CAHIERS DU BURO

J. BOUZITAT

Choix d'une politique d'exploitation dans un ensemble industriel complexe « Le couteau de Jeannot »

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 4 (1962), p. 17-40

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1962__4__17_0>

CHOIX D'UNE POLITIQUE D'EXPLOITATION DANS UN ENSEMBLE INDUSTRIEL COMPLEXE "LE COUTEAU DE JEANNOT"

par

J. BOUZITAT

"C'est comme le couteau de Jeannot" se dit d'une chose qui conserve le même nom, mais qui n'a plus rien de ce qui la constituait autrefois.

LITTRÉ.

SOMMAIRE

ANNEXE MATHÉMATIQUE

CHOIX D'UNE POLITIQUE D'EXPLOITATION DANS UN ENSEMBLE INDUSTRIEL COMPLEXE "LE COUTEAU DE JEANNOT"

I. DESCRIPTION GÉNÉRALE DU MODÈLE ÉTUDIÉ

On considère un ensemble composé de deux parties. Chacune de ces parties présente à chaque instant certains risques de rupture caractérisés par une loi de probabilité connue, et sa fragilité croît avec son âge; mais les services rendus par un ensemble en ordre de marche à un instant déterminé sont supposés indépendants des âges respectifs des parties qui le composent.

Quand une rupture se produit, il est possible :

- soit de remplacer la partie défaillante au prix d'une réparation dont le coût prend l'une ou l'autre de deux valeurs connues, suivant la nature de cette partie;

- soit de remplacer l'ensemble tout entier, et le coût de cette opération est, lui aussi, connu.

Une politique d'exploitation doit préciser le choix à faire entre ces deux possibilités, dans tous les cas de rupture qui peuvent se présenter, c'est-à-dire en fonction de la nature et de l'âge de la partie non rompue. On suppose d'abord qu'aucun remplacement ne peut être envisagé si une rupture ne s'est pas produite.

Le critère en fonction duquel est choisie la politique optimale est le désir de minimiser, à chaque rupture, l'espérance mathématique du coût actualisé de l'exploitation à partir de cet instant. Chaque décision doit être optimale, compte tenu du fait que toutes les décisions ultérieures seront, elles aussi, optimales.

Il est clair que l'étude d'un tel modèle pose un problème de programmation dynamique. La méthode proposée pour le résoudre est une méthode d'approximations successives, dont on démontre la convergence. La politique optimale ainsi obtenue reste optimale dans l'ensemble de toutes les politiques possibles, où un remplacement pourrait être envisagé à tout instant, même si aucune rupture ne s'était produite.

2. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Pour la commodité du langage, on parlera d'un couteau C, composé d'une lame L et d'un manche M.

Soit $\left[\begin{array}{ll} l & \text{le coût de remplacement de la lame L seule,} \\ m & \text{le coût de remplacement du manche M seul,} \\ c & \text{le coût de remplacement du couteau C tout entier.} \end{array}\right.$

Les seuls cas intéressants sont ceux où

$$0 < \left\{ \begin{array}{c} l \\ m \end{array} \right\} < c < l + m \; ;$$

ces relations seront toujours supposées vérifiées dans la suite.

Soit $f(x)\,dx$ la probabilité élémentaire pour qu'une lame supposée neuve se rompe entre les âges x et $x + dx$. (Il importe d'observer que cette probabilité est évaluée quand la lame L est neuve).

$F(s) = \int_0^s f(x)\,dx$ est la probabilité pour qu'une lame supposée neuve se rompe avant l'âge s. $F(s)$ croît de 0 à 1 quand s croît de 0 à $+\infty$.

$\Phi(s) = 1 - F(s)$ est la probabilité pour qu'une lame supposée neuve ne se rompe pas avant l'âge s. $\Phi(s)$ décroît de 1 à 0 quand s croît de 0 à $+\infty$.

$\dfrac{f(s+x)}{\Phi(s)}dx$ est la probabilité élémentaire pour qu'une lame, supposée parvenue à l'âge s, se rompe entre les âges $s + x$ et $s + x + dx$.

$\left[\dfrac{f(s)}{\Phi(s)}\right.$ caractérise la "fragilité" d'une lame parvenue à l'âge s.$\left.\right]$

$\dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}$ est la probabilité pour qu'une lame, supposée parvenue à l'âge s, ne se rompe pas avant l'âge $s + x$.

De même, soit $g(x)\,dx$ la probabilité élémentaire pour qu'un manche supposé neuf se rompe entre les âges x et $x + dx$.

$G(t) = \int_0^t g(x)\,dx$ est la probabilité pour qu'un manche supposé neuf se rompe avant l'âge t. $G(t)$ croît de 0 à 1 quand t croît de 0 à $+\infty$.

$\Psi(t) = 1 - G(t)$ est la probabilité pour qu'un manche supposé neuf ne se rompe pas avant l'âge t. $\Psi(t)$ décroît de 1 à 0 quant t croît de 0 à $+\infty$.

$\dfrac{g(t+x)}{\Psi(t)}dx$ est la probabilité élémentaire pour qu'un manche, supposé parvenu à l'âge t, se rompe entre les âges $t + x$ et $t + x + dx$.

$\left[\frac{g(t)}{\Psi(t)} \text{ caractérise la "fragilité" d'un manche parvenu à l'âge } t.\right]$

$\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}$ est la probabilité pour qu'un manche, supposé parvenu à l'âge t, ne se rompe pas avant l'âge t + x.

D'après l'hypothèse suivant laquelle les fragilités de la lame L et du manche M croissent avec leurs âges respectifs,

$$\begin{cases} \dfrac{f(s)}{\Phi(s)} \text{ est une fonction croissante de } s, \text{ pour } 0 \leqslant s < +\infty; \\ \dfrac{g(t)}{\Psi(t)} \text{ est une fonction croissante de } t, \text{ pour } 0 \leqslant t < +\infty. \end{cases}$$

Il en résulte immédiatement que, pour toute valeur strictement positive de x,

$$\begin{cases} \dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} = \exp\left[-\displaystyle\int_s^{s+x} \frac{f(\sigma)}{\Phi(\sigma)}\, d\sigma\right] & \text{est une fonction décroissante de } s, \text{ pour } 0 \leqslant s < +\infty; \\ \dfrac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} = \exp\left[-\displaystyle\int_t^{t+x} \frac{g(\tau)}{\Psi(\tau)}\, d\tau\right] & \text{est une fonction décroissante de } t, \text{ pour } 0 \leqslant t < +\infty. \end{cases}$$

On suppose de plus que, pour toute valeur strictement positive de x,

$$\begin{cases} \dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad s \longrightarrow +\infty; \\ \dfrac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow +\infty. \end{cases} \qquad \left[\text{Hypothèse (H)}\right]$$

D'après les expressions précédentes de $\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}$ et $\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}$, il est équivalent de supposer que les "fragilités" $\frac{f(s)}{\Phi(s)}$ et $\frac{g(t)}{\Phi(t)}$ croissent indéfiniment avec les âges respectifs s et t de la lame L et du manche M.

Soit e^{-ax} le facteur d'actualisation par lequel il faut multiplier une dépense engagée à l'instant t + x pour en obtenir la valeur actualisée à l'instant t (a étant une constante positive).

Soit enfin R(s,t) l'espérance mathématique minimum du coût actualisé de l'exploitation d'un couteau dont la lame est parvenue à l'âge s et dont le manche est parvenu à l'âge t. R(s,t) est un coût moyen actualisé correspondant à la politique d'exploitation optimale.

On montre que cette politique consiste à remplacer le couteau tout entier si, et seulement si,

- au moment de la rupture du manche, l'âge de la lame est au moins égal à un certain âge critique λ,

- au moment de la rupture de la lame, l'âge du manche est au moins égal à un certain âge critique μ.

(Dans les cas critiques, il est indifférent de remplacer le couteau tout entier ou de remplacer seulement la partie défaillante).

Au cours du processus d'approximations successives, on part de la politique non optimale qui consiste à remplacer toujours le couteau tout entier (c'est-à-dire à choisir des âges critiques $\lambda_0 = \mu_0 = 0$), et du coût moyen actualisé $R_0(s,t)$ correspondant.

On construit, à partir de $R_0(s,t)$, une suite d'âges critiques $(\lambda_1, \mu_1), \ldots\ldots, (\lambda_n, \mu_n)$, et une suite de coûts moyens actualisés $R_1(s,t), \ldots\ldots, R_n(s,t)$. On montre que cette dernière suite converge uniformément vers le coût moyen actualisé minimum $R(s,t)$, quand $n \longrightarrow \infty$, et qu'alors $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ et $\mu_n \longrightarrow \mu$.

3. ÉQUATION FONCTIONNELLE DÉFINISSANT LE COÛT MOYEN ACTUALISÉ MINIMUM R (s, t)

Compte tenu de l'indépendance des risques de rupture de la lame L et du manche M, et de l'hypothèse suivant laquelle les remplacements accompagnent les ruptures, le coût moyen actualisé minimum $R(s,t)$ est solution d'une équation fonctionnelle qui s'écrit (avec les notations précédemment définies) :

$$R(s,t) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \frac{g(t+x)}{\Psi(t)} dx . \min \begin{Bmatrix} R(s+x,0) + m \\ R(0,0) + c \end{Bmatrix}$$

(1)

$$+ \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \frac{f(s+x)}{\Phi(s)} dx . \min \begin{Bmatrix} R(0,t+x) + l \\ R(0,0) + c \end{Bmatrix} .$$

Il est intéressant d'observer que

$$\int_0^\infty e^{-ax} \left[\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \frac{g(t+x)}{\Psi(t)} + \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \frac{f(s+x)}{\Phi(s)} \right] dx$$

(2)

$$= - \int_{x=0}^\infty e^{-ax} d \left[\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \right]$$

$$= 1 - a \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} dx.$$

On peut aussi remarquer que l'équation fonctionnelle (1) permet d'écrire, en particulier, deux équations fonctionnelles où n'interviennent que les fonctions $R(s,0)$ et $R(0,t)$. Il suffit pour les obtenir d'écrire successivement l'équation (1) pour $t = 0$ et pour $s = 0$.

4. MÉTHODE DE RÉSOLUTION PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

4.1.

Si l'on part de la politique d'exploitation non optimale qui consiste à remplacer toujours le couteau tout entier, on obtient un coût moyen actualisé $R_0(s,t)$ défini, compte tenu de (2), par l'équation fonctionnelle :

$$(3)\qquad R_0(s,t) = \left[R_0(0,0) + c \right] \left[1 - a\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\, dx \right].$$

On en déduit immédiatement :

$$(4)\qquad R_0(0,0) = c\,\frac{1 - a\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\,\Phi(x)\,\Psi(x)\,dx}{a\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\,\Phi(x)\,\Psi(x)\,dx};$$

$$(5)\qquad R_0(s,t) = c\,\frac{1 - a\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\,\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\,dx}{a\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\,\Phi(x)\,\Psi(x)\,dx}.$$

La fonction $R_0(s,t)$ croît avec s et avec t (variant de 0 à $+\infty$) [cf. A4.1]. Quand s ou $t \longrightarrow +\infty$, $R_0(s,t) \longrightarrow R_0(0,0) + c = \dfrac{c}{a\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\,\Phi(x)\,\Psi(x)\,dx}$.

[Cela résulte de (3), d'après l'hypothèse (H) suivant laquelle, pour tout $x > 0$, $\dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \longrightarrow 0$ quand $s \longrightarrow \infty$ et $\dfrac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$.]

4.2.

Si l'on remplace alors R par R_0 au second membre de (1), on définit une nouvelle fonction de coût

$$(1)_1\qquad \begin{aligned} R_1(s,t) = {} & \int_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\,\frac{g(t+x)}{\Psi(t)}\,dx.\ \min \begin{Bmatrix} R_0(s+x,0) + m \\ R_0(0,0) + c \end{Bmatrix} \\ & + \int_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\,\frac{f(s+x)}{\Phi(s)}\,dx.\ \min \begin{Bmatrix} R_0(0,t+x) + 1 \\ R_0(0,0) + c \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

correspondant à la politique qui consiste à choisir, <u>à la première rupture</u>, les âges critiques λ_1, μ_1 définis sans ambiguïté [d'après les propriétés de $R_0(s,t)$] par les relations :

$$(6)_1\qquad \begin{cases} R_0(\lambda_1,0) + m = R_0(0,0) + c, \\ R_0(0,\mu_1) + 1 = R_0(0,0) + c, \end{cases} \qquad \left(0 < \begin{Bmatrix} 1 \\ m \end{Bmatrix} < c\right)$$

mais à remplacer le couteau tout entier dans toutes les ruptures ultérieures.

Compte tenu du fait que les fonctions $R_0(s,0)$ et $R_0(0,t)$ sont croissantes, on peut alors définir $R_1(s,t)$ à partir de $R_0(s,t)$ par la relation :

$$R_1(s,t) = \left[R_0(0,0) + c\right]\left[1 - a\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx\right]$$

$$(7)_1 \qquad - \int_0^{\lambda_1 - s} e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{g(t+x)}{\Psi(t)}dx\left[R_0(0,0) + c - m - R_0(s+x,0)\right]$$

$$- \int_0^{\mu_1 - t} e^{-ax}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\frac{f(s+x)}{\Phi(s)}dx\left[R_0(0,0) + c - 1 - R_0(0,t+x)\right],$$

la seconde intégrale devant être remplacée par 0 si $s \geqslant \lambda_1$,
la troisième intégrale devant être remplacée par 0 si $t \geqslant \mu_1$.

Les inégalités suivantes, faciles à vérifier à partir de (2), (3) et (5),

$$(8)_0 \begin{cases} \frac{d}{dt}R_0(0,t) + \left[a + \frac{g(t)}{\Psi(t)}\right]\left[R_0(0,0) + c - 1 - R_0(0,t)\right] - a\left[R_0(0,0) + c\right] < 0, \\ \frac{d}{ds}R_0(s,0) + \left[a + \frac{f(s)}{\Phi(s)}\right]\left[R_0(0,0) + c - m - R_0(s,0)\right] - a\left[R_0(0,0) + c\right] < 0, \end{cases}$$

permettent d'établir que la fonction $R_1(s,t)$ croît avec s et avec t (variant de 0 à $+\infty$), et qu'elle vérifie les inégalités $(8)_1$ analogues à $(8)_0$ [cf. A 4.2].

$$\begin{cases} \text{Quand } s \longrightarrow \infty, & R_1(s,t) \longrightarrow \min\begin{Bmatrix} R_0(0,t) + 1 \\ R_0(0,0) + c \end{Bmatrix}. \\ \\ \text{Quand } t \longrightarrow \infty, & R_1(s,t) \longrightarrow \min\begin{Bmatrix} R_0(s,0) + m \\ R_0(0,0) + c \end{Bmatrix}. \end{cases}$$

Cela résulte de $(1)_1$, d'après l'hypothèse (H).

Enfin $R_1(s,t) \leqslant R_0(s,t)$, quels que soient les âges $s \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$, d'après la définition même des fonctions de coût $R_0(s,t)$ et $R_1(s,t)$.

4.3.

Si l'on remplace, de même, R par R_1 au second membre de (1), on définit, par la relation $(1)_2$ analogue à $(1)_1$, une nouvelle fonction de coût $R_2(s,t)$, correspondant à la politique qui consiste à choisir, à la première rupture, les âges critiques λ_2, μ_2 définis sans ambiguïté [d'après les propriétés de $R_1(s,t)$] par les relations :

$$(6)_2 \qquad \begin{cases} R_1\,(\lambda_2, 0) + m = R_1\,(0,0) + c, \\ R_1\,(0, \mu_2) + 1 = R_1\,(0,0) + c, \end{cases} \qquad \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ m \end{Bmatrix} < c < 1 + m \right)$$

puis, <u>à la seconde rupture,</u> les âges critiques λ_1, μ_1 définis par les relations $(6)_1$, mais à remplacer le couteau tout entier dans toutes les ruptures ultérieures.

Compte tenu du fait que les fonctions $R_1\,(s,0)$ et $R_1\,(0,t)$ sont croissantes, on peut définir $R_2\,(s,t)$ à partir de $R_1\,(s,t)$ par la relation $(7)_2$ analogue à $(7)_1$.

On établit encore, à partir des inégalités $(8)_1$ analogues à $(8)_0$, que la fonction $R_2(s,t)$ croît avec s et avec t (variant de 0 à $+\infty$), et qu'elle vérifie les inégalités analogues $(8)_2$ [cf. A4.3].

$$\begin{cases} \text{Quand } s \longrightarrow \infty, \qquad R_2(s,t) \longrightarrow \min \begin{Bmatrix} R_1\,(0,t) + 1 \\ R_1\,(0,0) + c \end{Bmatrix}. \\ \\ \text{Quand } t \longrightarrow \infty, \qquad R_2(s,t) \longrightarrow \min \begin{Bmatrix} R_1\,(s,0) + m \\ R_1\,(0,0) + c \end{Bmatrix}. \end{cases}$$

Enfin $R_2(s,t) \leqslant R_1\,(s,t)$, quels que soient les âges $s \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$, puisque le second membre de (1) ne peut croître quand on passe du cas où R y est remplacé par R_0 à celui où R y est remplacé par $R_1 \leqslant R_0$.

4.4.

Plus généralement, si l'on a défini par la méthode précédente une suite d'âges critiques (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), ..., $(\lambda_{n-1}, \mu_{n-1})$, et une suite de fonctions continues, positives, croissantes, $R_1\,(s,t) \geqslant R_2\,(s,t) \geqslant \ldots\ldots \geqslant R_{n-1}(s,t)$ [bornées par $R_0\,(0,0) + c$], on définira les âges critiques λ_n, μ_n sans ambiguïté [d'après les propriétés de $R_{n-1}(s,t)$] par les relations :

$$(6)_n \qquad \begin{cases} R_{n-1}(\lambda_n, 0) + m = R_{n-1}(0,0) + c\,, \\ R_{n-1}(0, \mu_n) + 1 = R_{n-1}(0,0) + c\,; \end{cases} \qquad \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ m \end{Bmatrix} < c < 1 + m \right)$$

et l'on définira la nouvelle fonction de coût $R_n(s,t)$ à partir de $R_{n-1}(s,t)$ par la relation :

$$(1)_n \qquad \begin{aligned} R_n(s,t) = & \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \frac{g(t+x)}{\Psi(t)} dx.\ \min \begin{Bmatrix} R_{n-1}(s+x, 0) + m \\ R_{n-1}(0,0) + c \end{Bmatrix} \\ & + \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \frac{f(s+x)}{\Phi(s)} dx.\ \min \begin{Bmatrix} R_{n-1}(0, t+x) + \ell \\ R_{n-1}(0,0) + c \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

ou, compte tenu du fait que les fonctions $R_{n-1}(s,0)$ et $R_{n-1}(0,t)$ sont croissantes,

$$R_n(s,t) = \left[R_{n-1}(0,0) + c \right] \left[1 - a \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} dx \right]$$

$$(7)_n \qquad - \int_0^{\lambda_n - s} e^{-ax} \frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \frac{g(t+x)}{\Psi(t)} dx \left[R_{n-1}(0,0) + c - m - R_{n-1}(s+x,0) \right]$$

$$- \int_0^{\mu_n - t} e^{-ax} \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \frac{f(s+x)}{\Phi(s)} dx \left[R_{n-1}(0,0) + c - 1 - R_{n-1}(0,t+x) \right],$$

la seconde intégrale devant être remplacée par 0 si $s \geqslant \lambda_n$,
la troisième intégrale devant être remplacée par 0 si $t \geqslant \mu_n$.

La fonction de coût $R_n(s,t)$ correspond à la politique qui consiste à choisir, à la première rupture, les âges critiques λ_n, μ_n, puis, à la seconde rupture, les âges critiques λ_{n-1}, μ_{n-1}, ... et ainsi de suite jusqu'à la n^e rupture où l'on choisit les âges critiques λ_1, μ_1, mais à remplacer le couteau tout entier dans toutes les ruptures ultérieures.

On établira, à partir des inégalités $(8)_{n-1}$ analogues à $(8)_0$, que la fonction $R_n(s,t)$ croît avec s et avec t (variant de 0 à $+\infty$), et qu'elle vérifie les inégalités analogues :

$$(8)_n \begin{cases} \dfrac{d}{dt} R_n(0,t) + \left[a + \dfrac{g(t)}{\Psi(t)} \right] \left[R_n(0,0) + c - 1 - R_n(0,t) \right] - a \left[R_n(0,0) + c \right] < 0, \\ \dfrac{d}{ds} R_n(s,0) + \left[a + \dfrac{f(s)}{\Phi(s)} \right] \left[R_n(0,0) + c - m - R_n(s,0) \right] - a \left[R_n(0,0) + c \right] < 0, \end{cases}$$

[cf. A 4.4].

$$\begin{cases} \text{Quand } s \longrightarrow \infty, \qquad R_n(s,t) \longrightarrow \min \begin{Bmatrix} R_{n-1}(0,t) + 1 \\ R_{n-1}(0,0) + c \end{Bmatrix}. \\ \\ \text{Quand } t \longrightarrow \infty, \qquad R_n(s,t) \longrightarrow \min \begin{Bmatrix} R_{n-1}(s,0) + m \\ R_{n-1}(0,0) + c \end{Bmatrix}. \end{cases}$$

[Cela résulte de $(1)_n$, d'après l'hypothèse (H)].

Enfin $R_n(s,t) \leqslant R_{n-1}(s,t)$, quels que soient les âges $s \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$, puisque le second membre de (1) ne peut croître quand on passe du cas où R y est remplacé par R_{n-2} à celui où R y est remplacé par $R_{n-1} \leqslant R_{n-2}$.

5. CONVERGENCE DU PROCESSUS

5.1. COÛT MOYEN ACTUALISÉ MINIMUM R(s,t)

La méthode exposée au paragraphe 4 permet donc de définir, en même temps qu'une suite d'âges critiques :

$$(\lambda_1, \mu_1),\ (\lambda_2, \mu_2), \ldots\ldots,\ (\lambda_{n-1}, \mu_{n-1}),\ (\lambda_n, \mu_n), \ldots\ldots,$$

une suite de fonctions de coût $R_n(s,t)$, toutes positives, vérifiant les inégalités :

$$R_0(s,t) \geqslant R_1(s,t) \geqslant \ldots\ldots \geqslant R_{n-1}(s,t) \geqslant R_n(s,t) \geqslant \ldots\ldots,$$

quels que soient $s \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$.

Il en résulte que, quand $n \longrightarrow \infty$, $R_n(s,t) \longrightarrow R(s,t)$ en décroissant. La fonction limite $R(s,t)$ est positive, elle croît avec s et avec t (variant de 0 à $+\infty$), comme chacune des fonctions $R_n(s,t)$ [cf. A 5.1].

Il est facile de voir que la fonction limite R(s,t) vérifie l'équation fonctionnelle (1) [cf. A 5.1].

5.2. POLITIQUE D'EXPLOITATION OPTIMALE

On peut montrer, de plus, que la convergence de $R_n(s,t)$ vers $R(s,t)$ est uniforme [cf. A 5.2]. La fonction R(s,t) est donc, comme chacune des fonctions $R_n(s,t)$, une fonction continue de s et de t pour $s \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$; et, quand $n \longrightarrow \infty$, la suite des âges critiques (λ_n, μ_n) converge vers les âges critiques (λ, μ) définis sans ambiguïté par les relations:

$$(6) \qquad \begin{cases} R(\lambda, 0) + m = R(0,0) + c, \\ R(0,\mu) + 1 = R(0,0) + c. \end{cases} \qquad [\text{cf. A 5.2.}]$$

λ et μ définissent la politique d'exploitation optimale, qui consiste à remplacer le couteau tout entier si et seulement si,

- au moment de la rupture du manche, l'âge de la lame est au moins égal à l'âge critique λ ,

- au moment de la rupture de la lame, l'âge du manche est au moins égal à l'âge critique μ .

(Dans les cas critiques, il est indifférent de remplacer le couteau tout entier ou de remplacer seulement la partie défaillante).

La fonction R(s,t) définit l'espérance mathématique minimum du coût actualisé de l'exploitation, suivant cette politique, d'un couteau dont la lame est parvenue à l'âge s et dont le manche est parvenu à l'âge t.

$$\begin{cases} \text{Quand } s \longrightarrow \infty, & R(s,t) \longrightarrow \min \begin{Bmatrix} R(0,t)+1 \\ R(0,0)+c \end{Bmatrix} . \\ \text{Quand } t \longrightarrow \infty, & R(s,t) \longrightarrow \min \begin{Bmatrix} R(s,0)+m \\ R(0,0)+c \end{Bmatrix} . \end{cases}$$

[Cela résulte de (1), d'après l'hypothèse (H) suivant laquelle, pour tout $x > 0$, $\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \longrightarrow 0$ quand $s \longrightarrow \infty$ et $\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$, compte tenu de la continuité des fonctions $R(0,t)$ pour $t \geqslant 0$ et $R(s,0)$ pour $s \geqslant 0$.]

Puisque la fonction $R(s,t)$ croît avec s et avec t, on en déduit :

(9) $$R(s,t) < \begin{cases} R(0,t)+1 \\ R(s,0)+m , \\ R(0,0)+c \end{cases}$$

ce qui est manifestement nécessaire et suffisant, compte tenu de (1), pour que la politique d'exploitation conduisant à la fonction de coût $R(s,t)$ soit <u>optimale dans l'ensemble de toutes les politiques possibles</u>. Il serait, en effet, théoriquement permis de remplacer à tout instant, soit la lame, soit le manche, soit le couteau tout entier, même si aucune rupture ne s'était produite, c'est-à-dire de substituer à $R(s,t)$ l'un quelconque des trois coûts figurant au second membre de (9). Mais chacun de ces coûts est supérieur à $R(s,t)$, quels que soient $s \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$: il ne saurait donc être avantageux d'effectuer un tel remplacement une seule fois, ni a fortiori plusieurs fois, en l'absence de toute rupture.

5.3. UNICITÉ DE LA SOLUTION

On peut enfin établir que la fonction de coût $R(s,t)$, ainsi obtenue par approximations successives à partir de $R_0(s,t)$, est la seule solution de l'équation fonctionnelle (1) qui définisse des fonctions $R(s,0)$ et $R(0,t)$ uniformément bornées, et continues à droite, respectivement, pour $s = 0$ et pour $t = 0$ [cf. A 5.3.]

6. CONCLUSION

La méthode qui vient d'être étudiée permettrait, au prix de calculs abordables pour les ordinateurs électroniques, de définir une politique d'exploitation optimale pour un ensemble industriel composé de deux parties, et de déterminer à tout instant le coût moyen actualisé minimum de l'exploitation future en fonction des âges respectifs auxquels sont alors parvenues les deux parties de l'ensemble.

On pourrait envisager d'étendre cette méthode à la recherche d'une politique d'exploitation optimale pour des ensembles industriels plus complexes. Cependant l'intervention d'un nombre de parties supérieur à deux accroîtrait notablement la complexité du modèle à étudier et le volume des calculs à effectuer.

ANNEXE MATHÉMATIQUE

A 4. CROISSANCE DES FONCTIONS $R_0(s,t)$, $R_1(s,t)$, ..., $R_n(s,t)$, ... OBTENUES PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

A 4.1. La fonction $R_0(s,t)$ définie par (5) croît avec s et avec t (variant de 0 à $+\infty$), puisque, pour toute valeur strictement positive de x, $\dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}$ est une fonction décroissante de s et $\dfrac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}$ est une fonction décroissante de t, d'après l'hypothèse suivant laquelle les fragilités de la lame L et du manche M croissent avec leurs âges respectifs [cf.2].

A 4.2. Dans la formule $(7)_1$ qui définit la fonction $R_1(s,t)$ à partir de $R_0(s,t)$

- le premier terme croît avec s et avec t,

- le second terme est nul si $s \geqslant \lambda_1$, négatif si $s < \lambda_1$, et varie alors en fonction croissante de s et en fonction décroissante de t,

- le troisième terme est nul si $t \geqslant \mu_1$, négatif si $t < \mu_1$, et varie alors en fonction décroissante de s et en fonction croissante de t.

En effet, compte tenu des relations $(6)_1$ qui définissent λ_1 et μ_1,

$$(10)_1 \left\{ \begin{aligned} & -\int_0^{\lambda_1 - s} e^{-ax} \frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \frac{g(t+x)}{\Psi(t)} dx \left[R_0(0,0) + c - m - R_0(s+x,0) \right] = \\ & = - \left[R_0(0,0) + c - m - R_0(s,0) \right] + \\ & + \int_0^{\lambda_1 - s} \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \frac{d}{dx} \left\{ -e^{-ax} \frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \left[R_0(0,0) + c - m - R_0(s+x,0) \right] \right\} dx ; \\ & -\int_0^{\mu_1 - t} e^{-ax} \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \frac{f(s+x)}{\Phi(s)} dx \left[R_0(0,0) + c - 1 - R_0(0,t+x) \right] = \\ & = - \left[R_0(0,0) + c - 1 - R_0(0,t) \right] + \\ & + \int_0^{\mu_1 - t} \frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \frac{d}{dx} \left\{ -e^{-ax} \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \left[R_0(0,0) + c - 1 - R_0(0,t+x) \right] \right\} dx . \end{aligned} \right.$$

Pour montrer que $R_1(s,t)$ croît avec s et avec t, il suffit donc de montrer que,

$$\text{pour } t<\mu_1, \int_0^{\mu_1-t} \frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \left[\begin{array}{l} -a\, e^{-ax} \dfrac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \Big[R_0(0,0)+c \Big] \\ + \dfrac{d}{dx} \left\{ -e^{-ax} \dfrac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \Big[R_0(0,0)+c-1-R_0(0,t+x) \Big] \right\} \end{array} \right] dx \quad \text{croît avec } s,$$

$$\text{pour } s<\lambda_1, \int_0^{\lambda_1-s} \frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \left[\begin{array}{l} -a\, e^{-ax} \dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \Big[R_0(0,0)+c \Big] \\ + \dfrac{d}{dx} \left\{ -e^{-ax} \dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \Big[R_0(0,0)+c-m-R_0(s+x,0) \Big] \right\} \end{array} \right] dx \quad \text{croît avec } t,$$

ou, a fortiori, de montrer que les coefficients de $\dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}$ et de $\dfrac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}$ dans les intégrales précédentes sont toujours négatifs, c'est-à-dire que

$$(8)_0 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} R_0(0,t) + \left[a + \dfrac{g(t)}{\Psi(t)} \right] \Big[R_0(0,0)+c-1-R_0(0,t) \Big] - a \Big[R_0(0,0)+c \Big] < 0 \\ \hfill \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \mu_1, \\ \dfrac{d}{ds} R_0(s,0) + \left[a + \dfrac{f(s)}{\Phi(s)} \right] \Big[R_0(0,0)+c-m-R_0(s,0) \Big] - a \Big[R_0(0,0)+c \Big] < 0 \\ \hfill \text{pour } 0 \leqslant s \leqslant \lambda_1. \end{array} \right.$$

Or, d'après (2), (3) et (5),

$$(11)_0 \left\{ \begin{array}{l} \left[\dfrac{1}{c} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\, \Phi(x)\, \Psi(x) dx \right] \left\{ \dfrac{d}{dt} R_0(0,t) + \right. \\ \qquad \left. + \left[a + \dfrac{g(t)}{\Psi(t)} \right] \Big[R_0(0,0)+c-R_0(0,t) \Big] - a \Big[R_0(0,0)+c \Big] \right\} = \\ = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\, \Phi(x) \dfrac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \left[\dfrac{g(t+x)}{\Psi(t+x)} - \dfrac{g(t)}{\Psi(t)} + a + \dfrac{g(t)}{\Psi(t)} \right] dx - 1 = \\ \hfill -\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \dfrac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} f(x)\, dx < 0, \\ \\ \left[\dfrac{1}{c} \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\, \Phi(x)\, \Psi(x) dx \right] \left\{ \dfrac{d}{ds} R_0(s,0) + \right. \\ \qquad \left. + \left[a + \dfrac{f(s)}{\Phi(s)} \right] \Big[R_0(0,0)+c-R_0(s,0) \Big] - a \Big[R_0(0,0)+c \Big] \right\} = \\ = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \Psi(x) \left[\dfrac{f(s+x)}{\Phi(s+x)} - \dfrac{f(s)}{\Phi(s)} + a + \dfrac{f(s)}{\Phi(s)} \right] dx - 1 = \\ \hfill -\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} g(x)\, dx < 0. \end{array} \right.$$

Les inégalités $(8)_0$ sont donc établies, et il en résulte que la fonction $R_1(s,t)$, définie par $(7)_1$ à partir de $R_0(s,t)$, croît avec s et avec t.

De plus, la fonction $R_1(s,t)$ vérifie les inégalités $(8)_1$ analogues à $(8)_0$. En effet, d'après (2), $(7)_1$ et $(10)_1$, et $(8)_0$, les intégrales prises entre 0 et $(\mu_1 - t)$ devant être remplacées par 0 si $t \geqslant \mu_1$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}R_1(0,t) + \left[a + \frac{g(t)}{\Psi(t)}\right]\left[R_1(0,0) + c - 1 - R_1(0,t)\right] - a\left[R_1(0,0) + c\right] \\
&< a\left[R_0(0,0) + c\right]\left\{\int_0^{\infty} e^{-ax}\,\Phi(x)\,\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\left[\frac{g(t+x)}{\Psi(t+x)} - \frac{g(t)}{\Psi(t)} + a + \frac{g(t)}{\Psi(t)}\right]dx - 1\right\} \\
&\quad - \frac{g(t)}{\Psi(t)}\left[R_0(0,0) - R_1(0,0)\right] - \left[a + \frac{g(t)}{\Psi(t)}\right](1 + m - c) \\
&\quad + \int_0^{\mu_1 - t} e^{-ax}\,\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\left\{\frac{d}{dt}R_0(0,t+x)\right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{g(t+x)}{\Psi(t+x)} - \frac{g(t)}{\Psi(t)} + a + \frac{g(t)}{\Psi(t)}\right]\left[R_0(0,0) + c - 1 - R_0(0,t+x)\right]\right\} f(x)dx \\
&< -a(1+m-c) + \int_0^{\mu_1 - t} e^{-ax}\,\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\left[\frac{d}{dt}R_0(0,t+x) + \left[a + \frac{g(t+x)}{\Psi(t+x)}\right]\left[R_0(0,0) + c - 1 - R_0(0,t+x)\right] - a\left[R_0(0,0) + c\right]\right] f(x)dx < 0,
\end{aligned}
\tag{(11)'_1}
$$

puisque $R_0(0,0) - R_1(0,0) > 0$ et $1 + m - c > 0$.

De même, les intégrales prises entre 0 et $(\lambda_1 - s)$ devant être remplacées par 0 si $s \geqslant \lambda_1$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}R_1(s,0) + \left[a + \frac{f(s)}{\Phi(s)}\right]\left[R_1(0,0) + c - m - R_1(s,0)\right] - a\left[R_1(0,0) + c\right] \\
&< -a(1+m-c) + \int_0^{\lambda_1 - s} e^{-ax}\,\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\left[\frac{d}{ds}R_0(s+x,0) + \left[a + \frac{f(s+x)}{\Phi(s+x)}\right]\left[R_0(0,0) + c - m - R_0(s+x,0)\right] - a\left[R_0(0,0) + c\right]\right] g(x)dx < 0.
\end{aligned}
\tag{(11)''_1}
$$

A 4.3. La fonction $R_2(s,t)$ étant définie à partir de $R_1(s,t)$ par la formule $(7)_2$, comme la fonction $R_1(s,t)$ était définie à partir de $R_0(s,t)$ par la formule $(7)_1$, les inégalités $(8)_1$ suffisent à établir que la fonction $R_2(s,t)$ croît avec s et avec t, comme les inégalités $(8)_0$ suffisaient à établir que la fonction $R_1(s,t)$ croît avec s et avec t.

De plus, il résulte des inégalités $(8)_1$ que la fonction $R_2(s,t)$ vérifie les inégalités analogues $(8)_2$, comme il résultait des inégalités $(8)_0$ que la fonction $R_1(s,t)$ vérifie les inégalités analogues $(8)_1$.

A 4.4. Plus généralement, supposons que la fonction $R_{n-1}(s,t)$ croisse avec s et avec t (variant de 0 à $+\infty$), et qu'elle vérifie les inégalités $(8)_{n-1}$ analogues à $(8)_0$.

Si l'on définit alors les âges critiques λ_n, μ_n par les relations $(6)_n$ et la fonction $R_n(s,t)$ par la relation $(7)_n$, à partir de $R_{n-1}(s,t)$, il résulte des inégalités $(8)_{n-1}$ que la fonction $R_n(s,t)$ croît avec s et avec t et qu'elle vérifie les inégalités analogues $(8)_n$ [comme il résultait des inégalités $(8)_0$ que la fonction $R_1(s,t)$ croît avec s et avec t et qu'elle vérifie les inégalités analogues $(8)_1$].

Il est donc établi, par récurrence, que chacune des fonctions $R_i(s,t)$ de la suite $R_0(s,t) \geqslant R_1(s,t) \geqslant R_2(s,t) \geqslant \ldots \geqslant R_{n-1}(s,t) \geqslant R_n(s,t) \geqslant \ldots$ croît avec s et avec t, et qu'elle vérifie les inégalités $(8)_i$.

Il résulte de plus des calculs précédents que chacune des fonctions $R_i(s,t)$ est la somme d'une fonction positive croissante de s et de t, et de la fonction

$$(1+m-c)\left[1-a\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx\right] = (1+m-c)\frac{R_0(s,t)}{R_0(0,0)+c},$$

indépendante de l'indice i, positive et croissant avec s et avec t.

En effet, il a été établi, d'après $(7)_1$, $(10)_1$ et $(11)_0, \ldots, (7)_n$, $(10)_n$, $(11)'_{n-1}$ et $(11)''_{n-1}$, que

$$\left\{\begin{aligned}
&R_1(s,t) - \left[R_0(0,0)+c\right]\left[1-a\int_{\mu_1-t}^\infty e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx\right] \\
&\qquad + la\int_0^{\mu_1-t} e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx \qquad \text{croît avec s,} \\
&R_1(s,t) - \left[R_0(0,0)+c\right]\left[1-a\int_{\lambda_1-s}^\infty e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx\right] \\
&\qquad + ma\int_0^{\lambda_1-s} e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx \qquad \text{croît avec t,}
\end{aligned}\right.$$

(μ_1-t) devant être remplacé par 0 dans les limites d'intégration lorsque $t \geqslant \mu_1$,

(λ_1-s) devant être remplacé par 0 dans les limites d'intégration lorsque $s \geqslant \lambda_1$;

$$\left\{\begin{array}{ll} R_n(s,t) - \left[R_{n-1}(0,0)+c\right]\left[1 - a\displaystyle\int_{\mu_n-t}^{\infty} e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx\right] & \\ \qquad + (1+m-c)a\displaystyle\int_0^{\mu_n-t} e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx & \text{croît avec } s, \\ R_n(s,t) - \left[R_{n-1}(0,0)+c\right]\left[1 - a\displaystyle\int_{\lambda_n-s}^{\infty} e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx\right] & \\ \qquad + (1+m-c)a\displaystyle\int_0^{\lambda_n-s} e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx & \text{croît avec } t, \end{array}\right.$$

(μ_n-t) devant être remplacé par 0 dans les limites d'intégration lorsque $t \geqslant \mu_n$,

(λ_n-s) devant être remplacé par 0 dans les limites d'intégration lorsque $s \geqslant \lambda_n$.

Or $$R_0(0,0)+c > R_{n-1}(0,0)+c > c > \left\{\begin{matrix} 1 \\ \\ m \end{matrix}\right\} > 1+m-c,$$

de sorte que, a fortiori, compte tenu du fait que $\dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}$ est une fonction décroissante de s et $\dfrac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}$ est une fonction décroissante de t,

$$R_i(s,t) - (1+m-c)\left[1 - a\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx\right] \text{ croît avec s et avec t.}$$

Il résulte d'ailleurs de $(1)_i$ et (2) que cette différence est une fonction positive de s et de t.

A 5. CONVERGENCE DE LA SUITE $R_0(s,t)$, $R_1(s,t)$, ..., $R_n(s,t)$, ... VERS LE COÛT MOYEN ACTUALISÉ MINIMUM $R(s,t)$

A 5.1. La fonction limite R(s,t) croît strictement avec s et avec t, et vérifie l'équation fonctionnelle (1).

Le fait que, quand $n \to \infty$, $R_n(s,t) \to R(s,t)$ en décroissant, entraîne que, comme chacune des fonctions $R_n(s,t)$, la fonction limite $R(s,t)$ est la somme d'une fonction non négative et non décroissante de s et de t, et de la fonction

$$(1+m-c)\left[1 - a\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx\right] = (1+m-c)\frac{R_0(s,t)}{R_0(0,0)+c},$$

qui est positive et croît strictement avec s et avec t.

De plus, si l'on désigne le second membre de l'équation fonctionnelle (1) par la notation abrégée $\mathcal{F}\left[R(s,t)\right]$,

$$\left\{\begin{array}{l} R(s,t) \leqslant R_{n+1}(s,t) = \mathcal{F}\left[R_n(s,t)\right], \\ R_n(s,t) = \mathcal{F}\left[R_{n-1}(s,t)\right] \geqslant \mathcal{F}\left[R(s,t)\right], \end{array}\right. \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1,$$

d'où, à la limite, quand $n \longrightarrow \infty$,

$$\left.\left\{\begin{array}{l} R(s,t) \leqslant \mathcal{F}\left[R(s,t)\right] \\ R(s,t) \geqslant \mathcal{F}\left[R(s,t)\right] \end{array}\right.\right\} \Longrightarrow R(s,t) = \mathcal{F}\left[R(s,t)\right],$$

ce qui établit que $R(s,t)$ vérifie l'équation fonctionnelle (1).

Compte tenu du fait que les fonctions $R(s,0)$ et $R(0,t)$ sont strictement croissantes, on peut alors définir sans ambiguïté les âges critiques λ, μ par les relations (6) et écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\begin{aligned} R(s,t) = &\left[R(0,0)+c\right]\left[1 - a\int_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\,\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\,dx\right] \\ &- \int_0^{\lambda-s} e^{-ax}\,\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\,\frac{g(t+x)}{\Psi(t)}\,dx\left[R(0,0)+c-m-R(s+x,0)\right] \\ &- \int_0^{\mu-t} e^{-ax}\,\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\,\frac{f(s+x)}{\Phi(s)}\,dx\left[R(0,0)+c-1-R(0,t+x)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

la seconde intégrale devant être remplacée par 0 si $s \geqslant \lambda$,

la troisième intégrale devant être remplacée par 0 si $t \geqslant \mu$.

<u>A 5.2. La convergence de $R_n(s,t)$ vers $R(s,t)$ est uniforme, et $\lambda_n \longrightarrow \lambda$, $\mu_n \longrightarrow \mu$ quand $n \longrightarrow \infty$.</u>

D'après (1) et $(1)_n$,

$$\begin{aligned} R_n(s,t) - R(s,t) \leqslant &\int_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\,\frac{g(t+x)}{\Psi(t)}\,dx.\ \mathrm{Max}\left\{\begin{array}{l} R_{n-1}(s+x,0) - R(s+x,0) \\ R_{n-1}(0,0) - R(0,0) \end{array}\right\} \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\,\frac{f(s+x)}{\Phi(s)}\,dx.\ \mathrm{Max}\left\{\begin{array}{l} R_{n-1}(0,t+x) - R(0,t+x) \\ R_{n-1}(0,0) - R(0,0) \end{array}\right\}, \end{aligned}$$

puisque $\min\left\{\begin{array}{l}\alpha' \\ \beta'\end{array}\right\} - \min\left\{\begin{array}{l}\alpha \\ \beta\end{array}\right\} \leqslant \mathrm{Max}\left\{\begin{array}{l}\alpha'-\alpha \\ \beta'-\beta\end{array}\right\}$;

d'où, compte tenu de (2),

$$(12)\ R_n(s,t)-R(s,t) \leqslant \left[1-a\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\,dx\right] \underset{\substack{y\geqslant s\\ z\geqslant t}}{\mathrm{Max}} \left\{\begin{matrix} R_{n-1}(y,0)-R(y,0)\\ R_{n-1}(0,z)-R(0,z)\\ R_{n-1}(0,0)-R(0,0)\end{matrix}\right\}.$$

D'ailleurs, d'après (7),

$$\left\{\begin{aligned} R(s,0) &\geqslant R(0,0)+1-\left[R(0,0)+c\right]a\int_0^{\infty}e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\,dx\ -\\ &\qquad -(c-m)\int_0^{\lambda-s}e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\,g(x)dx,\\ R(0,t) &\geqslant R(0,0)+m-\left[R(0,0)+c\right]a\int_0^{\infty}e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\,dx\ -\\ &\qquad -(c-1)\int_0^{\mu-t}e^{-ax}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}\,f(x)dx.\end{aligned}\right.$$

Puisque, pour tout $x > 0, \frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \longrightarrow 0$ quand $s \longrightarrow \infty$ et $\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$[hypothèse (H) - cf. 2], à tout $\varepsilon > 0$ donné, si petit soit-il, on peut faire correspondre S_ε et T_ε tels que,

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{pour } s \geqslant S_\varepsilon, & R(s,0) \geqslant R(0,0)+1-\varepsilon\,,\\ \text{pour } t \geqslant T_\varepsilon, & R(0,t) \geqslant R(0,0)+m-\varepsilon\,.\end{array}\right.$$

D'autre part,
$$\left\{\begin{array}{l} R_n(s,0) \leqslant \lim\limits_{s\to\infty} R_n(s,0) = R_{n-1}(0,0)+1\,,\\ R_n(0,t) \leqslant \lim\limits_{t\to\infty} R_n(0,t) = R_{n-1}(0,0)+m.\end{array}\right.$$

Donc,

$$(13)\ \left\{\begin{array}{ll} \text{pour } s \geqslant S_\varepsilon, & R_n(s,0)-R(s,0) \leqslant \varepsilon + R_{n-1}(0,0)-R(0,0),\\ \text{pour } t \geqslant T_\varepsilon, & R_n(0,t)-R(0,t) \leqslant \varepsilon + R_{n-1}(0,0)-R(0,0).\end{array}\right.$$

D'après (12) et (13),

$$\underset{\substack{s\geqslant 0\\ t\geqslant 0}}{\mathrm{Max}}\left[R_{n+1}(s,t)-R(s,t)\right] \leqslant \underset{\substack{s\geqslant 0\\ t\geqslant 0}}{\mathrm{Max}}\left\{\begin{matrix}R_n(s,0)-R(s,0)\\ R_n(0,t)-R(0,t)\end{matrix}\right\}$$

$$\leqslant \mathrm{Max}\left\{\begin{matrix} \mathrm{Max}\left\{\begin{matrix} 1-a\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-ax}\frac{\Phi(S_\varepsilon+x)}{\Phi(S_\varepsilon)}\Psi(x)\,dx\\ 1-a\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-ax}\Phi(x)\frac{\Psi(T_\varepsilon+x)}{\Psi(T_\varepsilon)}\,dx\end{matrix}\right\} \underset{\substack{s\geqslant 0\\ t\geqslant 0}}{\mathrm{Max}}\left\{\begin{matrix}R_{n-1}(s,0)-R(s,0)\\ R_{n-1}(0,t)-R(0,t)\end{matrix}\right\}\\ \varepsilon+\left[1-a\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-ax}\Phi(x)\,\Psi(x)\,dx\right]\underset{\substack{s\geqslant 0\\ t\geqslant 0}}{\mathrm{Max}}\left\{\begin{matrix}R_{n-2}(s,0)-R(s,0)\\ R_{n-2}(0,t)-R(0,t)\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$
(14)\quad \begin{cases} 1-a\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\Phi(x)\,\Psi(x)\,dx = 1-\varpi, \\[2ex] \operatorname{Max}\begin{Bmatrix} 1-a\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\dfrac{\Phi(S_\varepsilon+x)}{\Phi(S_\varepsilon)}\Psi(x)\,dx \\[2ex] 1-a\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\Phi(x)\dfrac{\Psi(T_\varepsilon+x)}{\Psi(T_\varepsilon)}\,dx \end{Bmatrix} = 1-\eta_\varepsilon \quad (\eta_\varepsilon \longrightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0), \end{cases}
$$

et supposons ε assez petit pour que

$$1-\varpi \leqslant (1-\eta_\varepsilon)^2 .$$

Dans ces conditions,

$$
\operatorname*{Max}_{\substack{s\geqslant 0\\ t\geqslant 0}}\Big[R_{n+1}(s,t)-R(s,t)\Big] \leqslant \operatorname{Max}\begin{Bmatrix} (1-\eta_\varepsilon)\operatorname*{Max}_{\substack{s\geqslant 0\\ t\geqslant 0}}\begin{Bmatrix} R_{n-1}(s,0)-R(s,0) \\ R_{n-1}(0,t)-R(0,t)\end{Bmatrix} \\[3ex] \varepsilon+(1-\varpi)\operatorname*{Max}_{\substack{s\geqslant 0\\ t\geqslant 0}}\begin{Bmatrix} R_{n-2}(s,0)-R(s,0) \\ R_{n-2}(0,t)-R(0,t)\end{Bmatrix} \end{Bmatrix}
$$

et, compte tenu de ce que $1+(1-\varpi)+(1-\varpi)^2+\ldots+(1-\varpi)^i+\ldots=\dfrac{1}{\varpi}$,

$$
(15)\quad \operatorname*{Max}_{\substack{s\geqslant 0\\ t\geqslant 0}}\Big[R_{n+1}(s,t)-R(s,t)\Big] \leqslant \frac{\varepsilon}{\varpi}+(1-\eta_\varepsilon)^{n-1}\operatorname*{Max}_{\substack{s\geqslant 0\\ t\geqslant 0}}\begin{Bmatrix} R_0(s,0)-R(s,0) \\ R_0(0,t)-R(0,t)\end{Bmatrix}.
$$

Il résulte de (15) qu'à tout $\theta > 0$ donné, si petit soit-il, on peut faire correspondre N_θ tel que,

(16) pour $n \geqslant N_\theta$, $0 \leqslant R_n(s,t)-R(s,t) \leqslant \theta$, quels que soient s et t $\geqslant 0$.

(On le voit en prenant, par exemple, $\varepsilon = \varpi\dfrac{\theta}{2}$.)

Il est ainsi établi que $R_n(s,t)$ converge uniformément vers le coût moyen actualisé minimum $R(s,t)$, quand $n \longrightarrow \infty$.

$R(s,t)$ est donc, comme chacune des fonctions $R_n(s,t)$, une fonction continue de s et de t.

Rapprochons alors de (16) les relations :

$$(6)_{n+1} \qquad \begin{cases} R_n(\lambda_{n+1}, 0) + m = R_n(0,0) + c\ , \\ R_n(0, \mu_{n+1}) + 1 = R_n(0,0) + c\ ; \end{cases}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} R(\lambda, 0) + m = R(0,0) + c\ , \\ R(0, \mu) + 1 = R(0,0) + c\ . \end{cases}$$

Il en résulte que, pour $n \geqslant N_\theta$,

$$\begin{cases} -\theta \leqslant R_n(\lambda_{n+1}, 0) - R(\lambda_{n+1}, 0) + R(0,0) - R_n(0,0) \leqslant +\theta\ , \\ -\theta \leqslant R_n(0, \mu_{n+1}) - R(0, \mu_{n+1}) + R(0,0) - R_n(0,0) \leqslant +\theta\ ; \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} -\theta \leqslant R_n(\lambda_{n+1}, 0) - R(\lambda_{n+1}, 0) + R(\lambda, 0) - R_n(\lambda_{n+1}, 0) \leqslant \theta\ , \\ -\theta \leqslant R_n(0, \mu_{n+1}) - R(0, \mu_{n+1}) + R(0, \mu) - R_n(0, \mu_{n+1}) \leqslant \theta\ ; \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(17) \qquad \begin{cases} \left| R(\lambda, 0) - R(\lambda_{n+1}, 0) \right| \leqslant \theta\ , \\ \left| R(0, \mu) - R(0, \mu_{n+1}) \right| \leqslant \theta\ , \end{cases} \qquad \text{pour } n \geqslant N_\theta\ .$$

Puisqu'il a été établi en A 5.1. que les fonctions $R(s, 0)$ et $R(0, t)$ sont strictement croissantes, les inégalités (17) (qu'il est possible d'écrire pour tout $\theta > 0$ donné, si petit soit-il) entraînent que

$$\begin{cases} \lambda_n \longrightarrow \lambda\ , \\ \mu_n \longrightarrow \mu\ , \end{cases} \qquad \text{quand } n \longrightarrow \infty.$$

<u>A 5.3. Unicité de la solution de l'équation fonctionnelle</u> (1).

Supposons que l'équation fonctionnelle (1) ait deux solutions $U(s,t)$ et $V(s,t)$ telles que $U(s,0)$, $U(0,t)$ et $V(s,0)$, $V(0,t)$ soient des fonctions uniformément bornées, et continues à droite, respectivement, pour $s = 0$ et pour $t = 0$.

Ces hypothèses entraînent, compte tenu de l'hypothèse (H) suivant laquelle, pour tout $x > 0$, $\dfrac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)} \longrightarrow 0$ quand $s \longrightarrow \infty$ et $\dfrac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)} \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$,

$$\begin{cases} U(s,0) \longrightarrow U(0,0) + 1 \quad \text{et} \quad V(s,0) \longrightarrow V(0,0) + 1 \quad \text{quand } s \longrightarrow \infty\ , \\ U(0,t) \longrightarrow U(0,0) + m \quad \text{et} \quad V(0,t) \longrightarrow V(0,0) + m \quad \text{quand } t \longrightarrow \infty\ ; \end{cases}$$

De plus, à tout $\varepsilon > 0$ donné, si petit soit-il, on peut faire correspondre S_ε et T_ε tels que,

$$\begin{cases} \text{pour } s \geq S_\varepsilon, & |U(0,0)+1-U(s,0)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |V(0,0)+1-V(s,0)| \leq \varepsilon, \\ \text{pour } t \geq T_\varepsilon, & |U(0,0)+m-U(0,t)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |V(0,0)+m-V(0,t)| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Il en résulte que,

$$\begin{cases} \text{pour } s \geq S_\varepsilon, & |U(s,0) - V(s,0)| \leq |U(0,0) - V(0,0)| + 2\varepsilon, \\ \text{pour } t \geq T_\varepsilon, & |U(0,t) - V(0,t)| \leq |U(0,0) - V(0,0)| + 2\varepsilon. \end{cases}$$

D'autre part, puisque $U(s,t)$ et $V(s,t)$ sont solutions de l'équation (1),

$$|U(s,t)-V(s,t)| \leq \left[1-a\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\Phi(s+x)}{\Phi(s)}\frac{\Psi(t+x)}{\Psi(t)}dx\right] \underset{\substack{y \geq s \\ z \geq t}}{\mathrm{Max}} \begin{Bmatrix} |U(y,0)-V(y,0)| \\ |U(0,z)-V(0,z)| \\ |U(0,0)-V(0,0)| \end{Bmatrix}.$$

On en déduit alors, par des calculs analogues à ceux effectués en A 5.2., avec les mêmes notations (14),

$$\underset{\substack{s \geq 0 \\ t \geq 0}}{\mathrm{Max}} |U(s,t)-V(s,t)| \leq \underset{\substack{s \geq 0 \\ t \geq 0}}{\mathrm{Max}} \begin{Bmatrix} |U(s,0)-V(s,0)| \\ |U(0,t)-V(0,t)| \end{Bmatrix}$$

$$\leq \mathrm{Max} \begin{Bmatrix} (1-\eta_\varepsilon) \underset{\substack{s \geq 0 \\ t \geq 0}}{\mathrm{Max}} \begin{Bmatrix} |U(s,0)-V(s,0)| \\ |U(0,t)-V(0,t)| \end{Bmatrix} \\ 2\varepsilon + (1-\varpi) \underset{\substack{s \geq 0 \\ t \geq 0}}{\mathrm{Max}} \begin{Bmatrix} |U(s,0)-V(s,0)| \\ |U(0,t)-V(0,t)| \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}.$$

Ces inégalités entraînent :

$$\underset{\substack{s \geq 0 \\ t \geq 0}}{\mathrm{Max}} |U(s,t)-V(s,t)| \leq \underset{\substack{s \geq 0 \\ t \geq 0}}{\mathrm{Max}} \begin{Bmatrix} |U(s,0)-V(s,0)| \\ |U(0,t)-V(0,t)| \end{Bmatrix} \leq \frac{2\varepsilon}{\varpi}, \text{ si petit que soit } \varepsilon,$$

c'est-à-dire $U(s,t) = V(s,t)$, quels que soient $s \geq 0$ et $t \geq 0$.

Il est ainsi établi que la solution R(s,t), obtenue par approximations successives à partir de $R_0(s,t)$, est la seule solution de l'équation fonctionnelle (1) qui définisse des fonctions R(s, 0) et R(0, t) uniformément bornées, et continues à droite, respectivement, pour s = 0 et pour t = 0.

RÉFÉRENCE BIBLIOGRAPHIQUE

Richard BELLMAN - Dynamic Programming.
(Princeton University Press - 1957)