CAHIERS DU BURO

CHRISTIAN PARTRAT

Jeux à N joueurs : forme développée et forme normale

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 17 (1972), p. 1-85

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1972__17__1_0>

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

pour l'obtention

du DOCTORAT TROISIÈME CYCLE

Spécialité : MATHÉMATIQUES STATISTIQUES

Mention : STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

par

Christian PARTRAT

SUJET DE LA THÈSE :

Jeux à N joueurs :
forme développée et forme normale

Soutenue le Juin 1970 devant la Commission composée de :

MM. DUGUE Président
GEFFROY Examinateurs
BOUZITAT

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur DUGUE qui a accepté de présider le jury, à Monsieur le Professeur GEFFROY qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et me donner de très précieux avis, à Monsieur BOUZITAT qui n'a cessé de me prodiguer encouragements et conseils tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

La réalisation pratique du présent travail est en grande partie due à Mlle Colette CHAMBE et à Mme Chantal PERRICHON que toutes deux je ne saurais trop remercier.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

L'objet de ce mémoire de théorie des jeux est l'étude du passage de la forme développée d'un jeu à n joueurs à sa forme normale.

Dans un premier chapitre on rappellera brièvement quelques notions classiques de calcul des probabilités et de théorie de la mesure : espaces mesurables, applications mesurables, mesures, espace produit, probabilités de transition et processus aléatoire (à temps discret). On développera davantage la théorie, moins classique, d'intégration des fonctions à valeurs dans un espace de Banach par rapport à une mesure abstraite.

Dans un second chapitre on définira la forme développée d'un jeu à n joueurs. L'identification d'un tel jeu à un processus aléatoire (à temps discret) nous conduira à sa *forme réduite* c'est-à-dire la donnée de n ensembles T_i $(i = 1, \ldots, n)$, où T_i est l'ensemble des "tactiques" du joueur i, et d'une application de $\prod_{i=1}^{n} T_i$ dans un espace de mesures de probabilité.

On abordera ensuite dans un troisième chapitre la théorie de l'utilité individuelle : la définition, l'existence et l'unicité d'une *utilité linéaire* associée à une relation de préférence sur un ensemble, le prolongement de cette utilité à un ensemble plus vaste et les propriétés qui s'en déduisent.

Dans un dernier chapitre on utilisera tous les résultats précédents pour parvenir à la forme normale d'un jeu à n joueurs et on rappellera les notions fondamentales liées à un jeu sous une telle forme.

Toutes les références "(i)" du texte se rapportent à la bibliographie placée à la fin de cette étude.

CHAPITRE I

RAPPELS

I – NOTIONS CLASSIQUES

Pour les démonstrations ou des compléments on pourra consulter (8) (9), (13) et (18).

Notation : Soit Ω un ensemble. On désignera par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, par A^c le complémentaire de A dans Ω. Une classe $\mathcal{C}$ de parties de Ω sera un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Une application f d'un ensemble Ω dans un ensemble Ω' sera notée $f : \Omega \to \Omega'$.

Si $A \subset \Omega$, on notera $f(A) = \{f(\omega) : \omega \in A\} \subset \Omega'$.

Si $A' \subset \Omega'$, on notera $f^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'\} \subset \Omega$.

Si $\mathcal{C}$ est une classe de parties de Ω, on notera $f(\mathcal{C}) = \{f(A) : A \in \mathcal{C}\}$ et si $\mathcal{C}'$ est une classe de parties de Ω', $f^{-1}(\mathcal{C}') = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{C}'\}$.

Tribu

Définition 1

Soit Ω un ensemble non vide, $\mathcal{A}$ une classe de parties de Ω.

On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω si

a) $\phi, \Omega \in \mathcal{A}$

b) $\mathcal{A}$ est stable par complémentation : $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

c) $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu contenant les points si $\forall \omega \in \Omega, \{\omega\} \in \mathcal{A}$.

Remarque : de la définition d'une tribu, on déduit, en particulier, qu'une tribu est stable par intersection dénombrable.

Définition 2

Soit Ω un ensemble non vide, $\mathcal{C}$ une classe de parties de Ω. On appellera tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (notée $\sigma(\mathcal{C})$) la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{C}$.

L'existence de $\sigma(\mathcal{C})$ provient de ce que si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est la famille (non vide) des tribus sur Ω contenant $\mathcal{C}$, $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est une tribu sur Ω contenant $\mathcal{C}$ d'où $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

En particulier si E est un espace topologique et $\mathcal{O}$ la classe des ouverts de E ($\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$) pour cette topologie, on appelle tribu borélienne de E (notée $\mathcal{B}_E$) la tribu $\sigma(\mathcal{O})$ sur E engendrée par les ouverts de E (elle est aussi engendrée par l'ensemble des fermés de E). Si $E = \mathbf{R}$ ensemble des réels, on peut montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}_\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ est aussi engendrée par $\{]-\infty, a[\, : a \in \mathbf{R}\}$ et que $\forall a \in \mathbf{R}, \{a\} \in \mathcal{B}_\mathbf{R}$: $\mathcal{B}_\mathbf{R}$ est une tribu contenant les points.

Si E est un espace topologique séparé, $\mathcal{B}_E$ est une tribu contenant les points : E séparé $\Rightarrow \forall x \in E$, $\{x\}$ fermé de $E \Rightarrow \forall x \in E, \{x\} \in \mathcal{B}_E$.

Espace mesurable

Définition 3

Un espace mesurable est un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.

Applications mesurables

Définition 4

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ 2 espaces mesurables. Une application $f : \Omega \to \Omega'$ est dite mesurable si $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{A}$: $\forall A' \in \mathcal{A}', f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$.

Proposition 1

Si $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ et $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ sont 3 espaces mesurables, $f : \Omega \to \Omega'$ et $g : \Omega' \to \Omega''$ sont 2 applications mesurables, alors

$$g \circ f : \Omega \to \Omega'' : \omega \rightsquigarrow g[f(\omega)]$$

est une application mesurable.

Proposition 2

Soit Ω et Ω' des ensembles (non vides), $f : \Omega \to \Omega'$ une application de Ω dans Ω'.

1/ Si $\mathcal{A}'$ est une tribu sur Ω', $f^{-1}(\mathcal{A}')$ est une tribu sur Ω et f est mesurable quand Ω et Ω' sont munis respectivement des tribus $f^{-1}(\mathcal{A}')$ et $\mathcal{A}'$.

2/ Si $\mathcal{C}'$ est une classe de parties de Ω', alors $f^{-1}[\sigma(\mathcal{C}')] = \sigma[f^{-1}(\mathcal{C}')]$.

3/ Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, $\{A' \subset \Omega' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Ω' et c'est la plus grande tribu sur Ω' rendant f mesurable.

Proposition 3

Si $(E, \mathcal{O})$ et $(E', \mathcal{O}')$ sont 2 espaces topologiques, toute application continue de E dans E' est mesurable quand E et E' sont munis de leurs tribus boréliennes respectives.

Espace mesurable produit

Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille finie d'ensembles (non vides), $\Omega = \prod\limits_{i\in I} \Omega_i$ l'ensemble produit de cette famille : $\Omega = \{(\omega_i)_{i\in I} : \omega_i \in \Omega_i \ \forall i \in I\}$ et p_i la projection d'indice i :

$$p_i : \Omega \to \Omega_i : (\omega_i)_{i\in I} \rightsquigarrow \omega_i .$$

Définition 5

Soit $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille finie d'espaces mesurables, $\Omega = \prod\limits_{i\in I} \Omega_i$ l'ensemble produit de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ et $(p_i)_{i\in I}$ la famille des projections de Ω sur les Ω_i $(i \in I)$.

On appelle tribu produit de la famille $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ la plus petite tribu sur Ω rendant mesurables les projections $p_i (i \in I)$. On la note $\bigotimes\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$.

L'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace mesurable produit de la famille $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$.

On peut montrer que $\bigotimes\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ est aussi la tribu sur Ω engendrée par l'ensemble des *pavés mesurables* de Ω : $\{\prod\limits_{i\in I} A_i : A_i \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I\}$.

Tribu induite

Soit $(\Omega , \mathcal{A})$ un espace mesurable, $A \in \mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}_A = \{B \in \mathcal{A} : B \subset A\}$. Alors $\mathcal{A}_A$ est une tribu sur A et $\mathcal{A}_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{A}\}$. $\mathcal{A}_A$ est dite tribu induite par $\mathcal{A}$ sur A. On a $\mathcal{A}_A \subset \mathcal{A}$.

Mesures et Probabilités

Définition 6

Une mesure μ sur un espace mesurable $(\Omega , \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to]-\infty, +\infty]$ telle que $- \mu(\phi) = 0$

$- \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints.

Le triplet $(\Omega , \mathcal{A} , \mu)$ est alors un espace mesuré.

Une mesure μ sur $(\Omega , \mathcal{A})$ est dite positive si $\mu(A) \geqslant 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

Une mesure μ sur $(\Omega , \mathcal{A})$ est dite bornée si $\operatorname{Sup} \{|\mu(A)| : A \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Soit μ une mesure positive sur $(\Omega , \mathcal{A}) : \forall A , B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$ d'où l'on peut déduire qu'une mesure μ positive est bornée $\Leftrightarrow \mu(\Omega) < +\infty$.

Une probabilité P sur $(\Omega , \mathcal{A})$ est une mesure positive telle que $P(\Omega) = 1$ (c'est donc une mesure bornée). Alors P est en fait une application de $\mathcal{A}$ dans $[0 , 1]$. Un triplet $(\Omega , \mathcal{A}, P)$ où P est une probabilité sur $(\Omega , \mathcal{A})$ est un espace de probabilité.

Mesure induite

Soit $(\Omega , \mathcal{A} , \mu)$ un espace mesuré, $A \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_A$ la tribu induite par $\mathcal{A}$ sur A. Alors la restriction $\mu_A = \mu_{|\mathcal{A}_A}$ de μ à $\mathcal{A}_A$ est une mesure sur $(A , \mathcal{A}_A)$. Si μ est une mesure positive (respectivement bornée), μ_A est une mesure positive (respectivement bornée). μ_A est dite mesure induite par μ sur $(A , \mathcal{A}_A)$.

Espace de probabilité produit

Proposition 4

Soit $(\Omega_i , \mathcal{A}_i , P_i)_{i\in I}$ une famille finie d'espaces de probabilité, alors il existe une probabilité unique P sur l'espace produit

$$(\Omega , \mathcal{A}) \begin{cases} \Omega = \prod_{i\in I} \Omega_i \\ \mathcal{A} = \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i \end{cases}$$

telle que

$$P(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P_i(A_i)$$

pour tout pavé mesurable $\prod_{i\in I} A_i$ de $(\Omega\ ,\ \mathcal{A})$.

Cette unique probabilité P sur $(\Omega\ ,\ \mathcal{A})$ est dite probabilité produit de la famille $(P_i)_{i\in I}$ et notée $P = \underset{i\in I}{\otimes} P_i$.

L'espace de probabilité $(\Omega\ ,\ \mathcal{A}, P)$ est l'espace produit de la famille $(\Omega_i\ ,\ \mathcal{A}_i\ ,\ P_i)_{i\in I}$.

Probabilité image

Soit $(\Omega\ ,\ \mathcal{A})$ et $(\Omega'\ ,\ \mathcal{A}')$ 2 espaces mesurables, $f : \Omega \to \Omega'$ une application mesurable de Ω dans Ω'.

Soit P une probabilité sur $(\Omega\ ,\ \mathcal{A})$. Alors l'application $P' : \mathcal{A}' \to [0\ ,\ 1]$ définie par $P'(A') = P[f^{-1}(A')]$ $(A' \in \mathcal{A}')$ est une probabilité sur $(\Omega'\ ,\ \mathcal{A})$ comme il est facile de le vérifier.

Définition 7

Soit $(\Omega\ ,\ \mathcal{A})$ et $(\Omega'\ ,\ \mathcal{A}')$ 2 espaces mesurables, $f : \Omega \to \Omega'$ une application mesurable de Ω dans Ω' et P une probabilité sur $(\Omega\ ,\ \mathcal{A})$. La probabilité P' sur $(\Omega'\ ,\ \mathcal{A}')$ définie ci-dessus est dite probabilité image de P par f et notée $P' = f(P)$.

Soit $(\Omega\ ,\ \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur Ω , $\overline{\Omega} = \Omega/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient de Ω par $\mathcal{R}$ et φ la surjection canonique de Ω dans $\overline{\Omega}$:

$$\varphi : \Omega \to \overline{\Omega} : \omega \rightsquigarrow \overline{\omega} \quad \text{où} \quad \overline{\omega} = \{\omega' \in \Omega : \omega\ \mathcal{R}\ \omega'\}.$$

Soit $\overline{\mathcal{A}}$ la plus grande tribu sur $\overline{\Omega}$ rendant mesurable l'application φ : c'est-à-dire $\forall \overline{A} \in \overline{\mathcal{A}}$ $\varphi^{-1}(\overline{A}) = \{\omega \in \Omega : \overline{\omega} \in \overline{A}\} \in \mathcal{A}$.

Si $\forall \omega \in \Omega$, $\overline{\omega} \in \mathcal{A}$, alors $\overline{\mathcal{A}}$ est une tribu contenant les points :

$$\forall \overline{\omega} \in \overline{\Omega}\ ,\ \{\overline{\omega}\} \in \overline{\mathcal{A}} \quad \text{car} \quad \varphi^{-1}(\{\overline{\omega}\}) = \overline{\omega} \in \mathcal{A}.$$

Si $\overline{P} = \varphi(P)$ est la probabilité image de P par φ, elle est définie sur $(\overline{\Omega}\ ,\ \overline{\mathcal{A}})$ par $\overline{P}(\overline{A}) = P\,[\varphi^{-1}(\overline{A})]$. En particulier si $\forall \omega \in \mathcal{A}$, $\overline{\omega} \in \mathcal{A}$:

$$\overline{P}(\{\overline{\omega}\}) = P(\overline{\omega}).$$

Espace de Banach des mesures bornées

Proposition 5 (Hahn-Jordan)

Si μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$, les formules

$$\mu^+(A) = \operatorname{Sup}\left\{\mu(B) : \begin{matrix} B \subset A \\ B \in \mathcal{A} \end{matrix}\right\}, \ \mu^-(A) = \operatorname{Sup}\left\{-\mu(B) : \begin{matrix} B \subset A \\ B \in \mathcal{A} \end{matrix}\right\} \quad (A \in \mathcal{A})$$

définissent 2 mesures positives sur $(\Omega, \mathcal{A})$. La mesure μ^- est bornée et on a $\mu = \mu^+ - \mu^-$ sur $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire $\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$).

En corollaire de cette proposition, on peut montrer que si μ est une mesure quelconque sur $(\Omega, \mathcal{A})$, μ bornée $\Leftrightarrow \mu(\Omega) < +\infty$.

On désignera par $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ (ou $\mathcal{M}(\Omega)$) l'ensemble des mesures bornées sur $(\Omega, \mathcal{A})$, par $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ (ou $\mathcal{M}^+(\Omega)$) l'ensemble des mesures positives bornées sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et par $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ (ou $\mathcal{M}_1(\Omega)$) l'ensemble des probabilités sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On a alors

$$\mathcal{M}_1(\Omega) \subset \mathcal{M}^+(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega).$$

On peut munir $\mathcal{M}(\Omega)$ d'une structure d'espace vectoriel réel :

Si μ et $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$, on posera $(\mu + \nu)(A) = \mu(A) + \nu(A)$ $(\forall A \in \mathcal{A})$.

Si $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $a \in \mathbf{R}$, on posera $(a\mu)(A) = a\mu(A)$ $(\forall A \in \mathcal{A})$.

Ces définitions sont légitimes car $\mu + \nu$ et $a\mu$ sont bien des mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

De plus μ et ν bornées entraîne $(\mu + \nu)(\Omega) = \mu(\Omega) + \nu(\Omega) < +\infty$ donc $(\mu + \nu)$ bornée,

et $a \in \mathbf{R}$, μ bornée entraîne $(a\mu)(\Omega) = a\mu(\Omega) < +\infty$ donc $a\mu$ bornée.

On vérifie facilement que $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ muni de ces 2 opérations est un espace vectoriel réel, l'élément neutre de $+$ étant la mesure nulle

$$0 : \mathcal{A} \to]-\infty, +\infty] : A \rightsquigarrow 0.$$

Alors $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ et $\mathcal{M}^+(\Omega, \mathcal{A})$ sont des parties convexes de $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$:

$$\mu \text{ et } \nu \in \mathcal{M}^+(\Omega) \text{ et } a \in [0, 1] \Rightarrow a\mu + (1 - a)\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$$

$$\mu \text{ et } \nu \in \mathcal{M}_1(\Omega) \text{ et } a \in [0, 1] \Rightarrow a\mu + (1 - a)\nu \in \mathcal{M}_1(\Omega).$$

Notons que d'après la proposition 5, $\forall \mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, $\exists \mu^+$ et $\mu^- \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ tels que $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

La variation totale $|\mu|$ d'une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est par définition la mesure positive $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$: $|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A)$ $(A \in \mathcal{A})$. Alors $\forall A \in \mathcal{A}$ $|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A)$ et si μ est une mesure positive, $|\mu| = \mu$.

De plus on peut montrer que :

$$|\mu|(A) = \operatorname{Sup}\left\{ \sum_{n\in\mathbf{N}} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ suite d'éléments de } \mathcal{A}, \text{ 2 à 2 disjoints avec } \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n = A \right\}$$

et que $|\mu|$ bornée $\Leftrightarrow \mu$ bornée. Donc $\forall \mu \in \mathcal{M}(\Omega), |\mu|(\Omega) < +\infty$.

Proposition 6

L'application $\mathcal{M}(\Omega) \to [0, +\infty[: \mu \rightsquigarrow |\mu|(\Omega)$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}(\Omega)$. De plus $\mathcal{M}(\Omega)$ muni de cette norme est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).

Pour $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, on notera $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ cette norme. Alors

$$\forall A \in \mathcal{A}, |\mu(A)| \leqslant \|\mu\|.$$

Si $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, $\|\mu\| = \mu(\Omega)$. Si $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega)$, $\|\mu\| = 1$.

Si $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ et $\mu \neq 0$ ($\Leftrightarrow \mu(\Omega) > 0$), alors $\dfrac{\mu}{\mu(\Omega)}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$: $\dfrac{\mu}{\mu(\Omega)} \in \mathcal{M}_1(\Omega)$.

Proposition 7

Pour la topologie définie sur $\mathcal{M}(\Omega)$ par la norme $\|\mu\|$, $\mathcal{M}^+(\Omega)$ et $\mathcal{M}_1(\Omega)$ sont des fermés.

Démonstration :

Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}^+(\Omega)$ qui converge vers $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, montrons qu'alors $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$:

$$\|\mu_n - \mu\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}, |\mu_n(A) - \mu(A)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où $\mu_n(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A), \forall A \in \mathcal{A}$.

Or $\forall A \in \mathcal{A}, \mu_n(A) \geqslant 0$; donc $\mu(A) \geqslant 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$; donc $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, c'est-à-dire $\mathcal{M}^+(\Omega)$ fermé.

De même soit $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'élèments de $\mathcal{M}_1(\Omega)$ qui converge vers $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$.

$\mathcal{M}_1(\Omega) \subset \mathcal{M}^+(\Omega)$ entraîne $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ d'après le raisonnement précédent.

De plus, comme $\mu_n(\Omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(\Omega)$ et $\mu_n(\Omega) = 1$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mu(\Omega) = 1$, c'est-à-dire $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ et $\mathcal{M}_1(\Omega)$ fermé.

Probabilités dégénérées

Définition 8

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle probabilité dégénérée en $\omega \in \Omega$ la probabilité δ_ω sur $(\Omega, \mathcal{A})$ définie par

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin A \end{cases} \quad (A \in \mathcal{A}).$$

On vérifie facilement que $\forall \omega \in \Omega$, δ_ω est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On notera Δ ou $\Delta(\Omega)$ l'ensemble $\{\delta_\omega : \omega \in \Omega\}$. Alors $\Delta \subset \mathcal{M}_1(\Omega)$.

L'application $\Omega \to \Delta(\Omega) : \omega \rightsquigarrow \delta_\omega$ est surjective. Elle est bijective si $\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \neq \omega', \exists A \in \mathcal{A}$ tel que $\omega \in A$ et $\omega' \notin A$. Elle est en particulier bijective si $\forall \omega \in \Omega, \{\omega\} \in \mathcal{A}$: $\mathcal{A}$ est une tribu contenant les points.

Proposition 7 bis

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω contenant les points, alors pour la topologie définie sur $\mathcal{M}(\Omega)$ par la norme $\|\mu\|$, $\Delta(\Omega)$ est un fermé.

Démonstration : Soit en effet $(\delta_{\omega_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\Delta(\Omega)$ convergeant dans $\mathcal{M}(\Omega)$, alors $(\delta_{\omega_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{M}(\Omega)$:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_0(\epsilon) \text{ tel que } m \, , \; n \geqslant N_0(\epsilon) \Rightarrow \|\delta_{\omega_n} - \delta_{\omega_m}\| < \epsilon$$

d'où
$$\forall A \in \mathcal{A}, |\delta_{\omega_n}(A) - \delta_{\omega_m}(A)| < \epsilon .$$

Considérons en particulier ω_{N_0} : $\mathcal{A}$ étant une tribu contenant les points, $\{\omega_{N_0}\} \in \mathcal{A}$, donc pour $n \geqslant N_0, |\delta_{\omega_n}(\{\omega_{N_0}\}) - 1| < \epsilon$ c'est-à-dire $\omega_n = \omega_{N_0}$ $\forall n \geqslant N_0$ (pour ϵ assez petit). On en déduit : $\exists \omega \in \Omega$ tel que $\omega_n = \omega$ à partir d'un certain rang, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta_{\omega_n} = \delta_\omega \in \Delta(\Omega)$ et $\Delta(\Omega)$ fermé.

Remarque : On montrerait de la même manière que $\forall D \subset \Delta(\Omega)$, D est un fermé pour la topologie définie sur $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ par la norme $\|\mu\|$ (si $\mathcal{A}$ est une tribu contenant les points).

II – INTEGRATION DES FONCTIONS A VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH

On pourra trouver dans (9) les démonstrations des propositions et théorèmes énoncés dans ce paragraphe.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est une mesure positive et bornée.

Une partie N de Ω est dite μ-négligeable si $\exists A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. L'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est dit complet si $\mathcal{A}$ contient toute partie μ-négligeable de Ω.

Si $\mathcal{N}$ désigne la classe des parties μ-négligeables de Ω, la classe $\overline{\mathcal{A}}$ définie par $\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A} \text{ et } N \in \mathcal{N}\}$ est identique à la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$. De plus la formule $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ définit sans ambiguité l'unique mesure $\overline{\mu}$ sur $(\Omega, \overline{\mathcal{A}})$ qui prolonge μ et l'espace mesuré $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ est complet. Cet espace est appelé le complété de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Soit donc $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et bornée.

On supposera dans la suite cet espace complet (on substitue à $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ son complété).

On notera χ_A la fonction indicatrice de $A \subset \Omega$:

$$\chi_A : \Omega \to \mathbf{R} : \omega \rightsquigarrow \chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Soit E un espace de Banach réel dont la norme sera notée $\| \ \|$. Il est clair que l'ensemble des applications de Ω dans E peut être muni d'une structure d'espace vectoriel réel. Si $f : \Omega \to E$, on notera $\|f\|$ l'application $\|f\| : \Omega \to \mathbf{R} : \omega \rightsquigarrow \|f(\omega)\|$.

En particulier $\mathbf{R}$, muni de la norme valeur absolue $| \ |$, est un espace de Banach. Donc tout ce qui sera dit pour les fonctions a valeurs dans un espace de Banach quelconque E sera valable pour des fonctions numériques (à valeurs dans $\mathbf{R}$).

Fonctions étagées

Définition 1

Une fonction $f : \Omega \to E$ est dite étagée si on peut écrire $f = \sum_{i \in I} x_i \chi_{A_i}$ où I est un ensemble fini, $A_i \in \mathcal{A}$ et $x_i \in E \ \forall i \in I$.

Proposition 1

Toute fonction étagée peut s'écrire $f = \sum_{j \in J} y_j \chi_{B_j}$ où J est un ensemble fini, $(B_j)_{j \in J}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints et $y_j \in E \ \forall j \in J$.

Remarque : Si f est une fonction étagée non identiquement nulle, on peut l'écrire d'une manière unique sous la forme $\sum_{j \in J} y_j \chi_{B_j}$ où J est fini, $(B_j)_{j \in J}$ est une famille d'éléments de $\mathfrak{A}$ 2 à 2 disjoints et $(y_j)_{j \in J}$ est une famille d'éléments distincts et non nuls de E.

L'ensemble des fonctions étagées définies sur Ω à valeurs dans E sera noté $\mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$.

Alors $\mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$ est un espace vectoriel réel (sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de Ω dans E).

Fonctions μ-mesurables

Définition 2

Une fonction $f : \Omega \to E$ est dite μ-mesurable si elle vérifie les 2 conditions suivantes :

1/ $\forall G$ ouvert de $E, f^{-1}(G) \in \mathfrak{A}$.

2/ $\forall A \in \mathfrak{A}$, $\exists$ une partie μ-négligeable $N \subset A$ et une partie dénombrable H de E telles que $f(A - N) \subset \bar{H}$ où $\bar{H}$ désigne l'adhérence de H dans E (c'est-à-dire le plus petit fermé de E contenant H).

Remarque : la condition 1) signifie que f est mesurable quand Ω et E sont munis respectivement des tribus $\mathfrak{A}$ et $\mathcal{B}_E$. Elle peut être remplacée par chacune des conditions équivalentes suivantes :

– $\forall\ F$ fermé de $E, f^{-1}(E) \in \mathfrak{A}$

– $\forall\ B \in \mathcal{B}_E, f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$.

Sous réserve de la condition 2), la condition 1) peut être remplacée par :

– pour toute boule fermée (respectivement ouverte) C de $E, f^{-1}(C) \in \mathfrak{A}$.

La condition 2) peut être remplacée par la condition équivalente suivante :

– $\exists$ une partie μ-négligeable N de Ω et un sous-ensemble dénombrable H de E tel que $f(\Omega - N) \subset \bar{H}$.

Si l'espace E est séparable ($\exists\ H \subset E$ dénombrable et dense dans E) la condition 2) est superflue. C'est en particulier le cas de **R**. Une fonction numérique $f : \Omega \to \mathbf{R}$ est donc μ-mesurable si et seulement si f est mesurable.

Proposition 2

Soit $f : \Omega \to R$ une fonction numérique. Alors f est mesurable si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

– $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < a\} \in \mathfrak{A} \quad \forall a \in \mathbf{R}$

– $\{\omega \in \Omega : f(\omega) > a\} \in \mathfrak{A} \quad \forall a \in \mathbf{R}$.

Si l'on revient dans le cas général :

– Toute fonction constante est μ-mesurable,

– Toute fonction étagée est μ-mesurable ; une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est μ-mesurable si et seulement si $f^{-1}(x_i) \in \mathfrak{A}$ $\forall i = 1, \ldots, n$, c'est-à-dire f étagée.

– Une fonction ne prenant qu'un nombre dénombrable de valeurs $\{x_1 \ldots, x_n, \ldots\}$ est μ-mesurable si et seulement si $f^{-1}(x_n) \in \mathfrak{A}$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

– Si $f : \Omega \to E$ est μ-mesurable et $g : \Omega \to E$ est une fonction égale à f sur $A \in \mathfrak{A}$ et constante sur A^c, alors g est μ-mesurable.

On peut montrer que, sous réserve de la condition 2, la condition 1 de la définition 2 peut être remplacée par la condition équivalente suivante : Pour toute forme linéaire continue $x' \in E'$ (dual topologique de E), la fonction numérique $x' \circ f : \Omega \to \mathbf{R} : \omega \rightsquigarrow x'[f(\omega)]$ est mesurable.

Définition 3

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de Ω dans E. On dit que

1/ $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge μ –presque partout (μ-pp) vers $f : \Omega \to E$ s'il existe une partie N de Ω μ-négligeable telle que

$$\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \forall \omega \in \Omega - N.$$

2/ $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f : \Omega \to E$ si

$$\sup_{\omega \in \Omega} \|f_n(\omega) - f(\omega)\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .$$

Théorème 1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de Ω dans E μ-mesurables. Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge μ-pp vers une fonction $f : \Omega \to E$, alors f est μ-mesurable.

Proposition 3

Soit $f : \Omega \to E$ une fonction μ-mesurable. Si $f(\Omega)$ est relativement compact dans E ($\overline{f(\Omega)}$ compact dans E), il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions étagées convergeant uniformément vers f.

Cette propriété est en particulier vérifiée pour les fonctions réelles mesurables et bornées.

Théorème 2

Pour toute fonction réelle f mesurable positive définie sur Ω, il existe une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers f.

Proposition 4

Une application $f : \Omega \to E$ est μ-mesurable si et seulement si $f\,\chi_A$ est μ-mesurable $\forall A \in \mathfrak{A}$. Si $f : \Omega \to E$ est μ-mesurable, $\|f\| : \Omega \to \mathbf{R}$ est mesurable.

De plus on peut montrer :

Proposition 5

Si f et g sont des applications de Ω dans E μ-mesurables et $a \in \mathbf{R}$, les fonctions $f + g$ et $a\,f$ sont μ-mesurables : l'ensemble des applications de Ω dans E μ-mesurables forme un espace vectoriel réel.

Intégration des fonctions étagées

Proposition 6

Si $\sum_{i=1}^{n} x_i\,\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} y_j\,\chi_{B_j}$ $(A_i, B_j \in \mathfrak{A}$ et $x_i, y_j \in E\,\forall i = 1 \ldots, n$ et $\forall j = 1, \ldots, m)$, alors $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\,x_i = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)\,y_j$.

D'où

Définition 4

Pour toute fonction étagée $f = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\chi_{A_i} \in \mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$ on appellera intégrale de f par rapport à μ, notée $\int f\,d\mu$, l'élément de E défini par $\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)x_i$.

La proposition 6 justifie cette définition, car $\int f\,d\mu$ ne dépend que de f et non de la manière d'écrire f comme fonction étagée. $\int f\,d\mu$ sera noté aussi $\int f(\omega)\,d\mu\,(\omega)$ ou $\int f\,(\omega)\,d\mu$.

Si $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$ et $A \in \mathfrak{A}, f\chi_A = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A \cap A_i} \in \mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$, alors $\int f\chi_A \, d\mu$ sera écrit $\int_A f \, d\mu$.

L'intégrale d'une fonction étagée vérifie un certain nombre de propriétés :

– l'application $\mathcal{E}_E(\mathfrak{A}) \to E : f \rightsquigarrow \int f \, d\mu$ est linéaire :

$$\forall a, b \in \mathbf{R}, \forall f \text{ et } g \in \mathcal{E}_E(\mathfrak{A}) : \int (af + bg) \, d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu ;$$

en particulier si $f \in \mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$ et $A, B \in \mathfrak{A}$ disjoints, on a

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu .$$

– Soit E et F 2 espaces de Banach réels, $\mathrm{U} : E \to F$ une application linéaire et $f \in \mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$, alors $\mathrm{U} \circ f \in \mathcal{E}_F(\mathfrak{A})$ et $\mathrm{U}\left(\int f \, d\mu\right) = \int \mathrm{U} \circ f \, d\mu$.

– Si $E = \mathbf{R}$, l'application $\mathcal{E}_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$; $\varphi \rightsquigarrow \int \varphi \, d\mu$ est positive et croissante :

$$\varphi \in \mathcal{E}_{\mathbf{R}} , \varphi \geqslant 0 \Rightarrow \int \varphi \, d\mu \geqslant 0 ,$$

$$\varphi_1 , \varphi_2 \in \mathcal{E}_{\mathbf{R}} , \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \Rightarrow \int \varphi_1 \, d\mu \leqslant \int \varphi_2 \, d\mu ,$$

$$\varphi \in \mathcal{E}_{\mathbf{R}} , \varphi \geqslant 0 \text{ et } A , B \in \mathfrak{A} , A \subset B \Rightarrow \int_A \varphi \, d\mu \leqslant \int_B \varphi \, d\mu.$$

– Soit $A \in \mathfrak{A}$ et μ une mesure portée par A : $\mu(A^c) = 0$, alors,

$$\forall f \in \mathcal{E}_E(\mathfrak{A}) \qquad \int f \, d\mu = \int_A f \, d\mu ,$$

en effet si

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i} \in \mathcal{E}_E(\mathfrak{A}) , \int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mu(A \cap A_i) = \int_A f d\mu.$$

Proposition 7

Soit $f \in \mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$, alors $\|f\| \in \mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{A})$ et $\left\|\int f \, d\mu\right\| \leqslant \int \|f\| \, d\mu$.

Pour $f \in \mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$, on pose $N_1(f) = \int \|f\| \, d\mu$. Alors il est facile de vérifier que N_1 est une semi-norme sur $\mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$. La topologie définie sur $\mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$ par N_1 est dite topologie de la convergence en moyenne. Pour cette topologie l'application linéaire $\mathcal{E}_E \to E : f \rightsquigarrow \int f \, d\mu$ est continue car $\left\|\int f \, d\mu\right\| \leqslant N_1(f)$ d'après la proposition 7.

Soit X un espace vectoriel réel. On rappelle qu'une semi-norme N sur X est une application $N : X \to \overline{\mathbf{R}}_+$ telle que :

– $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$ et $\forall x \in X$

– $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y) \quad \forall x$ et $y \in X$.

Définition 5

On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{E}_E(\mathcal{A})$ est une suite de Cauchy (pour N_1) si $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ m}} N_1(f_n - f_m) = 0$ c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ m}} \int \|f_n - f_m\| \, d\mu = 0.$$

Proposition 8

Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{E}_E(\mathcal{A})$, alors

1/ $(\|f_n\|)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}$

2/ $\forall A \in \mathcal{A}$, $(f_n \chi_A)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{E}_E(\mathcal{A})$

3/ $(\int f_n \, d\mu)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de E (muni de sa norme $\| \ \|$).

On voit maintenant comment définir l'intégrale d'autres fonctions que les fonctions étagées : si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{E}_E(\mathcal{A})$ convergeant μ-pp vers une fonction $f : \Omega \to E$, $(\int f_n \, d\mu)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de E. E étant complet, $(\int f_n \, d\mu)_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans E ; on sera donc amené à définir $\int f \, d\mu$ par $\lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu$. Encore faut-il s'assurer que cette limite ne dépend que de f et non de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ choisie.

Proposition 9

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ 2 suites de Cauchy de $\mathcal{E}_E(\mathcal{A})$ convergeant μ-pp vers la même fonction $f : \Omega \to E$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu = \lim\limits_{n \to +\infty} \int g_n \, d\mu$.

Fonctions μ-intégrables

Définition 6

Une fonction $f : \Omega \to E$ est dite μ-intégrable s'il existe une suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{E}_E(\mathcal{A})$ convergeant μ-pp vers f.

L'intégrale de f par rapport à μ sera l'élément de E noté $\int f \, d\mu$ et défini par $\int f \, d\mu = \lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu$.

D'après la proposition 9, $\int f \, d\mu$ ne dépend que de f ; $\int f \, d\mu$ sera écrit aussi $\int f(\omega) \, d\mu(\omega)$ ou $\int f(\omega) \, d\mu$.

Si $f : \Omega \to E$ est μ-intégrable, f est μ-mesurable d'après le théorème 1.

Toute fonction étagée $f \in \mathcal{E}_E(\mathfrak{A})$ est μ-intégrable et ses deux intégrales coïncident.

L'ensemble des fonctions μ-intégrables sera noté $\mathcal{L}_E^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ou $\mathcal{L}_E^1$, et si $E = \mathbf{R}$ $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1$.

Proposition 10

L'ensemble $\mathcal{L}_E^1$ est un espace vectoriel réel et l'application $\mathcal{L}_E^1 \to E : f \rightsquigarrow \int f \, d\mu$ est linéaire :

$$\int (af + bg) \, d\mu = a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu \quad \forall f, g \in \mathcal{L}_E^1 \text{ et } \forall a, b \in \mathbf{R}.$$

Proposition 11

Si $f \in \mathcal{L}_E^1$, alors $\|f\| \in \mathcal{L}^1$ et $\|\int f \, d\mu\| \leqslant \int \|f\| \, d\mu$.

(Pour une réciproque de cette proposition, voir Proposition 14).

Si $f \in \mathcal{L}_E^1$ et $A \in \mathfrak{A}$, $f\chi_A \in \mathcal{L}_E^1$ et on écrira $\int f \chi_A \, d\mu = \int_A f \, d\mu$.

L'intégrale de f vérifie un certain nombre de propriétés déduites des propriétés de l'intégrale d'une fonction étagée :

– $f \in \mathcal{L}_E^1$ et $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \in \mathfrak{A}$ disjoints $\Rightarrow \int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$.

Cette propriété reste valable pour une suite d'éléments disjoints de $\mathfrak{A}$.

– Si E et F sont 2 espaces de Banach réels, $\mathrm{U} : E \to F$ une application linéaire continue et $f \in \mathcal{L}_E^1$, alors $\mathrm{U} \circ f \in \mathcal{L}_F^1$ et $\mathrm{U}(\int f \, d\mu) = \int \mathrm{U} \circ f \, d\mu$.

– Dans le cas où $E = \mathbf{R}$, on a les propriétés supplémentaires suivantes : $\mathcal{L}^1 \to \mathbf{R} : f \rightsquigarrow \int f \, d\mu$ est positive et croissante :

$$\varphi \in \mathcal{L}^1 , \varphi \geqslant 0 \Rightarrow \int \varphi \, d\mu \geqslant 0$$

$$\varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \in \mathcal{L}^1 , \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \Rightarrow \int \varphi_1 \, d\mu \leqslant \int \varphi_2 \, d\mu$$

$$\varphi \in \mathcal{L}^1 , \varphi \geqslant 0, A , B \in \mathfrak{A}, A \subset B \Rightarrow \int_A \varphi \, d\mu \leqslant \int_B \varphi \, d\mu .$$

– Si $f \in \mathscr{L}_E^1$ et $A \in \mathfrak{A}$, $\int_A \|f\| \, d\mu \leqslant \mu(A) \sup_{\omega \in A} \|f(\omega)\|$.

– Si $A \in \mathfrak{A}$ et si μ est une mesure portée par A ($\mu(A^c) = 0$), alors $\forall f \in \mathscr{L}_E^1$, $\int f \, d\mu = \int_A f \, d\mu$.

En effet soit $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ où $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathscr{E}_E(\mathfrak{A})$, alors $\int f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu$.

Pour $f \in \mathscr{L}_E^1$, $\|f\| \in \mathscr{L}^1$; on pose $N_1(f) = \int \|f\| \, d\mu$ et N_1 est un semi-norme sur $\mathscr{L}_E^1$. La topologie définie sur $\mathscr{L}_E^1$ par cette semi-norme est dite topologie de la convergence en moyenne.

Pour cette topologie l'application linéaire $\mathscr{L}_E^1 \to E : f \rightsquigarrow \int f \, d\mu$ est continue (cf. proposition 11).

On dira qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathscr{L}_E^1$ converge en moyenne vers $f \in \mathscr{L}_E^1$ si $\lim_{n \to +\infty} N_1(f - f_n) = 0$ c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} \int \|f - f_n\| \, d\mu = 0$. Alors

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu .$$

Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathscr{E}_E(\mathfrak{A})$ convergeant μ-pp vers une fonction $f \, (\in \mathscr{L}_E^1)$, $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en moyenne vers f ; l'espace $\mathscr{E}_E(\mathfrak{A})$ est dense dans $\mathscr{L}_E^1$ (muni de la semi-norme N_1). D'autre part on peut montrer que $\mathscr{L}_E^1$ muni de la semi-norme N_1 est complet.

Critères d'intégrabilité

Proposition 12

Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite monotone de fonctions réelles μ-intégrables et si la suite $(\int f_n \, d\mu)_{n \in \mathbf{N}}$ a une limite finie, alors, si elle existe, la fonction $\lim_{n \to +\infty} f_n$ est μ-intégrable et $\int (\lim_{n \to +\infty} f_n) \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu$.

Soit donc f une fonction réelle mesurable positive, il existe d'après le théorème 2 une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions étagées positives convergeant vers f, alors on peut montrer que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathscr{E}_{\mathbf{R}}$ si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu < +\infty$.

Donc pour $f \geqslant 0$, $f \in \mathscr{L}^1 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu < +\infty$.

Si f est une fonction réelle,

$$f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \begin{cases} f^+ = \sup(f, 0) \\ f^- = \sup(-f, 0) \end{cases} \in \mathcal{L}^1 \quad \text{et} \quad \int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Dans le cas général :

Théorème 3 (Lebesgue)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{L}^1_E$ convergeant μ-pp vers une fonction $f : \Omega \to E$. S'il existe une fonction réelle g positive μ-intégrable telle que $\|f_n\| \leqslant g$ μ-pp $\forall n \in \mathbf{N}$. alors $f \in \mathcal{L}^1_E$ et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en moyenne vers f. Dans ce cas on a $\int f \, d\mu = \lim\limits_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu$.

Proposition 13

Si la fonction $f : \Omega \to E$ est μ-mesurable et s'il existe une fonction réelle g positive et μ-intégrable telle que $\|f\| \leqslant g$ μ-pp, alors f est μ-intégrable.

Proposition 14

Une fonction $f : \Omega \to E \in \mathcal{L}^1_E \Leftrightarrow f$ est μ-mesurable et $\|f\| \in \mathcal{L}^1$.

Proposition 15

Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de $\mathcal{L}^1_E$ convergeant uniformément vers une fonction $f : \Omega \to E$, alors $f \in \mathcal{L}^1_E$ et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en moyenne vers f.

Intégration par rapport à une mesure induite

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, où μ est une mesure positive et bornée sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soit $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_A$ la tribu induite par $\mathcal{A}$ sur A et μ_A la mesure (positive et bornée) induite par μ sur $(A, \mathcal{A}_A)$.

Proposition 16

Soit $f : \Omega \to E$ une fonction définie sur Ω à valeurs dans E et $f_{|A} : A \to E$ la restriction de f à A. Alors $f_{|A} \in \mathcal{L}^1_E(A, \mathcal{A}_A, \mu_A) \Leftrightarrow f\chi_A \in \mathcal{L}^1_E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, et on a

$$\int f_{|A} \, d\mu_A = \int f\chi_A \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

Intégration par rapport à une mesure image

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ 2 espaces mesurables, $\pi : \Omega \to \Omega'$ une application mesurable de Ω dans Ω'. Soit μ une mesure positive bornée sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\mu' = \pi(\mu)$ la mesure image de μ par π. Soit $f' : \Omega' \to E$ une fonction à valeurs dans E et $f' \circ \pi : \Omega \to E : \omega \rightsquigarrow f'[\pi(\omega)]$.

Proposition 17

Si f' est μ'-mesurable, alors $f = f' \circ \pi$ est μ-mesurable. Si f' est μ'-intégrable, f est μ-intégrable et $\int f \, d\mu = \int f' \, d\mu'$.

Intégration par rapport à une probabilité produit

Soit $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ 2 espaces de probabilité. Soit $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, P_1 \otimes P_2)$ l'espace de probabilité produit.

Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie sur $\Omega_1 \times \Omega_2$.

On notera

$$f_{\omega_1} : \Omega_2 \to \mathbf{R} : \omega_2 \rightsquigarrow f(\omega_1, \omega_2) \quad \text{pour } \omega_1 \in \Omega_1$$

$$f^{\omega_2} : \Omega_1 \to \mathbf{R} : \omega_1 \rightsquigarrow f(\omega_1, \omega_2) \quad \text{pour } \omega_2 \in \Omega_2.$$

Théorème 5 (Fubini)

Si $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, P_1 \otimes P_2)$, alors

– $f^{\omega_2} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, P_1)$ (P_2-pp) et l'application (définie P_2-pp)

$$\Omega_2 \to \mathbf{R} : \omega_2 \rightsquigarrow \int f^{\omega_2} \, dP_1 \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, P_2)$$

– $f_{\omega_1} \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, P_2)$ (P_1-pp) et l'application (définie P_1-pp)

$$\Omega_1 \to \mathbf{R} : \omega_1 \rightsquigarrow \int f_{\omega_1} \, dP_2 \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, P_1)$$

et on a

$$\int f \, d(P_1 \otimes P_2) = \int dP_1 \left[\int f_{\omega_1} \, dP_2\right] = \int dP_2 \left[\int f^{\omega_2} \, dP_1\right].$$

Remarque : Ce théorème est valable de proche en proche dans le cas d'un produit de n espaces de probabilité.

III – PROCESSUS ALEATOIRE (A TEMPS DISCRET)

Pour des compléments on pourra consulter (18).

Définition 1

Etant donné 2 espaces mesurables $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, une probabilité de transition de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ vers $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ est une application $P_2^1 : \Omega_1 \times \mathcal{A}_2 \to [0, 1]$ telle que :

1/ $\forall \omega_1 \in \Omega_1$ l'application $P_2^1(\omega_1, .) : \mathcal{A}_2 \to [0, 1] : A_2 \rightsquigarrow P_2^1(\omega_1, A_2)$ est une probabilité sur $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

2/ $\forall A_2 \in \mathcal{A}_2$ l'application $P_2^1(., A_2) : \Omega_1 \to [0, 1] : \omega_1 \rightsquigarrow P_2^1(\omega_1, A_2)$ est mesurable quand Ω_1 est muni de la tribu $\mathcal{A}_1$.

Alors $P_2^1(., A_2)$ est intégrable $(\forall A_2 \in \mathcal{A}_2)$ par rapport à toute probabilité définie sur $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$.

Un processus est représenté à chaque "instant" $t \in \{0, 1, \ldots, n\}$ par un point x_t d'un espace mesurable $(E_t, \mathcal{F}_t)$. On se donne, à chaque instant t, la loi de probabilité du processus à l'instant $(t + 1)$ conditionnelle à l'évolution du processus jusqu'à l'instant t sous la forme d'une probabilité de transition. Pour pouvoir construire une probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A})$ $\left(\text{où } \Omega = \prod_{t=0}^{n} E_t, \mathcal{A} = \bigotimes_{t=0}^{n} \mathcal{F}_t\right)$ des trajectoires, on doit encore se donner la loi du processus à l'instant initial $t = 0$: c'est-à-dire une probabilité P_0 sur $(E_0, \mathcal{F}_0)$.

Un processus est donc la donnée de $(n + 1)$ espaces mesurables $(E_t, \mathcal{F}_t)$ $(t = 0, \ldots, n)$, pour tout $k = 0, \ldots, n - 1$ d'une probabilité de transition $P_{k+1}^{0,1,\ldots,k}$ de $\left(\prod_{t=0}^{k} E_t, \bigotimes_{t=0}^{k} \mathcal{F}_t\right)$ vers $(E_{k+1}, \mathcal{F}_{k+1})$ et d'une probabilité P_0 sur $(E_0, \mathcal{F}_0)$.

Alors si $\Omega = \prod_{t=0}^{n} E_t$ et $\mathcal{A} = \bigotimes_{t=0}^{n} \mathcal{F}_t$, on a

Théorème 1 (Ionescu- Tulcea)

$\forall x_0 \in E_0$, il existe une probabilité unique P_{x_0} sur $(\Omega, \mathcal{A})$ dont la valeur pour tout pavé mesurable $\prod_{t=0}^{n} F_t$ $(F_t \in \mathcal{F}_t \; \forall t = 0, \ldots, n)$ est donnée par

$$P_{x_0}\left(\prod_{t=0}^{n} F_t\right) = \chi_{F_0}(x_0) \int_{F_1} dP_1^0(x_0,.) \int_{F_2} dP_2^{0,1}(x_0, x_1, .) \ldots$$

$$\int_{F_n} dP_n^{0,\ldots,n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, .).$$

De plus si P_0 est une probabilité sur $(E_0, \mathscr{F}_0)$, il existe une probabilité unique P sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ dont la valeur sur tout pavé mesurable $\prod_{t=0}^{n} F_t$ soit

$$P\left[\prod_{t=0}^{n} F_t\right] = \int_{F_0} dP_0 \int_{F_1} dP_1^0(x_0,.) \int_{F_2} dP_2^{0,1}(x_0, x_1,.) \ldots$$

$$\int_{F_n} dP_n^{0,\ldots,n-1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, .).$$

Cette probabilité est donnée par

$$P(A) = \int P_{x_0}(A)\, dP_0 \qquad (A \in \mathfrak{A}).$$

Pour toute fonction numérique réelle $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ P-intégrable sur $(\Omega, \mathfrak{A})$, la fonction numérique $X : E_0 \to \mathbf{R} : x_0 \rightsquigarrow X(x_0) = \int Y(\omega)\, dP_{x_0}(\omega)$ est une version de l'espérance conditionnelle $E^{\mathscr{F}_0}(Y)$ définie sur $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$: en particulier $\int Y\, dP = \int X\, dP_0$.

CHAPITRE II

FORME RÉDUITE D'UN JEU SOUS FORME DÉVELOPPÉE

I – JEU A N JOUEURS SOUS FORME DEVELOPPEE

Un jeu à n joueurs est caractérisé par un ensemble, l'ensemble des "positions du jeu" et par une règle du jeu. Celle-ci spécifie dans quel ordre ces positions peuvent être atteintes, les positions terminales (où le jeu est terminé) et pour chaque position non terminale le "coup" qui lui est associé : soit un coup "personnel" c'est-à-dire un choix à faire par l'un des joueurs (désigné par la règle) parmi un ensemble de possibilités (qui sont des positions du jeu), soit un coup "aléatoire" c'est-à-dire un tirage aléatoire parmi un ensemble de résultats possibles (qui sont encore des positions du jeu).

De manière plus précise la règle du jeu indique la position initiale du jeu et le coup qui lui est associé. Si c'est un coup personnel, elle précise le joueur qui a le trait (celui à qui revient le choix) et les positions du jeu entre lesquelles il doit choisir. Si c'est un coup aléatoire elle définit le tirage aléatoire qui doit avoir lieu. Puis en fonction du résultat ou choix à la position initiale, elle spécifie la nouvelle position du jeu et le coup qui lui est associé : si c'est un coup aléatoire le tirage aléatoire correspondant, si c'est un coup personnel, le joueur qui a le trait, les possibilités qui lui sont offertes et l'information qu'il possède sur le déroulement antérieur du jeu . . . finalement la règle du jeu indique, en fonction des choix et résultats successifs, quand le jeu est terminé, la position terminale atteinte et la situation finale qui en résulte pour les n joueurs.

On supposera que le jeu a une "durée" limitée p, c'est-à-dire que si une "partie" de ce jeu désigne un déroulement possible de la position initiale à l'une des positions terminales, toute partie est une succession d'au plus $(p + 1)$ positions du jeu et qu'il existe une partie de ce jeu qui "visite" exactement $(p + 1)$ positions.

En ajoutant des positions de jeu artificielles ne figurant pas dans l'ensemble initial des positions du jeu et en leur associant des tirages aléatoires à un seul résultat possible, on sera amené à supposer que toutes les parties de ce jeu visitent exactement $(p + 1)$ positions du jeu. Enfin on fera l'hypothèse que chaque position du jeu peut être atteinte d'une manière et d'une seule : ce qui revient à distinguer (à l'aide d'indices) une position du jeu qu'on peut atteindre par deux déroulements du jeu différents.

Soit les n joueurs numérotés de 1 à n. Un jeu sera la donnée

1/ d'un ensemble X, ensemble des positions du jeu

2/ d'une quasi-partition $\{X_0, X_1, \ldots, X_n, R\}$ de X en $(n + 2)$ sous-ensembles, où par quasi-partition il faut entendre une classe de parties de X 2 à 2 disjointes recouvrant X.

Soit $x \in X$:

Pour $i = 1, \ldots, n$

$x \in X_i \Leftrightarrow x$ est une position à coup personnel avec trait au joueur i

$x \in X_0 \Leftrightarrow x$ est une position à coup aléatoire

$x \in R \Leftrightarrow x$ est une position terminale

3/ d'un élément $a \in X$ qui sera la position initiale du jeu

4/ d'une application $\Gamma : X \to \mathfrak{P}(X) : x \rightsquigarrow \Gamma(x)$ où $\forall x \in X, \Gamma(x)$ est le sous-ensemble de X des successeurs immédiats de x :

Si $x \in X_0, \Gamma(x)$ est le sous-ensemble de X des résultats possibles du tirage aléatoire lié à x.

Si $\exists i = 1, \ldots, n$ avec $x \in X_i, \Gamma(x)$ est le sous-ensemble de X formé par les positions du jeu entre lesquelles le joueur i doit opérer son choix.

Si $x \in R$, $\Gamma(x) = \emptyset$.

Pour traduire les hypothèses faites précédemment, on supposera :

– $\Gamma(x) = \emptyset \Leftrightarrow x \in R$

– si pour $x \in X, \Gamma^{-1}(x) = \{y \in X : x \in \Gamma(y)\}$ est le sous-ensemble de X des prédécesseurs immédiats de x,

$$\Gamma^{-1}(a) = \emptyset \text{ c'est-à-dire } \forall x \in X \; a \notin \Gamma(x),$$

$$\text{Card } \Gamma^{-1}(x) = 1 \quad \forall x \in X - \{a\}$$

d'où l'on déduit que

$$\forall x_1, x_2 \in X, \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow \Gamma(x_1) \cap \Gamma(x_2) = \emptyset.$$

– si on note $E_0 = \{a\}$, $E_1 = \Gamma(a)$ ensemble des positions que l'on peut atteindre en un coup à partir de a, $E_2 = \Gamma^2(a) = \bigcup_{x \in \Gamma(a)} \Gamma(x)$ ensemble des positions qu'on peut atteindre en 2 coups à partir de $a, \ldots$

$$E_k = \Gamma^k(a) = \bigcup_{x \in \Gamma^{k-1}(a)} \Gamma(x)$$

ensemble des positions qu'on peut atteindre en k coups à partir de $a\,(k = 1, \ldots, p)$, alors Γ est telle que $\Gamma^p(a) = E_p = R$ et $\{E_0, E_1, \ldots, E_p\}$ forme une partition de X.

Si pour $x \in E_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, p)$ on note $\Gamma(x) = \Omega_x^k \subset E_k$, il est facile de montrer que la classe $\{\Omega_x^k : x \in E_{k-1}\}$ forme une partition de

$$E_k\ (k = 1, \ldots, p)\,.$$

5/ pour $i = 1, \ldots, n$, d'une partition $\mathcal{U}_i = \{U, V, \ldots\}$ de X_i où $\mathcal{U}_i$ est le "schéma d'information" du joueur i et, si $U \in \mathcal{U}_i$, U est un "ensemble d'information" du joueur i : si le jeu se trouve dans une position $x \in U$, le joueur i saura qu'il a le trait et qu'il se trouve dans une position appartenant à U, sans qu'il lui soit précisé laquelle.

On supposera qu'on ne peut rencontrer deux fois le même ensemble d'information au cours d'une même partie : $\forall i = 1, \ldots, n$, $\forall\, U \in \mathcal{U}_i$ et $\forall x, y \in U, x \neq y \Rightarrow y \notin \hat{\Gamma}(x)$ où $\hat{\Gamma}(x) = \{x\} \cup \Gamma(x) \cup \ldots \cup \Gamma^p(x)$ est le sous-ensemble de X des successeurs de x ($\Gamma^k(x)$ éventuellement vide à partir d'un certain rang). De ceci on déduit en particulier que si $a \in X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, l'ensemble d'information contenant a est $\{a\}$.

Pour que les joueurs ne possèdent pas d'information supplémentaire il est naturel de supposer que $\forall i = 1, \ldots, n$, $\forall U \in \mathcal{U}_i$ et $\forall x, y \in U$, $\Gamma(x)$ et $\Gamma(y)$ sont équipotents (c'est-à-dire qu'il existe une bijection de $\Gamma(x)$ sur $\Gamma(y)$).

Soit pour $i = 1, \ldots, n$ et $U \in \mathcal{U}_i$, A_U^i un ensemble d'indices, choisi arbitrairement, équipotent aux $\Gamma(x)$ $(x \in U)$ et, $\forall x \in U$, f_x une application bijective de A_U^i sur $\Gamma(x)$:

$f_x : A_U^i \to \Gamma(x) : \alpha \rightsquigarrow f_x(\alpha)$ ($f_x(\alpha)$ est l'élément d'indice α de $\Gamma(x)$).

$\forall \alpha \in A_U^i$, soit $\nu_\alpha^i : U \to X : x \rightsquigarrow \nu_\alpha^i(x) = f_x(\alpha)$.

Alors la famille $\nu_U^i = (\nu_\alpha^i)_{\alpha \in A_U^i}$ d'applications de U dans X est telle que

a) $\forall \alpha \in A_U^i$, $\nu_\alpha^i(x) \in \Gamma(x) \quad \forall x \in U$

b) $\forall \alpha, \beta \in A_U^i$, $\alpha \neq \beta \Rightarrow \nu_\alpha^i(x) \neq \nu_\beta^i(x) \quad \forall x \in U$

c) $\{\nu_\alpha^i(x) : \alpha \in A_U^i\} = \Gamma(x) \quad \forall x \in U$.

Quand le jeu se trouvera dans l'ensemble d'information $U\,(\in \mathcal{U}_i)$ le joueur i devra choisir un indice $\alpha \in A^i_U$ qui, compte tenu de la position effective du jeu, déterminera sans ambiguité la nouvelle position du jeu.

6/ d'une famille $(\Omega_x, \mathcal{A}_x, P_x)_{x \in X_0}$ d'espaces de probabilité, où

$$\forall x \in X_0 \quad (\Omega_x, \mathcal{A}_x, P_x)$$

est l'espace de probabilité associé au tirage aléatoire ayant lieu en x : $\Omega_x = \Gamma(x)$, $\mathcal{A}_x$ est la tribu sur Ω_x des évènements et P_x une probabilité sur $(\Omega_x, \mathcal{A}_x)$ régissant le tirage aléatoire en x. On supposera que $\forall x \in X_0$, $\mathcal{A}_x$ est une tribu contenant les points : $\forall y \in \Omega_x$, $\{y\} \in \mathcal{A}_x$ et que les tirages aléatoires sont indépendants, c'est-à-dire que le tirage aléatoire associé à $x \in X_0$ ne dépend que de cette position x.

7/ d'un ensemble S des situations finales et d'une application surjective f de R dans S, $f : R \to S : r \rightsquigarrow f(r)$ où $f(r)$ est la situation finale correspondant à la position terminale $r\,(\in R)$.

Une partie de ce jeu se déroulera alors ainsi : si a est la position initiale du jeu et si $a \in X_0$, on effectue le tirage aléatoire $(\Omega_a, \mathcal{A}_a, P_a)$ lié à a, qui donne un résultat $x_1 \in \Gamma(a)$. Si $a \in X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ le joueur i a le trait et connaît la position exacte a où se trouve la partie. Le joueur i choisit alors une position $x_1 \in \Gamma(a)$.

Si $x_1 \in X_0$, on effectue le tirage aléatoire lié à x_1 $(\Omega_{x_1}, \mathcal{A}_{x_1}, P_{x_1})$, d'où un résultat $x_2 \in \Gamma(x_1)$. Si $x_1 \in X_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ et $x_1 \in V (\in \mathcal{U}_j)$, le joueur j a le trait, est informé que la partie se trouve dans l'ensemble d'information V mais n'a pas en général connaissance de la position exacte x_1. Il choisit alors un indice $\beta \in A^j_V$ (ou une application ν^j_β de V dans X), d'où une nouvelle position $x_2 = \nu^j_\beta(x_1)$. La partie se poursuit ainsi jusqu'à ce que, après avoir visité $(p + 1)$ positions de jeu, on parvienne à une position terminale $r \in R$: la partie est alors terminée et $f(r) \in S$ est la situation finale qui en résulte pour les n joueurs.

On dit qu'un jeu est à information parfaite si tout joueur qui a le trait sait parfaitement en quelle position se trouve le jeu :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \mathcal{U}_i = \{\{x\} : x \in X_i\}.$$

On dit qu'un jeu est à réflexion pure si à toute position non terminale est associé un coup personnel : $X_0 = \emptyset$.

II – TACTIQUES DES JOUEURS

Pour un joueur une tactique est une manière de jouer complète c'est-à-dire un ensemble d'instructions permettant à un mandataire de jouer une partie de ce jeu jusqu'à son terme sans qu'il soit fait appel au jugement de ce mandataire.

Pour le joueur i une tactique θ_i est une application $\theta_i : \mathfrak{U}_i \to \bigcup_{U \in \mathfrak{U}_i} A^i_U$ qui à $U \in \mathfrak{U}_i$ fait correspondre un indice $\theta_i(U) \in A^i_U$, donc une application $\nu^i_{\theta_i(U)}$ de la famille ν^i_U.

i adopte la tactique $\theta_i \Leftrightarrow$ la position du jeu étant dans l'ensemble l'information U, le joueur i choisit l'indice $\theta_i(U)$, donc l'application $\nu^i_{\theta_i(U)}$ de U dans X.

Pour alléger les notations on confondra dans la suite l'indice $\theta_i(U)$ et l'application $\nu^i_{\theta_i(U)}$.

Soit alors T_i l'ensemble des tactiques du joueur i $(i = 1, \ldots, n)$ et $T = \prod_{i=1}^{n} T_i = \{(\theta_1, \ldots, \theta_n) : \theta_i \in T_i \ \forall i = 1, \ldots, n\}$ l'ensemble produit des $T_i \, (i = 1, \ldots, n)$.

Comme $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{U}_i$ forme une partition de $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$, on appellera tactique globale toute application θ définie sur $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{U}_i$ à valeurs dans $\bigcup_{U \in \mathfrak{U}_i} A^i_U$ qui à tout élément $U \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{U}_i$ ($U \in \mathfrak{U}_i$ par exemple) fait correspondre un indice $\theta(U) \in A^i_U$, donc une application $\nu^i_{\theta(U)}$ de la famille ν^i_U.

Soit alors T' l'ensemble des tactiques globales : T et T' sont en bijection par l'application $T \to T' : (\theta_1, \ldots, \theta_n) \rightsquigarrow \theta$ tel que $\theta_{|\mathfrak{U}_i} = \theta_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

De par cette bijection on identifiera dans la suite T et T'.

Enfin pour simplifier l'écriture on confondra $\theta(U)$ et $\nu^i_{\theta(U)}$.

Alors le comportement des joueurs au cours d'une partie de ce jeu est parfaitement défini par la donnée de n tactiques $\theta_1, \ldots, \theta_n$ (une par joueur), choisies indépendamment avant le début de cette partie, donc par la donnée d'une tactique globale $\theta \in T$.

III – PROCESSUS ALEATOIRE ASSOCIE A UN JEU SOUS FORME DEVELOPPEE

Lemme 1

Soit Ω un ensemble (non vide). Si on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ la classe des parties dénombrables de Ω et par $\mathcal{A}$ la plus petite tribu sur Ω contenant les points, alors

$$\mathcal{A} = \{A : A \in \mathcal{D}(\Omega)\} \cup \{B^c : B \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{F} = \{A : A \in \mathcal{D}(\Omega)\} \cup \{B^c : B \in \mathcal{D}(\Omega)\}$. Alors $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω :

Si Ω est fini ou dénombrable, c'est évident car $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Supposons Ω non dénombrable.

– $\mathcal{F}$ stable par union dénombrable :

Soit $(F_n)_{n\in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, $(\mathbf{N}', \mathbf{N}'')$ une quasi partition de $\mathbf{N}$ avec

$$n \in \mathbf{N}' \Leftrightarrow F_n = A_n \in \mathcal{D}(\Omega)$$
$$n \in \mathbf{N}'' \Leftrightarrow F_n = B_n^c \quad \text{et} \quad B_n \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}'} A_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}''} B_n^c\Big) = \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}'} A_n\Big) \cup \Big[\Big(\bigcap_{n\in\mathbf{N}''} B_n\Big)^c\Big]$$

d'où $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n \in \mathcal{F}$ car si $\mathbf{N}'' = \emptyset$, $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\text{si } \mathbf{N}'' \neq \emptyset, \quad \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n\Big)^c \subset \bigcap_{n\in\mathbf{N}''} B_n$$

$$\text{donc} \qquad \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}'} F_n\Big)^c \in \mathcal{D}(\Omega).$$

– $\mathcal{F}$ contient Ω et $\emptyset$:

$$\emptyset \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{et} \quad \Omega = \emptyset^c.$$

– $\mathcal{F}$ stable par complémentation :

Soit $F \in \mathcal{F}$. Si $F \in \mathcal{D}(\Omega)$, $F^c \in \mathcal{F}$.

Si $F = B^c$ et $B \in \mathcal{D}(\Omega)$, $F^c = B \in \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, contenant les points (car $\forall \omega \in \Omega, \{\omega\} \in \mathcal{D}(\Omega)$) et on vérifie facilement que $\mathcal{F}$ est la plus petite tribu sur Ω contenant les points, c'est-à-dire $\mathcal{F} = \mathcal{A}$. D'où le lemme.

Pour chaque position non terminale du jeu $x \in X - R$, $\Gamma(x) \neq \emptyset$. On va alors munir $\Gamma(x)$ d'une tribu $\mathcal{A}_x$, l'espace mesurable $(\Gamma(x), \mathcal{A}_x)$ étant défini de la manière suivante :

Sur $E_1 = \Gamma(a)$ $(= \Omega_a^1)$ on prendra la tribu $\mathcal{A}_a^1$ telle que :

si $a \notin X_0$, $\mathcal{A}_a^1$ est la plus petite tribu sur E_1 contenant les points

si $a \in X_0$, $\mathcal{A}_a^1$ est la tribu $\mathcal{A}_a$ sur E_1 définie par le tirage aléatoire lié à a.

$\vdots \qquad \vdots$

Soit $E_k = \Gamma^k(a) = \bigcup_{x \in E_{k-1}} \Gamma(x)$ $(k = 2, \ldots, p)$; si pour $x \in E_{k-1}$ on note $\Gamma(x) = \Omega_x^k$, la classe $\{\Omega_x^k : x \in E_{k-1}\}$ forme une partition de E_k.

$A\, x \in E_{k-1}$ on associera un espace mesurable $(\Omega_x^k, \mathcal{A}_x^k)$ où $\mathcal{A}_x^k$ est la tribu sur Ω_x^k définie par :

si $x \notin X_0$, $\mathcal{A}_x^k$ est la plus petite tribu sur Ω_x^k contenant les points

si $x \in X_0$, $\mathcal{A}_x^k$ est la tribu $\mathcal{A}_x$ sur Ω_x^k définie par le tirage aléatoire lié à x.

D'où une famille $(\Omega_x^k, \mathcal{A}_x^k)_{x \in E_{k-1}}$ d'espaces mesurables où $\{\Omega_x^k : x \in E_{k-1}\}$ forme une partition de E_k et $\mathcal{A}_x^k$ $(x \in E_{k-1})$ est une tribu sur Ω_x^k contenant les points.

$\vdots \qquad \vdots$

Soit $E_p = R = \Gamma^p(a) = \bigcup_{x \in E_{p-1}} \Gamma(x)$; si pour $x \in E_{p-1}$ on note

$\Gamma(x) = \Omega_x^p$, $\{\Omega_x^p : x \in E_{p-1}\}$ forme une partition de R.

$A\, x \in E_{p-1}$ sera associé un espace mesurable $(\Omega_x^p, \mathcal{A}_x^p)$ où $\mathcal{A}_x^p$ est une tribu sur Ω_x^p telle que :

si $x \notin X_0$, $\mathcal{A}_x^p$ est la plus petite tribu sur Ω_x^p contenant les points

si $x \in X_0$, $\mathcal{A}_x^p$ est la tribu $\mathcal{A}_x$ sur Ω_x^p définie par le tirage aléatoire lié à x.

D'où une famille $(\Omega_x^p, \mathcal{A}_x^p)_{x \in E_{p-1}}$ d'espaces mesurables où $\{\Omega_x^p : x \in E_{p-1}\}$ est une partition de R et $\mathcal{A}_x^p$ $(x \in E_{p-1})$ une tribu sur Ω_x^p.

Lemme 2

Soit E un ensemble (non vide) et $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces mesurables telle que $\{\Omega_i : i \in I\}$ forme une partition de E. Soit $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des parties dénombrables de I et $\mathcal{F}$ la tribu sur E engendrée par la famille $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ c'est-à-dire la plus petite tribu sur E contenant $\mathcal{A}_i$ $(\forall i \in I)$.

Alors

$$\mathcal{F} = \left\{ \Big(\bigcup_{i\in I-J} \Omega_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in K} A_i\Big) : J\,,\, K \in \mathcal{D}(I) \text{ et } A_i \in \mathcal{A}_i\ \forall i \in K \right\}$$

$$\cup \left\{ \bigcup_{i\in L} A_i : L \in \mathcal{D}(I) \text{ et } A_i \in \mathcal{A}_i\ \forall i \in L \right\}$$

et, si $\mathcal{F}_{\Omega_i}$ désigne la tribu induite sur Ω_i par $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_{\Omega_i} = \mathcal{A}_i$ $(\forall i \in I)$.

Démonstration : Soit donc

$$\mathfrak{A} = \left\{ \Big(\bigcup_{i\in I-J} \Omega_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in K} A_i\Big) : J\,,\, K \in \mathcal{D}(I) \text{ et } A_i \in \mathcal{A}_i\ \forall i \in K \right\}$$

$$\mathfrak{A}' = \left\{ \bigcup_{i\in L} A_i : L \in \mathcal{D}(I) \text{ et } A_i \in \mathcal{A}_i\ \forall i \in L \right\}$$

et $\mathcal{F}' = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'$ (si I n'est pas fini ou dénombrable, $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}' = \emptyset$).

1/ $\mathcal{F}'$ est une tribu sur E :

- $\emptyset \in \mathcal{F}'$ car $\emptyset \in \mathcal{A}_i$ $(\forall i \in I)$.
- $E \in \mathcal{F}'$ car $E = \bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \mathfrak{A}$.
- $\mathcal{F}'$ stable par union dénombrable.

En effet soit $(F^n)_{n\in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}'$ et

$$\mathbf{N}' = \{n \in \mathbf{N} : F^n \in \mathfrak{A}\}$$

$$\mathbf{N}'' = \{n \in \mathbf{N} : F^n \in \mathfrak{A}'\}$$

$$\forall n \in \mathbf{N}' \quad F^n = \Big(\bigcup_{i\in I-J_n} \Omega_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in K_n} A_i^n\Big) \quad \text{avec} \quad J_n\,,\, K_n \in \mathcal{D}(I)$$

$$\forall n \in \mathbf{N}'' \quad F^n = \bigcup_{i\in L_n} A_i^n \quad \text{avec} \quad L_n \in \mathcal{D}(I).$$

D'où

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F^n = \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}'} F^n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}''} F^n\Big)$$

Or

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}'} F^n = \left[\bigcup_{n\in\mathbf{N}'} \Big(\bigcup_{i\in I-J_n} \Omega_i\Big)\right] \cup \left[\bigcup_{n\in\mathbf{N}'} \Big(\bigcup_{i\in K_n} A_i^n\Big)\right]$$

$$= \Big(\bigcup_{i\in I-\bigcap_{n\in\mathbf{N}'} J_n} \Omega_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in \bigcup_{n\in\mathbf{N}'} K_n} A_i^n\Big)$$

et $\quad \bigcup_{n\in \mathbf{N}''} F^n = \bigcup_{\substack{i\in \bigcup L_n \\ n\in \mathbf{N}''}} A_i^n$.

On en déduit

$$\bigcup_{n\in \mathbf{N}} F_n = \Big(\bigcup_{\substack{i\in I-\cap J_n \\ n\in \mathbf{N}'}} \Omega_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in(\cup K_n)\cup(\cup L_n)} A_i^n\Big).$$

$$J_n \in \mathcal{D}(I) \quad \forall n \in \mathbf{N}' \Rightarrow \bigcap_{n\in \mathbf{N}'} J_n \in \mathcal{D}(I)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_n \in \mathcal{D}(I) \quad \forall n \in \mathbf{N}'' \Rightarrow \bigcup_{n\in \mathbf{N}''} L_n \in \mathcal{D}(I) \\ K_n \in \mathcal{D}(I) \quad \forall n \in \mathbf{N}' \Rightarrow \bigcup_{n\in \mathbf{N}'} K_n \in \mathcal{D}(I) \end{array}\right\} \Rightarrow \Big(\bigcup_{n\in \mathbf{N}''} L_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in \mathbf{N}'} K_n\Big) \in \mathcal{D}(I)$$

permet de conclure : $\bigcup_{n\in \mathbf{N}} F^n \in \mathfrak{A}$, donc $\bigcup_{n\in \mathbf{N}} F^n \in \mathcal{F}'$ (car $\forall i \in I \;\; \mathcal{A}_i$ est stable par union dénombrable).

– $\mathcal{F}'$ stable par complémentation

Soit $F \in \mathcal{F}'$. Si $F \in \mathfrak{A}'$, $F = \bigcup_{i\in L} A_i$ avec $L \in \mathcal{D}(I)$ et $A_i \in \mathcal{A}_i \; \forall i \in L$, alors

$$F^c = \Big(\bigcup_{i\in L} A_i\Big)^c = \Big(\bigcup_{i\in I-L} \Omega_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in L} (\Omega_i - A_i)\Big).$$

Or $\forall i \in I \; A_i \in \mathcal{A}_i$, donc $\Omega_i - A_i \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I$, soit $F^c \in \mathfrak{A} \subset \mathcal{F}'$.

Si $F \in \mathfrak{A}$, $F = \Big(\bigcup_{i\in I-J} \Omega_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in K} A_i\Big)$ avec J, $K \in \mathcal{D}(I)$ et $A_i \in \mathcal{A}_i$ $\forall i \in K$.

Alors $\quad F^c = \Big(\bigcup_{i\in I-J} \Omega_i\Big)^c \cap \Big(\bigcup_{i\in K} A_i\Big)^c = \Big(\bigcup_{i\in J} \Omega_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{i\in K} A_i\Big)^c$

et $\quad \Big(\bigcup_{i\in K} A_i\Big)^c = \Big(\bigcup_{i\in I-K} \Omega_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in K}(\Omega_i - A_i)\Big)$

d'où $\quad F^c = \Big(\bigcup_{i\in J} \Omega_i\Big) \cap \Big[\Big(\bigcup_{i\in I-K} \Omega_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in K} A_i'\Big)\Big]$

avec $\quad A_i' = \Omega_i - A_i \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in K$

$$F^c = \Big(\bigcup_{i\in J-K} \Omega_i\Big) \cup \Big[\Big(\bigcup_{i\in J} \Omega_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{i\in K} A_i'\Big)\Big]$$

$$= \Big(\bigcup_{i\in J-K} \Omega_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in J\cap K} A_i'\Big) \in \mathfrak{A}' \subset \mathcal{F}'.$$

2/ $\mathcal{F}'$ est la tribu engendrée par $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$: $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

Comme $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{F}'$ $\forall i \in I$ $(\mathcal{A}_i \subset \mathfrak{A}')$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

Soit $\mathcal{G}$ une tribu sur E contenant les $\mathcal{A}_i$ $(i \in I)$: $\mathcal{G}$ est stable par union dénombrable et $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{G}$ $\forall i \in I$ soit $\mathfrak{A}' \subset \mathcal{G}$.

De plus si $J \in \mathcal{P}(I)$, $\Omega_i \in \mathcal{A}_i \subset \mathcal{G}$ $\forall i \in I$ entraîne $\bigcup_{i\in J} \Omega_i \in \mathcal{G}$ soit $\bigcup_{i\in I-J} \Omega_i = \left(\bigcup_{i\in J} \Omega_i\right)^c \in \mathcal{G}$ car $\mathcal{G}$ est stable par complémentation, d'où $\mathfrak{A} \subset \mathcal{G}$ et $\mathcal{F}' \subset \mathcal{G}$. On en déduit $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, c'est-à-dire $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

3/ $\forall i \in I$, $\mathcal{F}_{\Omega_i} = \mathcal{A}_i$:

soit $i_0 \in I$, montrons que $\mathcal{F}_{\Omega_{i_0}} = \mathcal{A}_{i_0}$.

$\mathcal{F}_{i_0} = \{\Omega_{i_0} \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ (cf. chapitre I, § I tribu induite).

Comme $\mathcal{A}_{i_0} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{A}_{i_0} \subset \mathcal{F}_{i_0}$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{F}_{\Omega_{i_0}} \subset \mathcal{A}_{i_0}$.

Soit donc $F \in \mathcal{F}$; si $F \in \mathfrak{A}$, $F = \left(\bigcup_{i\in I-J} \Omega_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in K} A_i\right)$ et

$$\begin{aligned} F \cap \Omega_{i_0} &= \left[\left(\bigcup_{i\in I-J} \Omega_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in K} A_i\right)\right] \cap \Omega_{i_0} \\ &= \left[\left(\bigcup_{i\in I-J} \Omega_i\right) \cap \Omega_{i_0}\right] \cup \left[\left(\bigcup_{i\in K} A_i\right) \cap \Omega_{i_0}\right]. \end{aligned}$$

Or
$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i\in I-J} \Omega_i\right) \cap \Omega_{i_0} &= \Omega_{i_0} \quad \text{si } i_0 \notin J \\ &= \emptyset \quad \text{si } i_0 \in J \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i\in K} A_i\right) \cap \Omega_{i_0} &= A_{i_0} \quad \text{si } i_0 \in K \\ &= \emptyset \quad \text{si } i_0 \notin K \end{aligned}$$

d'où
$$\left.\begin{aligned} F \cap \Omega_{i_0} &= \Omega_{i_0} \quad \text{si } i_0 \notin J \\ &= A_{i_0} \quad \text{si } i_0 \in J \cap K \\ &= \emptyset \quad \text{si } i_0 \in J - K \end{aligned}\right\} \text{ soit } F \cap \Omega_{i_0} \in \mathcal{A}_{i_0} \ ;$$

si $F \in \mathfrak{A}'$, $F = \bigcup_{i\in L} A_i$

et
$$\left.\begin{aligned} F \cap \Omega_{i_0} &= A_{i_0} \quad \text{si } i_0 \in L \\ &= \emptyset \quad \text{si } i_0 \notin L \end{aligned}\right\} \text{, soit } F \cap \Omega_{i_0} \in \mathcal{A}_{i_0}.$$

D'où le lemme.

Remarque : si $\forall i \in I$, $\mathcal{A}_i$ est une tribu sur Ω_i contenant les points, $\mathcal{F}$ est une tribu contenant les points.

Remarque : Si P_i est une probabilité sur $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, l'application $\mathcal{F} \to [0, 1]$: $F \rightsquigarrow P_i(\Omega_i \cap F)$ est une probabilité sur $(E, \mathcal{F})$.

Définition 1

On appellera suite d'espaces mesurables associée à un jeu (sous forme développée) la suite finie $(T, \mathcal{C})$, $(E_0, \mathcal{F}_0)$, $(E_1, \mathcal{F}_1)$, . . . , $(R, \mathcal{R})$ définie de la manière suivante :

$$E_0 = \{a\}, \mathcal{F}_0 = \{\{a\}, \emptyset\} = \mathcal{P}(E_0)$$

$$E_1 = \Gamma(a), \mathcal{F}_1 = \mathcal{A}_a^1 \text{ (cf page 30)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Sur E_k $(k = 1, \ldots, p)$ on dispose d'une famille $(\Omega_x^k, \mathcal{A}_x^k)_{x \in E_{k-1}}$ d'espaces mesurables telle que $\{\Omega_x^k : x \in E_{k-1}\}$ forme une partition de E_k. Alors $\mathcal{F}_k$ sera la tribu sur E_k engendrée par $(\mathcal{A}_x^k)_{x \in E_k}$ (lemme 2)

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Sur $R = E_p$, la tribu $\mathcal{R}$ (ou $\mathcal{F}_p$) sera définie à partir de la famille $(\Omega_x^p, \mathcal{A}_x^p)_{x \in E_{p-1}}$ comme la tribu sur R engendrée par $(\mathcal{A}_x^p)_{x \in E_{p-1}}$ (Lemme 2).

Enfin on munira T, ensemble des tactiques globales des joueurs, d'une tribu $\mathcal{C}$ contenant les points et telle que

$$\forall x \in \bigcup_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad \forall y \in \Gamma(x), \{\theta \in T : \theta(U)(x) = y\} \in \mathcal{C},$$

(U ensemble d'information contenant x).

Remarque : les tribus $\mathcal{C}, \mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{R}$ sont des tribus contenant les points comme il est facile de le vérifier.

En introduisant des probabilités de transition sur cette suite finie d'espaces mesurables, on sera amené à définir un processus aléatoire qui sera dit associé au jeu (sous forme développée). Pour ce faire on remplacera les coups personnels par des coups aléatoires à probabilités dégénérées, ces probabilités dégénérées dépendant de la tactique globale choisie par les joueurs.

Définition 2

On appellera processus aléatoire associé à un jeu (sous forme développée) le processus défini par la suite d'espaces mesurables associée au jeu $(T, \mathcal{C})$, $(E_0, \mathcal{F}_0), \ldots, (R, \mathcal{R})$ et les probabilités de transition, $P_{k+1}^{-1,0,\ldots,k}$ $(k = -1, \ldots, p-1)$ définies comme suit :

P_0^{-1} sera la probabilité de transition de $(T, \mathcal{C})$ vers $(E_0, \mathcal{F}_0)$ telle que

$$P_0^{-1} : T \times \mathcal{F}_0 \to [0, 1] : (\theta, F_0) \rightsquigarrow P_0^{-1}(\theta, F_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } F_0 = \{a\} \\ 0 & \text{si } F_0 = \emptyset. \end{cases}$$

$P_1^{-1,0}$ sera la probabilité de transition de $(T \times E_0, \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0)$ vers $(E_1, \mathcal{F}_1)$:

$$P_1^{-1,0} : (T \times E_0) \times \mathcal{F}_1 \to [0, 1] : ((\theta, a), F_1) \rightsquigarrow P_1^{-1,0}((\theta, a), F_1)$$

avec

$$P_1^{-1,0}((\theta, a), F_1) = \begin{cases} \delta_{\theta(a)}(F_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta(a) \notin F_1 \\ 1 & \text{si } \theta(a) \in F_1 \end{cases}, \quad \text{si } a \notin X_0. \\ P_a(F_1), \text{ si } a \in X_0, \text{ où } P_a \text{ est la probabilité sur } (E_1, \mathcal{F}_1) \text{ associée au tirage aléatoire lié à } a. \end{cases}$$

$\vdots \qquad \vdots$

$P_{k+1}^{-1,0,\ldots,k}$ sera la probabilité de transition de

$(T \times E_0 \times \ldots \times E_k, \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_k)$ vers $(E_{k+1}, \mathcal{F}_{k+1})$:

$$P_{k+1}^{-1,0,\ldots,k} : (T \times E_0 \times \ldots \times E_k) \times \mathcal{F}_{k+1} \to [0, 1] : ((\theta, a, \ldots, x_k), F_{k+1}) \rightsquigarrow P_{k+1}^{-1,0,\ldots,k}((\theta, \ldots, x_k), F_{k+1})$$

avec

$$P_{k+1}^{-1,0,\ldots,k}((\theta, a, \ldots, x_k), F_{k+1}) = \begin{cases} \delta_{\theta(U)(x_k)}(F_{k+1}) \text{ si } x_k \notin X_0 \text{ (où } U \text{ est l'ensemble d'information contenant } x_k). \\ P_{x_k}(F_{k+1} \cap \Omega_{x_k}^{k+1}) \text{ si } x_k \in X_0 \text{ (où } P_{x_k} \text{ est la probabilité sur } (\Omega_{x_k}^{k+1}, \mathcal{Q}_{x_k}^{k+1}) \text{ du tirage aléatoire lié à } x_k). \end{cases}$$

$\vdots$

Enfin $P_p^{-1,0,\dots,p-1}$ sera la probabilité de transition de

$$(T \times E_0 \times \dots \times E_{p-1}\,, \mathscr{C} \otimes \mathscr{F}_0 \otimes \dots \otimes \mathscr{F}_{p-1}) \quad \text{vers} \quad (R\,, \mathscr{R}) :$$

$$P_p^{-1,0,\dots,p-1} : (T \times E_0 \times \dots \times E_{p-1}) \times \mathscr{R} \to [0\,,1] :$$

$$((\theta, a, \dots, x_{p-1}), F_p) \rightsquigarrow P_p^{-1,0,\dots,p-1}((\theta, a, \dots, x_{p-1}), F_p)$$

avec

$$P_p^{-1,0,\dots,p-1}((\theta\,, a\,, \dots, x_{p-1}), F_p) = \begin{cases} \delta_{\theta(U)(x_{p-1})}(F_p) \text{ si } x_{p-1} \notin X_0 \\ \text{(où } U \text{ est l'ensemble d'information) contenant } x_{p-1}. \\ P_{x_{p-1}}(F_p \cap \Omega^p_{x_{p-1}}) \text{ si } x_{p-1} \in X_0 \\ \text{(où } P_{x_{p-1}} \text{ est la probabilité sur } (\Omega^p_{x_{p-1}}, \mathfrak{A}^p_{x_{p-1}}) \text{ du tirage aléatoire en } x_{p-1}). \end{cases}$$

Il nous reste cependant à vérifier qu'on définit bien ainsi des probabilités de transition. C'est évident pour P_0^{-1}. Nous allons le vérifier pour $P_{k+1}^{-1,0,\dots,k}$ $(k = 0, \dots, p-1)$:

1/ L'application $P_{k+1}^{-1,0,\dots,k}((\theta\,, a\,, \dots, x_k), .) : \mathscr{F}_{k+1} \to [0\,,1]$ est bien une probabilité sur $(E_{k+1}\,, \mathscr{F}_{k+1})$ $\forall\ (\theta\,, a\,, \dots, x_k) \in T \times E_0 \times \dots \times E_k$ car

$$P_{k+1}^{-1,0,\dots,k}((\theta\,, a\,, \dots, x_k), .) = \begin{cases} \delta_{\theta(U)(x_k)} \quad \text{si } x_k \notin X_0 \\ \\ P_{x_k}(\cdot \cap \Omega^{k+1}_{x_k}) \quad \text{si } x_k \in X_0 \end{cases}$$

avec $\delta_{\theta(U)(x_k)}$ et $P_{x_k}(\cdot \cap \Omega^{k+1}_{x_k})$ probabilités sur $(E_{k+1}\,, \mathscr{F}_{k+1})$ (cf. remarque suivant le lemme 2).

2) L'application $P_{k+1}^{-1,0,\dots,k}(.\,, F_{k+1}) : T \times E_0 \times \dots \times E_k \to [0\,,1]$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathscr{C} \otimes \mathscr{F}_0 \otimes \dots \otimes \mathscr{F}_k$ sur $T \times E_0 \times \dots \times E_k$, $\forall F_{k+1} \in \mathscr{F}_{k+1}$:

$\mathscr{F}_{k+1}$ est la tribu sur E_{k+1} engendrée par la famille $(\mathfrak{A}^{k+1}_x)_{x \in E_k}$, donc :

$$\mathscr{F}_{k+1} = \Big\{ \bigcup_{x \in J_k} A_x : J_k \in \mathscr{D}(E_k) \quad \text{et} \quad A_x \in \mathfrak{A}^{k+1}_x \quad \forall x \in J_k \Big\}$$

$$\cup \Big\{ \Big(\bigcup_{x \in E_k - K_k} \Omega^{k+1}_x \Big) \cup \Big(\bigcup_{x \in L_k} A_x \Big) : K_k\,, L_k \in \mathscr{D}(E_k) \quad \text{et} \quad A_x \in \mathfrak{A}^{k+1}_x \quad \forall x \in L_k \Big\}.$$

Pour alléger les notations, l'application $P_{k+1}^{-1,0,\dots,k}(.\,, F_{k+1})$ sera notée $f_{F_{k+1}}$.

<u>1^{er} cas</u> : $F_{k+1} = \bigcup_{x \in J_k} A_x$, J_k fixé $\in \mathcal{D}(E_k)$ et $A_x \in \mathfrak{A}_x^{k+1}$ $\forall x \in J_k$.

Alors

$$f_{F_{k+1}}(\theta, a, \ldots, x_k) = \begin{cases} P_{x_k}(\Omega_{x_k}^{k+1} \cap F_{k+1}) & \text{si } x_k \in E_k \cap X_0 \\ \delta_{\theta(U)(x_k)}(F_{k+1}) & \text{si } x_k \in E_k \cap X_0^c \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\text{si} \quad x_k \in E_k \cap X_0 \quad f_{F_{k+1}}(\theta, a, \ldots, x_k) = \begin{cases} P_{x_k}(A_{x_k}) & \text{si } x_k \in J_k \\ 0 & \text{si } x_k \notin J_k \end{cases}$$

$$\text{si} \quad x_k \in E_k \cap X_0^c \quad f_{F_{k+1}}(\theta, a, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_k \in J_k \text{ et } \theta(U)(x_k) \in A_{x_k} \\ 0 \text{ si } x_k \notin J_k \text{ ou } \theta(U)(x_k) \notin A_{x_k}. \end{cases}$$

D'où

$$f_{F_{k+1}}(\theta, a, \ldots, x_k) = \begin{cases} P_{x_k}(A_{x_k}) & \text{si } x_k \in J_k \cap X_0 \\ 1 & \text{si } x_k \in J_k \cap X_0^c \text{ et } \theta(U)(x_k) \in A_{x_k}. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$f_{F_{k+1}}$ est donc une fonction numérique (définie sur $T \times E_0 \times \ldots \times E_k$) ne prenant qu'un nombre au plus dénombrable de valeurs (car J_k est dénombrable).

Soit $J'_k = \{x \in J_k \cap X_0 : P_x(A_x) > 0\}$. Alors $J'_k \subset X_0 \cap J_k$ et

$$f_{F_{k+1}}(\theta, a, \ldots, x_k) = \begin{cases} P_{x_k}(A_{x_k}) > 0 & \text{si } x_k \in J'_k \\ 1 & \text{si } x_k \in J_k \cap X_0^c \text{ et } \theta(U)(x_k) \in A_{x_k}. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour montrer que $f_{F_{k+1}}$ est mesurable, il suffit de montrer que

$\forall \lambda \in [0, 1[$, $\{(\theta, a, \ldots, x_k) : f_{F_{k+1}}(\theta, a, \ldots, x_k) > \lambda\} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_k$:

$\{(\theta, a, \ldots, x_k) : f_{F_{k+1}}(\theta, \ldots, x_k) > \lambda\} =$

$$\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in J'_k \quad \text{et} \quad P_{x_k}(A_{x_k}) > \lambda\} \cup$$
$$\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in J_k \cap X_0^c \quad \text{et} \quad \theta(U)(x_k) \in A_{x_k}\}.$$

Or $\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in J'_k \quad \text{et} \quad P_{x_k}(A_{x_k}) > \lambda\} =$

$$T \times E_0 \times \ldots \times E_{k-1} \times \{x_k \in J'_k : P_{x_k}(A_{x_k}) > \lambda\}$$

et $J'_k \in \mathcal{D}(E_k)$; $\mathcal{F}_k$ étant une tribu contenant les points, $\mathcal{F}_k$ contient les parties dénombrables de E_k, donc $\{x_k \in J'_k : P_{x_k}(A_{x_k}) > \lambda\} \in \mathcal{F}_k$.

D'où $\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in J'_k \quad \text{et} \quad P_{x_k}(A_{x_k}) > \lambda\} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_k$.

D'autre part $\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in J_k \cap X_0^c \quad \text{et} \quad \theta(U)(x_k) \in A_{x_k}\}$ peut s'écrire

$$\bigcup_{x_k^0 \in J_k \cap X_0^c} \{(\theta, a, \ldots, x_k^0) : \theta(U)(x_k^0) \in A_{x_k^0}\}$$

(et $J_k \cap X_0^c$ est dénombrable).

Comme $x_k^0 \in X_0^c$ et $A_{x_k^0} \in \mathcal{A}_{x_k^0}^{k+1}$, $A_{x_k^0} \in \mathcal{D}(\Omega_{x_k^0}^{k+1})$ ou $A_{x_k^0}^c \in \mathcal{D}(\Omega_{x_k^0}^{k+1})$ (d'après la définition de $\mathcal{A}_x$ pour $x \notin X_0$ et le lemme 1).

– si $A_{x_k^0} \in \mathcal{D}(\Omega_{x_k^0}^{k+1})$,

$$\{(\theta, \ldots, x_k^0) : \theta(U)(x_k^0) \in A_{x_k^0}\} = \bigcup_{y \in A_{x_k^0}} \{(\theta, \ldots, x_k^0) : \theta(U)(x_k^0) = y\}$$

et $\{(\theta, \ldots, x_k^0) : \theta(U)(x_k^0) = y\}$

$$= \{\theta \in T : \theta(U)(x_k^0) = y\} \times E_0 \times \ldots \times E_{k+1} \times \{x_k^0\}.$$

Or, d'après l'hypothèse faite sur $\mathcal{C}$, $\forall x \in X_0^c$ et $\forall y \in \Gamma(x)$

$$\{\theta \in T : \theta(U)(x) = y\} \in \mathcal{C}$$

où U est l'ensemble d'information $\ni x$.

D'où $\{(\theta, \ldots, x_k^0) : \theta(U)(x_k^0) = y\} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_k$ et

$$\{(\theta, \ldots, x_k^0) : \theta(U)(x_k^0) \in A_{x_k^0}\} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_k$$

comme union dénombrable d'éléments de $\mathcal{C} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_k$.

– si $A_{x_k^0}^c \in \mathcal{D}(\Omega_{x_k^0}^{k+1})$, $\{(\theta, \ldots, x_k^0) : \theta(U)(x_k^0) \in A_{x_k^0}\} =$

$$\{\theta \in T : \theta(U)(x_k^0) \in A_{x_k^0}\} \times E_0 \times \ldots \times E_{k-1} \times \{x_k^0\}$$

or $\quad \{\theta \in T : \theta(U)(x_k^0) \in A_{x_k^0}\} = \{\theta \in T : \theta(U)(x_k^0) \in A_{x_k^0}^c\}^c \in \mathcal{C}$

d'après le raisonnement précédent. D'où encore

$$\{(\theta, \ldots, x_k^0) : \theta(U)(x_k^0) \in A_{x_k^0}\} \in \mathcal{C} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_k.$$

Alors $\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in J_k \cap X_0^c$ et $\theta(U)(x_k) \in A_{x_k}\} \in \mathscr{C} \otimes \ldots \otimes \mathscr{F}_k$ comme union dénombrable d'éléments de $\mathscr{C} \otimes \ldots \otimes \mathscr{F}_k$.

D'où $\{(\theta, \ldots, x_k) : f_{F_{k+1}}(\theta, \ldots, x_k) > \lambda\} \in \mathscr{C} \otimes \ldots \otimes \mathscr{F}_k$ $\forall \lambda \in [0, 1[$ ce qui montre que $f_{F_{k+1}}$ est mesurable.

<u>2ème cas</u> : $F_{k+1} = \left(\bigcup_{x \in E_k - K_k} \Omega_x^{k+1}\right) \cup \left(\bigcup_{x \in L_k} A_x\right)$ avec $K_k, L_k \in \mathscr{D}(E_k)$ et $\forall x \in L_k$ $A_x \in \mathscr{A}_x^{k+1}$.

Alors F_{k+1} peut s'écrire

$$F_{k+1} = \left(\bigcup_{x \in E_k - K_k} \Omega_x^{k+1}\right) \cup \left(\bigcup_{x \in K_k} A_x\right), K_k \in \mathscr{D}(E_k) \text{ et } \forall x \in K_k \ A_x \in \mathscr{A}_x^{k+1},$$

si $x_k \in E_k \cap X_0$ $f_{F_{k+1}}(\theta, a, \ldots, x_k) = P_{x_k}(F_{k+1} \cap \Omega_{x_k}^{k+1})$

si $x_k \in E_k \cap X_0^c$ $f_{F_{k+1}}(\theta, a, \ldots, x_k) = \delta_{\theta(U)(x_k)}(F_{k+1})$

c'est-à-dire

$$\text{si } x_k \in E_k \cap X_0, f_{F_{k+1}}(\theta, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k \in E_k - K_k \\ P_{x_k}(A_{x_k}) & \text{si } x_k \in K_k \end{cases}$$

$$\text{si } x_k \in E_k \cap X_0^c, f_{F_{k+1}}(\theta, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_k \in E_k - K_k \text{ ou } x_k \in K_k \\ \text{et } \theta(U)(x_k) \in A_{x_k} \\ 0 \text{ si } x_k \in K_k \text{ et} \\ \qquad \theta(U)(x_k) \notin A_{x_k} \end{cases}$$

soit

$$f_{F_{k+1}}(\theta, \ldots, x_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } x_k \in K_k \cap X_0^c \text{ et} \\ \qquad \theta(U)(x_k) \notin A_{x_k} \\ P_{x_k}(A_{x_k}) \text{ si } x_k \in K_k \cap X_0 \\ 1 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

$f_{F_{k+1}}$ est donc encore une fonction numérique définie sur $T \times E_0 \times \ldots \times E_k$ ne prenant qu'un nombre au plus dénombrable de valeurs (car K_k dénombrable).

Pour montrer que $f_{F_{k+1}}$ est mesurable, il suffit de montrer que

$$\forall \lambda \in]0, 1], \{(\theta, \ldots, x_k) : f_{F_{k+1}}(\theta, \ldots, x_k) < \lambda\} \in \mathscr{C} \otimes \mathscr{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathscr{F}_k.$$

Soit $K'_k = \{x \in K_k \cap X_0 : P_x(A_x) < 1\}$; alors $K'_k \subset K_k \cap X_0$ et

$$\{(\theta, \ldots, x_k) : f_{F_{k+1}}(\theta, \ldots, x_k) < \lambda\} =$$

$$\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in K'_k \text{ et } P_{x_k}(A_{x_k}) < \lambda\} \cup$$

$$\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in K_k \cap X_c^0 \text{ et } \theta(U)(x_k) \notin A_{x_k}\}.$$

Or $\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in K'_k \text{ et } P_{x_k}(A_{x_k}) < \lambda\} =$

$$T \times E_0 \times \ldots \times E_{k-1} \times \{x_k \in K'_k : P_{x_k}(A_{x_k}) < \lambda\} \text{ où}$$

$K'_k \in \mathcal{D}(E_k)$ et $\mathcal{F}_k$ est une tribu contenant les points, donc

$$\{x_k \in K'_k : P_{x_k}(A_{x_k}) < \lambda\} \in \mathcal{F}_k$$

d'où $\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in K'_k \text{ et } P_{x_k}(A_{x_k}) < \lambda\} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_k$.

D'autre part

$$\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in K_k \cap X_0^c \text{ et } \theta(U)(x_k) \notin A_{x_k}\} =$$

$$\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in K_k \cap X_0^c \text{ et } \theta(U)(x_k) \in A^c_{x_k}\}.$$

Alors en reprenant les raisonnements faits dans le 1^er^ cas, on montrerait que

$$\{(\theta, \ldots, x_k) : x_k \in K_k \cap X_0^c \text{ et } \theta(U)(x_k) \in A^c_{x_k}\} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_k.$$

D'où l'on déduit que $\forall \lambda \in]0, 1]$

$$\{(\theta, \ldots, x_k) : f_{F_{k+1}}(\theta, \ldots, x_k) < \lambda\} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_k$$

c'est-à-dire $f_{F_{k+1}}$ mesurable et ceci termine la démonstration.

IV – FORME REDUITE D'UN JEU SOUS FORME DEVELOPPEE

A un jeu sous forme développée, on associe donc un processus aléatoire (à temps discret) $(T, \mathcal{C}), (E_0, \mathcal{F}_0), \ldots, (R, \mathcal{R})$ et les probabilités de transition $P_{k+1}^{-1,0,\ldots,k}$ $(k = -1, \ldots, p-1)$ définies ci-dessus.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ l'espace des "trajectoires" de ce processus :

$$\Omega = T \times E_0 \times \ldots \times E_{p-1} \times R$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}.$$

Proposition 1

$\forall \theta \in T$ il existe une probabilité P_θ sur $(\Omega , \mathcal{A})$ dont la valeur pour tout pavé mesurable $F_1 \times F_0 \times \ldots \times F_p \in \mathcal{A}$ est donnée par :

$$P_\theta (F_{-1} \times F_0 \times \ldots \times F_p) = \chi_{F_{-1}}(\theta) \int_{F_0} dP_0^{-1}(\theta, .) \int_{F_1} dP_1^{-1,0}(\theta , a , .) \ldots \int_{F_p} dP_p^{-1,0,\ldots,p-1} (\theta , a , \ldots , x_{p-1} , .)$$

avec $F_{-1} \times F_0 \times \ldots \times F_p \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}$ c'est-à-dire

$$F_{-1} \in \mathcal{C}, F_0 \in \mathcal{F}_0, \ldots , F_p \in \mathcal{R} .$$

C'est une application immédiate du théorème 1 (§ III chapitre I).

A toute tactique globale $\theta \in T$ correspond une probabilité P_θ sur $(\Omega , \mathcal{A})$, donc une probabilité $P_\theta^{(R)}$ sur $(R , \mathcal{R})$:

$(\Omega , \mathcal{A})$ étant l'espace produit $\begin{cases} \Omega = T \times E_0 \times \ldots \times R \\ \\ \mathcal{A} = \mathcal{C} \otimes \mathcal{F}_0 \otimes \ldots \otimes \mathcal{R} \end{cases}$, l'application projection de Ω dans R : $p_R : \Omega \to R : (\theta , a , \ldots , r) \rightsquigarrow r$ est mesurable. Soit alors $P_\theta^{(R)} = p_R (P_\theta)$ la probabilité image de P_θ par p_R :

$$\forall F_p \in \mathcal{R} \qquad P_\theta^{(R)} (F_p) = P_\theta \, [p_R^{-1} (F_p)] = P_\theta \, [T \times E_0 \times \ldots \times E_{p-1} \times F_p]$$

c'est-à-dire

$$P_\theta^{(R)} (F_p) = \int dP_0^{-1}(\theta, .) \int dP_1^{-1,0} (\theta ,a , .) \ldots$$

$$\ldots \int dP_{p-1}^{-1,0,\ldots, p-2}(\theta , a , \ldots ,x_{p-2} , .) \int_{F_p} dP_p^{-1,0,\ldots,p-1} (\theta ,a , \ldots ,x_{p-1}, .).$$

Soit S l'ensemble des situations finales du jeu et $f : R \to S$ l'application (surjective) qui à toute position terminale $r \in R$ associe la situation finale correspondante $f(r) \in S$.

Soit $\mathcal{S}$ la plus grande tribu sur S rendant mesurable l'application f :

$$\mathcal{S} = \{A \subset S : f^{-1} (A) \in \mathcal{R}\}.$$

On supposera que $\mathcal{S}$ est une tribu contenant les points.

Remarque : La relation binaire sur $R : r \sim r' \Leftrightarrow f(r) = f(r')$ est une relation d'équivalence. Soit $\bar{R} = R/\sim$ l'ensemble quotient de R par $\sim$ et φ la surjection canonique de R sur $\bar{R}$:

$$\varphi : R \to \bar{R} \; : r \rightsquigarrow \bar{r} \quad \text{où } \bar{r} = \{r' \in R : f(r) = f(r')\}$$

est la classe d'équivalence de r. Soit $\overline{\mathcal{R}}$ la tribu sur $\overline{R}$ (cf page 13) et $\bar{f} : \overline{R} \to S : \bar{r} \rightsquigarrow f(r)$. Alors f est une application bijective de $\overline{R}$ sur S et $\bar{f} \circ \varphi = f$. Soit $\mathcal{S}' = \bar{f}(\overline{\mathcal{R}})$ la tribu sur S déduite de $\overline{\mathcal{R}}$ par l'application bijective $\bar{f}$. En utilisant les définitions de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, on peut montrer que $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ et que $\mathcal{S}$ contient les points si et seulement si $\forall r \in R \,, \bar{r} \in \mathcal{R}$.

Si donc R et S sont munis respectivement des tribus $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$, l'application f est mesurable. Si P est une probabilité sur $(R \,, \mathcal{R})$, l'image de P par f, $P' = f(P)$, sera une probabilité sur $(S \,, \mathcal{S})$ définie par

$$P'(A) = P\,[f^{-1}\,(A)] = P\,[\varphi^{-1}\,(f^{-1}\,(A))] \quad (A \in \mathcal{S}) .$$

A toute tactique globale $\theta \in T$ correspond une probabilité $P_\theta^{(R)}$ sur $(R \,, \mathcal{R})$, donc une probabilité $P_\theta^{(S)}$ sur $(S \,, \mathcal{S})$: $P_\theta^{(S)} = f\,[P_\theta^{(R)}]$ image de $P_\theta^{(R)}$ par f.

Pour $A \in \mathcal{S}$

$$P_\theta^{(S)}(A) = \int dP_0^{-1}\,(\theta , .) \int dP_1^{-1,0}\,(\theta \,, a \,, .) \,.\,. \int dP_{p-1}^{-1,0,\ldots,p-2}\,(\theta \,, a \,, \ldots \,, x_{p-2} \,, .)$$

$$\int_{f^{-1}(A)} dP_p^{-1,0,\ldots,p-1}\,(\theta \,, a \,, \ldots \,, x_{p-1} \,, .) .$$

Soit alors $\Lambda : T \to \mathcal{M}_1\,(S \,, \mathcal{S})$ l'application de $T = \prod_{i=1}^{n} T_i$ dans l'ensemble $\mathcal{M}_1(S \,, \mathcal{S})$ des probabilités sur $(S \,, \mathcal{S})$ qui à toute tactique globale $\theta \in T$ fait correspondre la probabilité $P_\theta^{(S)}$ sur $(S \,, \mathcal{S})$ définie ci-dessus.

Définition 1

On appellera forme réduite d'un jeu (sous forme développée) le $(n + 1)$ – uple $(T_1 , \ldots , T_n \,, \Lambda)$ où $\forall i = 1 , \ldots , n$ T_i est l'ensemble des tactiques du joueur i et Λ l'application $T \to \mathcal{M}_1\,(S \,, \mathcal{S}) : \theta \rightsquigarrow P_\theta^{(S)}$.

Le jeu se jouera alors ainsi. Chaque joueur choisira, indépendamment des $(n - 1)$ autres joueurs, une tactique dans l'ensemble des tactiques dont il dispose. Il en résultera une tactique globale $\theta \in T$, donc une probabilité $P_\theta^{(S)}$ sur $(S \,, \mathcal{S})$. L'épreuve aléatoire liée à $(S \,, \mathcal{S} \,, P_\theta^{(S)})$ sera alors effectuée ; ce qui déterminera la situation finale atteinte par le jeu.

Proposition 2

Si σ est une probabilité sur $(T , \mathcal{T})$, il existe une probabilité unique P_σ sur $(\Omega \,, \mathcal{A})$ dont la valeur sur tout pavé mesurable de $\mathcal{A}$ est

$$P_\sigma\,[F_{-1}\times F_0\times\ldots\times F_p]=\int_{F_{-1}}d\sigma\int_{F_0}dP_0^{-1}(\theta\,,.)\int_{F_1}dP_1^{-1,0}(\theta\,,a\,,.)\ldots$$
$$\int_{F_p}dP_p^{-1,0,\ldots,p-1}(\theta\,,a\,,\ldots,x_{p-1},.).$$

Cette probabilité est donnée par

$$P_\sigma(A)=\int P_\theta\,(A)\,d\sigma\,(\theta)\qquad(\forall A\in\mathfrak{A}).$$

C'est encore une application immédiate du théorème 1 (§ III, Chapitre I).

A toute probabilité σ sur $(T\,,\mathcal{C})$ correspond une probabilité P_σ sur $(\Omega\,,\mathfrak{A})$, donc une probabilité $P_\sigma^{(R)}$ sur $(R\,,\mathcal{R})$, image de P_σ par p_R, $P_\sigma^{(R)}=p_R(P_\sigma)$:

$$\forall F_p\in\mathcal{R}\quad P_\sigma^{(R)}(F_p)=P_\sigma\,(T\times E_0\times\ldots\times E_{p-1}\times F_p)$$
$$=\int d\sigma\int dP_0^{-1}(\theta,.)\ldots\int_{F_p}dP_p^{-1,0,\ldots,p-1}(\theta\,,a\,,\ldots,x_{p-1},.).$$

$P_\sigma^{(R)}$ est aussi donnée par : $\forall F_p\in\mathcal{R}$,

$$P^{(R)}(F_p)=\int P_\theta\,(T\times E_0\times\ldots\times E_{p-1}\times F_p)d\sigma(\theta)\;=\int P_\theta^{(R)}(F_p)\,d\sigma(\theta).$$

Ainsi à toute probabilité σ sur $(T\,,\mathcal{C})$ correspond une probabilité $P_\sigma^{(R)}$ sur $(R\,,\mathcal{R})$ donnée par $P_\sigma^{(R)}(F)=\int P_\theta^{(R)}(F)\,d\sigma\,(\theta)\quad\forall F\in\mathcal{R}$.

Soit $P_\sigma^{(S)}=f(P_\sigma^{(R)})$ la probabilité sur $(S\,,\mathcal{S})$ image de $P_\sigma^{(R)}$ par f.

Alors

$$\forall D\in\mathcal{S}\quad P_\sigma^{(S)}(D)=P_\sigma^{(R)}\,[f^{-1}(D)]=\int P_\theta^{(R)}\,[f^{-1}(D)]\,d\sigma(\theta)$$
$$=\int P_\theta^{(S)}\,(D)\,d\sigma(\theta)\,.$$

Donc à toute probabilité σ sur $(T\,,\mathcal{C})$ correspond une probabilité $P_\sigma^{(S)}$ sur $(S\,,\mathcal{S})$ avec $P_\sigma^{(S)}(D)=\int P_\theta^{(S)}(D)\,d\sigma\,(\theta)\quad\forall D\in\mathcal{S}$.

V – APPLICATION AU JEU A REFLEXION PURE

Dans un tel jeu $X_0 = \emptyset$. Alors à chaque tactique globale $\theta \in T$, le jeu fait correspondre une situation finale déterminée :

Soit $\theta \in T$ une tactique globale, alors à la position initiale a du jeu, θ fait correspondre $x_1^0 = \theta(a) \in E_1$, puis $x_2^0 = \theta(U^1)(x_1^0) \in E_2, \ldots,$

$x_p^0 = \theta(U^{p-1})(x_{p-1}^0) \in R$ et la situation finale $s_0 = f(x_p^0)$.

Ce résultat se retrouve en utilisant la forme réduite du jeu :

$$P_0^{-1}(\theta, F_0) = \begin{cases} 1 \text{ si } F_0 = \{a\} \\ 0 \text{ si } F_0 = \emptyset \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire } P_0^{-1}(\theta, .) = \delta_a$$

$$P_1^{-1,0}((\theta, a), F_1) = \delta_{\theta(a)}(F_1) \quad (F_1 \in \mathcal{F}_1), \text{ soit } P_1^{-1,0}[(\theta, a), .] = \delta_{\theta(a)}$$

$$\vdots$$

$$P_{k+1}^{-1,0,\ldots,k}((\theta, a, \ldots, x_k), F_{k+1}) = \delta_{\theta(U)(x_k)}(F_{k+1}) \quad \text{soit}$$

$$P_{k+1}^{-1,0,\ldots,k}((\theta, a, \ldots, x_k), .) = \delta_\theta(U)(x_k) \; (F_{k+1} \in \mathcal{F}_{k-1})$$

pour $k = -1, \ldots, p-1$.

Alors à θ, correspond une probabilité $P_\theta^{(R)}$ sur $(R, \mathcal{R})$ définie par

$$(F \in \mathcal{R}) \quad P_\theta^{(R)}(F) = \int dP_0^{-1}(\theta, .) \int dP_1^{-1,0}(\theta, a, .) \ldots$$

$$\ldots \int dP_{p-1}^{-1,0,\ldots,p-2}(\theta, a, \ldots, x_{p-2}, .) \int_F dP_p^{-1,\ldots,p-1}(\theta, \ldots, x_{p-1}, .).$$

Si on note :

$$Y_{k+1}(\theta, a, \ldots, x_k) = \int dP_{k+1}^{-1,\ldots,k}(\theta, a, \ldots, x_k, .) \ldots$$

$$\int_F dP_p^{-1,\ldots,p-1}(\theta, a, \ldots, x_{p-1}, .) \; (k = 0, \ldots, p-1)$$

alors

$$P_\theta^{(R)}(F) = \int Y_1(\theta\,,.)\, dP_0^{-1}(\theta\,,.) = Y_1(\theta\;,a) \text{ d'après la définition de } P_0^{-1}$$

$$= \int dP_1^{-1,0}(\theta\;,a\,,.)\, Y_2(\theta\;,a\,,.) = Y_2(\theta\;,a\,,\theta(a)) = Y_2(\theta\;,a\,,x_1^0)$$

$$= \int dP_{p-1}^{-1,0,\ldots,p-2}(\theta\;,a\,,\ldots,x_{p-2}\,,.)\, Y_p(\theta\;,a\;,x_1^0\,,\ldots,x_{p-2}^0\,,.)$$

$$= Y_p(\theta\;,a\;,\ldots,x_{p-1}^0)$$

avec $Y_p(\theta\,,a\,,\ldots,x_{p-1}^0) = \int_F dP_p^{-1,\ldots,p-1}(\theta\,,a\,,\ldots,x_{p-1}^0,.) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_p^0 \in F \\ 0 \text{ si } x_p^0 \notin F \end{cases}$

d'où $P_\theta^{(R)}(F) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_p^0 \in F \\ 0 \text{ si } x_p^0 \notin F \end{cases}$ soit $P_\theta^{(R)}(F) = \delta_{x_p^0}(F)$

d'où $P_\theta^{(R)} = \delta_{x_p^0}$ et $P_\theta^{(S)} = f\,[P_\theta^{(R)}] = \delta_{s_0}$ probabilité dégénérée en $s_0 \in S$ qui conduira presque sûrement à la situation finale s_0.

CHAPITRE III

UTILITÉ INDIVIDUELLE

Un jeu sous forme réduite est donc la donnée de n ensembles de tactiques $T_i (i = 1, \ldots, n)$, d'un ensemble S de toutes les situations finales et d'une application $\Lambda : T \to \mathcal{M}_1 (S, \mathcal{S}) : \theta \rightsquigarrow P_\theta (S)$ qui à toute tactique globale θ fait correspondre une probabilité $P_\theta^{(S)}$ sur $(S, \mathcal{S})$.

Chaque joueur est donc en présence d'un ensemble S (en fait $\mathcal{M}_1 (S)$) qu'il désire ordonner d'après ses préférences personnelles. On supposera que chaque joueur a formulé ses objectifs avec suffisamment de clarté pour déclarer laquelle de deux situations finales il préfère (ou s'il les considère comme équivalentes) et avec suffisamment de cohérence pour que ses préférences soient transitives.

On est donc amené à étudier les "relations de préférence" sur un ensemble et les conditions permettant de les traduire par des utilités linéaires.

I – RELATION DE PREFERENCE

Définition 1

Soit E un ensemble. Une relation de préférence (notée $\lesssim$) sur E est un préordre total sur E, c'est-à-dire une relation binaire entre éléments de E vérifiant les 3 conditions suivantes :

1/ $\forall x \in E$, $x \lesssim x$ (Réfléxivité)

2/ $\forall x, y$ et $z \in E$, $x \lesssim y$ et $y \lesssim z \Rightarrow x \lesssim z$ (Transitivité)

3/ $\forall x, y \in E$, on a $x \lesssim y$ ou $y \lesssim x$.

Si $x \lesssim y$, on dit que y est préféré ou équivalent à x.
Si $x \lesssim y$ et $y \not\lesssim x$, on écrit $x < y$ et on dit que y est préféré à x.
Si $x \lesssim y$ et $y \lesssim x$, on écrit $x \sim y$ et on dit que x est équivalent à y.

Remarque : $x \sim y$ est une relation d'équivalence sur E. La relation $\lesssim$ induit alors une relation d'ordre total sur l'ensemble quotient $E/\sim$.

Si $\underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim}$ est une relation de préférence sur $\mathcal{M}_1(S)$, on en déduit une relation de préférence $\underset{S}{\lesssim}$ sur S :

$$\forall s, s' \in S \qquad s \underset{S}{\lesssim} s' \Leftrightarrow \delta_s \lesssim \delta_{s'} \qquad (\delta_s , \delta_{s'} \in \Delta(S)).$$

On vérifie facilement que $\underset{S}{\lesssim}$ est un préordre total sur S.

Il serait particulièrement intéressant si on pouvait trouver une fonction numérique bornée définie sur $\mathcal{M}_1(S)$, $U : \mathcal{M}_1(S) \to \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall \alpha \in [0, 1], \forall p, q \in \mathcal{M}_1(S) \quad U[\alpha p + (1-\alpha)q] = \alpha U(p) + (1-\alpha)\, U(q)$$

$$\forall p, p' \in \mathcal{M}_1(S), \ p \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim} p' \Leftrightarrow U(p) \leqslant U(p') \quad (\leqslant \text{ ordre naturel sur } \mathbf{R}).$$

Car alors on en déduirait une fonction numérique u définie sur S $u : S \to \mathbf{R}$ telle que $s \lesssim s' \Leftrightarrow u(s) \leqslant u(s')$ $(\forall s, s' \in S)$ dont la donnée suffirait à déterminer U sans ambiguité.

Nous allons montrer que, sous certaines hypothèses sur $\underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim}$ et $\mathcal{M}_1(S)$, une telle fonction U existe et est unique (à une transformation linéaire croissante près). Alors la donnée d'une relation de préférence sur $\mathcal{M}_1(S)$ sera équivalente à la donnée d'une fonction numérique bornée u définie sur S.

Remarque : s'il existe une fonction numérique $U : \mathcal{M}_1(S) \to \mathbf{R}$ telle que

$$p \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim} p' \Leftrightarrow U(p) \leqslant U(p') \qquad \forall p, p' \in \mathcal{M}_1(S)$$

alors

$$p \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\sim} p' \Leftrightarrow U(p) = U(p') \qquad \forall p, p' \in \mathcal{M}_1(S)$$

$$p \underset{\mathcal{M}_1(S)}{<} p' \Leftrightarrow U(p) < U(p') \qquad \forall p, p' \in \mathcal{M}_1(S).$$

II – EXISTENCE ET UNICITE D'UNE UTILITE LINEAIRE

Soit $\mathcal{M}(S)$ l'espace vectoriel réel des mesures bornées sur $(S, \mathcal{S})$. $\mathcal{M}_1(S)$ est alors une partie convexe de cet espace vectoriel (cf. chapitre I) :

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad , \quad \forall p \text{ et } q \in \mathcal{M}_1(S) \quad \alpha p + (1-\alpha) q \in \mathcal{M}_1(S).$$

Soit $H : \mathcal{M}_1(S) \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie sur $\mathcal{M}_1(S)$ telle que $\forall \alpha \in [0, 1]$ et $\forall p, q \in \mathcal{M}_1(S), H[\alpha p + (1-\alpha) q] = \alpha H(p) + (1-\alpha) H(q)$.

Alors la relation binaire $\underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim}$ sur $\mathcal{M}_1(S)$ définie par

$$p \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim} p' \Leftrightarrow H(p) \leqslant H(p') \qquad (p, p' \in \mathcal{M}_1(S))$$

est une relation de préférence sur $\mathcal{M}_1(S)$ et elle vérifie les 2 conditions suivantes :

Axiome 1

$\forall p_1, p_2$ et $p_3 \in \mathcal{M}_1(S)$ avec $p_1 \underset{\mathcal{M}_1(S)}{<} p_2 \underset{\mathcal{M}_1(S)}{<} p_3$, $\exists \alpha, \beta \in]0, 1[$

tels que

$$\alpha p_1 + (1-\alpha) p_3 \underset{\mathcal{M}_1(S)}{<} p_2 \quad \text{et} \quad p_2 \underset{\mathcal{M}_1(S)}{<} \beta p_1 + (1-\beta) p_3 .$$

Axiome 2

Si $p_1, p_2 \in \mathcal{M}_1(S)$, $p_1 \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim} p_2 \Rightarrow \forall \alpha \in [0, 1]$ et $\forall q \in \mathcal{M}_1(S)$

$$\alpha p_1 + (1-\alpha) q \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim} \alpha p_2 + (1-\alpha) q$$

$p_1 \underset{\mathcal{M}_1(S)}{<} p_2 \Rightarrow \forall \alpha \in]0, 1[$ et $\forall q \in \mathcal{M}_1(S)$

$$\alpha p_1 + (1-\alpha) q \underset{\mathcal{M}_1(S)}{<} \alpha p_2 + (1-\alpha) q .$$

Réciproquement soit $\underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim}$ une relation de préférence sur $\mathcal{M}_1(S)$.

Définition 2

Une utilité linéaire sur $(\mathcal{M}_1(S), \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim})$ est une fonction numérique $U : \mathcal{M}_1(S) \to \mathbf{R}$ telle que :

– $\forall p, p' \in \mathcal{M}_1(S) \quad p \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim} p' \Leftrightarrow U(p) \leqslant U(p')$

– $\forall \alpha \in [0, 1]$ et $\forall p, q \in \mathcal{M}_1(S)$

$$U[\alpha p + (1-\alpha)q] = \alpha U(p) + (1-\alpha)\, U(q)$$

Alors

Théorème 1

Si la relation de préférence $\underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim}$ vérifie les 2 axiomes précédents, il existe une utilité linéaire sur $(\mathcal{M}_1(S), \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim})$. De plus si V et V' sont 2 utilités linéaires sur $(\mathcal{M}_1(S), \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim})$, il existe a et $b \in \mathbf{R}$ $(a > 0)$ tels que $V' = a\,V + b$.

La démonstration de ce théorème, donnée ci-dessous, est due à Von Neumann et Morgenstern (cf 19). La relation de préférence $\underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim}$ y sera notée $\lesssim$.

Si $\forall p, p' \in \mathcal{M}_1(S)$ $p \sim p'$, le résultat est évident. On supposera donc qu'il existe $p, p' \in \mathcal{M}_1(S)$ avec $p < p'$.

1/ $\forall p_1, p_2 \in \mathcal{M}_1(S)$ avec $p_1 < p_2$, $\forall \alpha, \beta \in [0, 1]$ avec $\alpha < \beta$

$$\beta p_1 + (1-\beta)\, p_2 < \alpha p_1 + (1-\alpha)\, p_2 :$$

En effet l'axiome 2 permet d'écrire $(\alpha \neq 1)$

$$\alpha p_1 + (1-\alpha)\, p_1 < \alpha p_1 + (1-\alpha) p_2 \text{ c'est-à-dire}$$

$$p_1 < \alpha p_1 + (1-\alpha) p_2 \quad \text{car} \quad \alpha p_1 + (1-\alpha)\, p_1 = p_1,$$

et $(\beta \neq 0)$

$$\beta p_1 + (1-\beta)\, p_2 < \beta p_2 + (1-\beta)\, p_2,$$

d'où

$$\beta p_1 + (1-\beta)\, p_2 < p_2 \quad \text{car} \quad \beta p_2 + (1-\beta)\, p_2 = p_2.$$

Pour $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, $\alpha p_1 + (1-\alpha)\, p_2 = \frac{\alpha}{\beta}\, [\beta p_1 + (1-\beta) p_2] + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) p_2.$

Or $\beta \neq 0$ permet d'écrire $\beta p_1 + (1 - \beta) p_2 < p_2$, d'où

$$\frac{\alpha}{\beta}[\beta p_1 + (1 - \beta)p_2] + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) [\beta p_1 + (1 - \beta)p_2] < \alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2$$

c'est-à-dire $\beta p_1 + (1 - \beta) p_2 < \alpha p_1 + (1 - \alpha) p_2$.

2/ Soit $p_0 , p_1 \in \mathfrak{M}_1(S)$, $p_0 < p_1$. Alors $\forall q \in \mathfrak{M}_1(S)$ tel que

$$p_0 \lesssim q \lesssim p_1 \quad \exists\,! \gamma \in [0 , 1] \quad \text{tel que} \quad q \sim \gamma p_0 + (1 - \gamma) p_1 :$$

En effet si $q \sim p_0$ ou $q \sim p_1$ le résultat est évident : on prend $\gamma = 1$ ou $\gamma = 0$ et l'unicité découle alors de 1).

Supposons donc $p_0 < q < p_1$ et soit

$$P = \{\alpha \in [0 , 1] : q < \alpha p_0 + (1 - \alpha) p_1\}, \quad \text{alors si } \alpha \in P , \alpha \neq 1.$$

Montrons que P est nécessairement un intervalle semi-ouvert $[0 , \alpha^*[$:

– $0 \in P$ car $q < p_1$ et P est un intervalle car $\left.\begin{matrix} \alpha_2 < \alpha_1 \\ \alpha_1 \in P \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha_2 \in P$

d'après 1/

– P ne contient pas de plus grand élément :

L'axiome 1 permet d'écrire :

$$\forall \alpha \in P, \ \exists \beta \in]0 , 1[\quad \text{tel que} \quad q < \beta p_0 + (1 - \beta) [\alpha p_0 + (1 - \alpha)p_1],$$

c'est-à-dire

$$q < [\beta + \alpha (1 - \beta)] p_0 + (1 - \alpha) (1 - \beta) p_1, \quad \text{d'où} \quad \beta + \alpha (1 - \beta) \in P$$

avec $\beta + \alpha (1 - \beta) = \alpha + \beta (1 - \alpha) > \alpha$ car $\beta > 0$ et $\alpha \neq 1$.

On en conclut $P = [0 , \alpha^*[$, $\alpha^* \in]0 , 1]$.

Soit de même $Q = \{\beta \in [0 , 1] : \beta p_0 + (1 - \beta) p_1 < q\}$. Un raisonnement similaire montrerait que $Q =]\beta^* , 1]$, $\beta^* \in [0 , 1[$.

De plus $\alpha^* \leqslant \beta^*$: supposons $\alpha^* > \beta^*$, alors $\exists \epsilon > 0$ tel que $\alpha^* - \epsilon > \beta^*$ (il suffit de prendre $\epsilon < \alpha^* - \beta^*$). D'où $\alpha^* - \epsilon \in P \cap Q$, ce qui est impossible d'après les définitions de P et Q ($P \cap Q = \emptyset$).

Alors $\forall \gamma \in [\alpha^* , \beta^*]$, $q \sim \gamma p_0 + (1 - \gamma)p_1$. Or d'après 1/ il ne peut exister plus d'un γ tel que $q \sim \gamma p_0 + (1 - \gamma)p_1$, d'où $\alpha^* = \beta^*$. L'existence et l'unicité sont ainsi démontrées.

3/ Soit p_0 et $p_1 \in \mathcal{M}_1(S)$ avec $p_0 < p_1$

Sur l'ensemble $\{q \in \mathcal{M}_1(S) : p_0 \lesssim q \lesssim p_1\}$ qui sera noté $[p_0\, p_1]$, on définit une fonction numérique h :

$h : [p_0 , p_1] \to \mathbf{R} : q \rightsquigarrow h(q)$ où $\forall q \in [p_0 , p_1]$ $h(q)$ est l'unique $(1 - \gamma)$ tel que $q \sim \gamma p_0 + (1 - \gamma) p_1$.

Soit $p , q \in [p_0 , p_1]$, alors $p \lesssim q \Leftrightarrow h(p) \leqslant h(q)$ d'après 1/, 2/ et le fait que $p_0 < p_1$.

D'autre part soit $\alpha \in [0 , 1]$, alors $\alpha p + (1 - \alpha) q \in [p_0 , p_1]$ et

$$\alpha p + (1 - \alpha) q \sim [1 - h(\alpha p + (1 - \alpha)q)]\, p_0 + h(\alpha p + (1 - \alpha)q)p_1$$

d'après la définition de h.

On a aussi

$$p \sim [1 - h(p)]\, p_0 + h(p) p_1 \;, q \sim [1 - h(q)]\, p_0 + h(q) p_1 .$$

D'où

$$\alpha p + (1 - \alpha) q \sim \alpha\{[1 - h(p)]\, p_0 + h(p)\, p_1\} + (1 - \alpha)\{[1 - h(q)]\, p_0 + h(q) p_1\}$$

(car $p \sim p'$ et $q \sim q'$ entraîne $\alpha p + (1 - \alpha)q \sim \alpha p' + (1 - \alpha)q'$ $\forall \alpha \in [0 , 1]$)

c'est-à-dire

$$\alpha p + (1 - \alpha) q \sim \alpha\, \{1 - [\alpha h(p) + (1 - \alpha) h(q)]\}\, p_0 + [\alpha h(p) + (1 - \alpha) h(q)] p_1 .$$

L'unicité dans 2/ entraîne alors

$$h\, [\alpha p + (1 - \alpha)\, q] = \alpha h(p) + (1 - \alpha)\, h(q).$$

D'où le résultat : $\forall p_0 , p_1 \in \mathcal{M}_1(S)$ avec $p_0 < p_1$, il existe une fonction numérique $g : [p_0 , p_1] \to \mathbf{R}$ telle que

$\forall p , q \in [p_0 , p_1], p \lesssim q \Leftrightarrow g(p) \leqslant g(q)$ Propriété (A)

$\forall \alpha \in [0 , 1]$, $\forall p , q \in [p_0 , p_1], g\, [\alpha p + (1 - \alpha)q] = \alpha g(p) + (1 - \alpha)\, g(q)$ Propriété (B)

La fonction h (notée aussi $h_{[p_0,p_1]}$) définie ci-dessus est une telle fonction. De plus elle vérifie $h(p_0) = 0$ et $h(p_1) = 1$.

Soit $g : [p_0 , p_1] \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie sur $[p_0 , p_1]$. Alors g vérifie (A) et (B) $\Leftrightarrow \exists\, a , b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, tels que $g = ah + b$.

En effet supposons que g vérifie (A) et (B) et soit $q \in [p_0, p_1]$, alors $q \sim [1 - h(q)]\, p_0 + h(q) p_1$
d'où

$$g(q) = g\,[(1 - h(q))\, p_0 + h(q)\, p_1] \quad \text{d'après (A)}$$

$$g(q) = [1 - h(q)]\, g(p_0) + h(q)\, g(p_1) \quad \text{d'après (B)}$$

soit $\quad g(q) = [g(p_1) - g(p_0)]\, h(q) + g(p_0) \quad \forall q \in [p_0, p_1]$

c'est-à-dire $g = ah + b$ avec $a = g(p_1) - g(p_0)$, $b = g(p_0)$ et $a > 0$ car $p_0 < p_1$.

La réciproque est évidente.

4/ Soit $q_0, q_1 \in \mathcal{M}_1(S)$ avec $q_0 < q_1$ et $I = [p_0, p_1]$ un "intervalle" contenant q_0 et q_1 ($[q_0, q_1]$ en est un). D'après 3/ il existe une fonction numérique et une seule $U_I : I \to \mathbf{R}$ vérifiant (A) et (B) et telle que

$$U_I(q_0) = 0\ ,\ U_I(q_1) = 1\ :\ U_I = a^* h_I + b^*$$

où a^* et b^* sont les solutions uniques (comme $q_0 < q_1$, $h_I(q_0) < h_I(q_1)$)

du système $\left|\begin{array}{l} a\, h_I(q_0) + b = 0 \\ \\ a\, h_I(q_1) + b = 1 \end{array}\right.$

Si I_1 et I_2 sont 2 intervalles contenant q_0 et q_1, on va montrer que $U_{I_1}(p) = U_{I_2}(p)\ \forall p \in I_1 \cap I_2$:

Soit $p \in I_1 \cap I_2$ ($\neq \emptyset$ car q_0 et $q_1 \in I_1 \cap I_2$). Si $p \sim q_0$ ou $p \sim q_1$ le résultat est évident. Considérons donc tous les autres cas ($\lesssim$ est un préordre *total*) :

(1) $p < q_0$: $\exists!\alpha_1 \in]0, 1[$ tel que $q_0 \sim (1 - \alpha_1)\, p + \alpha_1\, q_1$

(2) $q_0 < p < q_1$: $\exists!\alpha_2 \in]0, 1[$ tel que $p \sim (1 - \alpha_2)\, q_0 + \alpha_2\, q_1$

(3). $q_1 < p$: $\exists!\alpha_3 \in]0, 1[$ tel que $q_1 \sim (1 - \alpha_3)\, q_0 + \alpha_3 p$

d'après 2/.

D'où

(1) $0 = (1 - \alpha_1)\, U_{I_i}(p) + \alpha_1 \qquad i = 1, 2$

(2) $U_{I_i}(p) = \alpha_2 \qquad i = 1, 2$

(3) $1 = \alpha_3\, U_{I_i}(p) \qquad i = 1, 2$

C'est-à-dire $U_{I_1}(p) = U_{I_2}(p)$.

5/ $\lesssim$ étant un préordre total, $\forall p \in \mathcal{M}_1(S)$ il existe un "intervalle" I contenant p, q_0 et q_1. Soit alors $U : \mathcal{M}_1(S) \to \mathbf{R} : p \rightsquigarrow U(p)$ où $U(p)$ est la valeur commune des $U_I(p)$ pour tout intervalle I contenant p, q_0 et q_1.

Il est alors clair que $(A') \; \forall p, q \in \mathcal{M}_1(S), \; p \lesssim q \Leftrightarrow U(p) \leqslant U(q)$

$$(B') \; \forall \alpha \in [0, 1], \forall p, q \in \mathcal{M}_1(S)$$

$$U[\alpha p + (1-\alpha)q] = \alpha U(p) + (1-\alpha) U(q)$$

car les U_I vérifient les propriétés (A) et (B) ci-dessus.

D'où l'existence d'une utilité linéaire sur $(\mathcal{M}_1(S), \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim})$.

6/ Toute fonction numérique $U' : \mathcal{M}_1(S) \to \mathbf{R}$ vérifiant (A') et (B') telle que $U'(q_0) = 0$, $U'(q_1) = 1$ est identique à U :

En effet soit $p_0, p_1 \in \mathcal{M}_1(S)$ tels que $p_0 \lesssim q_0 < q_1 \lesssim p_1$ et $I = [p_0, p_1]$, la restriction $U'_{/I}$ de U' à I vérifie $(A), (B)$, $U'_{/I}(q_0) = 0$ et $U'_{/I}(q_1) = 1$. 4/ permet alors d'écrire $U'_{/I} = U_I$, d'où d'après la définitions de U, $U'_{/I} = U_{/I}$, si $U_{/I}$ désigne la restriction de U à I. On en conclut $U' = U$.

7/ Pour toute fonction numérique $V : \mathcal{M}_1(S) \to \mathbf{R}$ vérifiant (A') et (B'), il existe $a, b \in \mathbf{R}, a > 0$, tels que $V = aU + b$:

$q_0 < q_1$ entraîne $V(q_0) < V(q_1)$ car V vérifie (A'). Soit $V^* : \mathcal{M}_1(S) \to \mathbf{R}$ définie par :

$$V^*(q) = \frac{V(q) - V(q_0)}{V(q_1) - V(q_0)} \qquad \text{pour } q \in \mathcal{M}_1(S).$$

V^* vérifie $(A'), (B')$, $V^*(q_0) = 0$ et $V^*(q_1) = 1$, alors $V^* = U$ d'après 6/ c'est-à-dire $\dfrac{V(q) - V(q_0)}{V(q_1) - V(q_0)} = U(q) \quad \forall q \in \mathcal{M}_1(S)$

soit $V(q) = [V(q_1) - V(q_0)]\, U(q) + V(q_0) \qquad \forall q \in \mathcal{M}_1(S)$

soit $V = a_1 U + b_1$ avec $a_1 = V(q_1) - V(q_0) > 0$ et $b_1 = V(q_0)$.

De cette propriété découle immédiatement la deuxième partie du théorème 1 qui est ainsi démontré.

Remarque : $\mathcal{M}_1(S)$ étant une partie convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}(S)$, on montre facilement que, si $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une suite finie d'éléments de $\mathcal{M}_1(S)$ et $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite de réels positifs ou nuls telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \text{ alors } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \in \mathcal{M}_1(S).$$

Alors si U est une utilité linéaire sur $\mathcal{M}_1(S)$, $U\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U(p_i)$.

La démonstration se fait par récurrence en utilisant la décomposition :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i} p_i\right) + \alpha_n p_n \quad \left(\text{si } \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \neq 0\right).$$

<u>*Axiome 2 bis*</u>

Si $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont 2 suites de $\mathcal{M}_1(S)$, alors

$$p_n \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim} q_n \;\; \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n q_n ,$$

pour toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels $\geqslant 0$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = 1$.

Si de plus $\exists n \in \mathbf{N}$ tel que $p_n \underset{\mathcal{M}_1(S)}{<} q_n$ et $\alpha_n > 0$, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n \underset{\mathcal{M}_1(S)}{<} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n q_n .$$

Remarque : Il est légitime d'écrire des expressions $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n$ où $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de $\mathcal{M}_1(S)$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels $\geqslant 0$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = 1$.

En effet $\mathcal{M}_1(S) \subset \mathcal{M}(S)$, $\mathcal{M}(S)$ étant un espace de Banach et $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n$ étant une série absolument convergente $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|\alpha_n p_n\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \|p_n\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = 1\right)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n$ est une série convergente dans $\mathcal{M}(S)$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i ,$$

d'où $\forall A \in \mathcal{S}, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n\right)(A) = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i\right)(A) \right]$

c'est-à-dire $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n\right)(A) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i (A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n(A)$.

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n$ est la mesure sur $(S, \mathcal{S})$ définie par

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n\right)(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n (A) \quad \forall A \in \mathcal{S}.$$

Mais $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n \in \mathcal{M}_1(S)$ car $p_n(A) \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$ entraîne

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n\right)(A) \geqslant 0 \quad \forall A \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n p_n\right)(S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = 1.$$

Théorème 2

Si la relation de préférence $\underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim}$ sur $\mathcal{M}_1(S)$ vérifie l'axiome 1 et l'axiome 2 bis, il existe une utilité linéaire bornée sur $(\mathcal{M}_1(S), \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim})$.

Démonstration (cf. 7) : comme l'axiome 2 bis entraîne l'axiome 2, l'existence d'une utilité linéaire U sur $(\mathcal{M}_1(S), \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim})$ découle du théorème 1.

Montrons que U est nécessairement bornée : Supposons U non bornée supérieurement : $\forall M \in \mathbf{R}, \exists p \in \mathcal{M}_1(S)$ tel que $U(p) > M$. Alors on peut trouver une suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{M}_1(S)$ telle que $U(p_n) > 2^n$ et $U(p_n) > U(p_{n-1})$ $\forall n \in \mathbf{N}$: on définit cette suite par récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists p_n \in \mathcal{M}_1(S)$ tel que $U(p_n) > \max\,[2^n, U(p_{n-1})]$.

Soit $q \in \mathcal{M}_1(S)$ défini par $q = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} p_n \quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = 1\right)$ et $\forall N > 0$

soit $q_N \in \mathcal{M}_1(S)$ défini par $q_N = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} p_n + 2^{-N} p_N \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} + 2^{-N} = 1\right)$,

comme $q = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} p_n + \sum_{N+1}^{\infty} 2^{-n} p_n$ et $q_N = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} p_n + \sum_{N+1}^{+\infty} 2^{-n} p_N$, on conclut $q_N < q \; \forall N > 0$ car $U(p_n)$ étant une suite strictement croissante, $p_n > p_N$ $(\forall n > N)$ (Remarque page 47) et on applique alors l'axiome 2bis.

De $q_N < q \;\; \forall N > 0$ on déduit $U(p_N) < U(q) \; \forall N > 0$. Or

$$U(q_N) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \, U(p_n) + 2^{-N} \, U(p_N) \quad \text{et} \quad U(p_n) > 2^{-n} \, \forall n \in \mathbf{N},$$

d'où $U(q_N) > N + 1$.

Donc $U(q) > N + 1 \;\; \forall N > 0$. Ce qui est impossible car $U(q)$ est fixé.

On montrerait de même que U est bornée inférieurement.

Corollaire

Toutes les utilités linéaires sur $(\mathcal{M}_1(S), \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim})$ sont bornées, si $\underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim}$ vérifie les axiomes 1 et 2 bis.

C'est une application immédiate des théorèmes 1 et 2.

Théorème 3

Soit U une utilité linéaire bornée sur $(\mathcal{M}_1(S), \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim})$. Alors U peut être prolongée de manière unique en une forme linéaire continue sur $\mathcal{M}(S)$.

Démonstration : Soit donc $U : \mathcal{M}_1(S) \to \mathbf{R}$ une utilité linéaire bornée sur $(\mathcal{M}_1(S), \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim})$: $\exists M \in \mathbf{R}^+$ tel que $|U(p)| \leqslant M \quad \forall p \in \mathcal{M}_1(S)$

et $\quad \forall p, q \in \mathcal{M}_1(S), \forall \alpha \in [0, 1]$

$$U[\alpha p + (1 - \alpha) q] = \alpha U(p) + (1 - \alpha) \, U(q).$$

On va alors prolonger U en une forme linéaire continue U'' sur l'espace de Banach $\mathcal{M}(S)$, c'est-à-dire en une application $U'' : \mathcal{M}(S) \to \mathbf{R}$ telle que

- $\forall p \in \mathcal{M}_1(S) \quad U''(p) = U(p)$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall \mu, \nu \in \mathcal{M}(S) \quad U''[\alpha\mu + \beta\nu] = \alpha U''(\mu) + \beta U''(\nu)$
- U'' soit continue sur $\mathcal{M}(S)$: $\exists K > 0$ tel que

$$|U''(\mu)| \leqslant K \, \|\mu\| \quad \forall \mu \in \mathcal{M}(S)$$

c'est-à-dire

$$\|U''\| = \sup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}(S) \\ \mu \neq 0}} \frac{|U''(\mu)|}{\|\mu\|} < +\infty .$$

1/ Prolongement de U à $\mathcal{M}^+(S)$

Soit $U' : \mathcal{M}^+(S) \to \mathbf{R}$ définie par $U'(0) = 0$ et pour $\mu \in \mathcal{M}^+(S) - \{0\}$ par $U'(\mu) = \mu(S)\ U\left[\dfrac{\mu}{\mu(S)}\right]$. En effet si $\mu \in \mathcal{M}^+(S) - \{0\}$, $\mu(S) > 0$ et $\dfrac{\mu}{\mu(S)} \in \mathcal{M}_1(S)$.

Alors U' est un prolongement de U à $\mathcal{M}^+(S)$: Si $p \in \mathcal{M}_1(S)$, $p(S) = 1$ et $U'(p) = U(p)$.

De plus $\forall \mu, \nu \in \mathcal{M}^+(S), U'(\mu + \nu) = U'(\mu) + U'(\nu)$:

si μ et $\nu \in \mathcal{M}^+(S) - \{0\}$, $U'(\mu + \nu) = [\mu(S) + \nu(S)]\ U\left[\dfrac{\mu + \nu}{\mu(S) + \nu(S)}\right]$ car $\mu + \nu \in \mathcal{M}^+(S) - \{0\}$.

Or $$\frac{\mu + \nu}{\mu(S) + \nu(S)} = \frac{\mu(S)}{\mu(S) + \nu(S)} \frac{\mu}{\mu(S)} + \frac{\nu(S)}{\mu(S) + \nu(S)} \frac{\nu}{\nu(S)}$$

avec

$$\frac{\mu}{\mu(S)} \text{ et } \frac{\nu}{\nu(S)} \in \mathcal{M}_1(S),$$

$$\frac{\mu(S)}{\mu(S) + \nu(S)} \geqslant 0, \ \frac{\nu(S)}{\mu(S) + \nu(S)} \geqslant 0 \text{ et } \frac{\mu(S) + \nu(S)}{\mu(S) + \nu(S)} = 1.$$

D'où

$$U\left[\frac{\mu + \nu}{\mu(S) + \nu(S)}\right] = \frac{\mu(S)}{\mu(S) + \nu(S)} U\left[\frac{\mu}{\mu(S)}\right] + \frac{\nu(S)}{\mu(S) + \nu(S)} U\left[\frac{\nu}{\nu(S)}\right]$$

c'est-à-dire

$$U'(\mu + \nu) = \mu(S)\ U\left[\frac{\mu}{\mu(S)}\right] + \nu(S)\ U\left[\frac{\nu}{\nu(S)}\right] = U'(\mu) + U'(\nu).$$

Si $\mu = 0$, ou $\nu = 0$, ou $\mu = \nu = 0$ c'est évident.

De plus $\forall \alpha \geqslant 0$ et $\forall \mu \in \mathcal{M}^+(S)$, on a $U'(\alpha\mu) = \alpha U'(\mu)$:

si $\alpha = 0$ ou $\mu = 0$ c'est évident

si $\alpha > 0$ et $\mu \in \mathcal{M}^+(S) - \{0\}$, $U'(\alpha\mu) = \alpha\mu(S)\ U\left[\dfrac{\alpha\mu}{\alpha\mu(S)}\right] = \alpha U'(\mu)$.

On a donc prolongé U en une fonction numérique U' définie sur $\mathcal{M}^+(S)$ et telle que $U'(\alpha\mu + \beta\nu) = \alpha U'(\mu) + \beta U'(\nu)\ \forall \mu, \nu \in \mathcal{M}^+(S)$ et $\forall \alpha, \beta \geqslant 0$.

2/ Prolongement de U à $\mathcal{M}(S)$

Pour $\mu \in \mathcal{M}(S)$, on peut écrire $\mu = \mu^+ - \mu^-$ avec μ^+ et $\mu^- \in \mathcal{M}^+(S)$ (cf. chapitre I Proposition 5 § I).

Soit alors $U'' : \mathcal{M}(S) \to \mathbf{R}$ définie par $U''(\mu) = U'(\mu^+) - U'(\mu^-)$. Cette définition est cohérente car si $\mu_1, \mu_2, \mu_1', \mu_2' \in \mathcal{M}^+(S)$ avec

$$\mu_1 - \mu_2 = \mu_1' - \mu_2' \quad \text{alors} \quad U'(\mu_1) - U'(\mu_2) = U'(\mu_1') - U'(\mu_2').$$

En effet de $\mu_1 - \mu_2 = \mu_1' - \mu_2'$ on déduit $\mu_1 + \mu_2' = \mu_2 + \mu_1'$, d'où en utilisant 1/ $U'(\mu_1) + U'(\mu_2') = U'(\mu_2) + U'(\mu_1')$ et le résultat.

Alors U'' est un prolongement de U à $\mathcal{M}(S)$: U'' coïncide avec U' sur $\mathcal{M}^+(S)$, donc avec U sur $\mathcal{M}_1(S)$, car si $\mu \in \mathcal{M}^+(S)$, $\mu = \mu^+$ et $\mu^- = 0$ entraîne $U''(\mu) = U'(\mu^+) = U'(\mu)$.

U'' est une forme linéaire sur $\mathcal{M}(S)$:

Si μ et $\nu \in \mathcal{M}(S)$, $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et $\nu = \nu^+ - \nu^-$ avec μ^+, μ^-, ν^+ et $\nu^- \in \mathcal{M}^+(S)$, on peut écrire $\mu + \nu = (\mu^+ + \nu^+) - (\mu^- + \nu^-)$ avec $\mu^+ + \nu^+$ et $\mu^- + \nu^- \in \mathcal{M}^+(S)$.

D'où

$$U''(\mu + \nu) = U'(\mu^+ + \nu^+) - U'(\mu^- + \nu^-) = U'(\mu^+) - U'(\mu^-) + U'(\nu^+) - U'(\nu^-)$$
$$= U''(\mu) + U''(\nu) \text{ par définition de } U''.$$

Si $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\mu \in \mathcal{M}(S)$, $U''(\alpha\mu) = \alpha U''(\mu)$:

si $\alpha = 0$, $U''(\alpha\mu) = U'(0) = 0$.

si $\alpha > 0$, $\alpha\mu = \alpha\mu^+ - \alpha\mu^-$, $\alpha\mu^+$ et $\alpha\mu^- \in \mathcal{M}^+(S)$

d'où

$$U''(\alpha\mu) = U'(\alpha\mu^+) - U'(\alpha\mu^-) = \alpha\,[U'(\mu^+) - U'(\mu^-)] = \alpha U''(\mu).$$

Si $\alpha < 0$, $\alpha\mu = |\alpha|\,\mu^- - |\alpha|\,\mu^+$, $|\alpha|\mu^+$ et $|\alpha|\mu^- \in \mathcal{M}^+(S)$

d'où

$$U''(\alpha\mu) = U'(|\alpha|\,\mu^-) - U'(|\alpha|\,\mu^+) = |\alpha|\,[U'(\mu^-) - U'(\mu^+)]$$
$$= -\,|\alpha|\,U''(\mu) = \alpha U''(\mu).$$

3/ La forme linéaire U'' est continue sur $\mathcal{M}(S)$

Comme U est bornée sur $\mathcal{M}_1(S)$, $\exists M > 0$ tel que $|U(p)| \leqslant M$ $\forall p \in \mathcal{M}_1(S)$. Alors $\forall \mu \in \mathcal{M}^+(S)$ $|U'(\mu)| \leqslant M\,\|\mu\|$:

Si $\mu = 0$, $U'(\mu) = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

Si $\mu \in \mathcal{M}^+(S) - \{0\}$, $U'(\mu) = \mu(S)\, U\left[\dfrac{\mu}{\mu(S)}\right]$ et $\|\mu\| = \mu(S) > 0$.

d'où
$$\frac{|U'(\mu)|}{\|\mu\|} = \frac{\mu(S)}{\mu(S)} \left| U\left[\frac{\mu}{\mu(S)}\right]\right| \leqslant M.$$

U'' est continue sur $\mathcal{M}(S)$: soit $\mu \in \mathcal{M}(S) - \{0\}$, alors

$\|\mu\| = |\mu|(S) = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$ et $\|\mu\| > 0$. $U''(\mu) = U'(\mu^+) - U'(\mu^-)$

entraîne $|U''(\mu)| \leqslant |U'(\mu^+)| + |U'(\mu^-)|$ et
$$\frac{|U''(\mu)|}{\|\mu\|} \leqslant \frac{|U'(\mu^+)|}{\|\mu\|} + \frac{|U'(\mu^-)|}{\|\mu\|} \leqslant \frac{M\ \|\mu^+\|}{\|\mu\|} + \frac{M\ \|\mu^-\|}{\|\mu\|}.$$

Or
$$\frac{M\ \|\mu^+\|}{\|\mu\|} + \frac{M\ \|\mu^-\|}{\|\mu\|} = M\ \frac{\|\mu^+\| + \|\mu^-\|}{\|\mu\|} = M$$

d'où $\dfrac{|U''(\mu)|}{\|\mu\|} \leqslant M \quad \forall \mu \in \mathcal{M}(S)\text{-}\{0\}$ et le résultat.

L'unicité du prolongement découle du fait que $\mathcal{M}_1(S)$ est un système générateur de $\mathcal{M}(S)$.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.

Remarque : Soit U une utilité linéaire bornée sur $(\mathcal{M}_1(S)\,,\ \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim})$. Pour toute suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{M}_1(S)$ et toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels $\geqslant 0$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\ U(p_n)$ est convergente (car U est bornée)

et
$$U\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, p_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\ U(p_n).$$

Ce dernier résultat est une conséquence de la continuité du prolongement U'' de U à $\mathcal{M}(S)$:

$$U\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, p_n\right) = U''\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, p_n\right) = U''\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, p_i\right) = \lim_{n\to+\infty} U''\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, p_i\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\ U''(p_i) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\ U''(p_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\ U(p_n)\cdot$$

Soit $\mathfrak{M}(S)$ l'espace de Banach des mesures bornées sur $(S, \mathcal{S})$ et $\mathfrak{M}_1(S)$ le sous-ensemble de $\mathfrak{M}(S)$ des probabilités sur $(S, \mathcal{S})$.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications $f : \mathfrak{M}_1(S) \to \mathfrak{M}(S)$ telles que

$$\mathfrak{I}m(f) = \{f(p) : p \in \mathfrak{M}_1(S)\} \subset \mathfrak{M}_1(S).$$

Si $\mathfrak{T}$ est une tribu sur $\mathfrak{M}_1(S)$ et μ une mesure positive et bornée sur $(\mathfrak{M}_1(S), \mathfrak{T})$ (on supposera $(\mathfrak{M}_1(S), \mathfrak{T}, \mu)$ complet, quitte éventuellement à le remplacer par son complété), on notera $\mathcal{C}_\mu(\mathfrak{T}) = \{f \in \mathcal{C} : f\mu\text{-mesurable}\}$.

Alors $\forall f \in \mathcal{C}_\mu(\mathfrak{T})$, f est μ-intégrable (quand $\mathfrak{M}_1(S)$ est muni de la tribu $\mathfrak{T}$) : En appliquant la proposition 14 (§ II chapitre I), il suffit de vérifier que $\|f\| : \mathfrak{M}_1(S) \to \mathbf{R} : p \rightsquigarrow \|f(p)\|$ est μ-intégrable, ce qui est immédiat car $\mathfrak{I}m(f) \subset \mathfrak{M}_1(S)$ et $\forall p \in \mathfrak{M}_1(S)$ $\|f(p)\| = 1$ c'est-à-dire $\|f\|$ est l'application constante $\mathfrak{M}_1(S) \to \mathbf{R} : p \rightsquigarrow 1$ qui est bien μ-intégrable.

Pour $f \in \mathcal{C}_\mu(\mathfrak{T})$, on peut définir (§ II Chapitre I) l'intégrale de f par rapport à μ : $\int f\, d\mu$ qui sera un élément de $\mathfrak{M}(S)$.

Pour $f \in \mathcal{C}$ et $A \in \mathcal{S}$, on notera f_A l'application $f_A : \mathfrak{M}_1(S) \to \mathbf{R}$ définie par $f_A(p) = f(p)(A)$ $\forall p \in \mathfrak{M}_1(S)$. Alors

Proposition 1

Si $\mathfrak{T}$ est une tribu sur $\mathfrak{M}_1(S)$ et μ une mesure positive et bornée sur $(\mathfrak{M}_1(S), \mathfrak{T})$ ($(\mathfrak{M}_1(S), \mathfrak{T}, \mu)$ complet), alors $\forall f \in \mathcal{C}_\mu(\mathfrak{T})$ et $\forall A \in \mathcal{S}$ f_A est μ-intégrable et $(\int f\, d\mu)(A) = \int f_A\, d\mu$.

Démonstration : Soit $f \in \mathcal{C}_\mu(\mathfrak{T})$. Etant μ-intégrable, f est limite presque partout d'une suite $(f^n)_{n \in \mathbf{N}}$ de Cauchy de fonctions étagées de $\mathcal{E}_{\mathfrak{M}(S)}(\mu)$:

$$f^n = \sum_{i \in I_n} \mu_n^i \chi_{B_n^i}$$

où I_n est fini, $\mu_n^i \in \mathfrak{M}(S)$ $\forall i \in I_n$ et $B_n^i \in \mathfrak{T}$ $\forall i \in I_n$.

Alors $\exists N \in \mathfrak{T}$ μ-négligeable tel que $f(p) = \lim_{n \to +\infty} f^n(p)$ $\forall p \in \mathfrak{M}_1(S) - N$ (la limite étant prise dans $\mathfrak{M}(S)$ muni de sa norme) et $\int f\, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f^n\, d\mu$.

Soit $A \in \mathcal{S}$ et pour $n \in \mathbf{N}, f_A^n : \mathfrak{M}_1(S) \to \mathbf{R} : p \rightsquigarrow f^n(p)(A)$. Alors

$$f_A^n = \sum_{i \in I_n} \mu_n^i(A) \chi_{B_n^i} \in \mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mu) \quad \text{et} \quad \int f_A^n\, d\mu = \sum_{i \in I_n} \mu_n^i(A)\, \mu(B_n^i).$$

Mais comme $(f^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{E}_{\mathfrak{M}(S)}(\mu)$, $(f_A^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mu)$: $(f^n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ m}} \int \|f^n - f^m\| \, d\mu = 0$ où $\|f^n - f^m\| : \mathfrak{M}_1(S) \to \mathbf{R} : p \rightsquigarrow \|f^n(p) - f^m(p)\|$.

Or (cf. page 15) $|f^n(p)(A) - f^m(p)(A)| \leqslant \|f^n(p) - f^m(p)\|$ c'est-à-dire $|f_A^n - f_A^m| \leqslant \|f^n - f^m\|$, d'où on conclut $\int |f_A^n - f_A^m| \, d\mu \underset{n,m\to+\infty}{\to} 0$.

$(f_A^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc une suite de Cauchy de $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mu)$. De plus $\forall p \in \mathfrak{M}_1(S) - N$ $f(p) = \lim\limits_{n\to+\infty} f^n(p)$ entraîne que $f(p)(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} f^n(p)(A)\ \forall p \notin N$ c'est-à-dire f_A limite presque partout de $(f_A^n)_{n\in\mathbf{N}}$. On en déduit que f_A est μ-intégrable (comme limite presque partout d'une suite de Cauchy de fonctions étagées) et $\int f_A \, d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} \int f_A^n \, d\mu$.

D'autre part $\int f \, d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty} \int f^n \, d\mu$, donc on peut écrire

$$(\int f \, d\mu)(A) = \lim_{n\to+\infty} [(\int f^n d\mu)(A)]$$

avec

$$\int f^n \, d\mu)(A) = \left[\sum_{i\in I_n} \mu_n^i \, \mu(B_n^i)\right](A) = \sum_{i\in I_n} \mu_n^i(A) \, \mu(B_n^i) = \int f_A^n \, d\mu$$

c'est-à-dire

$$(\int f \, d\mu)(A) = \lim_{n\to+\infty} \int f_A^n \, d\mu = \int f_A \, d\mu.$$

Corollaire

$\forall f \in \mathcal{C}_\mu(\mathfrak{S}), \int f \, d\mu \in \mathfrak{M}^+(S)$. De plus si μ est une probabilité sur $(\mathfrak{M}_1(S), \mathfrak{S}), \int f \, d\mu \in \mathfrak{M}_1(S)$.

Démonstration : Comme $f \in \mathcal{C}_\mu(\mathfrak{S})$, $f(p) \in \mathfrak{M}_1(S)$ $\forall p \in \mathfrak{M}_1(S)$. Donc $\forall p \in \mathfrak{M}_1(S)$ et $\forall A \in \mathcal{S}$ $f(p)(A) \geqslant 0$ c'est-à-dire $f_A \geqslant 0$ $\forall A \in \mathcal{S}$. On en déduit que $\int f_A \, d\mu \geqslant 0$ car μ est une mesure positive, donc $(\int f \, d\mu)(A) \geqslant 0$ $\forall A \in \mathcal{S}$, c'est-à-dire $\int f \, d\mu \in \mathfrak{M}^+(S)$.

Si μ est une probabilité, $(\int f \, d\mu)(S) = \int f_S \, d\mu$ où

$$f_S : \mathfrak{M}_1(S) \to \mathbf{R} : p \rightsquigarrow f(p)(S) \quad \text{et} \quad f(p)(S) = 1 \quad \forall p \in \mathfrak{M}_1(S),$$

donc $\int f_S \, d\mu = 1$. On en déduit $(\int f \, d\mu)(S) = 1$ et le résultat.

Théorème 4

Soit $\mathfrak{T}$ une tribu sur $\mathfrak{M}_1(S)$ et μ une probabilité sur $(\mathfrak{M}_1(S), \mathfrak{T})$ $((\mathfrak{M}_1(S), \mathfrak{T}, \mu)$ complet). Si U est une utilité linéaire bornée sur $(\mathfrak{M}_1(S), \underset{\mathfrak{M}_1(S)}{\lesssim})$, $\forall f \in \mathcal{C}_\mu(\mathfrak{T})$ l'application $U \circ f : \mathfrak{M}_1(S) \to \mathbf{R} : p \rightsquigarrow U[f(p)]$ est μ-intégrable et $U[\int f\, d\mu] = \int U \circ f d\mu$.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème 3 précédent et des propriétés énoncées au chapitre I (cf. page 23). En effet soit U'' le prolongement de U à $\mathfrak{M}(S)$; U'' est une forme linéaire continue sur $\mathfrak{M}(S)$, c'est-à-dire une application linéaire continue de l'espace de Banach $\mathfrak{M}(S)$ dans $\mathbf{R}$. Alors $\forall f \in \mathcal{C}_\mu(\mathfrak{T})$, $U'' \circ f$ est μ-intégrable et

$U''(\int f\, d\mu) = \int U'' \circ f d\mu$. Comme $f \in \mathcal{C}_\mu(\mathfrak{T})$ et μ est une probabilité,

$$\int f\, d\mu \in \mathfrak{M}_1(S) \text{ d'où } U''(\int f\, d\mu) = U(\int f\, d\mu).$$

De plus $U'' \circ f : \mathfrak{M}_1(S) \to \mathbf{R} : p \rightsquigarrow U''[f(p)]$ et $f \in \mathcal{C}$ entraînent

$$U''[f(p)] = U[f(p)]$$

$\forall p \in \mathfrak{M}_1(S)$, c'est-à-dire $U'' \circ f = U \circ f$. D'où le théorème.

Soit $p_0 \in \mathfrak{M}_1(S)$ une probabilité sur $(S, \mathfrak{S})$ telle qu'il existe une tribu $\mathfrak{T}$ sur $\mathfrak{M}_1(S)$ vérifiant les 3 conditions suivantes :

1/ $\Delta \in \mathfrak{T}$ où $\Delta = \{\delta_s : s \in S\}$.

2/ Si $\mathfrak{T}_\Delta$ est la tribu induite par $\mathfrak{T}$ sur Δ : $\mathfrak{T}_\Delta = \{M \cap \Delta : M \in \mathfrak{T}\}$, l'application $\pi : S \to \Delta : s \rightsquigarrow \delta_s$ est mesurable quand S et Δ sont munis respectivement des tribus $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}_\Delta$.

3/ $\exists f^0 \in \mathcal{C}_{\mu^0}(\mathfrak{T})$ laissant Δ ponctuellement invariant ($\forall s \in S\ f^0(\delta_s) = \delta_s$) avec μ^0 définie comme suit :

Si $\pi' : S \to \mathfrak{M}_1(S) : s \rightsquigarrow \pi(s)$ est l'application π où l'ensemble d'arrivée est prolongé à $\mathfrak{M}_1(S)$, π' est mesurable quand S et $\mathfrak{M}_1(S)$ sont munis respectivement des tribus $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$; en effet si $M \in \mathfrak{T}, \overset{-1}{\pi'}(M) = \overset{-1}{\pi}(M \cap \Delta)$ et de $M \in \mathfrak{T}$ on déduit $M \cap \Delta \in \mathfrak{T}_\Delta$, donc $\pi^{-1}(M \cap \Delta) \in \mathfrak{S}$.

Alors $\mu^0 = \pi'(p_0)$ sera la probabilité sur $(\mathfrak{M}_1(S), \mathfrak{T})$ image de p_0 par l'application mesurable $\pi' : \mu^0(M) = p_0[\overset{-1}{\pi'}(M)] = p_0[\overset{-1}{\pi}(M \cap \Delta)$ pour $M \in \mathfrak{T}$. Notons que μ^0 est une probabilité portée par Δ :

$$\Delta^c \in \mathfrak{T} \quad \text{et} \quad \mu^0(\Delta^c) = p_0[\overset{-1}{\pi}(\Delta \cap \Delta^c)] = p_0(\emptyset) = 0.$$

On supposera $(\mathfrak{M}_1(S), \mathfrak{T}, \mu^0)$ complet.

Théorème 5

Si U est une utilité linéaire bornée sur $(\mathfrak{M}_1(S) \underset{\mathfrak{M}_1(S)}{\lesssim})$ et si u désigne l'application $u : S \to \mathbf{R} : s \rightsquigarrow u(s) = U(\delta_s)$, alors pour toute probabilité $p_0 (\in \mathfrak{M}_1(S))$ sur $(S, \mathcal{S})$ telle qu'il existe une tribu $\mathfrak{T}$ sur $\mathfrak{M}_1(S)$ vérifiant les 3 conditions précédentes, l'application u est p_0-intégrable et $U(p_0) = \int f \, dp_0$.

Démonstration : Soit donc $p_0 \in \mathfrak{M}_1(S)$ et $\mathfrak{T}$ une tribu sur $\mathfrak{M}_1(S)$ vérifiant les 3 conditions précédentes ; soit $f^0 \in \mathcal{C}_{\mu^0}(\mathfrak{T})$ une application $f^0 : \mathfrak{M}_1(S) \to \mathfrak{M}(S)$ laissant Δ invariant.

Comme $f^0 \in \mathcal{C}_{\mu^0}(\mathfrak{T})$, f^0 est μ^0-intégrable et $U(\int f^0 \, d\mu^0) = \int (U \circ f^0) d\mu^0$.

Mais $\int f^0 \, d\mu^0 = p_0$: pour montrer cette égalité, il suffit de montrer que $\forall A \in \mathcal{S} (\int f^0 \, d\mu^0)(A) = p_0(A)$. Considérons donc $A \in \mathcal{S}$ et $(\int f^0 d\mu^0)(A)$. D'après la proposition 1,

$$(\int f^0 \, d\mu^0)(A) = \int f^0_A \, d\mu^0 \quad \text{où} \quad f^0_A : \mathfrak{M}_1(S) \to \mathbf{R} : p \rightsquigarrow f^0(p)(A).$$

Or μ^0 étant une probabilité porté par Δ, $\int f^0_A \, d\mu^0 = \int_\Delta f^0_A \, d\mu^0$ d'où (cf. chap. I, intégration par rapport à une mesure induite)

$$\int f^0_A \, d\mu^0 = \int f^0_{A/\Delta} d\mu^0_\Delta \quad \text{où} \quad f^0_{A/\Delta} : \Delta \to \mathbf{R} : \delta_s \rightsquigarrow f^0(\delta_s)(A)$$

est la restriction de f_A à Δ et μ^0_Δ est la mesure induite par μ^0 sur Δ (donc $f^0_{A/\Delta}$ est μ^0_Δ-intégrable).

f^0 laissant Δ invariant, $f^0(\delta_s)(A) = \delta_s(A)$ c'-est-à-dire

$f^0_{A/\Delta} : \Delta \to \mathbf{R} : \delta_s \rightsquigarrow \delta_s(A)$.

Si on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, "f^0_{A/\Delta}"] & \mathbf{R} \\ S \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "g_A = f^0_{A/\Delta} \circ \pi"'] & \end{tikzcd}$$

$(\Delta, \mathfrak{T}_\Delta)$ et $(S, \mathcal{S})$ sont 2 espaces mesurables, $\pi : S \to \Delta$ est une application mesurable et p_0 une probabilité sur $(S, \mathcal{S})$ avec $\pi(p_0) = \mu^0_\Delta$.

Comme $f^0_{A/\Delta}$ est μ^0-intégrable, $g_A = f^0_{A/\Delta} \circ \pi$ est p_0-intégrable et

$\int g_A \, dp_0 = \int f^0_{A/\Delta} \, d\mu^0_\Delta$ (cf. § II chap. I, Intégration par rapport à une mesure image), avec

$$g_A : S \to \mathbf{R} : s \rightsquigarrow g_A(s) = f^0_{A/\Delta}[\pi(s)] = f^0_{A/\Delta}(\delta_s) = \delta_s(A)$$

soit $g_A(s) = \delta_s(A)$, donc $g_A = \chi_A$ fonction indicatrice de A.

D'où $\int f^0_A \, d\mu^0 = \int \chi_A \, dp_0 = p_0(A)$,

c'est-à-dire

$$\left(\int f^0 \, d\mu^0\right)(A) = p_0(A) \quad \forall A \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \int f^0 \, d\mu^0 = p_0.$$

D'autre part $U \circ f^0 : \mathcal{M}_1(S) \to \mathbf{R} : p \rightsquigarrow U[f^0(p)]$ et

$\int (U \circ f^0) \, d\mu^0 = \int_\Delta U \circ f^0 \, d\mu^0$ car μ^0 est une probabilité portée par Δ, d'où

$\int (U \circ f^0) \, d\mu^0 = \int (U \circ f^0)_{|\Delta} \, d\mu^0_\Delta$ où $(U \circ f^0)_{|\Delta} : \Delta \to \mathbf{R} : \delta_s \rightsquigarrow U[f^0(\delta_s)]$ est μ^0_Δ-intégrable.

$(U \circ f^0)(\delta_s) = U(\delta_s) \; \forall s \in S$, donc $(U \circ f^0)_{|\Delta} : \Delta \to \mathbf{R} : \delta_s \rightsquigarrow U(\delta_s)$.

Si on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{(U \circ f^0)_{|\Delta}} & \mathbf{R} \\ \uparrow \pi & \nearrow & g = (U \circ f^0)_{|\Delta} \circ \pi \\ S & & \end{array}$$

$\pi(p_0) = \mu^0_\Delta$, donc g est p_0-intégrable. Or

$$g : S \to \mathbf{R} : s \rightsquigarrow (U \circ f^0)_{|\Delta}(\pi(s)) = (U \circ f^0)_{|\Delta}(\delta_s) = U(\delta_s)$$

d'où $g = u$ définie dans l'énoncé du théorème 5.

D'où u est p_0-intégrable et $\int (U \circ f^0)_{|\Delta} \, d\mu^0_\Delta = \int u \, dp_0$, c'est-à-dire $\int U \circ f^0 \, d\mu^0 = \int u \, dp_0$.

Alors $U\left(\int f^0 \, d\mu^0\right) = \int U \circ f^0 \, d\mu^0$ entraîne $U(p_0) = \int u \, dp_0$.

D'où le théorème.

Remarque : u étant bornée (car U est bornée), il suffisait de montrer que u était mesurable.

Si donc on suppose que $\mathcal{M}_1(S)$ est muni d'une relation de préférence $\underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim}$ vérifiant les axiomes du théorème 2, il existe une application $u : S \to \mathbf{R}$ mesurable et bornée telle que

$$s \underset{s}{\lesssim} s' \Leftrightarrow u(s) \leqslant u(s')$$

et telle que "l'utilité" de tout $p \in \mathcal{M}_1(S)$ vérifiant les conditions du théorème 5 est donnée par $U(p) = \int u\, dp$ $(U(\delta_s) = u(s)\ \forall s \in S)$, c'est-à-dire

$$p \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim} p' \Leftrightarrow \int u\, dp \leqslant \int u\, dp'.$$

Réciproquement si $u : S \to \mathbf{R}$ est une fonction numérique mesurable et bornée, la relation

$$p \lesssim p' \Leftrightarrow \int u\, dp \leqslant \int u\, dp' \quad (p\,,\, p' \in \mathcal{M}_1(S))$$

est une relation de préférence sur $\mathcal{M}_1(S)$.

Cas particulier : S dénombrable (ou fini)

Si S est dénombrable, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(S)$ car $\mathcal{S}$ est une tribu contenant les points, donc toutes les parties de S (si $A \subset S$, $A = \bigcup_{s \in A} \{s\} \in \mathcal{S}$ comme union dénombrable d'éléments de $\mathcal{S}$), et $\Delta = \{\delta_s : s \in S\}$ est dénombrable.

Alors une probabilité $p \in \mathcal{M}_1(S)$ est équivalente à la donnée d'une famille dénombrable $(\lambda_s)_{s \in S}$ de réels $\geqslant 0$ telle que

$$\sum_{s \in S} \lambda_s = 1 \qquad [p(s) = \lambda_s\ \forall s \in S]$$

et

$$\mathcal{M}(S) = \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s\, \delta_s : \lambda_s \in \mathbf{R}\ \ \forall s \in S \quad \text{et} \quad \sum_{s \in S} |\lambda_s| \text{ série convergente} \right\}$$

$$\mathcal{M}^+(S) = \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s\, \delta_s : \lambda_s \geqslant 0\ \ \forall s \in S \quad \text{et} \quad \sum_{s \in S} \lambda_s < +\infty \right\}$$

$$\mathcal{M}_1(S) = \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s\, \delta_s : \lambda_s \geqslant 0\ \ \forall s \in S \quad \text{et} \quad \sum_{s \in S} \lambda_s = 1 \right\}$$

Pour $p \in \mathcal{M}_1(S)$, on peut écrire $p = \sum_{s \in S} p(s)\, \delta_s$.

Soit $\mathcal{T}$ la tribu borélienne sur $\mathcal{M}_1(S)$ c'est-à-dire la tribu engendrée par les fermés de $\mathcal{M}_1(S)$, alors $\Delta \in \mathcal{T}$: $\mathcal{M}_1(S)$ fermé de $\mathcal{M}(S)$ et Δ fermé de $\mathcal{M}(S)$ (pour la topologie définie par la norme) implique Δ fermé de $\mathcal{M}_1(S)$, soit $\Delta \in \mathcal{T}$.

Si $\mathcal{T}_\Delta$ est la tribu induite par $\mathcal{T}$ sur Δ, l'application $\pi : S \to \Delta$ est mesurable (car S muni de la tribu $\mathcal{P}(S)$).

Soit $f : \mathcal{M}_1(S) \to \mathcal{M}(S)$ l'application définie par

$$\begin{cases} f(\delta_s) = \delta_s & \forall s \in S \\ f(p) = 0 & \text{si } p \notin \Delta. \end{cases}$$

Alors pour toute mesure μ positive et bornée sur $(\mathcal{M}_1(S)\,,\,\mathcal{T}), f \in \mathcal{C}_\mu(\mathcal{T})$:

1/ Soit F un fermé de $\mathcal{M}(S)$, $\overset{-1}{f}(F) = \begin{cases} F \cap \Delta & \text{si } 0 \notin F \\ \Delta^c \cup (F \cap \Delta) & \text{si } 0 \in F. \end{cases}$

Comme F et Δ sont des fermés de $\mathcal{M}(S)$, $F \cap \Delta$ est un fermé de $\mathcal{M}(S)$.

$\left.\begin{array}{l} F \cap \Delta \text{ fermé de } \mathcal{M}(S) \\ F \cap \Delta \subset \mathcal{M}_1(S) \end{array}\right\} \Rightarrow F \cap \Delta$ fermé de $\mathcal{M}_1(S)$ et $F \cap \Delta \in \mathcal{T}$.

D'autre part $\Delta \in \mathcal{T}$ entraîne $\Delta^c \in \mathcal{T}$.

Donc dans tous les cas $\overset{-1}{f}(F) \in \mathcal{T}$.

2/ $f\,[\mathcal{M}_1(S)] = \Delta \cup \{0\}$ et $\Delta \cup \{0\}$ est une partie dénombrable de $\mathcal{M}_1(S)$.

D'où le résultat.

Donc si U est une utilité linéaire bornée sur $(\mathcal{M}_1(S)\,,\,\underset{\mathcal{M}_1(S)}{\lesssim})$ et si $u : S \to \mathbf{R} : s \rightsquigarrow U(\delta_s)$, alors $\forall p \in \mathcal{M}_1(S)$, la tribu borélienne $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{M}_1(S)$ vérifie les conditions du théorème 5, donc u est p-intégrable et

$$U(p) = \int u\,dp, \text{ avec } \int u\,dp = \sum_{s \in S} u(s)\,p(s) \quad \text{car} \int u\,dp = \sum_{s \in S} \int_{\{s\}} u\,dp$$

$$= \sum_{s \in S} u(s) \int_{\{s\}} dp$$

$$= \sum_{s \in S} u(s)\,p(s).$$

d'où $U(p) = \sum_{s \in S} u(s)\,p(s)$.

Remarque : Ce résultat se démontre directement en utilisant la remarque de la page 64 . En effet comme S est dénombrable,

$$p = \sum_{s \in S} p(s)\,\delta_s \text{ et } \sum_{s \in S} p(s) = 1 \Rightarrow U(p) = \sum_{s \in S} p(s)\,U(\delta_s) = \sum_{s \in S} p(s)\,u(s).$$

Il semble pourtant intéressant de le retrouver par le biais du théorème 5 plus général.

CHAPITRE IV

JEU SOUS FORME NORMALE

I – FORME NORMALE D'UN JEU A N JOUEURS

La forme réduite d'un jeu (cf. chapitre II § IV) va nous permettre, en utilisant les définitions et résultats du chapitre III, de parvenir à la forme normale.

La forme réduite est la donnée de n ensembles $T_1, \ldots, T_n$, où T_i est l'ensemble des tactiques du joueur i $(i = 1, \ldots, n)$ et d'une application $\Lambda : \prod_{i=1}^{n} T_i \to \mathcal{M}_1(S) : \theta \rightsquigarrow P_\theta$ qui à chaque tactique globale θ fait correspondre une probabilité P_θ sur $(S, \mathcal{S})$.

On supposera que chaque joueur a défini sur $\mathcal{M}_1(S)$ (donc sur S) une relation de préférence (celle du i$^{\text{ème}}$ joueur sera notée $\underset{\mathcal{M}_1(S)}{\overset{i}{\lesssim}}$ ou $\overset{i}{\lesssim}$) vérifiant les conditions du théorème 2 (chapitre III). Alors on peut en déduire l'existence pour tout $i = 1, \ldots, n$ d'une utilité linéaire bornée U_i (unique à une transformation linéaire croissante près) sur $(\mathcal{M}_1(S), \underset{\mathcal{M}_1(S)}{\overset{i}{\lesssim}})$ et d'une fonction numérique mesurable et bornée $u_i : S \to \mathbf{R}$ telles que :

$$\forall s, s' \in S \quad s \overset{i}{\lesssim} s' \Leftrightarrow u_i(s) \leqslant u_i(s')$$

$$\forall p, p' \in \mathcal{M}_1(S) \quad p \overset{i}{\lesssim} p' \Leftrightarrow U_i(p) \leqslant U_i(p')$$

et pour tout $p \in \mathcal{M}_1(S)$ vérifiant les conditions du théorème 5 (Chapitre III), on peut écrire $U_i(p) = \int u_i \, dp$.

Soit $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in T\} \subset \mathfrak{M}_1(S)$. On fera l'hypothèse que $\forall \theta \in T$, P_θ vérifie les conditions du théorème 5 (chapitre III).

Alors

$$\forall i = 1, \ldots, n \;,\; \forall \theta \in T \quad U_i(P_\theta) = \int u_i \, dP_\theta \,.$$

Ceci revient à dire que pour connaître les préférences du joueur i sur $\mathcal{P}$, il suffit de se donner l'application $u_i : S \to \mathbf{R}$:

$$\forall \theta \,,\, \theta' \in T \,,\, P_\theta \overset{i}{\lesssim} P_{\theta'} \Leftrightarrow \int u_i \, dP_\theta \leqslant \int u_i \, dP_{\theta'} \;.$$

Soit alors pour $i = 1, \ldots, n$ v_i l'application de T dans $\mathbf{R}$ définie par $v_i : T \to \mathbf{R} : \theta \rightsquigarrow v_i(\theta) = \int u_i \, dP_\theta$. v_i est une fonction numérique bornée qui détermine les préférence du joueur i sur $\mathcal{P}$: pour θ , $\theta' \in T$

$$P_\theta \overset{i}{\lesssim} P_{\theta'} \Leftrightarrow v_i(\theta) \leqslant v_i(\theta') \,.$$

Pour $\theta \in T$, $v_i(\theta)$ est "l'utilité" de la tactique globale θ pour le joueur i.

Définition 1

Un jeu à n joueurs sous forme normale est un $2n$-uple $(T_1, \ldots, T_n, v_1, \ldots, v_n)$ où $T_i (i = 1, \ldots, n)$ est un ensemble (ensemble des tactiques du joueur i) et $v_i (i = 1, \ldots, n)$ est une fonction numérique bornée définie sur $T = \prod_{i=1}^{n} T_i$ (décrivant les préférences du joueur i).

Remarque : de la relation $\overset{i}{\lesssim}$ sur $\mathfrak{M}_1(S)$ on déduit une relation de préférence $\underset{i}{\lesssim}$ sur T :

$$\theta \underset{i}{\lesssim} \theta' \Leftrightarrow v_i(\theta) \leqslant v_i(\theta') \; (\Leftrightarrow P_\theta \overset{i}{\lesssim} P_\theta).$$

Une partie de ce jeu se jouera alors ainsi : Les joueurs choisiront indépendamment les uns des autres une tactique : (pour $i = 1, \ldots, n$) le $i^{\text{ème}}$ joueur choisira une tactique $\theta_i \in T_i$. Ces n choix déterminent une tactique globale $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in T$. Il en résulte une "situation" qui pour le $i^{\text{ème}}$ joueur aura l'utilité $v_i(\theta)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Le but du $i^{\text{ème}}$ joueur est donc, en choisissant une tactique $\theta_i \in T_i$, de maximiser son utilité. Mais il ne peut agir que partiellement dans la détermination de la tactique globale θ adoptée : il ne choisit que la $i^{\text{ème}}$ composante, les autres choix étant effectués par les $(n - 1)$ autres joueurs.

II – JEU STRATEGIQUE ASSOCIE A UN JEU SOUS FORME NORMALE

Etant donné un jeu sous forme normale, chaque joueur doit choisir par lui-même une tactique dans l'ensemble des tactiques dont il dispose. Cependant il peut être amené, pour déterminer la tactique qu'il adoptera à s'en remettre à une épreuve aléatoire effectuée dans cet ensemble et régie par une distribution de probabilités choisie par le joueur. Cela revient à élargir l'ensemble des possibilités offertes à chaque joueur en remplaçant l'ensemble de ses tactiques par l'ensemble plus riche de ses stratégies, les tactiques étant alors considérées comme des stratégies particulières. On passe ainsi du jeu (tactique) au jeu stratégique qui lui correspond.

De manière plus précise soit T_i l'ensemble des tactiques du $i^{\text{ème}}$ joueur $(i = 1, \ldots, n)$ et $T = \prod_{i=1}^{n} T_i$. Si $\forall i = 1, \ldots, n$ $\mathscr{C}_i$ est une tribu sur T_i, on rappelle que $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{C}_i$ désigne la tribu sur T, produit de la famille $(\mathscr{C}_i)_{i=1,\ldots,n}$ (Cf. Chapitre I § I).

Lemme 1

Si $\forall i = 1, \ldots, n$ $\mathscr{C}_i$ est une tribu sur T_i telle que

$$\forall x \in X_i \quad \text{et} \quad \forall y \in \Gamma(x) \quad \{\theta_i \in T_i : \theta_i(U)(x) = y\} \in \mathscr{C}_i ,$$

alors la tribu $\mathscr{C} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{C}_i$ est telle que

$$\forall x \in \bigcup_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad \forall y \in \Gamma(x) \quad \{\theta \in T : \theta(U)(x) = y\} \in \mathscr{C}.$$

Démonstration : Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ et $y \in \Gamma(x)$: $\exists! i = 1, \ldots, n$ tel que $x \in X_i$ et $\{\theta \in T : \theta(U)(x) = y\} =$

$$T_1 \times \ldots \times T_{i-1} \times \{\theta_i \in T_i : \theta_i(U)(x) = y\} \times T_{i+1} \times \ldots \times T_n .$$

Comme $\{\theta_i \in T_i : \theta_i(U)(x) = y\} \in \mathscr{C}_i$, $\{\theta \in T : \theta(U)(x) = y\} \in \mathscr{C}$ d'après la définition de la tribu produit $\mathscr{C}$. D'où le lemme.

On suppose donc donnée pour tout $i = 1, \ldots, n$ une tribu $\mathscr{C}_i$ sur T_i contenant les points et astreinte à la condition du lemme 1, alors $\mathscr{C} = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{C}_i$ est une tribu sur T contenant les points et vérifiant la condition énoncée au chapitre II (Cf page 39).

Définition 2

Une stratégie σ_i pour le $i^{\text{ème}}$ joueur est une probabilité sur $(T_i, \mathcal{T}_i)$: $\sigma_i \in \mathcal{M}_1(T_i, \mathcal{T}_i)$.

On notera Σ_i l'ensemble des stratégies du joueur i : $\forall i = 1, \dots, n$

$\Sigma_i = \mathcal{M}_1(T_i, \mathcal{T}_i)$; on plongera T_i dans Σ_i en identifiant T_i et

$$\Delta(T_i) = \{\delta_{\theta_i} : \theta_i \in T_i\} \subset \mathcal{M}_1(T_i, \mathcal{T}_i) :$$

la tactique $\theta_i \in T_i$ sera alors la stratégie dégénérée $\delta_{\theta_i} \in \Sigma_i$.

Soit d'autre part $\Sigma = \mathcal{M}_1(T, \mathcal{T})$ l'ensemble des probabilités sur $(T, \mathcal{T})$.
A tout n-uple de stratégies (ou stratégie globale) $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$, on fera correspondre la probabilité $\sigma = \bigotimes_{i=1}^{n} \sigma_i$ sur $(T, \mathcal{T})$, produit de la famille $(\sigma_i)_{i=1,\dots,n}$: $\sigma \in \Sigma$.

Or en reprenant les notations et résultats du chapitre II (§ IV), à toute probabilité σ sur $(T, \mathcal{T})$ on faisait correspondre une probabilité P_σ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ donnée par

$$P_\sigma(A) = \int P_\theta(A)\, d\sigma(\theta) \qquad (A \in \mathcal{A})$$

donc une probabilité $P_\sigma^{(R)}$ sur $(R, \mathcal{R})$ image de P_σ par l'application projection p_R avec

$$P_\sigma^{(R)}(F) = \int P_\theta^{(R)}(F)\, d\sigma(\theta) \qquad (F \in \mathcal{R})$$

d'où une probabilité $P_\sigma^{(S)}$ sur $(S, \mathcal{S})$, image de $P_\sigma^{(R)}$ par l'application mesurable $f : R \to S$, vérifiant

$$P_\sigma^{(S)}(D) = \int P_\theta^{(S)}(D)\, d\sigma(\theta) \qquad (D \in \mathcal{S}).$$

Donc à toute stratégie globale $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ correspond une probabilité $P_\sigma^{(S)}$ sur $(S, \mathcal{S})$ qui pour le $i^{\text{ème}}$ joueur aura une "utilité" $U_i\,[P_\sigma^{(S)}]$ $(i = 1, \dots, n)$ avec $\sigma = \bigotimes_{i=1}^{n} \sigma_i$.

Remarque : A la stratégie globale $(\delta_{\theta_1^0}, \dots, \delta_{\theta_n^0})$, c'est-à-dire à la tactique globale $\theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_n^0)$, cette formulation fera correspondre une probabilité $P_\sigma^{(S)}$ avec $\sigma = \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{\theta_i^0} = \delta_{\theta^0}$. Alors pour $D \in \mathcal{S}$

$$P_\sigma^{(S)}(D) = \int P_\theta^{(S)}(D)\, d\delta_{\theta^0} = P_{\theta^0}^{(S)}(D).$$

Comme $P_\sigma^{(S)}(D) = P_{\theta^0}^{(S)}(D)$ $\forall D \in \mathcal{S}$, on en déduit $P_\sigma^{(S)} = P_{\theta^0}^{(S)}$ c'est-à-dire qu'on retrouve la probabilité $P_{\theta^0}^{(S)}$ sur $(S, \mathcal{S})$ qui correspondait à la tactique globale θ^0.

On supposera que $\forall i = 1, \ldots, n$ et $\forall \sigma_i \in \Sigma_i$, $P_\sigma^{(S)}$ $\left(\sigma = \bigotimes_{i=1}^{n} \sigma_i\right)$ vérifie les conditions du théorème 5 (chapitre III). Alors

$$U_i\,[P_\sigma^{(S)}] = \int u_i\, dP_\sigma^{(S)}.$$

Soit, pour $i = 1, \ldots, n$, V_i la fonction numérique bornée définie par

$$V_i : \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i \to \mathbf{R} : (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \rightsquigarrow V_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \text{ avec}$$

$$V_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = U_i\,[P^{(S)}_{\bigotimes_{i=1}^{n} \sigma_i}] = \int u_i\, dP^{(S)}_{\bigotimes_{i=1}^{n} \sigma_i}.$$

Pour $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$, $V_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ sera dite utilité de la stratégie globale $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ pour la joueur i.

Remarque : Pour tout $i = 1, \ldots, n$, V_i est un prolongement de v_i à $\prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$. En effet pour la tactique globale $\theta^0 = (\theta_1^0, \ldots, \theta_n^0)$, on peut écrire

$$V_i(\theta_1^0, \ldots, \theta_n^0) = U_i\,[P_{\theta^0}^{(S)}] = v_i(\theta^0) = v_i(\theta_1^0, \ldots, \theta_n^0)$$

d'après la remarque précédente et la définition de v_i.

Proposition

Pour toute stratégie globale $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$V_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \int v_i\, d\sigma \quad \text{où} \quad \sigma = \bigotimes_{i=1}^{n} \sigma_i.$$

Démonstration : Soit $f : \mathbf{R} \to S$, $p_R : \Omega \to R$ et $u_i : S \to R$.

Soit $Y_i : \Omega \to \mathbf{R}$ l'application de Ω dans $\mathbf{R}$ définie par $Y_i = u_i \circ f \circ p_R$.

Comme f et p_R sont mesurables, $f \circ p_R : \Omega \to S$ est mesurable.

Soit $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ une stratégie globale et $\sigma = \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \sigma_i$. Si P_σ est la probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ et $P_\sigma^{(S)}$ la probabilité sur $(S, \mathcal{S})$ qui correspond à σ, on peut écrire $P_\sigma^{(S)} = (f \circ p_R)(P_\sigma)$ c'est-à-dire que $P_\sigma^{(S)}$ est l'image de P_σ par $f \circ p_R$.

u_i étant mesurable et bornée, u_i est $P_\sigma^{(S)}$-intégrable, donc $Y_i = u_i \circ (f \circ p_R)$ est P_σ-intégrable et

$$\int Y_i \, dP_\sigma = \int u_i \, dP_\sigma^{(S)} = U_i(P^{(S)})$$

(cf. Chapitre I § II, Intégration par rapport à une mesure image).

Alors (cf Chapitre I, § III, Proposition 1) la fonction réelle

$$X_i : T \to \mathbf{R} : \theta \rightsquigarrow X_i(\theta) = \int Y_i \, dP_\theta$$

est une version de l'espérance conditionnelle $E^{\mathcal{T}}(Y_i)$ c'est-à-dire $\int Y_i dP_\sigma = \int X_i \, d\sigma$,

Or $\quad \forall \theta \in T, \int Y_i \, dP_\theta = \int u_i \, dP_\theta^{(S)}$ car $P_\theta^{(S)} = (f \circ p_R)(P_\theta)$

c'est-à-dire $\quad \int Y_i \, dP_\theta = U_i \, [P_\theta^{(S)}] = v_i(\theta)$,

donc $\forall \theta \in T \quad X_i(\theta) = v_i(\theta)$, c'est-à-dire $X_i = v_i$

d'où $\quad U_i(P_\sigma^{(S)}) = V_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \int Y_i \, dP_\sigma = \int v_i \, d\sigma$

soit $\quad V_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \int v_i \, d\sigma = \int v_i(\theta) \, d\sigma\,(\theta)$

et la proposition.

Définition 3

Le jeu stratégique associé au jeu sous forme normale $(T_1, \ldots, T_n, v_1, \ldots, v_n)$ est le $2n$-uple $(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n, V_1, \ldots, V_n)$ où pour $i = 1, \ldots, n$ $\Sigma_i = \mathcal{M}_1(T_i, \mathcal{T}_i)$ et V_i est l'application

$$\prod_{i=1}^{n} \Sigma_i \to \mathbf{R} : (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \rightsquigarrow V_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \int v_i \; d \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} \sigma_i .$$

III – INTRODUCTION A L'ETUDE DES JEUX SOUS FORME NORMALE

Quel que soit le modèle de jeu que l'on considère, qu'il s'agisse d'un jeu de lutte sans communication (les joueurs ne peuvent communiquer et agissent isolément) ou d'un jeu de lutte et de coopération (une certaine liberté de communiquer et de coopérer est laissée aux joueurs, auquel cas on se heurte au difficile problème de l'agrégation des préférences individuelles c'est-à-dire la construction de préférences collectives à partir de préférences individuelles), on doit toujours prendre en considération les notions, déduites de la forme normale du jeu considéré, d'espérances des joueurs, de tactiques prudentes, de dominance et de tactiques en équilibre.

Soit donc $(T_1, \ldots, T_n, v_1, \ldots, v_n)$ un jeu à n joueurs sous forme normale.

Espérance – Tactique prudente

Soit $i = 1, \ldots, n$ et $\theta_i^0 \in T_i$. Par définition l'espérance relative à la tactique θ_i^0 pour le joueur i sera

$$e_i(\theta_i^0) = \inf_{\substack{\theta_j \in T \\ j \neq i}} v_i(\theta_1, \ldots, \theta_i^0, \ldots, \theta_n).$$

L'espérance du joueur i sera alors

$$e_i = \sup_{\theta_i \in T_i} e_i(\theta_i) = \sup_{\theta_i \in T_i} \inf_{\substack{\theta_j \in T_j \\ j \neq i}} v_i(\theta_1, \ldots, \theta_n).$$

Une tactique $\theta_i^0 \in T_i$ du joueur i sera dite prudente si $e_i(\theta_i^0) = e_i$.

Il est facile de voir qu'il n'existe pas nécessairement de tactique prudente.

Soit $\epsilon > 0$. Une tactique $\theta_i^\epsilon \in T_i$ sera dite prudente à ϵ près si $e_i(\theta_i^\epsilon) \geqslant e_i - \epsilon$.

Alors la définition de e_i nous assure de l'existence d'au moins une tactique prudente à ϵ près ($\forall \epsilon > 0$).

Dominance

Soit $i = 1, \ldots, n$ et $\theta_i^0, \theta_i^1 \in T_i$; on dira que

– θ_i^0 domine strictement θ_i^1 si

$$v_i(\theta_1, \ldots, \theta_i^0, \ldots, \theta_n) > v_i(\theta_1, \ldots, \theta_i^1, \ldots, \theta_n) \qquad \forall \theta_j \in T_j \quad (j \neq i)$$

– θ_i^0 domine θ_i^1 si

$$v_i(\theta_1, \ldots, \theta_i^0, \ldots, \theta_n) \geqslant v_i(\theta_1, \ldots, \theta_i^1, \ldots, \theta_n) \qquad \forall \theta_j \in T_j \quad (j \neq i).$$

Alors un joueur agissant isolément ne perdra rien à choisir les tactiques dominantes plutôt que les tactiques dominées et ces considérations permettent parfois de remplacer l'étude du jeu considéré par celle d'un jeu plus simple en faisant abstraction des tactiques dominées de chaque joueur. Etant donné 2 tactiques globales $(\theta_1^0, \ldots, \theta_n^0)$ et $(\theta_1^1, \ldots, \theta_n^1) \in T$, on dira que $(\theta_1^0, \ldots, \theta_n^0)$ domine $(\theta_1^1, \ldots, \theta_n^1)$ si

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad v_i\,(\theta_1^0, \ldots, \theta_n^0) \geqslant v_i\,(\theta_1^1, \ldots, \theta_n^1)$$

$$\exists i = 1, \ldots, n \text{ tel que } v_i\,(\theta_1^0, \ldots, \theta_n^0) > v_i\,(\theta_1^1, \ldots, \theta_n^1).$$

Ceci nous conduit à la définition de l'extremum de Pareto (fondamental dans l'étude des jeux de lutte et de coopération).

L'extremum de Pareto sera l'ensemble des tactiques globales non dominées.

Equilibre

Dans un jeu sans coopération possible, on dira qu'un système de n tactiques $(\theta_1^0, \ldots, \theta_n^0) \in T$ est en équilibre si chacune de ces tactiques est, pour le joueur qui l'emploie, l'une des meilleures réponses possibles aux $(n-1)$ autres :

$$\forall i = 1, \ldots, n\ ,\ \forall \theta_i \in T_i \quad v_i(\theta_1^0, \ldots, \theta_i^0, \ldots, \theta_n^0) \geqslant v_i(\theta_1^0, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_n^0).$$

Rien ne garantit l'existence ni l'unicité d'un système de tactiques en équilibre dans un jeu déterminé et il peut arriver qu'il n'en existe aucun ou qu'il en existe plusieurs.

Espérance stratégique

Ce qui vient d'être dit d'un jeu (tactique) sous forme normale se transpose sans modification au jeu stratégique associé :

Soit $i = 1, \ldots, n$ et $\sigma_i^0 \in \Sigma_i$. L'espérance relative à la stratégie σ_i^0 pour le joueur i sera

$$e_i'\,(\sigma_i^0) = \inf_{\substack{\sigma_j \in \Sigma_j \\ j \neq i}} V_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_2^0, \ldots, \sigma_n).$$

L'espérance (stratégique) du joueur i sera

$$e_i' = \sup_{\sigma_i \in \Sigma_i} e_i'(\sigma_i) = \sup_{\sigma_i \in \Sigma_i} \inf_{\substack{\sigma_j \in \Sigma_j \\ j \neq i}} V_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n).$$

On obtient de même les notions de stratégies prudentes, de dominance et de système de stratégies en équilibre.

Cas du duel

Un duel est par définition un jeu à 2 joueurs dont les préférences sont opposées : si $\overset{1}{\lesssim}$ est la relation de préférence du joueur 1 sur $\mathcal{M}_1(S)$ et $\overset{2}{\lesssim}$ celle du joueur 2, on doit avoir :

$$p \overset{1}{\lesssim} p' \Leftrightarrow p' \overset{2}{\lesssim} p \qquad \forall p\,,\, p' \in \mathcal{M}_1(S).$$

Alors si U_1 est une utilité linéaire bornée sur $(\mathcal{M}_1(S)\,,\overset{1}{\lesssim})$, U_1 est une utilité linéaire bornée sur $(\mathcal{M}_1(S)\,,\overset{2}{\lesssim})$. Du fait de l'unicité (à une transformation linéaire croissante près) de l'utilité linéaire sur $(\mathcal{M}_1(S)\,,\overset{2}{\lesssim})$, on pourra supposer que U_1 décrit les préférences du joueur 2 sur $\mathcal{M}_1(S)$.

Si v_1 et v_2 sont les utilités correspondantes des 2 joueurs sur $T_1 \times T_2$, on en déduit $v_2(\theta) = -\,v_1(\theta) \quad \forall \theta \in T_1 \times T_2$.

Alors le jeu sous forme normale $(T_1\,, T_2\,, v_1\,, v_2)$ sera écrit $(T_1\,, T_2\,, v)$ avec $v = v_1 = -\,v_2$.

L'espérance relative à la tactique $\theta_1 \in T_1$ pour le joueur 1 sera

$$e_1(\theta_1) = \inf_{\theta_2 \in T_2} v\,(\theta_1\,, \theta_2)$$

et l'espérance du joueur 1 sera

$$e_1 = \sup_{\theta_1 \in T_1} e_1(\theta_1) = \sup_{\theta_1 \in T_1} \inf_{\theta_2 \in T_2} v(\theta_1\,, \theta_2).$$

L'espérance relative à la tactique $\theta_2 \in T_2$ pour le joueur 2 serait

$$e_2^0(\theta_2) = \inf_{\theta_1 \in T_1} [-\,v(\theta_1\,, \theta_2)] = -\sup_{\theta_1 \in T_1} v(\theta_1\,, \theta_2)$$

et l'espérance du joueur 2 serait

$$e_2^0 = \sup_{\theta_2 \in T_2} e_2^0(\theta_2) = -\inf_{\theta_2 \in T_2} \sup_{\theta_1 \in T_1} v(\theta_1\,, \theta_2).$$

Mais, pour l'étude du duel, on préfère définir l'espérance relative à la tactique $\theta_2 \in T_2$ pour le joueur 2 par

$$e_2(\theta_2) = \sup_{\theta_1 \in T_1} v(\theta_1, \theta_2)$$

et l'espérance du joueur 2 par

$$e_2 = \inf_{\theta_2 \in T_2} \sup_{\theta_1 \in T_1} v(\theta_1, \theta_2) = \inf_{\theta_2 \in T_2} e_2(\theta_2).$$

Alors on peut montrer que dans tout duel $e_1 \leqslant e_2$: en effet

$$\forall \theta_1 \in T_1, \forall \theta_2 \in T_2 \qquad e_1(\theta_1) \leqslant v(\theta_1, \theta_2) \leqslant e_2(\theta_2)$$

d'où

$$e_1 = \sup_{\theta_1 \in T_1} e_1(\theta_1) \leqslant e_2(\theta_2) \qquad \forall \theta_2 \in T_2$$

et

$$e_1 \leqslant \inf_{\theta_2 \in T_2} e_2(\theta_2) = e_2.$$

Si $e_1 = e_2$ on dit que le duel a une valeur (tactique) et on peut montrer que si les 2 joueurs ont des tactiques prudentes, elles définissent un système de tactiques en équilibre et sont dites optimales.

Si $e_1 < e_2$ on dit que le duel n'a pas de valeur (tactique) et on est amené à plonger le duel dans le jeu stratégique associé : le duel (Σ_1, Σ_2, V) avec

$$V(\sigma_1, \sigma_2) = \int v(\theta_1, \theta_2)\, d(\sigma_1 \otimes \sigma_2).$$

Alors l'espérance relative à la stratégie $\sigma_1 \in \Sigma_1$ pour le joueur 1 sera $e'_1(\sigma_1) = \inf\limits_{\sigma_2 \in \Sigma_2} V(\sigma_1, \sigma_2)$ et l'espérance (stratégique) du joueur 1 sera

$$e'_1 = \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} e'_1(\sigma_1) = \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} V(\sigma_1, \sigma_2).$$

L'espérance relative à la stratégie $\sigma_2 \in \Sigma_2$ pour le joueur 2 sera $e'_2(\sigma_2) = \sup\limits_{\sigma_1 \in \Sigma_1} V(\sigma_1, \sigma_2)$ et l'espérance (stratégique) du joueur 2 sera

$$e'_2 = \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} e'_2(\sigma_2) = \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} V(\sigma_1, \sigma_2).$$

Alors

$$\forall \sigma_1 \in \Sigma_1 \qquad e'_1(\sigma_1) = \inf_{\theta_2 \in T_2} V(\sigma_1, \theta_2)$$

$$e'_1 = \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \inf_{\theta_2 \in T_2} V(\sigma_1, \theta_2),$$

$$\forall \sigma_2 \in \Sigma_2 \qquad e'_2(\sigma_2) = \sup_{\theta_1 \in T_1} V(\theta_1, \sigma_2)$$

$$e'_2 = \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \sup_{\theta_1 \in T_1} V(\theta_1, \sigma_2)$$

et $$e_1 \leqslant e'_1 \leqslant e'_2 \leqslant e_2 .$$

En effet

$$\forall \theta_2 \in T_2 \quad \text{et} \quad \forall \sigma_1 \in \Sigma_1 \qquad V(\sigma_1, \theta_2) = V(\sigma_1, \delta_{\theta_2}) = \int v(\theta_1, \theta_2)\, d\sigma_1$$

et en utilisant le théorème de Fubini (Chapitre I § II)

$$\forall \sigma_1 \in \Sigma_1, \forall \sigma_2 \in \Sigma_2 \qquad V(\sigma_1, \sigma_2) = \int d\sigma_2 \left[\int v(\theta_1, \theta_2)\, d\sigma_1\right]$$

c'est-à-dire $$V(\sigma_1, \sigma_2) = \int V(\sigma_1, \theta_2)\, d\sigma_2$$

d'où $$V(\sigma_1, \sigma_2) \geqslant \inf_{\theta_2 \in T_2} V(\sigma_1, \theta_2) \qquad \forall \sigma_2 \in \Sigma_2$$

et $$\inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} V(\sigma_1, \sigma_2) \geqslant \inf_{\theta_2 \in T_2} V(\sigma_1, \theta_2).$$

D'autre part de $T_2 \subset \Sigma_2$, on déduit

$$\inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} V(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant \inf_{\theta_2 \in T_2} V(\sigma_1, \theta_2)$$

d'où $$e'_1(\sigma_1) = \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} V(\sigma_1, \sigma_2) = \inf_{\theta_2 \in T_2} V(\sigma_1, \theta_2).$$

Montrons que $e_1 \leqslant e'_1$:

$$\forall \theta_1 \in T_1 \quad e'_1(\theta_1) = \inf_{\theta_2 \in T_2} V(\theta_1, \theta_2) = \inf_{\theta_2 \in T_2} v(\theta_1, \theta_2) = e_1(\theta_1)$$

on en déduit $e_1(\theta_1) \leqslant e'_1 \;\; \forall \theta_1 \in T_1$, d'où $e_1 = \sup_{\theta_1 \in T_1} e_1(\theta_1) \leqslant e'_1$.

On montrerait de même que $\forall \sigma_2 \in \Sigma_2 \;\; e'_2(\sigma_2) = \sup_{\theta_1 \in T_1} V(\theta_1, \sigma_2)$ et que $e'_2 \leqslant e_2$.

Comme $e'_1 \leqslant e'_2$ a déjà été démontré (duel tactique), on conclut

$$e_1 \leqslant e'_1 \leqslant e'_2 \leqslant e_2 .$$

Si $e'_1 = e'_2$ on dit que le duel a une valeur (stratégique) et si les 2 joueurs ont des stratégies prudentes elles définissent un système de stratégies en équilibre et sont dites optimales.

Enfin il se peut qu'un duel n'admette pas de valeur stratégique ($e'_1 < e'_2$).

Si T_1 et T_2 sont finis (le duel est alors dit fini), il existe des tactiques et des stratégies prudentes. On peut montrer (théorème de Von Neumann) que tout duel fini a une valeur, stratégique en général. Alors tout couple de stratégies prudentes définit un système de stratégies en équilibre et tous les équilibres sont "équivalents et interchangeables" (cf (15) et (19)).

Ce théorème a été prolongé à des classes de plus en plus générales de duels infinis (pour une étude détaillée de tels jeux cf. (1), (2), (15) et (16)). En particulier le théorème de Sion étend les résultats de Von Neumann au cas où T_1 et T_2 sont des parties convexes compactes d'espaces vectoriels topologiques séparés sur **R** et où l'utilité v vérifie certaines propriétés de semi-continuité et de quasi-convexité.

Quoique le forme normale ne soit pas toujours le cadre le mieux adapté à l'étude des jeux plus généraux que le duel, de nombreux modèles issus de celle-ci ont été proposés pour les représenter. Citons en particulier le modèle de Nash (qui après un élargissement convenable de l'ensemble des tactiques de chaque joueur interdit toute communication entre les joueurs), le modèle de Von Neumann-Morgenstern (qui permet toute communication et toute coopération entre les joueurs et, en supposant l'existence d'un bien indéfiniment divisible dont l'échange entre les joueurs permet un transfert d'utilité entre eux, s'appuie sur le concept de fonction caractéristique d'un jeu) et le modèle intermédiaire de Luce (fondé sur la notion de ψ-stabilité).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Contributions to the Theory of Games : Vol. I, II, III, IV (editors : H.W. Kuhn, A.W. Tucker, M, Dresher, P. Wolfe, R.D. Luce), *Annals of Mathematics Studies* n° 24, 28, 39, 40. Princeton University Press 1950, 1953, 1957, 1959.

[2] Advances in Game Theory : (editors M. Dresher, L.S. Shapley A.W. Tucker) : *Annals of Mathematics Studies* n° 52. Princeton University Press 1964.

[3] Game Theory and related approaches to Social Behavior : (editor M. Shubik) : Wiley 1964.

[4] Theory of Games : Techniques and Applications : (editor A. Mensch) *Proceedings of a Conference under the aegis of the NATO Scientific Affairs Committee (Toulon 1964),* the English Universities Press 1966.

[5] BERGE C. – *Théorie générale des jeux à N personnes :* Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule CXXXVIII ; Gauthier-Villars 1957

[6] BERGE C. et GHOUILA-HOURI A. – *Programmes, jeux et réseaux de transport* ; Dunod 1962.

[7] BLACKWELL D. and GIRSCHICK M.A. – *"Theory of games and statistical decisions"* ; Wiley 1954.

[8] COURREGE P. – *Théorie de la mesure* ; C.D.U. 1965.

[9] DINCULEANU N. – *Vector Measures* ; International series of monographs in pure and applied Mathematics : Vol. 95 ; Pergamon Press 1967.

[10] DRESHER M. – *Games of strategy : Theory and applications* ; The Rand Corporation, Prentice Hall 1961.

[11] DUNFORD and SCHWARTZ. – *Linear Operators :* **Part I,** Interscience Publishers New-York 1958.

[12] GUILBAUD G. Th. – *Leçons sur les éléments principaux de la théorie mathématique des jeux,* dans "Stratégies et décisions économiques" CNRS 1954.

[13] HALMOS P.R. – *Measure Theory* ; Van Nostrand 1950.

[14] ISAACS R. – *Differential Games : a mathématical Theory with applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization :* Wiley 1961.

[15] KARLIN S. – *Mathematical methods and theory in games, programming and économics* ; Vol. I et II, Pergamon Press 1959.

[16] LUCE R.D. and RAIFFA H. – *Games and decisions : Introduction and critical survey* ; Wiley 1957.

[17] MAC KINSEY J.C.C. – *Introduction to the Theory of games* ; The Rand Corporation, Mac Graw-Hill 1952.

[18] NEVEU J. – *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités* ; Masson et Cie 1964.

[19] NEUMANN J. VON and MORGENSTERN. – *Theory of games and economic behavior* ; Princeton University Press 1944 (2ème édition 1947, 3ème édition 1953).

[20] NICOLAS J.B. – *Théorème du Minimax et applications à la théorie du Potentiel*; Thèse 3ème cycle, Faculté des Sciences de Paris 1968.

[21] OWEN G. – *Game Theory* ; Saunders Company 1968.

[22] SION M. – *Sur une généralisation du théorème minimax* ; C.R. Académie des Sciences Paris 1957.

[23] WALD A. – *Statistical decision functions* ; Wiley 1950.