CAHIERS DU BURO

J. BOUZITAT

Présentation synthétique de la théorie des jeux

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 7 (1965), p. 5-40
<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1965__7__5_0>

1. OBJET DE LA THEORIE DES JEUX.

La théorie des jeux est l'une des techniques de la Recherche Opérationnelle, celle qui s'occupe spécialement des situations dans lesquelles plusieurs personnes ont à prendre des décisions, dont dépend un résultat qui les concerne. Il n'y a pas, à vrai dire, de séparation nette entre la théorie des programmes ou la théorie des processus et la théorie des jeux : tout problème de décision peut utiliser à la fois ces techniques, mais on parle de théorie des jeux lorsque la difficulté du problème est particulièrement liée à la présence de plusieurs personnes, intéressées par la situation et disposant de certains moyens d'action sur elle. Il en est souvent ainsi dans les problèmes économiques, politiques, diplomatiques, militaires.

Dans une telle situation, il y a place pour deux facteurs essentiels : la *coopération* et la *lutte*, dont le rôle est fondamental en théorie des jeux. Il est clair, en effet, que des personnes intéressées par une situation de jeu ont des intérêts qui peuvent concorder sur certains terrains et s'opposer sur d'autres, de sorte qu'elles peuvent être conduites à poursuivre en commun certains buts tout en s'affrontant par ailleurs.

Comme il est de bonne méthode de fractionner les difficultés, on aborde en général la théorie des jeux par l'étude des situations dans lesquelles il n'y a place que pour la lutte, à l'exclusion de toute coopération. Et cela conduit à la théorie du duel, qui est la partie la plus achevée de la théorie des jeux, sans qu'il faille négliger pour autant l'importante et multiple théorie des jeux de lutte et de coopération.

Si d'ailleurs on excepte certains jeux de société, on peut dire que le cas de la lutte pure se présente comme un cas limite, qui n'est jamais exactement réalisé dans les situations concrètes : dans tout problème de conflit, même militaire, il y a place, à côté de la lutte, pour une certaine coopération. Les développements actuels de la stratégie et de la diplomatie montrent en particulier, mieux sans doute qu'il y a une cinquantaine d'années, la place laissée à la coopération dans toute situation de conflit international. Ce fait important est confirmé par les applications stratégiques de la théorie des jeux. Pour en donner brièvement un exemple, rappelons que, dans la schématisation du monde diplomatique que l'on présente en parlant des deux blocs, le bloc Est et le bloc Ouest, il y a bien sûr une situation de conflit, mais il y a aussi un facteur de coopération essentiel, qui est le désir d'éviter la guerre nucléaire. Et cette coopération, même limitée, entre l'Est et l'Ouest, affecte profondément toute la politique internationale : elle est la condition essentielle de l'emploi des méthodes dites de "dissuasion".

Pour aborder un problème de jeu, il faut d'abord construire un modèle représentant la situation réelle. L'étude de ce modèle, selon les méthodes de la théorie des jeux, peut avoir pour but, soit de guider les "joueurs" dans leur manière de jouer effectivement le jeu, soit de les aider à atteindre, par marchandage ou par arbitrage, une solution de compromis qui tienne compte de leurs moyens d'action et de leurs intérêts respectifs, soit enfin d'expliquer l'évolution d'une situation concrète par référence à des principes "unificateurs" d'une portée plus générale.

2. CONSTRUCTION DES MODELES DE JEUX.

2.1. Schéma de causalité et schéma de finalité.

Dans tout problème de jeu, et plus généralement dans tout problème de décision, l'analyse de la situation suit toujours les mêmes étapes, pour aboutir à la construction d'un modèle représentatif qui se prête au moins à une réflexion méthodique, et si possible à une étude mathématique.

1/ Celui qui va prendre une décision doit d'abord savoir quelles sont les possibilités qui lui sont offertes. Il faut, avant de chercher à choisir, savoir entre quelles options il s'agit de choisir. C'est ce que l'on a en vue quand on parle d'énumérer, ou plus généralement de *décrire l'ensemble des possibilités*. Tout responsable d'une décision, tout expert dont les conseils aideront le responsable à préparer sa décision, doit d'abord se préoccuper de cet aspect du problème.

Lorsqu'il s'agit d'une situation relevant de la théorie des jeux, l'analyse des possibilités est sans doute encore plus importante, et elle est plus délicate, car elle doit alors porter sur toutes les personnes intéressées. Autrement dit, chacun des joueurs doit non seulement chercher à décrire soigneusement l'ensemble des possibilités qui lui sont offertes, mais aussi chercher à se faire une idée précise des possibilités offertes aux autres joueurs, que ce soient ou non des adversaires.

2/ Après avoir ainsi, d'une manière plus ou moins satisfaisante et plus ou moins complète, décrit l'ensemble des possibilités, il faut *examiner les conséquences* des décisions qui pourraient être prises. Lorsqu'il s'agit d'une situation de jeu, ces conséquences dépendent non seulement des décisions d'une personne, mais essentiellement des décisions de tous les joueurs, et c'est là ce qui fait la spécificité et la difficulté des problèmes de jeu. Il faut donc examiner avec soin les conséquences attachées à tous les systèmes de décisions possibles des différents joueurs. En termes plus précis, il s'agit d'appliquer sur un ensemble de conséquences le produit cartésien des ensembles de possibilités respectivement offerts aux différents joueurs.

Ces deux étapes (description de l'ensemble des possibilités et examen des conséquences) établissent ce que l'on appelle le *schéma de causalité* du jeu, car il s'agit bien d'un enchaînement de causes et d'effets, les causes étant les décisions que peuvent prendre les joueurs, et les effets étant les conséquences qui résulteraient de chaque système de décisions possible. On peut encore dire que le schéma de causalité constitue la *règle du jeu* considéré.

3/ Mais il faut franchir ensuite une troisième étape. Car le schéma de causalité est, en quelque sorte, la description d'un mécanisme où manque encore le moteur. On a bien un enchaînement de décisions et de conséquences, mais rien ne permet encore de guider les choix des joueurs. Il faut donc ajouter à ce schéma de causalité une comparaison des différents résultats possibles selon les préférences de chacun des joueurs. Afin de guider son choix, chacun des joueurs doit établir une hiérarchie entre les différents résultats appartenant à l'ensemble des conséquences, les classer selon l'ordre de ses préférences, et aussi chercher à se faire une idée précise des préférences des autres joueurs.

C'est ce que l'on appelle établir le *schéma de finalité* du jeu, et cela revient, le plus souvent, à *construire un indicateur de préférence — ou indicateur d'utilité — pour chacun des joueurs.*

Le schéma de finalité est en général très délicat à établir, car il n'est pas facile de définir un ordre de préférence sur un ensemble de résultats qui peuvent être fort complexes (dans les problèmes militaires, les résultats mettent en jeu aussi bien des vies humaines que des biens matériels, aussi bien des considérations morales que des positions stratégiques). Et il est encore plus difficile de supputer, dans ces conditions, les préférences d'autrui Cependant les modèles usuels de jeux supposent le plus souvent que les préférences de chaque joueur sont connues de tous les autres .

Dans la plupart des cas concrets, il n'existe pas un lien logique strict entre les décisions prises par les joueurs et les résultats effectivement obtenus. Car ces résultats dépendent aussi d'un certain nombre de facteurs imprévisibles ou mal connus que l'on désigne sous le nom général d'*aléa* (nous rassemblons ici sous cette dénomination le hasard et l'incertitude, qu'il est d'ailleurs souvent difficile de distinguer). Les conséquences attachées aux systèmes de décisions des joueurs sont donc en général aléatoires : ce sont des distributions de probabilité (plus ou moins subjective) sur un ensemble de résultats. D'ailleurs il se peut aussi qu'un joueur décide de tirer au sort, avec des probabilités déterminées, entre plusieurs des possibilités qui lui sont offertes, au lieu de choisir délibérément l'une d'elles, et que l'aléa se trouve ainsi introduit, même s'il était d'abord absent du jeu considéré. Le schéma de finalité doit alors permettre de classer, selon les préférences des différents joueurs, un ensemble de situations aléatoires. Il faut donc pouvoir construire des indicateurs d'utilité sur de tels ensembles.

Dans ces conditions, un souci de simplification assez naturel conduit à chercher des *indicateurs d'utilité linéaire*, c'est-à-dire des indicateurs numériques dont les valeurs puissent être calculées par des opérations de moyenne en probabilité, à la manière d'une espérance mathématique. La construction d'un tel indicateur d'utilité linéaire ne va pas sans difficulté, mais cette difficulté est peut-être un peu moins profonde qu'elle ne le paraît au premier abord. Car les moyennes en probabilité que l'on cherche à faire ne portent pas nécessairement sur un indicateur donné à l'avance, par exemple sur des sommes d'argent ou sur des nombres de vies humaines perdues ou gagnées : il s'agit de "construire" véritablement un indicateur sur lequel ces moyennes en probabilité puissent avoir un sens. Une telle construction est possible dans le cadre d'une certaine axiomatique, datant de Daniel Bernoulli, et dont une présentation systématique rigoureuse a été donnée par Von Neumann et Morgenstern dans leur livre fondamental.

2.2. Nécessaire imperfection des modèles.

Les modèles de jeux, auxquels aboutit l'analyse qui vient d'être rapidement esquissée, paraissent fort rudimentaires, dans la plupart des cas. Il est difficile de construire un modèle de ce genre (schéma de causalité et schéma de finalité) qui rende compte de façon satisfaisante et complète d'une situation réelle, – militaire, diplomatique, politique, économique, – dans toute sa complexité, et qui soit en même temps assez simple pour se prêter à une étude mathématique abordable et utilisable. On peut donc souligner l'inadéquation des modèles à la réalité, et soutenir que le caractère rudimentaire des modèles de jeux devant les problèmes réels enlève beaucoup de portée pratique aux résultats obtenus. Mais on peut cependant défendre la théorie des jeux, en disant que l'inadéquation des modèles au réel est un mal nécessaire dont elle n'est pas seule à souffrir et qui se retrouve plus ou moins dans toute la Recherche Opérationnelle, et même dans toute analyse scientifique d'un phénomène concret. Les mêmes impératifs souvent contradictoires s'y rencontrent : nécessité de rendre compte d'un réel complexe, et nécessité de construire un modèle dont l'étude puisse être abordée. Il faut donc accepter *un compromis entre réalisme et maniabilité,* sans oublier qu'il s'agit d'un compromis, moyennant quoi des modèles même rudimentaires ont un rôle utile à jouer.

Cette difficulté est d'ailleurs bien connue. Paul Valéry, qui s'intéressait aux recherches d'Emile Borel sur la théorie des jeux et dont le génie poétique restait ouvert aux préoccupations scientifiques, la signalait dans une phrase lapidaire : "Ce qui est simple est toujours faux, et ce qui n'est pas simple est inutilisable". Pour l'appliquer à la théorie des jeux, on pourrait en donner la paraphrase suivante : les modèles de la théorie des jeux sont, dans une certaine mesure, trop simples pour être vrais, mais ils doivent rester simples sous peine d'être inutilisables. Cela doit, naturellement, inciter les chercheurs à perfectionner les modèles, mais la difficulté subsiste et la théorie des jeux ne peut en être tenue pour responsable.

Une illustration de ces remarques est donnée par la théorie de l'utilité, où l'axiomatique de l'utilité linéaire, pour critiquable qu'elle soit, reste souvent imposée par un souci de simplicité. Il est vrai que cette axiomatique ne rend pas toujours exactement compte de la psychologie des joueurs, de leur attitude devant le risque, de leurs arbitrages (parfois douloureux, mais inéluctables) entre le certain et l'aléatoire. Cependant, dans les cas où la probabilité d'une catastrophe telle que la ruine ou la mort peut (et doit) être considérée comme négligeable, un indicateur d'utilité linéaire peut souvent traduire les préférences d'un joueur avec une exactitude suffisante, alors que l'abandon de la linéarité par souci de rigueur risquerait de conduire à un modèle inutilisable.

2.3. Alliances et agrégation des préférences individuelles.

Dans tout ce qui précède, on a volontairement simplifié l'analyse en s'intéressant seulement aux joueurs individuels, pour leurs moyens d'action sur la situation considérée et pour leurs préférences sur les résultats possibles. Or, dans les situations réelles de conflit, où il y a place à la fois pour la lutte et pour la coopération, les points de vue individuels ne sont pas seuls en cause. Car certains joueurs peuvent alors être amenés à mettre en commun leurs moyens d'action au profit d'une finalité collective, c'est-à-dire à conclure une *alliance* (ou *coalition*). La formation des alliances et leur évolution dépendent le plus souvent de facteurs complexes, de conditions sociologiques, de l'habileté manoeuvrière de certains joueurs, du hasard (l'expérience diplomatique et militaire le confirme). Et il est difficile de construire des modèles qui en rendent compte de façon satisfaisante. On ne saurait cependant établir le schéma de causalité et le schéma de finalité des jeux les plus généraux sans s'intéresser aux alliances qui peuvent se former, à leur force et à leur finalité.

Dans ces conditions, la description de toutes les possibilités offertes aux joueurs pour agir isolément ou pour conclure des alliances, et l'examen des conséquences qui peuvent résulter de leurs décisions, exigent une analyse qui peut être d'une grande complexité. Mais c'est dans l'établissement du schéma de finalité que se présentent les difficultés les plus profondes, tout au moins si l'on cherche à construire les préférences collectives des alliances à partir des préférences individuelles des joueurs. Il s'agit de ce que l'on appelle quelquefois la théorie de l'intérêt général, et qu'il vaudrait peut-être mieux appeler la théorie de l'*agrégation des préférences individuelles*.

On rencontre dans cette théorie des difficultés logiques très sérieuses, que Condorcet a sans doute été le premier à mettre en évidence, à propos du fonctionnement des assemblées où une règle de vote "majoritaire" doit permettre de dégager une préférence collective représentant une agrégation des préférences des votants. Le phénomène essentiel, auquel on peut donner le nom d'*effet Condorcet*, est le suivant : si l'on convient d'appeler cohérent tout système de préférences excluant les cycles tels que " A préféré à B, B préféré à C, C préféré à A" (cycles qui rendraient toute décision extrêmement difficile), alors la cohérence des préférences individuelles n'implique pas celle des préférences collectives qui s'en déduisent par une règle majoritaire d'agrégation des préférences binaires (c'est-à-dire portant sur deux objets seulement).

Pour énoncer avec rigueur des résultats plus généraux, il faudrait s'appuyer sur des définitions et une axiomatique précises qui ne sauraient être ici développées. Donnons seulement, sans rigueur, la "philosophie" d'un célèbre *théorème d'Arrow*, qui a apporté une importante contribution à cette théorie. Supposons que l'on cherche à agréger les "opinions" d'individus déterminés en nombre au moins égal à deux, sur des objets déterminés en nombre au moins égal à trois, et que ces opinions s'expriment par des ordres de préférence (et non par des préférences pondérées telles que les notes données à certains candidats par plusieurs examinateurs). Alors il n'existe aucune règle d'agrégation qui permette de dégager une opinion collective cohérente (c'est-à-dire dépourvue de cycles) de *tout* système d'opinions individuelles cohérentes, en respectant certaines conditions de "loyauté", plus ou moins intuitives, quant aux variations ou à l'invariance de l'opinion collective en fonction de certaines variations des opinions individuelles, sans qu'aucune préférence soit imposée a priori par la règle d'agrégation, et sans qu'il existe un "dictateur" à l'opinion duquel la collectivité se conformerait dans tous les cas.

Le théorème d'Arrow est l'expression rigoureuse d'une difficulté que le sens commun révèle et que l'expérience confirme : lorsque, dans une assemblée, les opinions individuelles sont trop discordantes, lorsqu'il n'existe aucun principe objectif dont elles doivent tenir compte, il est à craindre que l'on ne puisse d'aucune manière en dégager une opinion cohérente qui soit vraiment collective, et qui permette d'échapper à l'alternative : dictature ou conflit. Mais ce risque peut être écarté par l'introduction de certains principes imposant à l'ensemble des opinions individuelles une sorte d'harmonie interne (telle la condition d'unimodalité — single-peakedness — de Black et Coombs).

C'est ce que Rousseau avait déjà fort bien compris, et il l'exprime d'une manière saisissante, avec une passion qui n'exclut pas la perspicacité, dans un passage du Contrat Social : "Plus le concert règne dans les assemblées, c'est-à-dire plus les avis approchent de l'unanimité, plus aussi la volonté générale est dominante; mais les longs débats, les dissensions, le tumulte annoncent l'ascendant des intérêts particuliers ..... Les citoyens n'ayant qu'un intérêt, le peuple n'a qu'une volonté ..... A l'autre extrémité, l'unanimité revient : c'est quand les citoyens, tombés dans la servitude, n'ont plus ni liberté, ni volonté." Il suffit d'une facile transposition du langage pour mettre en lumière, dans ce texte littéraire, une intuition de l'effet Condorcet et du théorème d'Arrow.

Il est clair que la théorie de l'agrégation des préférences individuelles est l'un des instruments nécessaires pour aborder la difficile question de la formation et du fonctionnement des alliances. Le fait qu'une telle agrégation ne soit pas toujours possible montre de plus le caractère irréductible et spécifique de certaines situations de conflit.

2.4. Duel et force des alliances.

Il est maintenant facile de caractériser les modèles de duel, représentant les situations dans lesquelles il n'y a place que pour la lutte, à l'exclusion de toute coopération. Il y a duel si et seulement si, d'après le schéma de finalité, les préférences des joueurs en présence sont strictement opposées, ce qui suffit pour rendre toute alliance sans objet. Des considérations de simple logique imposent qu'il y ait alors exactement deux joueurs. De plus, pour tout couple de résultats M et N réalisables dans le jeu, le seul fait que l'un des deux joueurs préfère M à N implique que l'autre joueur préfère N à M, et cela permet de traduire les préférences opposées des deux joueurs par un seul indicateur d'utilité.

Il est clair que *tout jeu à deux joueurs n'est pas un duel* : un duel est un jeu à deux joueurs et "de somme nulle" (two-person zero-sum game). Il faut d'ailleurs bien comprendre que la condition dite "de somme nulle" signifie seulement ici que les préférences des deux joueurs sont opposées, et non que le résultat du jeu se traduit nécessairement par un "gain" de l'un des joueurs et une "perte" équivalente de l'autre.

Comme on l'a déjà dit, les modèles de duel peuvent sembler trop particuliers pour représenter directement beaucoup de situations concrètes, car il est rare que deux joueurs engagés dans un conflit s'opposent sur tous les terrains. Cependant l'étude du duel est indispensable, non seulement parce qu'elle peut tout de même s'appliquer à certains conflits bien délimités où le rôle de la coopération est négligeable, mais aussi parce qu'elle contribue à l'étude des jeux plus généraux que le duel. La lutte est en effet l'une des composantes fondamentales de tout jeu, et il est souvent utile de considérer la possibilité de certains duels à l'intérieur d'un jeu de lutte et de coopération.

En particulier, si l'on envisage que certains joueurs puissent conclure une alliance, il est naturel de se demander ce qui arriverait si cette alliance se heurtait à l'opposition de tous les autres joueurs coalisés contre elle. Et si l'on veut étudier ainsi chacune des alliances considérées a priori comme possibles, on est amené à étudier autant de duels qu'il y a d'alliances possibles. Quand cette étude peut être menée à bien, elle fournit des éléments pour caractériser les forces respectives des alliances. Plusieurs modèles de jeux à n joueurs utilisent ce principe, qui conduit à la notion de *fonction caractéristique* dans le cas des jeux à utilité transférable — ou problèmes de partage — étudiés d'une manière approfondie dans le livre de Von Neumann et Morgenstern.

2.5. Forme développée et forme normale.

Un même modèle de jeu peut souvent être présenté sous plusieurs formes, qu'il est parfois utile de considérer simultanément, ou parmi lesquelles il faut s'efforcer de choisir celle qui se prêtera le mieux à l'étude ultérieure. Les deux formes-types des modèles de jeux sont la forme développée et la forme normale.

Il est fréquent que, dans le déroulement d'une partie, les joueurs aient à prendre une suite de *décisions élémentaires*, enchaînées entre elles par l'information dont dispose à chaque coup le joueur qui a le "trait" (plutôt que par leur succession dans le temps). Les jeux de société, tels que les échecs, le bridge, le poker, donnent des exemples familiers de tels jeux, — dits séquentiels, — dans lesquels les joueurs ont successivement le trait et disposent alors d'une information en général partielle sur les coups précédents (parce que, par exemple, certaines cartes ne leur ont pas été montrées).

Si l'on explicite, dans le modèle d'un jeu séquentiel, la succession et l'enchaînement des décisions élémentaires à prendre par les joueurs, on considère la *forme développée* du jeu, et le modèle est alors souvent présenté sous la forme d'un graphe particulier, connexe et dépourvu de cycles, appelé *arbre du jeu*. Les sommets de l'arbre représentent les différents coups possibles, les branches partant d'un sommet représentent les diverses possibilités offertes au joueur qui a le trait dans le coup correspondant, et l'on fait figurer dans l'arbre des contours fermés entourant certains sommets pour représenter les *ensembles d'information*, dont les éléments sont des coups indiscernables entre eux pour le joueur qui a le trait. Si aucun ensemble d'information ne comprend plus d'un élément, le jeu est dit "à information parfaite" (tel est le cas du jeu d'échecs).

Malgré la grande diversité des arbres de jeux, il est toujours possible de passer de la forme développée d'un jeu à une forme théoriquement plus simple, et d'une portée plus générale, qui est la *forme normale* du jeu. On ne cherche plus alors à expliciter la succession et l'enchaînement des décisions élémentaires, mais on représente le système de toutes les décisions élémentaires appartenant à chacun des joueurs par une *décision globale* unique, qui est le choix d'une *tactique* (ou stratégie pure) dans un ensemble pouvant être considéré comme le produit cartésien de tous les ensembles de possibilités offerts au joueur considéré dans tous les choix élémentaires dont il dispose (chacun de ces ensembles correspond à un ensemble d'information où ce joueur a le trait). Choisir une tactique revient ainsi, pour un joueur, à prendre globalement, avant de se mettre au jeu, toutes les décisions élémentaires qu'il pourrait être amené à prendre au cours du jeu (mais qu'il n'aura pas en fait à prendre toutes au cours d'une partie). Et les différents joueurs doivent choisir leurs tactiques respectives indépendamment les uns des autres.

Il y a une certaine difficulté logique à comprendre que ces décisions globales indépendantes, à prendre par les différents joueurs, puissent rendre compte de toutes leurs décisions élémentaires et de leur enchaînement, si complexe qu'il soit. Le passage de la forme développée d'un jeu à sa forme normale devient cependant assez intuitif si l'on présente le choix d'une tactique comme la rédaction des consignes données par un joueur à un mandataire chargé de le représenter au cours de la partie : ces consignes doivent être complètes en ce sens que, quel que soit le déroulement de la partie, le mandataire doit pouvoir se contenter de les appliquer sans prendre aucune initiative personnelle. Mais cette image montre aussi que la simplicité de structure de la forme normale se paie par la complexité des tactiques et la dimension des ensembles de tactiques, qui rend souvent impraticable le passage théoriquement possible de la forme développée à la forme normale.

Dans le cas des jeux à deux joueurs, la forme normale conduit à une représentation particulièrement simple si chacun des deux joueurs dispose d'un nombre fini de tactiques. On peut alors faire correspondre aux tactiques de l'un des joueurs les lignes d'un *tableau*, et aux tactiques de l'autre joueur les colonnes de ce tableau, dont les cases correspondent ainsi aux éléments du produit cartésien des deux ensembles de tactiques. On peut ensuite écrire dans chacune de ces cases, soit la description du résultat attaché à l'emploi des deux tactiques qui s'y croisent, soit les valeurs prises en ce point par les indicateurs d'utilité des deux joueurs. (Dans le cas particulier du duel, ces deux valeurs peuvent être réduites à une seule, en raison de la stricte opposition des intérêts des deux joueurs).

L'extension de cette représentation aux jeux à plus de deux joueurs est théoriquement facile, mais conduit à remplacer le tableau à double entrée par une table ayant une entrée par joueur, ce qui peut présenter de sérieuses difficultés pratiques.

2.6. Jeu tactique et jeu stratégique.

Etant donné un jeu sous forme normale, on peut envisager de permettre à chacun des joueurs non seulement de choisir délibérément parmi les tactiques dont il dispose, mais encore de procéder à un tirage au sort entre ces tactiques en choisissant une distribution de probabilité sur leur ensemble. Cela revient à élargir l'ensemble des possibilités offertes à chaque joueur, en remplaçant l'ensemble de ses *tactiques* (ou stratégies pures) par l'ensemble plus riche de ses *stratégies* (ou stratégies mixtes), qui est par définition un ensemble de distributions de probabilité (plus ou moins générales) sur l'ensemble de ses tactiques. On dit que l'on passe ainsi du jeu tactique à un jeu stratégique qui lui correspond. Les tactiques sont, bien entendu, des stratégies particulières.

C'est Emile Borel qui a, le premier sans doute, en 1921, proposé ce passage, en montrant qu'à certains égards la considération des stratégies s'impose pour traduire les variations potentielles de la tactique d'un joueur, même dans une partie unique. Ces variations potentielles, comme les variations effectives que le joueur pourrait réaliser au cours d'une suite de parties, sont un moyen de protection efficace contre la perspicacité d'un adversaire cherchant à percer à jour la tactique choisie par le joueur. Il est remarquable que les probabilités, dont le joueur doit choisir la distribution avec discernement, soient utilisées dans les stratégies comme instrument de décision et d'action.

Cependant *le passage du jeu tactique au jeu stratégique ne va pas de soi*, et peut même se révéler difficile en raison du caractère aléatoire des résultats du jeu stratégique, qui exige de chaque joueur la construction d'un nouvel indicateur d'utilité, choisi le plus souvent linéaire. Un tel indicateur n'est pas déterminé par celui du jeu tactique (et nous avons déjà signalé la difficulté de cette détermination). C'est pourquoi le jeu stratégique est vraiment un jeu différent du jeu tactique. Il se peut en particulier qu'un duel tactique conduise à un jeu stratégique où les intérêts des deux joueurs ne soient pas strictement opposés. Il se peut aussi qu'un joueur engagé dans un jeu où de grands intérêts sont mis en cause (un jeu économique ou militaire par exemple) refuse d'envisager l'emploi d'une stratégie mixte, mais les raisons d'une telle attitude méritent, dans chaque cas particulier, d'être soigneusement analysées et critiquées.

Signalons enfin qu'au lieu de probabiliser les décisions globales des joueurs, on peut chercher à probabiliser leurs décisions élémentaires dans les jeux donnés sous forme développée. On est ainsi conduit à définir des *stratégies élémentaires* (behavior strategies), dont l'emploi est plus facile que celui des stratégies mixtes, mais aussi moins efficace en général pour un joueur qui n'est pas exactement informé, à chacun de ses choix élémentaires, de tous ceux qu'il a précédemment effectués et de tout ce qu'il savait alors. Cependant, Kuhn a montré que, dans tout jeu séquentiel fini, un joueur pourvu à cet égard d'une "mémoire parfaite" ne perd rien à employer seulement des stratégies élémentaires, et Aumann a étendu ce résultat à une classe assez générale de jeux séquentiels infinis.

3. PRINCIPES DE L'ETUDE DES MODELES DE JEUX.

Les principaux moyens utilisés dans l'étude des modèles de jeux, qu'il s'agisse de duels ou de jeux plus généraux, peuvent se rattacher d'une manière plus ou moins immédiate aux quatre principes directeurs suivants : les calculs d'espérance, les considérations de dominance, la recherche de l'équilibre, le principe de récurrence.

3.1. Calculs d'espérance.

Supposons qu'un joueur envisage, pour chacune des décisions qu'il peut prendre, ou plus précisément pour chacune des stratégies dont il dispose (pures ou mixtes, selon les cas), ce qui peut lui arriver de pire. Autrement dit, ce joueur considère l'ensemble des résultats (certains ou aléatoires) qui restent possibles après le choix de sa propre stratégie, compte-tenu de toutes les stratégies dont disposent les autres joueurs, et, parmi tous ces résultats, il porte son attention sur celui ou ceux qui sont pour lui les moins avantageux (nous supposons ici, pour simplifier l'exposé, qu'il existe au moins un tel résultat "pessimum"). Ce joueur est donc sûr, s'il choisit la stratégie en question, d'obtenir, quoi que fassent les autres joueurs, un résultat au moins aussi bon que ce ou ces résultats "pessimum", ou, ce qui revient au même, une utilité au moins égale à un minimum qui est la valeur prise sur ce ou ces résultats par l'indicateur d'utilité employé pour traduire ses préférences. Cette utilité minimum est, par définition, l'*espérance (security level) relative à la stratégie en question* pour le joueur qui l'emploie.

Ce joueur peut ainsi attacher une espérance relative à chacune des stratégies dont il dispose, et s'intéresser, parmi toutes ses stratégies, à celle(s) qui lui assurent l'espérance relative la meilleure (nous supposons ici, pour simplifier l'exposé, qu'il existe au moins une telle stratégie). Cette espérance relative maximum est, par définition, l'*espérance (optimal security level)* du joueur considéré dans le jeu auquel il participe. En raison de sa définition comme maximum d'un minimum, on dit que cette espérance est un *maximin*. (S'il se trouvait que l'indicateur d'utilité employé eût un sens de variation tel que ses valeurs croissent quand les préférences du joueur décroissent, — comme cela arrive dans le cas du duel, — l'espérance serait définie comme minimum d'un maximum, et serait donc un *minimax.*)

Toute stratégie assurant son espérance au joueur qui la choisit est, par définition, une *stratégie prudente*. Il est en effet naturel de considérer comme prudent le joueur qui, en choisissant une telle stratégie, s'assure autant qu'il le peut contre le pire. Mais cette prudence, cette recherche de la sécurité, peut paraître excessive, et commandée seulement par l'attitude trop pessimiste qui consiste à prévoir systématiquement le pire. Une telle critique est certainement fondée dans le cas général, et montre que les calculs d'espérance ne sauraient suffire à guider l'action des joueurs dans tous les cas. Ces calculs jouent cependant un rôle fondamental dans le cas particulier du duel (nous aurons l'occasion d'y revenir), et ils fournissent toujours des renseignements importants dont il serait imprudent de ne pas tenir compte.

Signalons que, dans le cas où l'existence des maximums et des minimums dont il a été question ne serait pas assurée, il faudrait remplacer maximum par supremum, et minimum par infimum. L'espérance d'un joueur devrait alors être définie comme le supremum d'un infimum (ou parfois comme l'infimum d'un supremum), et l'existence des stratégies prudentes ne serait plus assurée. Cependant chaque joueur dispose toujours de stratégies qui lui assurent son espérance à ε près, si petit que soit le nombre positif ε.

Bien entendu, ce qui vient d'être dit de l'espérance d'un joueur s'applique aussi à l'*espérance d'une alliance de joueurs,* pourvu que l'on ait pu définir avec précision les stratégies dont dispose cette alliance et l'indicateur d'utilité qui traduit ses préférences collectives. Ce sont précisément les espérances de toutes les alliances possibles qui définissent la *fonction caractéristique* du jeu dans les problèmes de partage de Von Neumann et Morgenstern. Des fonctions caractéristiques généralisées ont ensuite été définies pour d'autres modèles de jeux à n joueurs.

3.2. Considérations de dominance

Il peut arriver qu'une certaine stratégie d'un joueur (pure ou mixte, selon les cas) conduise, pour toutes les stratégies des autres joueurs, à des résultats respectivement meilleurs — ou au moins aussi bons — pour lui que ceux auxquels conduirait une autre de ses stratégies. Alors la première stratégie *domine* la seconde, en ce sens que, quoi que fassent les autres joueurs, elle est toujours plus avantageuse (auquel cas la dominance est *stricte*) — ou au moins aussi avantageuse (auquel cas la dominance est *large)* — pour le joueur qui l'emploie.

Un joueur agissant isolément ne peut manifestement rien perdre à choisir les stratégies dominantes plutôt que les stratégies dominées, et il peut au contraire y gagner quelque chose. Les autres joueurs peuvent donc raisonnablement penser qu'il renoncera à l'emploi des stratégies dominées, et ces considérations de logique très élémentaire permettent parfois de remplacer l'étude du jeu considéré par celle d'un jeu plus simple, en faisant abstraction des stratégies dominées appartenant aux différents joueurs. On peut même dans certains cas réduire à nouveau de la même manière le jeu ainsi obtenu, et poursuivre ce processus de réductions successives aussi longtemps qu'il est efficace, bien qu'il soit plus difficile de donner une justification satisfaisante d'une telle itération.

Des considérations analogues de *dominance collective* peuvent s'appliquer aux stratégies des alliances de joueurs, pourvu que les préférences collectives correspondantes soient bien définies, et qu'il s'agisse d'alliances solides, pratiquement contraignantes pour ceux qui les ont conclues. Si au contraire les joueurs alliés peuvent craindre que certains d'entre eux ne respectent pas l'accord conclu entre eux et même qu'ils cherchent à exploiter à leur profit la bonne foi de ceux qui le respectent, il se peut que "l'ascendant des intérêts particuliers" bloque la mise en oeuvre des dominances collectives.

Si l'on considère en particulier l'alliance hypothétique de tous les joueurs, on obtient une dominance entre résultats, et l'on est conduit à définir l'*extremum de Pareto* comme étant l'ensemble des résultats, dits *extrêmes* ou *collectivement admissibles*, qu'il est impossible d'améliorer pour un joueur sans qu'un autre au moins en pâtisse (tout résultat non extrême est manifestement dominé).

Il y a lieu de rattacher aussi aux considérations de dominance collective les intéressantes *relations d'exclusion* (ou de dominance) introduites par Von Neumann et Morgenstern dans l'étude des problèmes de partage. On peut dire en gros qu'un résultat M exclut un résultat N si et seulement si il existe une alliance qui ait la force nécessaire pour s'opposer au passage de M à N, dans l'hypothèse où M serait réalisé, et dont tous les membres préfèrent M à N. Ces relations d'exclusion ont ensuite été étendues à d'autres modèles de jeux à n joueurs, et en particulier à certains modèles économiques.

3.3. Recherche de l'équilibre.

Considérons d'abord un jeu à n joueurs où toutes les alliances sont supposées interdites. On dit qu'un système de n stratégies (pures ou mixtes, selon les cas) appartenant respectivement aux n joueurs est en équilibre — ou définit un *équilibre* — si et seulement si chacune de ces stratégies est, pour le joueur qui l'emploie, l'une des meilleures réponses possibles au système des (n-1) autres stratégies employées par les autres joueurs. Autrement dit, si les n joueurs ont choisi un système de n stratégies en équilibre et s'ils discutent ensuite la partie qu'ils ont jouée, chacun d'eux constate qu'il a agi au mieux de ses intérêts, qu'il n'aurait pas pu mieux faire, compte-tenu de ce qu'ont fait les autres. Si donc une nouvelle partie devait être jouée, aucun des joueurs ne serait incité par cette discussion à modifier sa manière de jouer. Il en résulte une certaine *stabilité* du résultat auquel ils sont alors parvenus. C'est pourquoi Cournot, qui fut sans doute le premier à introduire cette notion d'équilibre, plus tard réintroduite par Nash, donnait aux résultats correspondants le nom de *situations définitives*. Il est maintenant classique de parler plutôt de *points d'équilibre*.

L'importance de la notion d'équilibre tient à ce qu'elle répond au désir qu'éprouvent très vivement les joueurs de n'avoir rien à regretter, d'avoir exploité au mieux leurs possibilités. (La conversation de joueurs de bridge "discutant le coup" après une donne est très instructive à cet égard, d'autant plus que chacun des deux camps adverses constitue en fait un joueur unique, dont les deux "agents" révèlent bien par leur discussion la satisfaction ou les regrets). Mais il est essentiel d'observer que l'intérêt ainsi compris de l'équilibre, tel qu'il a été défini, est lié à l'impossibilité de toute coopération entre les joueurs, à l'hypothèse selon laquelle chaque joueur joue pour son compte sans pouvoir s'entendre avec les autres joueurs (et il ne suffit pas nécessairement, pour qu'il en soit ainsi, que les alliances soient interdites). C'est la raison pour laquelle la notion d'équilibre joue un rôle particulièrement important dans le cas du duel.

Dans le cas d'un jeu où existent des possibilités de coopération, il ne suffit plus, pour définir un véritable équilibre, d'exiger qu'aucun joueur ne puisse à lui tout seul améliorer son sort : il faudrait exiger de plus qu'aucune modification coordonnée réalisable des actions de plusieurs joueurs ne puisse leur permettre d'améliorer leurs sorts respectifs. La définition d'un tel *équilibre au sens fort* devient alors en général beaucoup plus délicate. Ce sont des considérations de ce genre qui conduisent en particulier à la théorie de la *ψ-stabilité* introduite par Luce.

Contrairement à ce qui se passait pour la notion d'esperance, rien de ce qui précède ne garantit l'existence ni l'unicité des équilibres dans un jeu déterminé, et il arrive en effet qu'il n'en existe aucun ou qu'il en existe plusieurs, et cela même dans le cas simple du duel tactique. L'une des tâches importantes de la théorie des jeux est de rechercher des équilibres ou d'en prouver l'existence dans des classes de plus en plus générales de jeux. On conçoit d'ailleurs que la multiplicité des équilibres puisse, comme leur absence, poser des problèmes difficiles.

Il y a lieu de rattacher à la recherche de l'équilibre les importantes conditions de *stabilité interne* et de *stabilité externe* imposées aux ensembles de résultats qui constituent les *"solutions"* des problèmes de partage, au sens de Von Neumann et Morgenstern. Ces conditions, fondées sur les relations d'exclusion, ne caractérisent pas un résultat déterminé (c'est ce qui fait leur originalité), mais un ensemble de résultats qui peuvent être simultanément considérés comme réalisables, d'après la stabilité interne (il n'y a pas d'exclusion entre résultats appartenant à une même solution), et dont les possibilités de réalisation excluent celle de tout autre résultat, d'après la stabilité externe (tout résultat extérieur à une solution est exclu par l'un au moins des résultats qui lui appartiennent). Cette définition des "solutions" des problèmes de partage a été ensuite étendue à d'autres modèles de jeux à n joueurs. [S'il existe des résultats qui ne soient exclus par aucun autre, leur ensemble, qui est le *"coeur"* (core) du jeu, fait nécessairement partie de toute "solution". (Le terme de "core", et des études approfondies sur cette notion, sont dus à Gillies et à Shapley.)]

Ici encore, rien ne garantit a priori l'existence ni l'unicité des "solutions" dans un jeu déterminé, et rien ne permet non plus a priori d'en préciser la structure. Les problèmes mathématiques posés par l'étude de ces questions sont difficiles, et il en est d'importants qui ne sont pas résolus. (On ignore en particulier s'il est vrai ou faux que tout problème de partage admette au moins une solution.)

3.4. Principe de récurrence.

Si l'on considère un jeu sous forme développée, en s'intéressant à la succession et à l'enchaînement des coups, il est naturel de penser à l'étudier par une méthode d'*analyse récurrente*, et c'est une possibilité qu'il importe de ne pas perdre de vue. Pascal a été l'initiateur de cette méthode dans les jeux de hasard pur, à propos du célèbre "problème des partis". En supposant que le jeu soit représenté par un arbre fini, Pascal part des situations finales où le résultat est connu d'après la règle du jeu, et, à l'aide d'un calcul récurrent de moyennes en probabilité, il remonte peu à peu dans l'arbre en attachant un indicateur d'utilité — qui est une espérance mathématique de gain — à chacune des situations intermédiaires et même à la situation initiale.

Or une méthode récurrente analogue peut être appliquée, dans certains cas, aux jeux de stratégie sous forme développée, où le déroulement d'une partie fait intervenir non seulement des coups aléatoires, comme dans les jeux de hasard pur, mais aussi des coups personnels, des décisions élémentaires prises par les différents joueurs. Lorsqu'une telle analyse récurrente est possible, dans un jeu séquentiel, elle permet de remplacer l'étude globale des stratégies des joueurs (pures ou mixtes, selon les cas) par une suite d'études partielles portant sur leurs décisions élémentaires, ce qui présente l'avantage de fractionner les difficultés. Il faut encore partir des situations finales pour remonter peu à peu dans l'arbre du jeu, supposé fini, en appliquant pas à pas le principe bien connu de Bellman, selon lequel chaque décision élémentaire doit être optimale, compte-tenu de l'hypothèse selon laquelle toutes les décisions ultérieures seront, elles aussi, optimales. Mais le fait que toutes les décisions élémentaires n'appartiennent pas à un même joueur rend ici l'analyse plus difficile, en particulier à cause du fait que des situations équivalentes pour un joueur ne le sont pas nécessairement pour les autres.

Dans le cas des jeux à information parfaite, où le joueur qui a le trait est toujours exactement informé du point où il se trouve dans l'arbre, la méthode récurrente permet de remonter de sommets en sommet immédiatement antérieur, et de calculer ainsi les espérances des joueurs en chaque sommet par des opérations de maximum et de minimum, et par des moyennes en probabilité s'il y a des coups aléatoires. Cette méthode permet aussi d'établir très simplement l'existence d'au moins un système de tactiques en équilibre dans tout jeu fini à information parfaite. Ce *théorème de Kuhn* est une généralisation du célèbre *théorème de Zermelo-Kalmar* qui énonce la même propriété dans le cas particulier du duel, où elle équivaut au fait que les espérances des deux adversaires, calculées à partir du même indicateur d'utilité, sont égales en tout point. Il en est ainsi, en particulier, pour le jeu d'échecs, que la connaissance des tactiques en équilibre et du résultat correspondant ("les Blancs gagnent", ou "la partie est nulle", ou "les Noirs gagnent") reléguerait au rang des récréations mathématiques (dont les "jeux de Nim" donnent un remarquable exemple),.... si la complexité et les dimensions de l'arbre du jeu ne rendaient impraticable la détermination de ces éléments, bien que leur existence soit assurée.

Dans le cas des jeux à information imparfaite, la présence d'ensembles d'information comprenant plusieurs sommets de l'arbre oppose des obstacles à la récurrence, qui doit alors franchir des pas plus grands, au prix d'une analyse plus délicate. Mais il reste possible, dans certains cas, de remplacer l'étude globale du jeu considéré par une suite récurrente d'études partielles portant sur des sous-jeux représentés par certaines parties de l'arbre initial. (Tel est le cas des jeux dits "jeux de ruine, ou de survie", " jeux récurrents", "jeux stochastiques", qui peuvent d'ailleurs n'être pas astreints à se terminer en un nombre fini de coups).

Enfin, lorsque les décisions élémentaires discrètes des jeux séquentiels sont remplacées par des décisions prises dans un ensemble continu, par exemple dans un déroulement continu du temps, on obtient le modèle des *jeux différentiels*, auxquels Isaacs s'est particulièrement intéressé, et dont l'étude peut parfois se rattacher au principe d'optimalité de Pontryagin comme celle des jeux séquentiels se rattache au principe d'optimalité de Bellman.

4. RESULTATS DE LA THEORIE DU DUEL.

C'est la théorie du duel qui est la partie la plus achevée de la théorie des jeux. Nous en avons déjà souligné l'importance et les limites pour l'étude des situations réelles de conflit. Bornons nous à en rappeler ici les principaux résultats.

4.1. Solutions d'un duel stratégique fini. Stratégies optimales et valeur du jeu.

Considérons un duel fini, c'est-à-dire un duel dans lequel chacun des deux adversaires dispose d'un nombre fini de tactiques, et le tableau rectangulaire représentant sa forme normale. Suivant les notations usuelles, supposons que les valeurs numériques de l'indicateur d'utilité, inscrites dans les cases du tableau, croissent selon l'ordre des préférences croissantes du joueur A (dit joueur du maximum) dont les tactiques correspondent aux lignes du tableau, et par conséquent selon l'ordre des préférences décroissantes du joueur B (dit joueur du minimum) dont les tactiques correspondent aux colonnes du tableau.

1/ Dans le *duel tactique* ainsi défini, l'espérance du joueur A est le maximum des minimums de lignes, c'est-à-dire le *maximin*, tandis que l'espérance du joueur B est le minimum des maximums de colonnes, c'est-à-dire le *minimax*. Il est facile de montrer que le maximin est au plus égal au minimax, mais rien n'implique leur égalité dans le cas général. Cependant cette égalité est garantie par le théorème de Zermelo-Kalmar dans le cas des duels tactiques à information parfaite, comme le montre le principe de récurrence.

Si le maximin est égal au minimax, leur valeur commune, qui est l'espérance commune aux deux adversaires, est appelée la *valeur du jeu,* et tout couple formé par une tactique prudente du joueur A et une tactique prudente du joueur B définit un *équilibre.* Réciproquement, tout couple de tactiques en équilibre est un couple de tactiques prudentes. Il en résulte que tous les points d'équilibre ont une utilité égale à la valeur du jeu, et que toute tactique de A entrant dans un équilibre définit encore un équilibre avec toute tactique de B entrant dans un équilibre. On exprime ces propriétés en disant que tous les équilibres d'un duel sont *équivalents* et *interchangeables.* Les tactiques prudentes, qui sont alors aussi les tactiques entrant dans les équilibres, sont dites *optimales* et tout couple de tactiques optimales adverses définit, avec la valeur du jeu, une *solution* du duel tactique considéré (où le maximin est supposé égal au minimax). Chaque solution correspond ainsi à un point d'équilibre du jeu, ou encore à un *col* (saddle-point) du tableau représentatif, c'est-à-dire un élément qui est à la fois minimum dans sa ligne et maximum dans sa colonne, et tous ces cols sont égaux à la valeur du jeu.

Mais *si le maximin est strictement inférieur au minimax* (ce qui est le cas général), il n'existe aucun couple de tactiques en équilibre, ou, ce qui revient au même, il n'existe aucun col dans le tableau représentatif. Chaque joueur dispose encore, bien entendu, d'au moins une tactique prudente, mais ces tactiques ne sont plus optimales, et les résultats qui correspondent à leur emploi ne présentent plus aucun caractère de stabilité : la recherche de l'équilibre est alors vouée à l'échec dans le duel tactique.

2/ L'attrait de l'équilibre peut alors conduire les joueurs à plonger le duel tactique considéré dans un *jeu stratégique* plus vaste, en envisageant de choisir des stratégies, c'est-à-dire des distributions de probabilité sur leurs ensembles de tactiques respectifs, et non plus seulement des tactiques. On sait que ce passage du jeu tactique au jeu stratégique correspondant ne va pas de soi, et qu'il exige de chaque joueur la construction d'un nouvel indicateur d'utilité. Si même chacun des deux adversaires du duel tactique parvient à construire un indicateur d'utilité linéaire pour passer au jeu stratégique, rien n'impose qu'ils adoptent la même attitude devant le risque, ni par conséquent que leurs préférences restent opposées sur les résultats aléatoires du jeu stratégique. *Il est donc possible qu'un duel tactique conduise à un jeu stratégique qui ne soit pas un duel.*

Supposons cependant que le jeu stratégique ainsi obtenu reste un duel, c'est-à-dire qu'un même indicateur d'utilité linéaire puisse traduire dans ce jeu les préférences opposées des deux joueurs. Cet indicateur est alors une fonction bilinéaire des probabilités distribuées par les deux adversaires sur leurs tactiques respectives (supposées en nombre fini), et l'on dit parfois que le jeu considéré est un "jeu matriciel". Dans ces conditions, il est facile de reprendre pour le *duel stratégique* l'analyse esquissée plus haut pour le duel tactique. L'espérance du joueur du maximum A s'y présente à nouveau comme un *maximin* (stratégique), et l'espérance du joueur du minimum B comme un *minimax* (stratégique). Mais le fait essentiel, établi par le théorème fondamental de Von Neumann (ou théorème du minimax), est que, *dans tout duel stratégique fini, le maximin est égal au minimax,* ou autrement dit, les espérances des deux adver -

saires sont égales. [On peut en donner plusieurs démonstrations, fondées soit sur le théorème du point fixe, de Brouwer ou de Kakutani, soit sur le théorème de séparation des domaines convexes, de Hahn-Banach, soit sur les propriétés des systèmes d'inégalités linéaires. La première démonstration en a été publiée par Von Neumann en 1928.]

La valeur commune du maximin et du minimax (stratégiques) est encore appelée la *valeur du jeu* (elle est toujours comprise entre le maximin tactique et le minimax tactique), et tout couple formé par une stratégie prudente du joueur A et une stratégie prudente du joueur B définit un *équilibre*. Réciproquement, tout couple de stratégies en équilibre est un couple de stratégies prudentes. Il en résulte que *tous les équilibres d'un duel stratégique fini sont équivalents et interchangeables*. Les stratégies prudentes, qui sont aussi les stratégies entrant dans les équilibres, sont dites *optimales*, et tout couple de stratégies optimales adverses définit, avec la valeur du jeu, une *solution* du duel stratégique considéré. Chaque solution correspond ainsi à un point d'équilibre du jeu, et tous ces points d'équilibre ont une même utilité égale à la valeur du jeu.

Ainsi le théorème de Von Neumann garantit non seulement l'existence d'un point d'équilibre au moins dans tout duel stratégique fini (ce qui en donne d'ailleurs un second énoncé, équivalent au premier), mais encore l'équivalence et l'interchangeabilité de tous les équilibres qui peuvent y exister. C'est pourquoi l'éventuelle multiplicité des équilibres n'entraîne aucune difficulté supplémentaire dans le duel stratégique, où les stratégies optimales de chaque joueur peuvent être définies indépendamment de celles de son adversaire, et sont toutes également efficaces contre elles. Ces importants résultats tiennent à la concordance qui existe ici entre la prudence des joueurs et la recherche de l'équilibre.

3/ Il importe de bien comprendre ce que signifie l'*optimalité* des stratégies figurant dans les solutions d'un duel stratégique. Ces stratégies assurent en tous cas son espérance, égale à la valeur du jeu, au joueur qui les emploie, et ce sont les meilleures stratégies possibles contre un adversaire qui "joue optimal", mais ce ne sont pas nécessairement les stratégies les plus avantageuses contre un adversaire qui "ne joue pas optimal". Cependant le joueur qui s'écarte de ses stratégies optimales, en supputant que son adversaire commettra telle ou telle "faute" et en s'efforçant d'en profiter au mieux, court le risque de tomber dans un piège habilement tendu et de se faire pénaliser. C'est pourquoi la théorie des jeux tient compte des possibilités et des préférences des joueurs plutôt que de leurs intentions.

Bien entendu, les *considérations de dominance* peuvent être utilisées dans le duel stratégique. Mais, si aucune stratégie strictement dominée ne peut être optimale, il arrive que des dominances larges existent entre des stratégies optimales d'un même joueur. Il en est ainsi lorsqu'une stratégie optimale se montre plus avantageuse qu'une autre contre les stratégies non optimales de l'adversaire, ou autrement dit lorsqu'elle permet de mieux profiter des "fautes" de l'adversaire.

Un caractère intéressant des stratégies optimales est qu'un joueur peut *divulguer* la stratégie optimale qu'il va employer, sans que l'adversaire puisse en profiter pour améliorer son espérance (il n'en serait pas de même si l'adversaire connaissait la tactique résultant du tirage au sort commandé par la stratégie optimale choisie). L'emploi d'une stratégie optimale protège donc efficacement le joueur contre la perspicacité de l'adversaire. Il est d'ailleurs possible de préciser ce rôle important des stratégies optimales en rattachant leur définition à la théorie de l'information : les stratégies optimales sont en effet, comme l'a montré Ville, celles dont la divulgation donnerait à l'adversaire l'information la plus faible possible.

4/ Il faut observer que la *valeur* d'un duel stratégique, espérance commune des deux joueurs, est en général l'utilité de certains résultats aléatoires (et, en particulier, de tous les points d'équilibre), mais qu'elle peut fort bien n'être l'utilité d'aucun résultat concret effectivement réalisable à la fin d'une partie du jeu considéré, lorsque les tirages au sort commandés par les stratégies des joueurs auront été effectués. Cependant cette valeur du jeu, caractérisant le point d'affrontement des forces et des intérêts opposés des deux adversaires, présente une grande importance, et elle pourrait fournir une base équitable pour construire une *solution de compromis* dans le cas où les joueurs auraient la possibilité et le désir de ne pas jouer effectivement le jeu.

Nota - Signalons enfin que le modèle du duel et le concept de stratégie optimale ont été appliqués, en particulier par Abraham Wald et son école, à l'étude des problèmes de décision statistique que l'on désigne parfois sous le nom de *"jeux contre la Nature"*. A vrai dire, la Nature n'est pas un véritable adversaire, elle ne veut a priori aucun mal à qui doit jouer "avec" elle, plutôt que "contre" elle. C'est pourquoi il peut alors paraître trop pessimiste de choisir systématiquement les stratégies "maximin", considérées comme optimales dans le cas du duel. Cependant, bien que cette critique soit fondée, les méthodes de la théorie du duel apportent une intéressante contribution à la théorie de la décision statistique, où les considérations de dominance jouent aussi un rôle important.

4.2. Résolution exacte ou approchée d'un duel stratégique fini.

Résoudre un duel, c'est déterminer sa valeur et les stratégies optimales des deux joueurs. Dans le cas d'un duel stratégique fini, cette résolution se ramène à celle d'un couple de programmes linéaires en dualité, dont la forme particulière garantit qu'ils admettent toujours des solutions finies. Le théorème fondamental de Von Neumann apparaît ainsi comme un cas particulier du théorème de dualité des programmes linéaires, selon lequel deux programmes linéaires en dualité admettent, s'ils sont tous les deux possibles, des optimums égaux.

Le théorème de dualité a pour conséquences les importantes *relations d'exclusion*, qui peuvent s'énoncer de la façon suivante dans le cas particulier des solutions d'un duel. L'ensemble des *tactiques essentielles* d'un joueur, c'est-à-dire l'ensemble des tactiques figurant avec une probabilité non nulle dans l'une au moins de ses stratégies optimales, coïncide avec l'ensemble des tactiques qui donnent un résultat d'utilité égale à la valeur du jeu contre toute stratégie optimale de l'adversaire. (Cela n'implique pas, bien entendu, que les tactiques essentielles soient elles-mêmes optimales). Les relations d'exclusion donnent de précieux renseignements sur l'ensemble des stratégies optimales d'un joueur dès que l'on connaît une stratégie optimale de l'adversaire. Leur emploi est très commode et très fructueux dans les applications concrètes, et en particulier dans les problèmes militaires.

La théorie des programmes linéaires montre que toutes les stratégies optimales d'un joueur peuvent s'obtenir par combinaison linéaire convexe à partir d'un nombre fini de stratégies optimales dites *extrêmes* ou *fondamentales*. La détermination de ces stratégies optimales extrêmes et de la valeur du jeu peut être effectuée, pour des duels stratégiques d'assez grande dimension (jusqu'à quelques centaines de tactiques), à l'aide des programmes de calcul électronique applicables aux programmes linéaires et utilisant sous ses diverses formes l'algorithme de Dantzig, dit *"méthode du simplexe"*. Cette détermination peut aussi être effectuée à la main, pour des duels stratégiques de petite dimension, à l'aide des considérations de dominance et de la méthode dite des "jeux partiels carrés", complétée par l'emploi des relations d'exclusion.

A vrai dire, il n'est pas toujours nécessaire de résoudre exactement un duel stratégique, au sens mathématique du mot "résoudre", c'est-à-dire de déterminer rigoureusement les équilibres équivalents et interchangeables dont l'existence est garantie par le théorème de Von Neumann. Il est rare en effet qu'un modèle de duel représente rigoureusement une situation réelle de conflit, et que les valeurs de l'indicateur d'utilité employé puissent être considérées comme exactes. Il est alors inutile de chercher dans la résolution une rigueur qui n'existe pas dans le modèle, et l'on peut se contenter de définir un couple de *"bonnes stratégies"*, c'est-à-dire des stratégies qui, sans être optimales, assurent à chacun des deux joueurs une espérance relative voisine de la valeur du jeu.

L'expérience de la situation réelle considérée, et l'intuition du chercheur opérationnel, peuvent guider dans la recherche de ces bonnes stratégies. Il suffit ensuite, pour les tester, de calculer les espérances relatives qu'elles assurent respectivement aux deux adversaires : celle du joueur du maximum est toujours au plus égale à celle du joueur du minimum, et l'intervalle qui les sépare comprend la valeur du jeu. Il est donc inutile de chercher mieux si la largeur de cet intervalle est du même ordre de grandeur que les erreurs vraisemblablement commises sur les utilités. (La nullité de cet intervalle caractérise les couples de stratégies optimales).

Il existe d'ailleurs une méthode de calcul approché, la *méthode de Brown et Robinson*, qui permet d'améliorer de bonnes stratégies en leur faisant subir une suite de modifications telles que la largeur de l'intervalle séparant les espérances relatives des deux joueurs tende vers zéro (ces espérances tendent alors vers la valeur du jeu). Cependant la convergence de cette méthode asymptotique est lente, et elle n'est pas monotone, de sorte qu'il serait vain de prétendre obtenir ainsi une très grande précision. La méthode n'en reste pas moins intéressante, tant pour la recherche et l'amélioration des bonnes stratégies, dans le cas fréquent où la précision requise est modérée, que pour éclairer l'évolution des tactiques choisies par les deux adversaires dans une longue suite de parties du duel considéré.

4.3. Notions sur la théorie du duel infini.

La base de la théorie du duel fini étant le théorème de Von Neumann, il est naturel de chercher à étendre ce théorème à des classes aussi larges que possible de duels infinis, c'est-à-dire de duels où l'un au moins des deux adversaires dispose d'une infinité de tactiques.

La forme normale d'un duel tactique quelconque est constituée par trois éléments : deux ensembles E et F, finis ou infinis, de tactiques (ou stratégies pures) α et β respectivement offertes aux deux joueurs A et B, et un indicateur d'utilité numérique $r(\alpha,\beta)$ défini sur le produit cartésien $E \times F$ de ces deux ensembles.

Un duel stratégique correspondant à ce duel tactique est défini par trois éléments : deux ensembles X et Y de stratégies (ou stratégies mixtes) x et y respectivement offertes aux deux joueurs A et B, x et y étant des distributions de probabilité sur E et F (c'est-à-dire des mesures en probabilité définies sur une classe additive, plus ou moins générale, de parties de E ou de F), et un indicateur d'utilité linéaire u(x, y) défini sur le produit cartésien X × Y par une opération de moyenne en probabilité effectuée sur l'indicateur r (α, β) du duel tactique.

Dans un duel tactique ou stratégique quelconque, l'espérance du joueur du maximum A s'exprime par le supremum d'un infimum (qui est parfois un maximin), tandis que l'espérance du joueur du minimum B s'exprime par l'infimum d'un supremum (qui est parfois un minimax). Les extensions du théorème de Von Neumann expriment que, *pour certaines classes de duels tactiques ou stratégiques, les espérances des deux joueurs sont égales*, et l'on dit alors que le jeu admet une *valeur* égale à cette espérance commune. Dans ces conditions, si les deux joueurs ont des tactiques ou des stratégies prudentes, elles définissent des équilibres, tous équivalents et interchangeables, et sont dites *optimales*. Mais il se peut que les joueurs aient seulement des stratégies prudentes à ε près, si petit que soit le nombre positif ε : dans un jeu qui admet une valeur, ces stratégies sont dites *optimales à ε près*. Et il se peut aussi qu'un duel tactique ou stratégique n'admette pas de valeur.

On doit ici se borner à énoncer quelques-uns des importants théorèmes auxquels conduit l'étude des duels infinis (en renvoyant, pour une information plus complète, aux livres classiques de Blackwell et Girshick et de Karlin).

1/ Tout duel stratégique où le joueur A dispose d'un nombre fini m de tactiques admet une valeur, le joueur A y possède au moins une stratégie optimale, et le joueur B y possède au moins une stratégie optimale à ε près (ou parfois une stratégie optimale) faisant intervenir m tactiques au plus.

2/ Un duel tactique où les ensembles E et F sont compacts et inclus dans des espaces euclidiens R^m et R^n (de dimensions finies m et n), et où l'indicateur r (α,β) est continu sur le produit cartésien E × F, n'admet pas nécessairement une valeur, mais on peut toujours lui faire correspondre un duel stratégique qui admet une valeur et où chacun des deux joueurs possède au moins une stratégie optimale. Ce résultat s'applique en particulier au cas des duels sur le carré unité, où chacun des ensembles de tactiques E et F peut être représenté par l'intervalle fermé $[0,1]$, et il y a été établi pour la première fois par Ville en 1938.

Glicksberg a d'ailleurs montré que le résultat précédent subsiste, avec des stratégies optimales à ε près, si l'indicateur $r(\alpha, \beta)$ est seulement semi-continu (inférieurement ou supérieurement) sur $E \times F$.

3/ Tout duel stratégique où le joueur du maximum A dispose de tactiques α dont l'ensemble E est une partie convexe compacte d'un espace euclidien R^m de dimension m, et où l'indicateur $r(\alpha, \beta)$ est une fonction continue concave de α pour tout $\beta \in F$, admet une valeur, le joueur A y possède une tactique optimale, et le joueur B y possède au moins une stratégie optimale à ε près faisant intervenir $(m + 1)$ tactiques au plus.

4/ Tout duel tactique où les ensembles E et F sont des parties convexes compactes d'espaces euclidiens R^m et R^n, et où l'indicateur $r(\alpha, \beta)$ est une fonction continue, concave en α pour tout $\beta \in F$, et convexe en β pour tout $\alpha \in E$, admet une valeur, et chacun des deux joueurs y possède une tactique optimale. [Cela résulte du théorème du point fixe de Kakutani.]

D'après le *théorème de Sion*, ce résultat subsiste si l'indicateur $r(\alpha, \beta)$ est seulement une fonction semi-continue supérieurement et quasi-concave en α pour tout $\beta \in F$, semi-continue inférieurement et quasi-convexe en β pour tout $\alpha \in E$. [Cela résulte d'une intéressante propriété combinatoire des ensembles convexes compacts dans les espaces euclidiens R^k (lemme de Berge et Sion), elle-même fondée sur une application récurrente du théorème de séparation de Hahn-Banach.]

5/ Le théorème de Sion s'étend (comme la propriété combinatoire des ensembles convexes compacts d'où il résulte) au cas des espaces vectoriels topologiques séparés, sur le corps des réels, ce qui donne le théorème général suivant :

Tout duel tactique où les ensembles E et F sont des parties convexes compactes d'espaces vectoriels topologiques séparés, de dimension finie ou infinie, sur le corps des réels, et où l'indicateur $r(\alpha, \beta)$ est une fonction semi-continue supérieurement et quasi-concave en α pour tout $\beta \in F$, semi-continue inférieurement et quasi-convexe en β pour tout $\alpha \in E$, admet une valeur, et chacun des deux joueurs y possède une tactique optimale.

Quand un duel infini admet une valeur et des stratégies optimales, la détermination de toutes ces stratégies est en général un problème difficile, qui peut exiger l'emploi de techniques mathématiques telles que la théorie des équations différentielles ou intégrales et le calcul des variations. Les résultats précédemment rappelés, et certains autres relatifs à des classes plus particulières de jeux, peuvent aider à circonscrire le problème et à mettre au point des méthodes de calcul. L'extension des relations d'exclusion au cas des duels infinis conduit à rechercher des *stratégies dites "égalisantes"* qui, opposées à certaines classes de tactiques adverses, donnent des résultats (aléatoires) de même utilité. On peut aussi généraliser les *considérations de dominance,* au sens strict et au sens large, qui ont été appliquées au cas du duel fini. Enfin certaines classes de jeux se prêtent bien à la recherche directe de *couples de stratégies en équilibre,* par une méthode associant à chaque stratégie l'ensemble des stratégies adverses qui y répondent au mieux (méthode fondée sur la recherche de *"points fixes"* au sens de Kakutani).

Parmi les classes de duels infinis les plus intéressantes, signalons :

- les *jeux séparables* (dont les jeux polynomiaux sont un cas particulier), où l'indicateur d'utilité $r(\alpha, \beta)$, défini sur le produit cartésien $E \times F$ des ensembles de tactiques, peut être mis sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=h} \sum_{j=1}^{j=k} c_{ij}\, s_i(\alpha)\, t_j(\beta) \; ;$$

- *les jeux convexes ou quasi-convexes,* justiciables de l'un ou l'autre des trois derniers théorèmes précédents :

- *certains types de jeux continus sur le carré unité,* justiciables du second théorème précédent ;

- *les jeux de localisation dans le temps (ou dans l'espace),* où chaque joueur doit choisir, soit l'instant (ou le lieu) d'une certaine action, comme dans le jeu dit du "tir à l'arc", soit plus généralement la répartition dans le temps (ou dans l'espace) de certains moyens d'action (auquel cas les ensembles de tactiques des joueurs sont inclus dans des espaces fonctionnels) :

- *certains jeux fonctionnels,* analogues à des problèmes de poker particuliers.

[Quelques-uns de ces jeux ont été introduits par Borel dès 1921.]

Nota - Signalons que les problèmes de décision statistique les plus intéressants conduisent à des "jeux contre la Nature" qui sont des jeux infinis. Les travaux de Wald sur ces problèmes ont d'ailleurs beaucoup contribué au développement de la théorie du duel infini.

5. APERÇUS SUR LES JEUX DE LUTTE ET DE COOPERATION.

5.1. Généralités.

Dès qu'un jeu laisse place en même temps à la lutte et à la coopération, c'est-à-dire dès qu'il ne s'agit plus d'un duel, il est difficile de le représenter, sans hypothèse ni condition supplémentaire, par un schéma de causalité et un schéma de finalité traduisant correctement les moyens d'action et les préférences des joueurs. Car il est alors essentiel de préciser les conditions dans lesquelles peut s'exercer une éventuelle coopération entre les joueurs (même s'il n'y en a pas plus de deux), et en particulier les possibilités de formation et d'évolution des alliances, ainsi que les modalités de leur fonctionnement et les "paiements compensatoires" auxquels des joueurs alliés peuvent procéder en marge du jeu proprement dit. S'il est permis à certains joueurs de communiquer entre eux, il faut aussi préciser si tel ou tel de ces joueurs est libre de refuser cette possibilité (des considérations psychologiques peuvent parfois l'y inciter, si un point faible le rend vulnérable aux menaces de ses adversaires). Il y a là de véritables *conditions sociologiques* qu'il est indispensable d'introduire, sous une forme ou sous une autre, dans les modèles de jeux plus généraux que le duel.

D'autre part, la mise en oeuvre de la coopération présente le plus souvent un *aspect dynamique* dont il est difficile de rendre compte de façon satisfaisante dans un modèle global. Il est même possible que, toute communication entre les joueurs étant interdite, la coopération ne puisse s'exercer que par un véritable apprentissage mutuellement donné et reçu au cours du déroulement d'une partie, à travers l'enchaînement des décisions élémentaires des joueurs. Une telle forme tacite de coopération, assortie de menace implicite, n'en joue pas moins un rôle important dans certains jeux séquentiels, et par exemple dans les "superjeux" constitués par certaines suites finies ou infinies de parties d'un même jeu. [Signalons, en particulier, les travaux d'Aumann sur les *"points acceptables"*, correspondant à des états stationnaires dans de tels superjeux.]

On comprend ainsi que la forme normale ne soit pas toujours le cadre le mieux adapté à l'étude des jeux de lutte et de coopération, et que de nombreux modèles puissent être proposés pour les représenter, selon les conditions sociologiques retenues, sans qu'il y ait lieu d'établir une hiérarchie entre ces modèles. Leur étude, souvent fort délicate, procède toujours plus ou moins directement des quatre principes déjà considérés au cours de cet exposé : calculs d'espérance, considérations de dominance, recherche de l'équilibre, principe de récurrence. Il est rare que cette étude puisse, comme celle du duel, conduire à considérer certaines manières de jouer comme optimales, ou certains résultats isolés comme privilégiés. Mais, sans nier la possibilité ni même la nécessité de faire progresser la théorie des jeux, on peut penser que le caractère plus nuancé et la structure plus complexe des "solutions" proposées pour les jeux de lutte et de coopération est "conforme à la nature des choses".

5.2. Rationalité individuelle et rationalité collective.

Quel que soit le modèle adopté, l'étude d'un jeu de lutte et de coopération doit toujours prendre en considération deux éléments dont l'importance a déjà été soulignée : *les espérances des différents joueurs*, caractérisant les buts respectifs qu'ils sont sûrs de pouvoir atteindre (au moins à ε près) par leurs seules forces, quoi que fassent les autres joueurs, et l'*extremum de Pareto*, qui est l'ensemble des résultats, dits extrêmes ou collectivement admissibles, qu'il est impossible d'améliorer pour un joueur sans qu'un autre au moins en pâtisse. On peut en effet penser que des joueurs individuellement rationnels ne sauraient se contenter d'un résultat ne leur assurant pas leur espérance, et que des joueurs collectivement rationnels devraient considérer comme inadmissible tout résultat non extrême, puisqu'un tel résultat pourrait être remplacé par un autre, au moins aussi bon pour tous les joueurs et meilleur pour certains d'entre eux.

C'est ce qui justifie la place privilégiée accordée, en particulier par Von Neumann et Morgenstern, à l'ensemble des résultats réalisables qui satisfont à la double condition de rationalité individuelle (ils assurent à chacun des joueurs au moins son espérance) et de rationalité collective (ils sont extrêmes). L'ensemble de ces résultats est une partie de l'extremum de Pareto : c'est ce que l'on appelle l'*ensemble de négociation* (negotiation set), et, dans le cas particulier des problèmes de partage, l'*ensemble des "imputations"*.

Il ne faut cependant pas oublier que des joueurs, même rationnels et libres de coopérer, peuvent éprouver de grandes difficultés à atteindre l'extremum, et que la prudence peut les inciter à y renoncer quand une défiance mutuelle apparemment irrémédiable leur fait craindre "l'ascendant des intérêts particuliers". Pour atteindre à coup sûr un résultat extrême, les joueurs devraient en effet s'accorder, explicitement ou implicitement, pour jouer un "jeu sur l'extremum" (ou mieux, sur l'ensemble de négociation), dont la règle ne résulte pas en général de celle du jeu proposé. Mais il se peut qu'un tel accord soit difficile à réaliser, et que son éventuelle réalisation sans garanties suffisantes fasse courir de grands risques à certains joueurs, dont la loyauté pourrait être exploitée par des partenaires déloyaux. Il est même possible que chacun des joueurs ait personnellement intérêt à ne pas respecter l'accord, quoi que fassent par ailleurs les autres joueurs, mais que chacun ait grand intérêt à ce que l'accord soit respecté par les autres, et que tout le monde perde à ce que l'accord ne soit respecté par personne.

Le célèbre "dilemme des prisonniers", proposé par Tucker, donne un exemple d'une telle situation, où l'emploi d'une tactique dominante par chacun des joueurs aboutit à une catastrophe, pourtant évitable si chacun joue "comme il voudrait que l'autre joue" (ce qui semble plus conforme à la charité qu'à la raison). Et il est facile d'imaginer des situations diplomatiques ou économiques analogues : par exemple un problème de choix entre la modération et l'intransigeance pour deux adversaires engagés dans une controverse telle que l'intransigeance y soit toujours payante, bien qu'une double modération soit plus favorable à chacun qu'une double intransigeance ; ou encore un jeu dans lequel les nombreux fournisseurs d'un bien de consommation sur un certain marché cherchent à s'entendre pour limiter les quantités fournies, afin d'éviter la chute des prix et de préserver ainsi leurs bénéfices (mais il existe d'autre part des lois antitrust pour interdire certaines ententes de ce genre, considérées comme socialement indésirables). De tels exemples montrent bien comment la recherche individuelle des intérêts particuliers peut compromettre l'intérêt d'un ensemble de joueurs, en conduisant à des résultats collectivement irrationnels. Seule une coopération confiante (impliquant le respect des accords), ou un arbitrage accepté (parfois représenté par une contrainte sociale), permettrait de sortir de telles impasses et d'atteindre l'extremum, mais les conditions psychologiques ou sociologiques n'en sont pas toujours réunies (comme il est possible de le constater à propos de situations très variées). Il est d'ailleurs clair, d'après les exemples précédents, que le souci d'un intérêt plus général peut conduire un gouvernement à s'efforcer, suivant les cas, de faciliter ou de gêner la réalisation d'un tel objectif.

Certains théoriciens, tels que Zeuthen, Nash, Harsanyi, Isbell, Miyasawa, Raiffa, Braithwaite, ont cherché à définir des *procédures d'arbitrage ou de marchandage* sur l'ensemble de négociation, soit en s'appuyant sur des considérations de symétrie, d'invariance, de stabilité (plus ou moins fondées sur un certain désir d'équité), soit en s'efforçant de tenir compte de certains postulats de rationalité et des moyens de marchandage dont disposent les joueurs, en particulier de leurs possibilités mutuelles de menaces (ce qui peut imposer une délicate comparaison interindividuelle des utilités). Mais il est toujours assez facile de contester la validité de ces procédures et leur rôle normatif ou explicatif, de sorte que leur portée semble relativement limitée. C'est pourquoi Von Neumann et Morgenstern préfèrent s'en tenir à mettre en évidence le rôle privilégié de l'ensemble de négociation, ou de certains ensembles d'imputations qui y sont inclus (les "solutions" des problèmes de partage), sans aller jusqu'à privilégier un résultat déterminé : cette dernière sélection, dépendant des aptitudes relatives des joueurs au marchandage, est alors considérée comme relevant de la psychologie plus que de l'analyse mathématique, mais ce point de vue n'est sans doute pas, lui non plus, à l'abri de toute critique.

[A côté des conditions de rationalité individuelle et collective, on peut parfois considérer des conditions de rationalité interindividuelle relatives à certaines alliances et excluant les résultats qu'une telle alliance aurait le moyen d'améliorer pour l'un au moins de ses membres sans qu'aucun autre en pâtisse. Mais de telles conditions ne s'imposeraient que si leur violation devait à coup sûr entraîner la formation des alliances correspondantes, en vue de les défendre.]

5.3. Esquisse de quelques modèles.

Il est impossible de prétendre passer ici en revue, même sommairement, tous les modèles qui ont été proposés pour représenter les jeux de lutte et de coopération. Bornons nous à donner quelques indications succinctes sur les principaux d'entre eux, en supposant toujours que les joueurs soient en nombre fini n.

1/*Le modèle de Nash* interdit toute communication, toute alliance, tout paiement compensatoire entre les joueurs. Ou plutôt Nash présente un tel modèle comme capable de rendre compte formellement de tout jeu de lutte et de coopération grâce à un élargissement adéquat des ensembles de tactiques offerts aux joueurs. Il est clair que la construction effective d'un tel modèle pour un jeu général risquerait de présenter d'insurmontables difficultés, et il semble qu'elle n'ait jamais été entreprise. Mais rien n'empêche de considérer le modèle comme donné.

Dans ces conditions, les n joueurs, privés par hypothèse de toute possibilité de corréler leurs manières de jouer, peuvent s'intéresser aux systèmes de tactiques ou de stratégies en équilibre, en même temps qu'à des considérations de prudence ou de dominance. Le théorème de Nash, qui est une extension du théorème de Von Neumann, établit que *dans tout jeu stratégique où les n joueurs disposent d'un nombre fini de tactiques, il existe au moins un système de stratégies en équilibre.* [Sa démonstration repose sur le théorème du point fixe de Brouwer ou de Kakutani.] Mais, même dans le cas où il y a seulement deux joueurs, il peut exister plusieurs équilibres non équivalents et non interchangeables, et les systèmes de stratégies prudentes ne sont en général pas en équilibre. (Cependant tout point d'équilibre donne à chacun des joueurs au moins son espérance).

Il est alors difficile de tirer de la détermination des équilibres une "solution" du jeu, et nous signalerons seulement ici les efforts effectués dans cette voie par Nash, et par Gale, à l'aide de considérations de dominance et de rationalité collective. [D'autre part, certaines considérations psychologiques, fondées sur les risques courus par les joueurs, peuvent parfois inciter à privilégier tel ou tel point d'équilibre, dont la réalisation semble plus probable que celle des autres, et Harsanyi a exploité ce principe pour proposer une solution générale des jeux de Nash finis.]

2/*Le modèle des problèmes de partage de Von Neumann et Morgenstern* permet au contraire toute communication, toute alliance entre les joueurs, et suppose l'existence d'un bien indéfiniment divisible (analogue à une monnaie) dont l'échange entre les joueurs permet un *transfert d'utilité* entre eux, moyennant un choix convenable de leurs échelles d'utilité respectives. Cette hypothèse, qui précise les modalités des paiements compensatoires, ne suppose aucune comparaison interindividuelle des utilités. Mais elle permet de parler de l'utilité totale d'un résultat pour une alliance, et de la répartition de cette utilité entre les joueurs alliés. Un tel modèle peut donc être décrit comme représentant un problème de partage d'un certain bien – l'utilité globale disponible – entre n participants qui sont libres a priori de conclure entre eux les alliances de leur choix.

Il reste à préciser les moyens d'action dont disposent les joueurs et toutes les alliances possibles, ce que l'on fait en général en donnant directement une *fonction caractéristique*, qui pourrait aussi être déduite de la forme normale du jeu. La fonction caractéristique, dont il a déjà été question, est définie sur l'ensemble des parties de l'ensemble des n joueurs, et elle caractérise les revendications que chaque alliance pourrait soutenir efficacement si elle était constituée. L'hypothèse faite sur la transférabilité des utilités entre les joueurs permet ici de donner seulement, pour chaque alliance, l'utilité totale qu'elle peut s'assurer quoi que fassent les autres joueurs, c'est-à-dire son espérance dans un duel qui l'opposerait à tous les autres joueurs coalisés contre elle. La fonction caractéristique ainsi définie est *suradditive*, en ce sens que l'union de deux alliances disjointes a une espérance au moins égale à la somme des espérances de ces deux alliances (mais certaines extensions de la théorie suppriment la condition de suradditivité). Bien que la fonction caractéristique ne suffise pas en général à rendre compte de tous les éléments d'un problème de partage, Von Neumann et Morgenstern supposent qu'aucune autre donnée ne peut être exploitée.

Les résultats extrêmes, au sens de Pareto, sont les partages sans reste de l'utilité globale disponible entre les n joueurs. Les partages sans reste qui donnent au moins son espérance à chacun des joueurs sont appelés les *imputations*. L'ensemble des imputations est ainsi l'ensemble des résultats qui satisfont à la double condition de rationalité individuelle et collective, et Von Neumann et Morgenstern considèrent que le jeu se joue sur cet ensemble. [La partie de cet ensemble qui satisferait de plus à toutes les conditions de rationalité interindividuelle, imposant que chacune des alliances possibles reçoive au moins son espérance, est, dans bien des cas, la partie vide; dans les cas où elle n'est pas vide, elle constitue le *"coeur"* (core) du jeu.]

On peut alors considérer qu'une imputation M exclut une imputation N si et seulement si il existe une alliance qui reçoive au plus son espérance dans M (de telle manière qu'elle puisse s'opposer à toute diminution de sa part si M est réalisée), et dont tous les membres perdraient au passage de M à N. Ces relations d'exclusion permettent de définir des ensembles privilégiés d'imputations, qui sont les *"solutions"* des problèmes de partage, au sens de Von Neumann et Morgenstern : chacune de ces solutions est caractérisée par le fait qu'elle est stable intérieurement (pas d'exclusion entre imputations appartenant à une même solution) et stable extérieurement (pas d'imputation extérieure à une solution qui ne soit exclue par l'une au moins des imputations qui lui appartiennent.) Shapley a d'ailleurs montré que ces conditions de stabilité suffisent pour impliquer la rationalité collective – mais non pas la rationalité individuelle – des partages qui constituent les "solutions". [Le coeur du jeu, s'il n'est pas vide, fait manifestement partie de toute solution, mais il ne constitue pas en général une solution à lui tout seul.]

Une "solution" d'un problème de partage est ainsi un ensemble d'imputations qui peuvent être simultanément considérées comme réalisables, et dont les possibilités de réalisation excluent celle de toute autre imputation. Mais il n'est pas prouvé que tout problème de partage admette au moins une solution. Et l'on connaît beaucoup d'exemples de problèmes admettant un grand nombre ou une infinité de solutions, dont chacune peut à son tour comprendre un grand nombre ou une infinité d'imputations. Selon Von Neumann et Morgenstern, ce sont encore des conditions sociologiques (standards of behavior) qui commanderont alors le choix d'une solution parmi toutes les solutions possibles ; et ce sont les aptitudes relatives des joueurs au marchandage (relative bargaining abilities) qui entraîneront la réalisation d'une imputation parmi toutes celles de la solution choisie. [Le concept de *"solutions fortes"*, introduit par Vickrey, permet dans certains cas de réduire l'ensemble des solutions considérées a priori comme admissibles.]

Signalons qu'en se plaçant à un point de vue très différent, Shapley a cherché à estimer la *valeur* que chaque joueur peut attribuer à l'éventualité de prendre part à un tel jeu de partage, défini par sa fonction caractéristique. Il est parvenu à montrer que des conditions de symétrie, de rationalité collective, et d'additivité apparemment naturelles (mais, bien entendu, sujettes à critique) permettent de déterminer une telle valeur d'une manière unique. Cette fonction, définie sur l'ensemble des n joueurs, est appelée la *"valeur de Shapley"*. [Elle définit d'ailleurs une imputation particulière, qui pourrait être proposée, dans certains cas, comme base d'un arbitrage. Mais on peut penser, avec Harsanyi, que, si le jeu était initialement donné sous forme normale, la valeur de Shapley serait avantageusement remplacée, comme base d'un arbitrage, par une *"valeur modifiée"*, calculée de la même manière à partir d'une "fonction caractéristique modifiée" qui est définie, en vue de ce calcul, par un duel dans chaque couple d'alliances complémentaires, avec la différence de leurs parts comme enjeu.]

Il faut ajouter que le modèle de Von Neumann et Morgenstern, malgré le caractère assez particulier des situations qu'il représente, est, par les concepts originaux et profonds dont les auteurs l'ont enrichi, la base de nombreuses généralisations dans diverses voies, et de fructueuses recherches relatives à l'économie des marchés. Citons les travaux de Thrall et Lucas sur un modèle de problèmes de partage où la fonction caractéristique est définie sur l'ensemble des *partitions* de l'ensemble des n joueurs, les travaux de Shapley, Shubik, Aumann et Peleg sur les jeux de lutte et de coopération *sans paiements compensatoires*, les travaux de Debreu et Scarf sur les *"équilibres concurrentiels"* (competitive equilibriums) et le *"coeur"* (core) d'une économie, ainsi que leur extension par Aumann au cas des échanges entre une infinité continue de participants (continuum of traders). [Ces travaux sur l'économie des marchés montrent qu'il existe, dans certaines conditions, une convergence remarquable entre le point de vue individualiste de la concurrence parfaite (avec formation d'un système de prix selon la loi de l'offre et de la demande), et le point de vue coopératif du libre échange des biens entre les participants.]

Indiquons enfin que plusieurs autres concepts, d'une portée peut-être plus limitée, se rattachent au modèle des problèmes de partage : les *"résultats raisonnables"* de Milnor, les *"ensembles de marchandage"* (bargaining sets) d'Aumann et Maschler, le *"noyau"* (kernel) de Davis et Maschler.

3/ *Le modèle intermédiaire de Luce* suppose que certains obstacles à la communication entre les joueurs restreignent les possibilités de formation de nouvelles alliances à partir de chaque "structure d'alliance" réalisable. Plus précisément, il existe une fonction ψ qui, à chaque partition τ de l'ensemble de n joueurs, associe une classe $\psi(\tau)$ d'alliances considérées comme seules admissibles à partir de la structure τ. Il faut, bien entendu, supposer que τ est une partie de $\psi(\tau)$.

On considère alors comme privilégiés les couples (x,τ), formés d'un résultat x et d'une structure d'alliance τ, qui possèdent la "*ψ-stabilité*", en ce sens que le résultat x satisfait aux conditions de rationalité interindividuelle pour chacune des alliances de la classe $\psi(\tau)$ (ce qui empêche ces alliances de revendiquer efficacement plus qu'elles n'obtiennent dans le résultat x), et qu'il satisfait aussi à des conditions de rationalité individuelle un peu renforcées : chaque joueur obtient dans x au moins son espérance, et même mieux que son espérance s'il participe à une véritable alliance (ce qui dissuade les joueurs de rompre les alliances auxquelles ils participent). On peut éventuellement ajouter à ces conditions la condition de rationalité collective.

Un tel modèle peut être envisagé, soit avec une utilité transférable comme dans le modèle des problèmes de partage, soit en l'absence de tout paiement compensatoire. Il est possible, dans tous les cas, qu'il n'existe aucun couple ψ-stable, ou qu'il en existe plusieurs, ce qui entraîne d'évidentes difficultés pour fonder la résolution d'un jeu sur la ψ-stabilité.

6. CONCLUSION.

L'exposé qui précède n'a pu donner que des indications rapides sur l'esprit, les modèles et les méthodes de la théorie des jeux, et il ne prétend pas avoir été complet. Il aura sans doute rempli son but s'il a réussi à présenter la théorie des jeux comme un ensemble cohérent, reposant sur quelques idées générales saines, exploitées avec un succès inégal, mais certain, dans l'étude de différents modèles de conflit, avec ou sans possibilités de coopération.

Il reste la difficulté d'appliquer les résultats obtenus aux situations réelles de conflit, soit qu'il s'agisse de résultats relatifs à des modèles trop rudimentaires pour rendre compte d'une réalité complexe, soit qu'il s'agisse de résultats trop fragmentaires relatifs à des modèles dont la complexité rend l'étude délicate. Il ne faut certes pas oublier ces servitudes et vouloir tirer de la théorie des jeux plus qu'elle ne peut donner dans chaque problème concret. Mais il ne faut pas oublier non plus tout ce que peut apporter, pour la compréhension et le traitement d'un problème, la seule construction d'un modèle soigné, avec une réflexion méthodique sur ce modèle, ou aussi l'étude d'un modèle simplifié, et connu comme tel, mais rendant compte de certains aspects importants de la situation réelle.

La question de la portée pratique de la théorie des jeux reste ouverte, et il peut y avoir grand profit à confronter différents points de vue sur ce sujet. Mais il est sans doute permis de dire, en se référant à une expérience déjà significative, que la théorie des jeux apporte, dans certains cas, des éléments précis pour guider la décision et l'action des joueurs ou pour expliquer l'évolution d'une situation réelle de conflit, et qu'elle fournit, pour la plupart de ces situations, un cadre de pensée et des éléments de réflexion extrêmement fructueux.

QUELQUES REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

Contributions to the Theory of Games - Vol. I, II, III, IV (editors : H.W. Kuhn, A.W. Tucker, M, Dresher, P. Wolfe, R.D. Luce), Annals of Mathematics Studies n^{os} 24, 28, 39, 40, Princeton University Press, 1950, 1953, 1957, 1959.

Recent Advances in Game Theory (editor : M. Maschler), Proceedings of the Princeton University Conference of October 1961 (privately printed).

Advances in Game Theory (editors : M. Dresher, L.S. Shapley, A.W. Tucker), Annals of Mathematics Studies n° 52, Princeton University Press, 1964.

Game Theory and related Approaches to social Behavior (editor : M. Shubik), John Wiley, 1964.

K.J. ARROW - *Social Choice and Individual Values*, Cowles Commission Monograph n° 12, John Wiley, 1951.

R.J. AUMANN - *Markets with a Continuum of Traders*, Econometrica, Vol 32, n^{os} 1-2, Janvier-Avril 1964.

C. BERGE et A. GHOUILA-HOURI - *Programmes, Jeux et Réseaux de transport*, Dunod, 1962.

D. BLACKWELL and M.A. GIRSHICK - *Theory of Games and Statistical Decisions*, John Wiley, 1954.

E. BOREL - *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche,* Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Vol. 173, pp. 1304-1308, 1921.

- *Sur les jeux où interviennent le hasard et l'habileté des joueurs,* dans "Eléments de la Théorie des Probabilités", pp. 204-224, 3ème édition, Hermann, 1924.
(Textes traduits en anglais par L. J. Savage, et accompagnés de commentaires par M. Fréchet et J. von Neumann, dans Econometrica, Vol. 21, n° 1, janvier 1953).

G. DEBREU and H. SCARF - *A limit Theorem on the Core of an Economy,* International Economic Review, Septembre 1963.

M. DRESHER - *Games of Strategy : Theory and Applications,* The Rand Corporation, Prentice Hall, 1961.

G. TH. GUILBAUD - *Leçons sur les éléments principaux de la Théorie mathématique des Jeux,* dans "Stratégies et Décisions économiques", CNRS, Paris, 1954.

- *Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation,* Economie appliquée, n° 4, 1952.

S. KARLIN - *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics.* Vol. I et II, Pergamon Press, 1959.

R.D. LUCE and H. RAIFFA - *Games and Decisions : Introduction and critical Survey,* John Wiley, 1957.

J.C.C. Mc KINSEY - *Introduction to the Theory of Games,* The Rand Corporation, Mc Graw-Hill, 1952.

J. VON NEUMANN and O. MORGENSTERN - *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, 1944 (2ème édition 1947, 3ème édition 1953).

T.C. SCHELLING - *The Strategy of Conflict,* Harvard University Press, 1960.

J. VILLE - *Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs,* dans le Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications, publié par E. Borel, Tome IV, Fascicule 2 : "Applications aux Jeux de hasard", par E. Borel. (Note, pp 105-113), Gauthier-Villars, 1938.

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Ouvrages scientifiques
TYPO-OFFSET
GAP (Hautes-Alpes)
Dépôt légal n° 225
1965