C. RAFFIN

Programmation mathématique et dualité

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 10 (1967), p. 3-22
<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1967__10__3_0>

PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE ET DUALITÉ

par

C. RAFFIN

INTRODUCTION

Etant donné un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbf{R}$, et une partie D non vide de E, on appelle programme mathématique le problème de la maximisation d'une fonction numérique f(X) lorsque X est assujetti à appartenir à D. Il s'agit, en fait, de rechercher la borne supérieure de l'ensemble f(D), soit :

$$\sup \{y \ , \quad \exists\ X \in D \quad f(X) = y\} \tag{1}$$

La borne supérieure de f(D) est égale au plus petit des majorants de f(D), soit :

$$\operatorname{Min} \{z \ , \quad \forall\ X \in D \quad f(X) \leqslant z\} \tag{2}$$

(1) et (2) sont deux formulations "duales" du problème considéré. On se propose, en utilisant la formulation (2) d'introduire de manière naturelle le programme dual d'un programme linéaire.

On verra, ultérieurement, que ce point de vue contribue à éclairer la notion de dualité également dans le cas de programmes non linéaires.

---

(1) Ce texte a fait l'objet de deux exposés au séminaire de statistique et économétrie de l'Université de Poitiers (3 mars et 12 mai 1966).

Théorème préliminaire de dualité pour les cônes polyédraux convexes

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, E^* l'espace dual. Les inégalités $a_i(X) \leqslant 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant q$, où $a_i \in E^*$, définissent dans E un cône polyédral convexe.

Désignons par C^* le cône polaire de C défini dans E^* :

$$C^* = \{l \ , \quad \forall X \in C \quad l(X) \leqslant 0\}$$

Lorsque C est défini par les inégalités

$$a_i(X) \leqslant 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant q$$

C^* est le cône engendré par les éléments a_i .

Démonstration

Désignons par Γ le cône engendré par les éléments a_i

$$\Gamma = \{l \ , \quad \exists\, u_i \geqslant 0 \qquad l = \sum u_i \ a_i\}$$

a) il est immédiat que

$$l \in \Gamma \implies l \in C^*$$

donc

$$\Gamma \subset C^*$$

b) Si $l \in C^*$, c'est dire que le système

$$\begin{cases} a_i(X) \leqslant 0 \\ l(X) > 0 \end{cases}$$

n'a pas de solution.

Par suite, en raison du lemme de Minkowski-Farkas, le sys - tème

$$l = \sum u_i \ a_i$$

a au moins une solution non négative en u_i .

Donc $l \in \Gamma$ et $C^* \subset \Gamma$

De a) et b) il résulte que $C^* = \Gamma$.

Remarque :

Il est immédiat que $\Gamma^* = C$. Le théorème précédent a donc pour corollaire :

$$C^{**} = C$$

Programme dual d'un programme linéaire

Soit le programme : Maximiser $f(X)$, sous les contraintes $g_i(X) \leqslant b_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$.

f et g_i étant des éléments du dual E^* de E

Les contraintes $g_i(X) \leqslant b_i$ définissent dans E un polyèdre convexe P . Associons à P le cône polyédral convexe $C(P)$ défini dans l'espace vectoriel $E \times R$ par les inéquations :

$$\begin{cases} g_i(X) - b_i\ t \leqslant 0 \\ \qquad\qquad t \geqslant 0 \end{cases}$$

Et considérons dans $E^* \times R$ le cône polaire de $C(P)$:

$$C^*(P) = \{(l\ ,\ a)\ ,\ \ \forall (X\ ,\ t) \in C(P)\ \ l(X) + a\ t < 0\}$$

La formulation (2) du programme linéaire envisagé s'écrit :

$$\text{Min}\ \{z,\ \forall\ X \in P\ \ f(X) - z \leqslant 0\}$$

Dans le cas où P <u>n'est pas vide</u>, on peut écrire de manière équivalente :

$$\text{Min}\ \{z\ ,\ \forall (X\ ,\ t) \in C(P)\ \ f(X) - z\ t \leqslant 0\}$$

Soit : Min z , sous la contrainte $(f\ ,\ -z) \in C^*(P)$.

D'après le théorème de dualité, $C^*(P)$ est engendré dans $E^* \times R$ par les éléments $(g_i\ ,\ -b_i)$ et $(0\ ,\ -1)$.

Le programme s'écrit donc :

Min z , sous les contraintes

$$\begin{cases} (f\ ,\ -z) = \sum u_i\ (g_i\ ,\ -b_i) + v\ (0\ ,\ -1) \\ u_i \geqslant 0 \\ v \geqslant 0 \end{cases}$$

soit, sous une forme équivalente

Min z , sous les contraintes :

$$\begin{cases} f = \sum u_i g_i \\ z = \sum u_i b_i + v \\ u_i \geqslant 0 \\ v \geqslant 0 \end{cases}$$

Soit, enfin, sous une forme équivalente, que nous appellerons programme dual du programme linéaire envisagé.

Min $z = \sum u_i b_i$, sous les contraintes

$$\begin{cases} f = \sum u_i g_i \\ u_i \geqslant 0 \end{cases}$$

Désignons par $A(P)$ le cône défini dans E par les inégalités $g_i(X) \leqslant 0$. Les contraintes du programme dual expriment en fait que f appartient au cône engendré par les g_i dans E^* .

Ce cône est, en raison du théorème de dualité le cône polaire $A^*(P)$ du cône $A(P)$.

Les variables duales u_i d'une solution réalisable sont des composantes non négatives de f sur les g_i .

Propriétés complémentaires des programmes primal et dual

Le programme dual explicitant la formulation (2) du problème initial, on voit que deux cas sont à envisager.

1er cas : $f(P)$ n'est pas borné ; l'ensemble des majorants est alors vide et le programme dual ne saurait avoir de solution réalisable ; en d'autres termes $f \notin A^*(P)$.

2ème cas : $f(P)$ est borné ; dans ce cas le programme dual a des solutions réalisables $(f \in A^*(P))$ et le minimum de $z = \sum u_i b_i$ est égal au maximum de $f(X)$.

Remarque :

Le système de contraintes $g_i(X) \leqslant b_i$ définit un polyèdre convexe P que nous avons supposé non vide. C'est uniquement dans ce cas que nous avons introduit le programme dual :

Min $\sum u_i \, b_i$ sous les contraintes

$$\begin{cases} f = \sum u_i \, g_i \\ u_i \geqslant 0 \end{cases}$$

Cependant, dans le cas où P est vide, on peut écrire aussi bien ce programme. Quelle est alors sa signification ?

Le programme dual peut encore s'écrire, comme précédemment.

Min z sous la contrainte $(f \, , \, - z) \in C^*(P)$.

Mais ici $C(P)$ se réduit à :

$$\begin{cases} g_i(X) \leqslant 0 & : \quad \text{cône } A(P) \\ t = 0 \end{cases}$$

et $C^*(P)$ est l'ensemble des éléments $(l \, , \, a)$ de $E^* \times R$ tels que $\forall \, X \in A(P) \, l(X) \leqslant 0$, a étant un nombre réel arbitraire . Soit

$$C^*(P) = \{(l \, , \, a), l \in A^*(P) \, , \, a \text{ réel quelconque}\} \, .$$

Dès lors, deux cas sont à distinguer :

1er cas: $\underline{f \in A^*(P)}$, ce qui signifie que le programme dual a au moins une solution réalisable.

Dans ce cas quel que soit z $(f \, , \, - z) \in C^*(P)$.

Le minimum de z est $-\infty$

2ème cas : $\underline{f \in A^*(P)}$; alors le programme dual n'a pas de solution réalisable.

Propriétés de complémentarité dans le cas où $f(P)$ est borné

Si X^o et U^o sont des solutions optimales des programmes primal et dual, on a :

$$f(X^o) = \sum u_i^o \, b_i$$

De plus, les contraintes du programme dual entraînent :

$$f(X^o) = \sum u_i^o \, g_i(X^o)$$

Par suite :

$$\sum u_i^o (g_i(X^o) - b_i) = 0$$

Comme, pour chaque i, en raison des contraintes :

$$u_i^o \geqslant 0$$

$$g_i(X^o) - b_i \leqslant 0$$

il s'ensuit que, pour chaque i

$$u_i^o (g_i(X^o) - b_i) = 0$$

Donc si $g_i(X^o) - b_i < 0$ on a nécessairement $u_i^o = 0$: si une contrainte est non effective à l'optimum la variable duale associée est nulle.

De même si $u_i^o > 0$, on a nécessairement $g_i(X^o) - b_i = 0$: si une variable duale est positive à l'optimum, la contrainte correspondante est effective.

Soit I_0 l'ensemble des indices i tels que, pour toute solution optimale X^o on ait $g_i(X^o) - b_i = 0$. On sait que les solutions optimales forment une "face" de P. I_0 est donc l'ensemble des indices des contraintes qui s'annulent sur la face optimale de P

$\forall\, i \notin I_0$, $\exists\, X_0$ optimale tel que $g_i(X^o) - b_i < 0$ et par suite $u_i^o = 0$

On a donc, d'après le programme dual :

$$f = \sum_{i \in I_0} u_i^o \, g_i$$

Supposons que les g_i, $i \in I_0$, sont indépendants, alors les u_i^o sont uniques. Nous allons voir que, de plus, $\forall\, i \in I_0$ $u_i^o > 0$. En effet, si, pour un certain $j \in I_0$ on avait $u_j^o = 0$ on pourrait supprimer la contrainte effective correspondante sans changer la valeur optimale du programme dual. Ce résultat implique que la face optimale de P soit contenue dans la face optimale du nouveau polyèdre P_1 obtenu en supprimant la contrainte d'indice j. Or la face optimale F_0 de P est définie par

$$\begin{cases} g_i(X) - b_i = 0 & i \in I_0 \\ g_i(X) - b_i \leqslant 0 & i \notin I_0 \end{cases}$$

$g_i(X) - b_i = 0 \qquad i \in I_o$ définit une variété linéaire L_o

$g_i(X) - b_i \leqslant 0 \qquad i \notin I_o$ définit un polyèdre P_o

La face optimale F_1 de P_1 doit contenir F_o . Ceci implique que l'ensemble d'indices I_1 attaché à F_1 est, au plus , $I_1 = I_o - \{j\}$. En effet $\forall\ i \notin I_o \quad \exists\ X \in F_o$ tel que $g_i(X) - b_i < 0$.

La plus petite face de P_1 contenant F_o est donc

$$L_1 \cap P_o$$

L_1 étant la variété linéaire définie par :

$$g_i(X) - b_i = 0 \qquad i \in I_1$$

On a $L_o \subset L_1$ et, comme les g_i , $i \in I_o$, sont supposés indépendants l'inclusion est stricte. On a aussi $L_o \cap P \subset L_1 \cap P$ et l'inclusion est stricte, F_o étant supposée non vide.

Par suite $\exists X \quad X \in L_1 \cap P$ (donc $X \in L_1 \cap P_o$)
$X \notin L_o$

Donc $\qquad f(X) < f(X^o)$ si $X^o \in F_o$

$L_1 \cap P_o$ n'est donc pas une face optimale de P_1 puisque $f(X)$ n'est pas constante pour $X \in F_1$.

En résumé, si les g_i , $i \in I_o$ sont indépendants,

$$\forall\ i \in I_o \qquad u_i^o > 0 \qquad \text{et} \qquad u_i^o \text{ unique}$$
$$\forall\ i \notin I_o \qquad u_i^o = 0$$

Et à l'optimum on a

$$f = \sum_{i \in I_o} u_i^o\, g_i$$

$$f(X^o) = \sum_{i \in I_o} u_i^o\, b_i$$

Les variables duales à l'optimum sont les composantes de f sur les contraintes effectives. Leur valeur ne dépend que de I_o . Donc, tant que I_o ne change pas, la valeur optimale des deux programmes est une fonction linéaire des b_i avec pour coefficients les valeurs u_i^o des variables duales à l'optimum.

On a vu que ces valeurs sont positives et uniques si les g_i , $i \in I_o$, sont indépendants.

Forme canonique des programmes primal et dual

Dans les applications économiques, le programme primal se présente le plus souvent sous la forme suivante :

X étant un vecteur (colonne) de $\mathbf{R}^n$, maximiser $C\,X$, sous les contraintes $A\,X \leqslant B$, $X \geqslant 0$

C est un vecteur (ligne) de $\mathbf{R}^n$

B est un vecteur (colonne) de $\mathbf{R}^m$

$A = (a_i^j)$ est une matrice $1 \leqslant i \leqslant m$; $1 \leqslant j \leqslant n$

Posons :

$$f(X) = C\,X$$

$$g_i(X) = a_i^1\,x_1 + \ldots + a_i^n\,x_n \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

$$\left.\begin{aligned} g_i(X) &= -\,x_{m-i} \\ b_i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad m \leqslant i \leqslant m+n$$

Le programme dual s'écrit :

U étant un vecteur (ligne) de $\mathbf{R}^m$

V étant un vecteur (ligne) de $\mathbf{R}^n$

Minimiser $U\,b$, sous les contraintes :

$$\begin{cases} C = U\,A - V \\ U \geqslant 0 \ , \ V \geqslant 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit, sous une forme équivalente :

Minimiser $U\,B$, sous les contraintes

$$\begin{cases} U\,A \geqslant C \\ U \geqslant 0 \end{cases}$$

On remarque que les variables duales V associées aux contraintes $X \geqslant 0$ jouent le rôle de variables d'écart dans les contraintes duales écrites sous la forme canonique.

Après avoir étudié la dualité dans le cas des programmes linéaires, on se propose de considérer le cas de certains programmes non linéaires : programmes différentiables et programmes convexes.

PROGRAMMES DIFFERENTIABLES

Soit le programme $\mathcal{P}$: maximiser $f(X)$ sous les contraintes $g_i(X) \leqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Les contraintes $g_i(X) \leqslant 0$ définissent dans $\mathbb{R}^n$ un domaine D supposé non vide. Les fonctions f et g_i sont supposées différentiables dans un domaine ouvert contenant D .

Notations : X représente le vecteur colonne de ses n composantes : $x_1 , \ldots , x_n$

φ étant une fonction différentiable de n variables, on représentera le gradient de φ au point X_0 par le vecteur ligne des dérivées partielles en ce point :

$$\frac{d\varphi}{dX_0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(X_0) , \ldots , \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(X_0)\right)$$

DEFINITION : On appellera programme linéaire tangent à $\mathcal{P}$ au point X_0 , le programme linéaire en $X - X_0$ suivant :

$$\text{Maximiser} \quad f(X_0) + \frac{df}{dX_0}(X - X_0)$$

sous les contraintes :

$$g_i(X_0) + \frac{dg_i}{dX_0}(X - X_0) \leqslant 0$$

On désignera par $P(X_0)$ le polyèdre convexe défini par les contraintes de ce programme.

Hypothèse de régularité

Un point $X_0 \in D$ est dit régulier pour $\mathcal{P}$ si pour tout $X \in P(X_0)$ il existe un arc différentiable $\xi(t)$ $0 \leqslant t \leqslant 1$ contenu dans D , tel que $\xi(0) = X_0$ et $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = \lambda(X - X_0)$ avec $\lambda > 0$.

THEOREME 1 : Si X_0 est optimal et régulier pour $\mathcal{P}$, alors X_0 est optimal pour le programme linéaire tangent en X_0

Démonstration : Montrons d'abord que $X_0 \in P(X_0)$

$$X_0 \in D \quad \text{donc} \quad g_i(X_0) \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad X_0 \in P(X_0)$$

Il faut montrer maintenant que pour tout $X \in P(X_0)$ on a $\frac{df}{dX_0}(X - X_0) \leqslant 0$. Dans le cas $\frac{df}{dX_0} = 0$, ceci ne demande pas démonstration. Dans l'autre cas, utilisons l'hypothèse de régularité , et considérons un arc différentiable $\xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, contenu dans D , tel que $\xi(0) = X_0$ et $\left(\frac{d\xi}{dt}\right) = \lambda(X - X_0)$ avec $\lambda > 0$.

La fonction $f(\xi(t))$ est différentiable et on a

$$\frac{df(\xi(t))}{dt} = \frac{df}{dX} \cdot \frac{d\xi}{dt}$$

Comme X_0 est optimal pour $\mathcal{P}$, on a, quel que soit t

$$f(\xi(t)) \leqslant f(\xi(0))$$

et par suite :

$$\left(\frac{df(\xi(t))}{dt}\right)_0 \leqslant 0$$

Il s'en suit que :

$$\frac{df}{dX_0} \cdot \lambda(X - X_0) \leqslant 0$$

Comme λ est > 0

$$\frac{df}{dX_0}(X - X_0) \leqslant 0$$

COROLLAIRE : CONDITIONS NECESSAIRES DE KUHN ET TUCKER : Ecrivons le programme dual du programme linéaire tangent au point X_0 :

Minimiser $f(X_0) - \sum u_i \, g_i(X_0)$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dX_o} = \sum u_i \dfrac{dg_i}{dX_o} \\ u_i \geqslant 0 \end{cases}$$

Si X_o est optimal et régulier pour $\mathcal{P}$, en raison du théorème 1, le programme linéaire tangent en X_o a pour valeur $f(X_o)$; c'est aussi la valeur du programme dual.

Par suite, U_o étant un vecteur optimal du programme dual on a :

$$\begin{cases} \sum u_{io}\, g_i(X_o) = 0 \\ \dfrac{df}{dX_o} = \sum u_{io} \dfrac{dg_i}{dX_o} \\ u_{io} \geqslant 0 \end{cases}$$

Les variables duales introduites par Kuhn et Tucker apparaissent comme les valeurs optimales des variables du programme dual du programme linéaire tangent en un point optimal de $\mathcal{P}$.

Relations de complémentarité

Des relations précédentes on déduit, sachant que $X_o \in D$, que pour chaque i on a :

$$u_{io}\, g_i(X_o) = 0$$

Donc : si $g_i(X_o) < 0 \quad u_{io} = 0$

Soit I_o l'ensemble des indices i pour lesquels $g_i(X_o) = 0$ (contraintes effectives en X_o)

$$\forall\, i \notin I_o \quad u_{io} = 0 \quad \text{et on a}$$

$$\frac{df}{dX_o} = \sum_{i \in I_o} u_{io} \frac{dg_i}{dX_o}$$

Si les vecteurs $\dfrac{dg_i}{dX_o}$, $i \in I_o$, sont indépendants, les u_{io} sont uniques. Dans ce cas on peut donner de leurs valeurs l'interprétation suivante :

Interprétation des variables duales u_{io}

B étant un vecteur de $\mathbf{R}^p$, paramètre, considérons la famille de programmes suivants :

Maximiser $f(X)$ sous les contraintes $g_i(X) \leqslant b_i$. Nous avons étudié le cas $B = 0$.

Supposons qu'il existe dans $\mathbf{R}^p$ un voisinage de 0 tel que, pour chaque valeur de B de ce voisinage, il existe une solution optimale $X(B)$ pour laquelle l'ensemble des contraintes effectives soit I_0 .

Supposons de plus que les fonctions f et g_i ont des dérivées secondes continues dans un voisinage de X_0 . Nous allons montrer que, sous ses hypothèses, la valeur du programme, considérée comme fonction de B , est différentiable au point $B = 0$ et que l'on a :

$$df = \sum_{i \in I_0} u_{io} \, db_i = U_o \, . \, db$$

Démonstration : Considérons le système

$$\begin{cases} g_i(X) = b_i & i \in I_0 \\ \dfrac{df}{dX} - \sum\limits_{i \in I_0} u_i \dfrac{dg_i}{dX} = 0 & \end{cases}$$

où les inconnues sont X et u_i , $i \in I_0$.

Ce système a autant d'équations que d'inconnues et admet pour $B = 0$ la solution X_o , u_{io} , $i \in I_o$.

Par hypothèse les fonctions $f(X)$ et $g_i(X)$ ont des dérivées secondes continues dans un voisinage de X_0 . De plus, le déterminant fonctionnel obtenu en dérivant par rapport aux variables X et u_i n'est pas nul pour $X = X_0$ et $u_i = u_{io}$; sinon les vecteurs $\dfrac{dg_i}{dX_0}$ $i \in I_0$ seraient linéairement dépendants.

En raison du théorème sur les fonctions implicites, on peut affirmer que le système précédent admet, dans un voisinage de 0 , une solution et une seule $X(B)$ $u_{io}(B)$ telle que :

1/ $X(0) = X_0$ et $u_i(0) = u_{io}$

2/ les fonctions $X(B)$ et $u_i(B)$ soient différentiables dans un voisinage de $B = 0$.

Dès lors, on voit que la valeur du programme $f(X(B))$ est différentiable au point $B = 0$ et l'on a :

$$df = \frac{df}{dX_0} dX = \sum_{i \in I_0} u_{io} \frac{dg_i}{dX_0} dX = \sum_{i \in I_0} u_{io} \, db_i$$

PROGRAMMES CONVEXES

Soit le programme $\mathcal{P}$: maximiser $f(X)$ sous les contraintes $g_i(X) \leqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$; f étant une fonction concave et g_i des fonctions convexes (convexité au sens large). On suppose, de plus , que f et g_i sont différentiables en tout point d'un ouvert convexe contenant D .

Les contraintes $g_i(X) \leqslant 0$ définissent un domaine D convexe, supposé non vide.

Considérons le programme linéaire tangent à $\mathcal{P}$ en un point X_0 et soit $P(X_0)$ le polyèdre convexe défini par les contraintes :

$$g_i(X_0) + \frac{dg_i}{dX_0}(X - X_0) \leqslant 0$$

Comme g_i est convexe, on a :

$$g_i(X) \geqslant g_i(X_0) + \frac{dg_i}{dX_0}(X - X_0)$$

Il s'en suit que $\forall X \in D \Longrightarrow X \in P(X_0)$

soit : $$D \subset P(X_0)$$

THEOREME 2 : Si X_0 est optimal pour le programme linéaire tangent à $\mathcal{P}$ en X_0 , alors X_0 est optimal pour $\mathcal{P}$.

Démonstration : On remarque d'abord que $X_0 \in D$; en effet comme , par hypothèse, $X_0 \in P(X_0)$, on a bien $g_i(X_0) \leqslant 0$

D'autre part, X_0 étant optimal pour le programme linéaire tangent en X_0 , on a :

$$\forall X \in P(X_0) \quad \frac{df}{dX_0}(X - X_0) \leqslant 0$$

Comme $D \subset P(X_0)$ on a aussi

$$\forall X \in D \qquad \frac{df}{dX_0}(X - X_0) \leqslant 0$$

Et comme f est une fonction concave

$$\forall X \in D \qquad f(X) \leqslant f(X_0)$$

COROLLAIRE 1. CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES DE KUHN ET TUCKER

Nous supposons, dans toute la suite, que tous les points de D sont réguliers.

En tenant compte des théorèmes 1 et 2, on voit qu'il est équivalent de dire :

soit : X_0 est optimal pour $\mathcal{P}$

soit : X_0 est optimal pour le programme linéaire tangent en en X_0 .

En considérant le programme dual du programme linéaire tangent en X_0 , on voit qu'il est encore équivalent de dire que ce programme dual a pour valeur $f(X_0)$, c'est-à-dire que la solution optimale du programme dual est un vecteur U_0 tel que

$$\begin{cases} \sum u_{io} \; g_i(X_o) = 0 \\ \dfrac{df}{dX_o} = \sum u_{io} \dfrac{dg_i}{dX_o} \\ u_{io} \geqslant 0 \end{cases}$$

On en déduit les conditions nécessaires et suffisantes de Kuhn et Tucker, que l'on peut énoncer ainsi :

Pour qu'un point X_0 de D soit optimal pour $\mathcal{P}$, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur U_0 tel que :

$$\begin{cases} u_{io} \; g_i(X_o) = 0 \\ \dfrac{df}{dX_o} = \sum u_{io} \dfrac{dg_i}{dX_o} \\ u_{io} \geqslant 0 \end{cases}$$

Soit X_o un point optimal pour $\mathcal{P}$.

Désignons, comme précédemment, par I_o l'ensemble des contraintes effectives en X_0 . Si les vecteurs $\dfrac{dg_i}{dX_o}$ sont indépendants, les variables u_{io} sont uniques. Nous pouvons dans ce cas préciser l'interprétation de ces variables, en considérant à nouveau la famille des programmes :

Maximiser $f(X)$, sous les contraintes $g_i(X) \leqslant b_i$.

Pour chaque vecteur B , soit $X(B)$ une solution optimale. Nous allons montrer que la fonction $f(X(B))$ est différentiable au point $B = 0$ et que l'on a $df = U_0 \, . \, dB$, si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1/ les vecteurs $\frac{dg_i}{dX_0}$ $i \in I_0$ sont indépendants

2/ $\forall\ i \in I_0 \quad u_{i0} > 0$

3/ f et g_i ont des dérivées secondes continues dans un voisinage de X_0 .

Démonstration : On envisage, comme précédemment, le système :

$$\begin{cases} g_i(X) = b_i & i \in I_0 \\ \frac{df}{dX} - \sum u_i \frac{dg_i}{dX} = 0 \end{cases}$$

En raison des hypothèses (1) et (3) ce système a une solution et une seule $X(B)$, $u_i(B)$ telle que :

1/ $X(0) = X_0$, $u_i(0) = u_{i0}$

2/ $X(B)$ et $u_i(B)$ sont différentiables dans un voisinage de $B = 0$.

Ces fonctions étant continues dans ce voisinage, on a donc , dans un certain voisinage de 0 :

$\forall\ i \notin I_0 \qquad g_i(X(B)) < b_i$

$\forall\ i \in I_0 \qquad u_i(B) > 0$, en raison de l'hypothèse (2)

C'est dire, en tenant compte des conditions suffisantes de Kuhn et Tucker, que la solution $X(B)$ est optimale dans ce voisinage de 0 .

Par suite la valeur du programme $\mathcal{P}$ $f(X(B))$ est différentiable au point $B = 0$ et on a, comme précédemment :

$$df = U_0 \ . \ dB$$

COROLLAIRE 2. PROGRAMME DUAL : Au programme convexe $\mathcal{P}$ associons la famille des programmes linéaires tangents aux points X_0 où ils sont définis (points d'un ouvert convexe contenant D) . On a vu que $D \subset P(X_0)$, par suite comme D est supposé non vide, $P(X_0)$ est non vide, quel que soit X_0 .

D'autre part, f étant une fonction concave, on a :

$$\forall\ X \in D \quad f(X) \leqslant f(X_0) + \frac{df}{dX_0}(X - X_0)$$

Par suite, la valeur d'un programme linéaire tangent quelconque est supérieure ou égale à la valeur de $\mathcal{R}$.

- si f(D) non borné : les programmes linéaires tangents auront tous une valeur infinie

- si f(D) borné : on a vu qu'il est équivalent de dire que X_0 est optimal pour $\mathcal{R}$ ou de dire que X_0 est optimal pour le programme linéaire tangent en X_0 .

Le programme convexe $\mathcal{R}$ est donc équivalent au programme suivant :

$$\underset{X_0}{\text{Min}}\ \underset{X}{\text{Max}}\quad f(X_0) + \frac{df}{dX_0}(X - X_0)$$

sous les contraintes

$$g_i(X_0) + \frac{dg_i}{dX_0}(X - X_0) \leqslant 0$$

Pour chaque X_0 , considérons le programme dual du programme linéaire tangent :

$$\underset{U}{\text{Min}}\quad f(X_0) - \sum u_i\ g_i(X_0)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dX_0} = \sum u_i \dfrac{dg_i}{dX_0} \\ u_i \geqslant 0 \end{cases}$$

Comme $P(X_0)$ n'est pas vide, deux cas sont possibles :

1/ Le programme linéaire tangent en X_0 a une valeur infinie et alors le programme dual n'a pas de solution réalisable

2/ Le programme linéaire tangent en X_0 a une valeur finie et alors le programme dual a même valeur.

Nous appellerons programme dual de $\mathcal{R}$ le programme :

$$\underset{X_0}{\text{Min}}\ \underset{U}{\text{Min}}\quad f(X_0) - \sum u_i\ g_i(X_0)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dX_0} = \sum u_i \dfrac{dg_i}{dX_0} \\ u_i \geqslant 0 \end{cases}$$

Ce programme dual est ainsi obtenu en considérant la famille des programmes duaux des programmes linéaires tangents à $\mathcal{P}$; et en raison de ce qui précède il est clair que l'on a les propriétés suivantes :

1/ si $f(D)$ non borné : le programme dual n'a pas de solution réalisable ; et réciproquement

2/ si $f(D)$ borné : le programme dual a même valeur que $\mathcal{P}$ et, de manière plus précise :

a) si X_0 est optimal pour $\mathcal{P}$, il existe une solution (X_0 , U_0) optimale pour le programme dual

b) si (X_0 , U_0) est une solution optimale pour le programme dual, X_0 est optimal pour $\mathcal{P}$.

Le vecteur U_0 est dans les deux cas solution optimale du programme dual du programme linéaire tangent à $\mathcal{P}$ en X_0.

Une autre forme du programme dual

Donnons d'abord du programme linéaire tangent une définition plus générale.

On appellera programme linéaire tangent à $\mathcal{P}$ aux points $X_0 , X_1 , \ldots , X_p$, le programme suivant :

Maximiser :

$$f(X_0) + \frac{df}{dX_0} (X - X_0)$$

sous les contraintes :

$$g_i(X_i) + \frac{dg_i}{dX_i} (X - X_i) \leqslant 0$$

La famille des programmes linéaires tangents ainsi définie contient la famille précédente (cas $X_0 = X_1 = \ldots = X_p$) . Le polyèdre $P(X_1 , \ldots , X_p)$ défini par :

$$g_i(X_i) + \frac{dg_i}{dX_i} (X - X_i) \leqslant 0$$

contient D comme précédemment.

D'autre part, la fonction f étant concave, on a :

$$f(X) \leqslant f(X_o) + \frac{df}{dX_o}(X - X_o)$$

Donc, la valeur de tout programme linéaire tangent est supérieure ou égale à la valeur de $\mathcal{P}$.

Associons à $\mathcal{P}$ le programme :

$$\underset{X_o, X_i}{\text{Min}} \ \underset{X}{\text{Max}} \quad f(X_o) + \frac{df}{dX_o}(X - X_o)$$

sous les contraintes :

$$g_i(X_i) + \frac{dg_i}{dX_i}(X - X_i) \leqslant 0$$

A chaque programme linéaire tangent, associons le programme dual :

$$\underset{U}{\text{Min}} \quad f(X_o) - \frac{df}{dX_o} X_o - \sum \left(u_i \, g_i(X_i) - \frac{dg_i}{dX_i} X_i\right)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dX_o} = \sum u_i \dfrac{dg_i}{dX_i} \\ u_i \geqslant 0 \end{cases}$$

Considérant la famille de tous les programmes linéaires tangents , on est amené à formuler le programme dual de $\mathcal{P}$ comme suit :

$$\underset{X_o, X_i}{\text{Min}} \ \underset{U}{\text{Min}} \quad f(X_o) - \frac{df}{dX_o} X_o - \sum u_i \left(g_i(X_i) - \frac{dg_i}{dX_i} X_i\right)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dX_o} = \sum u_i \dfrac{dg_i}{dX_i} \\ u_i \geqslant 0 \end{cases}$$

D'après ce qui précède, ce programme dual jouit des propriétés suivantes :

1/ si f(D) n'est pas borné, le programme dual n'a pas de solution réalisable, et réciproquement

2/ s'il existe une solution optimale de $\mathcal{P}$, le programme dual a même valeur que $\mathcal{P}$.

Posons :

$$\alpha = \frac{df}{dX_o} \qquad \beta_i = \frac{dg_i}{dX_i}$$

Et associons aux fonctions f et g_i leurs fonctions conjuguées au sens de Fenchel :

$$\varphi(\alpha) = - f(X_o) + \frac{df}{dX_o} X_o \quad \text{conjuguée de } f$$

$$\psi_i(\beta_i) = - g_i(X_i) + \frac{dg_i}{dX_i} X_i \quad \text{conjuguée de } g_i$$

Le programme dual s'écrit maintenant :

$$\underset{\alpha \beta_i}{\text{Min}} \ \underset{u}{\text{Min}} \ - \varphi(\alpha) + \sum u_i \ \psi_i(\beta_i)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \alpha = \sum u_i \ \beta_i \\ u_i \geqslant 0 \end{cases}$$

α et β_i appartenant aux domaines respectifs de définition des fonctions φ et ψ_i .

Cas particulier : programme à contraintes linéaires

Si les contraintes $g_i X \leqslant b_i$ sont linéaires (g_i étant un vecteur de $\mathbf{R}^n$) , on a

$$\beta_i = g_i \quad \text{et} \quad \psi_i(\beta_i) = b_i$$

Le programme dual s'écrit :

$$\underset{\alpha, u}{\text{Min}} \ - \varphi(\alpha) + \sum u_i \ b_i$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \alpha = \sum u_i \ g_i \\ u_i \geqslant 0 \end{cases}$$

Programmes quadratiques convexes

Dans le cas où $f(X) = \frac{1}{2} X' \ Q \ X$, Q étant une matrice définie négative, on voit que :

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha' Q^{-1} \alpha$$

Le programme dual s'écrit donc :

$$\underset{\alpha,\, u}{\text{Min}} - \frac{1}{2} \alpha' Q^{-1} \alpha + \sum u_i b_i$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \alpha = \sum u_i b_i \\ u_i \geqslant 0 \end{cases}$$

soit encore :

$$\underset{u \geqslant 0}{\text{Min}} - \frac{1}{2} (\sum u_i g_i)' Q^{-1} (\sum u_i g_i) + \sum u_i b_i$$

BIBLIOGRAPHIE

J. ABADIE - Eléments de programmation mathématique. Note EDF HR 57 36 2 juin 1964

C. BERGE et A. GHOUILA-HOURI - Programmes, jeux et réseaux de transport. Dunod

W. FENCHEL - Conjugate convex functions International Summer School on Non linear. Programming. Menton 1964

Groupe de Recherche Opérationnelle de la Marine : Programmation linéaire

P. HUARD - Mathématique des programmes économiques. Monographies de Recherche Opérationnelle. Dunod

H.W. KUHN et A.W. TUCKER - Non linear programming. Second Berkeley Symposium pp. 481-492

M. SIMONNARD - Programmation linéaire. Dunod

A. WHINSTON - Conjugate functions and duality theorems in non linear programming Intern. Center for Management Sc. Report n° 6 305 (22 janvier 1963)