Observons que si $S = \{l\}, (l \in X)$, la définition (19) montre que :

$$(\Gamma\{l\})^i = e_k \quad \text{équivaut à} \quad i \in [\Gamma(l)]^k$$

et l'application Γ (de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}_r(X)$) est bien un *prolongement* de l'application initiale Γ (de X dans $\mathcal{P}_r(X)$) .

Nous sommes maintenant en mesure de passer à la dernière étape, qui permet de définir l'image d'une partition.

c. Image d'une r-partition

Soit $\Omega = (T^0, T^1, \ldots, T^{r-1})$ une r-partition de X en un ensemble ordonné de r-sous-ensembles. Pour bien comprendre la définition qui va suivre, on peut imaginer que, de même qu'il y a r-classes d'arcs, (l'ensemble des classes étant totalement ordonné), il y a maintenant r-classes de sommets selon la partition Ω (à dire que i ($i \in S$) est de *poids* e_k *dans la partition* Ω, si $i \in T^k$) et qu'un sommet de poids e_k est "meilleur" qu'un sommet de poids $e_{k'}$, si : $k \geqslant k'$. Cela dit, l'image $\Gamma(\Omega)$ de la r-partition Ω sera une *autre r-partition* définie de la façon suivante :

Définition (20)

On dira que

$$i \in [\Gamma(\Omega)]^k \qquad (\text{ou} \quad (v[\Gamma(\Omega)])_i = e_k)$$

si et seulement si k est le *plus grand indice* à satisfaire l'une ou l'autre des deux conditions suivantes (le "ou" est, naturellement, inclusif).

a) ou bien il existe dans la r-partition Ω un sommet j de poids exactement égal à e_k, et un arc de j à i de poids au moins e_k.

b) ou bien il existe dans la r-partition Ω un sommet j de poids au moins e_k, et un arc de j à i de poids exactement e_k. (Voir exemple 2) plus loin).

Ceci permet de définir l'image d'une r-partition comme étant encore une r-partition, tout en prolongeant le cas b) (*) précédent, et l'on a une interprétation simple du produit matriciel :

Théorème [33]

A désignant la matrice d'incidence du r-graphoïde G.

$$\boxed{{}^tA \otimes v(\Omega) = v[\Gamma(\Omega)]}$$

Démonstration

$$[{}^tA \otimes v(\Omega)]_i = \bigvee_{j=1}^{n} a_{ji} \, . \, [v(\Omega)]_j$$

Et donc

$$[{}^tA \otimes v(\Omega)]_i = e_k \qquad \text{équivaut à}$$

$$\operatorname*{Sup.}_{1 \leqslant j \leqslant n} \; [a_{ji} \, . \, [v(\Omega)]_j] = e_k \, .$$

Comme $a_{ji} \, . \, [v(\Omega)]_j$ appartient à $\langle r \rangle$, il en résulte que k est le *plus grand indice* tel que :

$$a_{ji} \, . \, [v(\Omega)]_j = e_k$$

C'est-à-dire :

a) Soit $\quad a_{ji} = e_k \quad$ et $\quad [v(\Omega)]_j \geqslant e_k$

b) Soit $\quad a_{ji} \geqslant e_k \quad$ et $\quad [v(\Omega)]_j = e_k$

(*) Le cas où S est un *sous ensemble de* X revient en effet à considérer la r-partition $\tilde{S} = (\bar{S}, \phi, \ldots, \phi, S)$ et à utiliser le corollaire [20 A].

Le cas a) correspond à

$$i \in [\Gamma(j)]^k \qquad \text{et} \qquad j \in \bigcup_{l \geqslant k} T^l .$$

Le cas b) correspond à

$$i \in \bigcup_{l \geqslant k} [\Gamma(j)]_l \qquad \text{et} \qquad j \in T^k .$$

on retrouve l'alternative de la définition (20).

On a donc, ici aussi, pu interpréter le produit de la transposée de la matrice d'un graphoïde (matrice carrée à éléments dans $<r>$) par une matrice colonne.

Remarque : l'un des intérêts de la notion précédente (image d'une partition) est que l'on peut maintenant définir le *produit de deux r-graphoïdes*

$$G_1 = (X, \Gamma_1) \qquad \text{et} \qquad G_2 = (X, \Gamma_2)$$

par $$G_1 \circ G_2 = (X, \Gamma_2 \circ \Gamma_1)$$

où $$(\forall\, i \in X) \qquad (\Gamma_2 \circ \Gamma_1)(i) = \Gamma_2[\Gamma_1(i)] \qquad \text{et}$$

l'on sait prendre l'image par Γ_2 de la r-partition $\Gamma_1(i)$.

Exemple 1 (cas d'un sous-ensemble)

Reprenons le 3-graphoïde de la page (71) et soit d'abord S le sous-ensemble de X défini par

$$S = \{3, 4\},$$

Le vecteur caractéristique de S est donc $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = v(S)$.

Si l'on effectue le produit ${}^tA \circledast v(S)$, on trouve $\begin{bmatrix} e_1 \\ 1 \\ e_1 \\ e_1 \\ e_1 \end{bmatrix}$.

L'image de S par Γ est donc la 3-partition $\Gamma(S)$

$$\Gamma(S) = (\phi, \{1, 3, 4, 5\}, \{2\})$$

Dire que $(v[(S)])_3 = e_1$, c'est dire que $3 \in [\Gamma(S)]^1$, c'est donc dire qu'il existe dans S un sommet j tel que $3 \in [\Gamma(j)]^1$ et qu'il n'y a aucun sommet de S tel que $3 \in [\Gamma(j)]^2$. C'est bien ce que l'on vérifie ici, puisque $S = \{3, 4\}$ que

$$\theta_{33} = 0 \qquad \text{et} \qquad \theta_{43} = e_1$$

Exemple 2 Cas d'une r-partition

Soit Ω la 3-partition définie par

$$\Omega = (\{4\}, \{2, 3\}, \{1, 5\})$$

on a $$v(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ e_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad {}^tA \otimes v(\Omega) = \begin{bmatrix} 1 \\ e_1 \\ 1 \\ e_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Donc $$\Gamma(\Omega) = (\phi, \{2, 4\}, \{1, 3, 5\})$$

Dire que $2 \in (\Gamma(\Omega))^1$, c'est dire que $k = 1$ est le plus grand indice tel que l'une ou l'autre des deux conditions ci-dessous soit réalisée :

a) dans Ω, il existe un sommet j de poids e_1, et un arc de j à 2 de poids e_1 ou e_2 (ce n'est pas le cas ici puisque le seul sommet de Ω de poids e_1 est 3 est que $\theta_{32} = e_0 = 0$)

b) il existe dans Ω un sommet j de poids e_1 ou e_2, et un arc de j à 3 de poids égal à e_1. (Les sommets j tels que $\theta_{j2} = e_1$ sont 2 et 4 ; 2 est bien de poids e_1 dans Ω).

Il faut encore vérifier que 1 est bien le plus grand indice convenable. Or la vérification des conditions a) ou b) avec $k = 2$ conduit à se demander s'il existe dans Ω un sommet j de poids $e_2 (e_2 = 1)$ et un arc de j à 2 de poids e_2 : il y a dans Ω deux sommets de poids e_2, qui sont 1 et 5, et l'on a $\theta_{12} = 0$; $\theta_{52} = e_1$).

CONCLUSION

On a vu comment au produit matriciel postien est associé un problème de *maximin* qui est celui de la recherche des "meilleurs" chemins, au sens précédemment défini. Si au contraire l'on définit la *"conductance"* d'un chemin comme le poids de celui de ses arcs de plus fort poids, et si l'on recherche (par un couple de sommets i et j) donnés et une longueur l ($l \in \mathbf{N}^*$) fixée) le *"meilleur chemin"*, c'est-à-dire ici le chemin de longueur l, (de i à j) et de plus faible conductance, on est amené à résoudre un problème de minimax qui se traite en remplaçant partout dans le chapitre précédent le produit matriciel par son opération duale : rappelons que celle-ci donne aussi une structure de monoïde avec compatibilité avec l'ordre.

Un autre sujet de réflexion est le suivant : le paragraphe précédent a vu le remplacement de méthodes (et de matrices) booléennes par des méthodes postiennes, c'est-à-dire que l'on a remplacé $<2>$ par $<r>$. Peut-on généraliser ceci ? Sans vouloir trop développer, voici ce qui, semble-t-il, peut être dit.

On peut *valuer* l'ensemble des poids dans un treillis distributif complet T et définir un T-graphoïde comme le couple ordonné:

$G = (X , \theta)$ où θ est une application de X dans T^2. $\theta_{i,j} = \theta(i,j)$ est alors le *poids* de l'arc (i,j) ou *degré* de *descendance* de j à partir de i.

Comme plus haut, on peut aussi définir un T-graphoide comme le couple ordonné :

$$G = (X , \Gamma)$$

où Γ est une application des X dans l'ensemble $[\mathcal{P}(X)]^T$ tel que :

$(\forall\, x \in X)$ l'ensemble des $\Gamma(x)(a)$ (où a parcourt T) est une partition de X. Explicitons :

si $\qquad x \in X, \qquad$ alors $\qquad \Gamma(x) \in [\mathcal{P}(X)]^T$

donc $\Gamma(x)$ est une application de T dans $\mathcal{P}(X)$, et l'on suppose que :

$$(\forall\, x \in X) \bigcup_{a \in T} \Gamma(x)(a) = X \quad \text{et} \quad (\forall\, x \in X)\; a \neq b \Rightarrow \Gamma(x)(a) \cap \Gamma(x)(b) = \phi .$$

Le cas où $T = <2>$ est celui des graphes orientés ; celui où $T = <r>$, celui des r-graphoïdes orientés.

On définira de même le poids d'un chemin, les "meilleurs chemins", etc. . . (le mot meilleur s'èntendant ici : suivant l'ordre défini par le treillis T).

Un exemple peut être fourni par le cas où I étant un ensemble quelconque, on prend pour treillis T :

$$T = [0,1]^I$$

où $[0,1]$ est un segment de $\mathbf{R}$ muni de la structure d'ensemble totalement ordonné et T le treillis image de toutes les applications de I dans $[0,1]$. Les éléments de T sont appelés des sous ensembles flou de I. (cf [11])

Si l'ensemble des sommets est fini, le codage d'un tel T-graphoïde (qu'on peut appeler *graphoïde flou*) se fait par l'intermédiaire d'une matrice de $M_n<T>$ dont chaque élément X_{ij} est un sous ensemble flou de I.

ANNEXE

ÉQUATION A UNE INCONNUE SUR UNE r - ALGÈBRE DE POST

Soit à résoudre

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} x^i \, . \, z_i = 0$$

où l'on suppose remplie la condition $\prod_{0}^{r-1} z_i = 0$

Notons $\hat{X} = X_{r-1}$ (en vue d'une recurrence) la solution fondamentale précédemment trouvée :

$$\hat{X} = \bigvee_{i=0}^{r-1} z_i' \, . \, e_i$$

et soit $z = (z_0 , z_1 , \ldots , z_{r-1}) \in \mathbf{P}^r$ le vecteur (donné) des coefficients de l'équation. On définit l'application h :

$$h : \mathbf{P}^r \to \mathbf{P} \qquad h(z) = X_{r-1}$$

h est donc l'application qui au vecteur z des coefficients fait correspondre la *première solution fondamentale* trouvée. On observera (ce sera indispensable pour la suite) que, d'après la page 58, cette solution présente les caractéristiques suivantes :

$$(X_{r-1})^{r-1} = z_{r-1}' \qquad (X_{r-1})^k \leqslant z_{r-1}'' \qquad (k \neq r - 1)$$

Soit alors g la bijection de l'ensemble $\mathbf{Z}/r \, . \, \mathbf{Z}$ définie par :

$$g(i) = i + 1 \qquad [r]$$

L'ensemble des g^k est un groupe cyclique G d'ordre r. On va montrer que ce groupe de transformations engendre à partir de la solution fondamentale un ensemble de r solutions qui, à leur tour, engendrent l'ensemble de toutes les solutions, suivant un procédé simple.

D'abord g induit une bijection θ de **P** dans **P**, par

$$x = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i \,.\, e_i \qquad y = \theta(x) = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^{g(i)} \,.\, e_i$$

(il est clair que $y^i = x^{g(i)}$)

g induit alors une autre bijection Ω : $\mathbf{P}^r \to \mathbf{P}^r$

$$\Omega(z_0, \dots, z_{r-1}) = (z_{g(0)}, \dots, z_{g(r-1)})$$

On prend alors la *transformée* de l'équation proposée par θ :

$$0 = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i \,.\, z_i = \bigvee_{i=0}^{r-1} y^{g^{-1}(i)} \,.\, z_i = \bigvee_{k=0}^{r-1} y^k \,.\, z_{g(k)}$$

qui admet pour solution fondamentale (en y)

$$Y_0 = h\,[z_{g(0)}, \dots, z_{g(r-1)}]$$

soit $$Y_0 = (h \circ \Omega)\,(z)$$

Soit en revenant aux variables initiales, une nouvelle solution fondamentale X_0 :

$$Y_0 = \theta(X_0) \qquad \text{et} \qquad X_0 = [\theta^{-1} \circ h \circ \Omega]\,(z)\,.$$

Si, donc, l'on pose :

$$\omega(h) = \theta^{-1} \circ h \circ \Omega$$

alors l'ensemble des $\omega^j(h)\,(z)$ $(0 \leqslant j \leqslant r-1)$ fournit un ensemble de r solutions notées :

$$X_{j-1[r]} = [\omega^j(h)]\,(z)\ (*)$$

Pour tout j la solution, X_{j-1} vérifie des conditions analogues à celles de la page 58.

En effet

$$X_{j-1} = [\omega^j(h)]\,(z) = [\theta^{-j} \circ h \circ \Omega^j]\,(z)$$

(*) $\omega^0(h) = h$

et

$$\Omega^j(z) = (z_{g^j(0)}, \ldots, z_{g^j(r-1)})$$
$$= (z_{j[r]}, \ldots, z_{j+r-1[r]} = z_{j-1[r]}).$$

La solution fondamentale Y_{j-1} associée vérifie :

$$Y_{j-1[r]} = h[\Omega^j(z)], \text{ et donc :}$$

$$(Y_{j-1})^{r-1} = (z_{j-1[r]})' \quad \text{et} \quad (Y_{j-1})^k \leqslant (z_{j-1[r]})'' \quad (k \not\equiv r-1\ [r])$$

soit

$$X_{j-1[r]} = \Omega^{-j}[Y_{j-1[r]}] \quad \text{et donc}$$
$$[X_{j-1}]^l = [Y_{j-1}]^{g^{-j}(l)} = [Y_{j-1}]^{(l-j)}.$$

soit

$$(X_{j-1})^{(j+r-1)[r]} = (X_{j-1})^{(j-1)[r]} = (z_{j-1[r]})'$$

et, si : $\quad l \not\equiv (j-1)\ [r]$

alors : $\quad l - j \not\equiv r - 1\ [r]$

Donc $\quad (X_{j-1})^l = (Y_{j-1})^{(l-j)} \leqslant (z_{j-1[r]})''.$

Donc, pour résumer :

$$(X_{j-1})^{(j-1)[r]} = (z_{j-1[r]})' \quad \text{et}$$
$$(X_{j-1})^l \leqslant (z_{j-1[r]})'' \quad (l \not\equiv (j-1)\ [r])$$

On a alors le théorème fondamental :

Théorème

Si (M4) est vérifiée, alors pour que x soit solution de (M3) il faut et il suffit que x soit "barycentre" des solutions fondamentales $X_j (0 \leqslant j \leqslant r-1)$, c'est-à-dire qu'il existe $d = \bigvee_0^{r-1} d^i . e_i$ tel que x s'écrive :

$$x = \bigvee_0^{r-1} d^j . X_j \qquad \text{(AN1)}$$

Démonstration

On montre d'abord que :

$$(\forall d) \qquad \bigvee_{0}^{r-1} d^j . X_j \qquad \text{est solution de (M3).}$$

Cette propriété est vraie, pour tout ensemble de r solutions, même si elles ne sont pas fondamentales. En effet :

si $$(\forall j)\ (0 \leqslant j \leqslant r-1) : \bigvee_{i=0}^{r-1} (X_j)^i . z_i = 0$$

alors, d'abord :

$$(\forall i)\ (0 \leqslant i \leqslant r-1) \qquad \left[\bigvee_{j=0}^{r-1} d^j . X_j\right]^i = \bigvee_{j=0}^{r-1} d^j . (X_j)^i .$$

Ensuite

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} z_i . \left[\bigvee_{j=0}^{r-1} d^j . X_j\right]^i = \bigvee_{j=0}^{r-1} d^j . \left[\bigvee_{i=0}^{r-1} z_i . (X_j)^i\right] = 0$$

En sens inverse, soit u une solution de (M3). Il faut montrer que U peut s'écrire sous la forme (AN1). Montrons que l'on peut prendre $d^k = u^k$, c'est-à-dire $d = u$.

Si, en effet, u est solution, alors :

$$(\forall i) \qquad u^i \leqslant z'_i, \qquad \text{et donc :}$$

$$u^j X_j = u^j [(X_j)^0 . e_0 \vee (X_j)^1 . e_1 \vee \ldots\ldots \vee (X_j)^{r-1} . e_{r-1}].$$

or, si $\quad k \neq j$, $\quad$ on a :

$$(X_j)^k u^j \leqslant (z_j)'' . u^j \leqslant (z_j)'' . (z_j)' = 0$$

et, si $k = j$, par contre :

$$(X_j)^j . u^j = (z_j)' . u^j = u^j$$

Donc $$u^j X_j = u^j e_j$$

et $$u = \bigvee_{j=0}^{r-1} u^j . e_j = \bigvee_{j=0}^{r-1} u^j . X_j$$

(c.q.f.d.)

INDEX DES NOTATIONS

FORMULAIRE POSTIEN

$$\boxed{x = x^0 \,.\, e_0 \vee x^1 \,.\, e_1 \vee \ldots \vee x^{r-1} \,.\, e_{r-1}}$$

RELATION ENTRE COMPOSANTES BOOLEENNES ET POSTIENNES

$$\left\{\begin{array}{l} x^0 = \overline{x_{r-1}} \\ x^1 = x_{r-1} \,.\, \overline{x_{r-2}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^k = x_{r-k} \,.\, \overline{x_{r-k-1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{r-2} = x_2 \,.\, \overline{x_1} \\ x^{r-1} = x_1 \end{array}\right.$$

$$x_j = \bigvee_{k \geqslant r-j} x^k$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x^{r-1} \\ x_2 = x^{r-1} \vee x^{r-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{r-1} = x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^{r-1} = \overline{x}^0 \end{array}\right.$$

Cas où $r = 3$

$$\left\{\begin{array}{l} x^0 = \overline{x}_2 \\ x^1 = x_2 \,.\, \overline{x}_1 \\ x^2 = x_1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = x^2 \\ x_2 = x^1 \vee x^2 = \overline{x}^0 \end{array}\right.$$

COMPOSANTES D'UNE DISJONCTION ET D'UNE CONJONCTION

$$x \vee y \begin{cases} (x \vee y)^0 = x^0 \,.\, y^0 \\ (x \vee y)^k = x^k \,.\, \Big(\bigvee\limits_{j \leqslant k} y^j\Big) \vee y^k \,.\, \Big(\bigvee\limits_{j \leqslant k} x^j\Big) \\ (x \vee y)^{r-1} = x^{r-1} \vee y^{r-1} \end{cases}$$

$$x \,.\, y \begin{cases} (x \,.\, y)^0 = x^0 \vee y^0 \\ (x \,.\, y)^k = x^k \,.\, \Big[\bigvee\limits_{j \geqslant k} y^j\Big] \vee y^k \,.\, \Big[\bigvee\limits_{j \geqslant k} x^j\Big] \\ (x \,.\, y)^{r-1} = x^{r-1} \,.\, y^{r-1} \end{cases}$$

Cas où $r = 3$

$$\begin{cases} (x \vee y)^0 = x^0 \,.\, y^0 \\ (x \vee y)^1 = x^1 \,.\, \bar{y}^2 \vee y^1 \,.\, \bar{x}^2 \\ (x \vee y)^2 = x^2 \vee y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x \,.\, y)^0 = x^0 \vee y^0 \\ (x \,.\, y)^1 = x^1 \,.\, \bar{y}^0 \vee x^0 \,.\, \bar{y}^1 \\ (x \,.\, y)^2 = x^2 \,.\, y^2 \end{cases}$$

NEGATION

$$a' = a^0 = \overline{a_{r-1}} = \bar{a}^0 \,.\, e_0 \vee a^0 \,.\, e_{r-1}$$

$$(\bar{a}') = a'' \qquad a''' = a'$$

$$(a \vee b)' = a' \,.\, b' \qquad (a \,.\, b)' = a' \vee b'$$

$$(a \vee b)'' = a'' \vee b'' \qquad (a \,.\, b)'' = a'' \,.\, b''$$

DUALITE

$$[\delta(x)]^0 = x^{r-1} \qquad [\delta(x)]^k = x^{r-k-1} \qquad [\delta(x)]^{r-1} = x^0$$

$$\delta(x) = x^{r-1} \,.\, e_0 \vee x^{r-2} \,.\, e_1 \vee \ldots \vee x^0 \,.\, e_{r-1}$$

$$\text{si} \quad x \in \mathbf{B} \qquad \delta(x) = x^0 = x'$$

$$\delta(a') = a''$$

SOMME, DIFFERENCE ET PRODUIT

Somme

$$(a \boxplus x)\begin{cases}(a \boxplus x)^0 = a^0 \,.\, x^0 \vee a^{r-1} \,.\, x^1 \vee \ldots \vee a^1 \,.\, x^{r-1}\\ (a \boxplus x)^1 = a^1 \,.\, x^0 \vee a^0 \,.\, x^1 \vee \ldots \vee a^2 \,.\, x^{r-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (a \boxplus x)^k = a^k \,.\, x^0 \vee a^{k-1} \,.\, x^1 \vee \ldots \vee a^{k+1} \,.\, x^{r-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (a \boxplus x)^{r-1} = a^{r-1} \,.\, x^0 \vee a^{r-2} \,.\, x^1 \vee \ldots \vee a^0 \,.\, x^{r-1}\end{cases}$$

Opposé

$$\boxminus a = a^0 \,.\, e_0 \vee a^{r-1} \,.\, e_1 \vee \ldots \vee a^1 .\, e_{r-1}$$

Différence

$$(a \boxminus b)\begin{cases}(a \boxminus b)^0 = a^0 \,.\, b^0 \vee a^{r-1} \,.\, b^{r-1} \vee \ldots \vee a^1 \,.\, b^1\\ (a \boxminus b)^1 = a^1 \,.\, b^0 \vee a^0 \,.\, b^{r-1} \vee \ldots \vee a^2 \,.\, b^1\\ \vdots\\ (a \boxminus b)^{r-1} = a^{r-1} \,.\, b^0 \vee a^{r-2} \,.\, b^{r-1} \vee \ldots \vee a^0 \,.\, b^1\end{cases}$$

Cas où $r = 3$

$$(a \boxplus b)\begin{cases}(a \boxplus b)^0 = a^0 \,.\, b^0 \vee a^2 \,.\, b^1 \vee a^1 \,.\, b^2\\ (a \boxplus b)^1 = a^1 \,.\, b^0 \vee a^0 \,.\, b^1 \vee a^2 \,.\, b^2\\ (a \boxplus b)^2 = a^2 \,.\, b^0 \vee a^1 \,.\, b^1 \vee a^0 \,.\, b^2\end{cases}$$

$$(a \boxminus b)\begin{cases}(a \boxminus b)^0 = a^0 \,.\, b^0 \vee a^2 \,.\, b^2 \vee a^1 \,.\, b^1\\ (a \boxminus b)^1 = a^1 \,.\, b^0 \vee a^0 \,.\, b^2 \vee a^2 \,.\, b^1\\ (a \boxminus b)^2 = a^2 \,.\, b^0 \vee a^1 \,.\, b^2 \vee a^0 \,.\, b^1\end{cases}$$

$$\boxminus b = b^0 \,.\, e_0 \vee b^2 \,.\, e_2 \vee b^1 \,.\, e_1$$

$$(a * b)\begin{cases}(a * b)^0 = a^0 \vee b^0\\ (a * b)^1 = a^1 \,.\, b^1 \vee a^2 \,.\, b^2\\ (a * b)^2 = a^1 \,.\, b^2 \vee a^2 \,.\, b^1\end{cases}$$

EQUATIONS POSTIENNES ($r = 3$)

$$x^0 . z_0 \vee x^1 . z_1 \vee x^2 . z_2 = 0 \qquad z_0 . z_1 . z_2 = 0$$

$$\begin{array}{llll}
X_0 & (X_0)^0 = z_0' & (X_0)^1 = z_0'' . z_2'' & (X_0)^2 = z_2' . z_0'' \\
X_1 & (X_1)^0 = z_0' . z_1'' & (X_1)^1 = z_1' & (X_1)^2 = z_0'' . z_1'' \\
X_2 & (X_2)^0 = z_1'' . z_2'' & (X_2)^1 = z_1' . z_2'' & (X_2)^2 = z_2'
\end{array}$$

Solution générale

$$x = d^0 . X_0 \vee d^1 . X_1 \vee d^2 . X_2$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGE (Cl.) – Graphes et hypergraphes (Dunod)

[2] BIRKHOFF (G.) – Lattice Theory (American. Math. Soc. Colloquium Publication. Vol XXV).

[3] EPSTEIN (G.) – The lattice Theory of Post Algebras (Trans. Math. Americ. Soc. 95 (1960) p. 300-317).

[4] FOSTER (A.L.) – p-rings and their boolean vector representations (Acta Mathematica Vol. 84 n° 3-4 1951 pages 231-261).

[5] HALMOS (P.R.) – Boolean Algebras (Van Nostrand ; Princeton 1968).

[6] HAMMER et RUDEANU – Boolean methods in Operations Research and related areas (Springer-Verlag Berlin 1968).

[7] RUTHERFORD (D.E.) – Orthogonal Boolean matrices (Proc. Roy. Soc. Edinb.) 1965 p. 126-135.

[8] SERFATI (M.) – Contribution à l'étude des matrices booléennes et postiennes (thèse Doct. Sc. Math. Paris VI 1972).

[9] SERFATI (M.) – Sur les Algèbres de Post libres (C.R.A.S. Fév. 1973).

[10] SERFATI (M.) – Sur les Polynômes Postiens C.R.A.S. Fev. 1973.

[11] SERFATI (M.) – Algèbres de Boole (avec une introduction à la théorie algébrique des graphes orientés et aux "sous ensembles flous") S.E.D.E.S. Editeur. Paris. 1974.

[12] ZADEH L.A. – Fuzzy Sets. Information and Control. Vol. 8-pp. 338-353 – Juin 1965.

[13] POST E.L. – Introduction to a general theory of elementary propositions (Journal of Math. Americ.) 1921 T. 43 p. 163-185.

[14] ROSENBLOOM P.C. : Post Algebras : Postulates and General Theory [Americ. J. Math. Vol. 64-1942 (p. 167-188).

INDEX DES TERMES