CAHIERS DU BURO

MARC BARBUT

La linéarité dans un certain problème de renouvellement de stock en avenir aléatoire

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 1 (1957), p. 43-52

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1957__1__43_0>

LA LINÉARITÉ DANS UN CERTAIN PROBLÈME DE RENOUVELLEMENT DE STOCK EN AVENIR ALÉATOIRE

par

Marc BARBUT

Exposé fait au séminaire de Recherche Opérationnelle de l'institut de Statistique le 27 Mars 1957

Considérons la catégorie de problème de stock suivante : étant donnée une période de N unités de temps, le gestionnaire doit choisir dès l'instant initial un vecteur :

$$\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

où q_n est la commande (destinée à renouveler son stock) à passer pour la date n ($n \leqslant N$). Son incertitude quant à l'avenir portera soit sur la demande du bien stocké, soit sur les délais de livraison des commandes qu'il a passées.

Dans le premier cas, la nature choisit un vecteur :

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N)$$

où x_n est la demande du bien stocké pendant l'unité de temps n ; elle sera supposée aléatoire, de fonction de répartition connue, et indépendante des demandes pendant les autres unités de temps. Les délais de livraison pourront tous être supposés nuls sans perte de généralité.

Dans le second cas, la demande pendant la période de temps considérée est un vecteur certain

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$$

et la nature choisit un vecteur :

$$\vec{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_N)$$

où t_n, entier positif ou nul, est le délai de livraison aléatoire, de fonction de répartition connue, de la commande faite pour la date n.

L'objectif du gestionnaire sera toujours de rendre minimum un coût moyen. Mais alors qu'il sait chiffrer le coût de son stock (nous supposerons ce coût proportionnel, pendant chaque unité de temps, au niveau de ce stock), ainsi que le coût d'achat des commandes (supposé lui aussi proportionnel), il n'est pas toujours possible d'attribuer un prix bien déterminé à une défaillance. Nous envisagerons donc deux cas, suivant qu'une défaillance a un coût connu proportionnel à l'excès de la demande sur le stock, l'objectif du gestionnaire étant alors de rendre minimum le coût probable global, ou qu'on ne peut déterminer le coût d'une défaillance, l'objectif devenant que la probabilité d'une défaillance soit inférieure à une valeur fixée par le gestionnaire, et que le coût moyen de ce qui peut être chiffré soit minimum.

Après avoir reconnu que lorsque l'avenir est certain le problème se résoud par des égalités linéaires, nous chercherons à voir ce qui reste de ce caractère lorsque l'avenir est aléatoire, et s'il y a des différences significatives suivant que l'incertitude porte sur la demande ou sur les délais de livraison.

I. CAS D'UN AVENIR CERTAIN

Soient S_0 le stock initial, $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_N)$ le vecteur des commandes et $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_N)$ le vecteur des demandes. Les délais de livraison sont supposés nuls.

Posons :

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad\qquad Q_n = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Le stock pendant l'unité de temps n est :

$$S_n = S_0 + Q_n - A_n$$

si cette quantité est positive, et zéro dans le cas contraire. Les q_n peuvent être soumis à des conditions :

(1) $$\beta_n \geqslant q_n \geqslant \alpha_n \qquad n = 1, 2, .., N$$

les α_n et β_n étant des nombres donnés, et ils vérifient :

(2) $$q_n \geqslant 0 \qquad n = 1, 2, .., N$$

Si nous voulons toujours satisfaire à la demande, il faudra en outre les choisir tels que :

(3) $$S_0 + Q_n - A_n \geqslant 0 \qquad n = 1, 2, .., N$$

Ces conditions étant satisfaites, la fonction économique est :

$$\Phi(\vec{q}) = p\, Q_N + p' \sum_{n=1}^{N} (S_0 + Q_n - A_n)$$

où p est le prix d'achat unitaire, et p' le prix unitaire de maintien en stock. Déterminer les q_n soumis aux conditions (1), (2), (3) de façon que cette fonction soit minimum est bien une programmation linéaire.

II. AVENIR ALÉATOIRE - CÔUT DE DÉFAILLANCE PROPORTIONNEL

a) CAS OÙ LA DEMANDE EST ALÉATOIRE

Le vecteur demande est alors aléatoire :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

Soit : $$\varphi_n(u) = \Pr(x_n = u)$$

dans le cas ou x_n est discrète, et

$$f_n(u)\,du = \Pr\left[u < x_n < u + du\right]$$

si x_n est continue.

Alors :

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

a pour loi :

$$(4)\quad \begin{aligned} \Pr\left[X_n = X\right] &= \gamma_n(X) = \sum_{0 \leqslant u \leqslant X} \gamma_{n-1}(X - u)\,\varphi_n(u) \\ \Pr\left[X_n < X\right] &= \Gamma_n(X) = \sum_{0 < u \leqslant X} \Gamma_{n-1}(X - u)\,\varphi_n(u) = \sum_{u < X} \gamma_n(u) \end{aligned}$$

dans le premier cas, et dans le second

$$(4')\quad \begin{aligned} g_n(X) &= \int_0^X g_{n-1}(X - u)\,f_n(u)\,du \\ G_n(X) &= \int_0^X G_{n-1}(X - u)\,f_n(u)\,du = \int_0^X g_{n-1}(u)\,du \end{aligned}$$

La fonction économique est alors : p'' étant le coût de défaillance :

$$(5)\quad \Phi(\vec{q}) = p\,Q_N + \sum_{n=1}^{N}\Big(p' \sum_{X < S_0 + Q_n} (S_0 + Q_n - X)\,\gamma_n(X) + p'' \sum_{X \geqslant S_0 + Q_n} (X - S_0 - Q_n)\,\gamma_n(X)\Big)$$

ou

$$(5')\quad \Phi(\vec{q}) = q\,Q_N + \sum_{n=1}^{N}\Big(p' \int_0^{S_0 + Q_n} (S_0 + Q_n - X)\,g_n(X)\,dX + p'' \int_{S_0 + Q_n}^{\infty} (X - S_0 - Q_n)\,g_n(X)\,dX\Big)$$

Ce n'est plus une fonction linéaire. Mais dans le cas d'une demande cumulée X_n à valeurs discrètes, elle est linéaire dans chacun des polyèdres limités dans l'espace à N dimensions où l'on représente le vecteur $\vec{q}$ par les plans :

$$S_0 + Q_n = X_n^{(k)} \qquad \begin{aligned} n &= 1, 2, \ldots, N \\ k &= 1, 2, \ldots, k_n \end{aligned}$$

où les $X_n^{(k)}$ sont, lorsque k varie, les valeurs que peut prendre la variable X_n. Dans les deux cas, $\Phi(\vec{q})$ est continue et convexe. En effet, on a, partout où Φ est dérivable :

$$(6) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial Q_n} = p' \sum_{X<S_0+Q_n} \gamma_n(X) - p'' \sum_{X \geq S_0+Q_n} \gamma_n(X) = (p'+p'') \sum_{X<S_0+Q_n} \gamma_n(X) - p''$$

$$= (p'+p'')\,\Gamma_n(S_0+Q_n) - p'' \qquad \text{si } 1 \leqslant n \leqslant N-1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Q_N} = (p'+p'')\,\Gamma_N(S_0+Q_N) - (p''-p)$$

et de même dans le cas continu :

$$(6') \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial Q_N} = (p'+p'')\,G_n(S_0+Q_n) - p'' \qquad n \leqslant N-1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Q_N} = (p'+p'')\,G_N(S_0+Q_N) - (p''-p)$$

Donc dans tous les cas $\frac{\partial \Phi}{\partial Q_n}$ est fonction non décroissante de Q_n, donc aussi bien de q_n. De plus, le minimum absolu de Φ est atteint lorsque les dérivées changent de signe, si toutefois les valeurs ainsi obtenues forment une suite non décroissante car par définition

$$Q_n = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$$

est non décroissante avec n. Soit Y_n la valeur de X_n telle que :

$$(7) \qquad \begin{cases} (p'+p'')\,\Gamma_n(Y_n-0) - p'' < 0 \\ (p'+p'')\,\Gamma_n(Y_n+0) - p'' \geqslant 0 \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots, N-1$$
$$\begin{cases} (p'+p'')\,\Gamma_N(Y_N-0) - (p''-p) < 0 \\ (p'+p'')\,\Gamma_N(Y_N+0) - (p''-p) \geqslant 0 \end{cases}$$

Elle existe sûrement, pour chaque n, car :

$$0 < \frac{p''-p}{p''+p'} < \frac{p''}{p''+p'} < 1$$

Les formules de composition (4) montrent que

$$\Gamma_n(X) \leqslant \Gamma_{n-1}(X)$$

donc que les Y_n forment une suite non décroissante pour $n = 1, 2, \ldots, N-1$. En général, p étant très petit par rapport à p'', on aura aussi

$$Y_N \geqslant Y_{N-1}$$

S'il en est ainsi (ce sera sûrement le cas si l'on ne tient pas compte dans la fonction économique du prix d'achat), le minimum absolu de Φ peut être atteint en choisissant les Q_n tels que :

$$S_0 + Q_n = Y_n \qquad n = 1, 2, \ldots, N$$

Il peut se faire, bien entendu, que ce minimum absolu ne se trouve pas dans le domaine polyédral convexe limité par des inégalités du type (1) auxquelles peuvent être soumis les q_n, ou que l'inégalité $Y_N \geqslant Y_{N-1}$ ne soit pas satisfaite; on aura alors à chercher le minimum d'une fonction convexe dans un domaine convexe. Dans le cas où la distribution de X_n est discrète, cette recherche pourra être facilitée par le fait qu'on peut, on l'a vu, subdiviser l'espace en polyèdres convexes à l'intérieur de chacun desquels la fonction Φ est linéaire; on aura une procédure régulière pour trouver le minimum de Φ dans chacun des polyèdres, et il faudra ensuite prendre le minimum de ces minimums.

b) CAS OÙ LES DÉLAIS DE LIVRAISON SONT ALÉATOIRES

La demande est maintenant un vecteur certain :

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$$

Le délai de livraison t_n de la commande faite pour la date n est aléatoire, et l'on connaît :

$$\alpha_{nh} = \Pr\left[t_n \leqslant h\right] \qquad \begin{array}{l} h = 0, 1, 2 \ldots \\ n = 1, 2, \ldots, N \end{array}$$

Le total des quantités qui sont entrées dans le stock jusqu'à la date n est une variable aléatoire Z_n dont l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est, pour un vecteur $\vec{q}$ donné, constitué par des nombres de la forme

$$(8) \qquad q_{i_1} + q_{i_2} + \ldots + q_{i_k} \qquad \begin{array}{l} i_1, i_2, \ldots, i_k \leqslant n \\ k \leqslant n \end{array}$$

avec des probabilités connues. Autrement dit, à chaque vecteur $\vec{q}$ correspond une suite de variables aléatoires $Z_n(\vec{q})$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ prenant des valeurs $Z_n^{(i)}$ du type (8) avec des probabilités $\Pi_n^{(i)}$ qui se calculent au moyen des α_{nh}. La fonction économique correspondante sera :

$$(9) \qquad \Phi(\vec{q}) = p\, Q_N + \sum_{n=1}^{N} \left(p' \sum_{\substack{i \\ S_0 + Z_n^{(i)} \geqslant A_n}} (S_0 + Z_n^{(i)} - A_n)\, \Pi_n^{(i)} + p'' \sum_{\substack{i \\ S_0 + Z_n^{(i)} < A_n}} (A_n - S_0 - Z_n^{(i)})\, \Pi_n^{(i)} \right)$$

où

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

C'est une fonction du même type que la fonction (5). Elle est encore continue et convexe en $\vec{q}$, et linéaire dans les polyèdres limités par les plans :

$$S_0 + Z_n^{(i)} = A_n \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, i_n \\ n = 1, 2, \ldots, N \end{array}$$

seule la façon dont elle dépend de $\vec{q}$ est plus complexe que dans le cas où c'est la demande qui est aléatoire. Tout ce qui a été dit au paragraphe précédent s'applique donc de nouveau, sauf en ce qui concerne le minimum absolu, dont la recherche sera en général plus difficile.

III. AVENIR ALÉATOIRE - RISQUE DE DÉFAILLANCE

a) CAS OÙ LA DEMANDE EST ALÉATOIRE

Le premier objectif devient que, pour chaque n, on ait une probabilité supérieure à $1-\varepsilon$, ε étant donné, que la quantité

$$S_n = S_o + Q_n - X_n$$

soit positive. En utilisant les mêmes notations que plus haut, on a :

$$\Pr\left[S_n > 0\right] = \Pr\left[S_o + Q_n > X_n\right] = \Gamma_n\,(S_o + Q_n)$$

Donc il faut et il suffit de choisir des q_n tels que :

$$\Gamma_n\,(S_o + Q_n) > 1 - \varepsilon \qquad\qquad n = 1, 2, \dots, N$$

Or il existe une suite croissante de nombres $\gamma_n(\varepsilon)$ tels que :

$$\Gamma_n\,(\gamma_n(\varepsilon) + 0) > 1 - \varepsilon$$

$$\Gamma_n\,(\gamma_n(\varepsilon) - 0) \leqslant 1 - \varepsilon$$

On devra donc prendre les q_n tels que

(10) $$S_o + Q_n > \gamma_n(\varepsilon) \qquad\qquad n = 1, 2, \dots, N$$

ce qui est compatible avec les conditions

$$Q_{n+1} \geqslant Q_n$$

Si ces inégalités (10) sont compatibles aussi avec les inégalités éventuelles du type (1), on aura, dans le domaine polyédral convexe que déterminent les systèmes (10) et (2), à chercher le minimum de la fonction économique :

(11) $$\Phi\,(\vec{q}) = p\,Q_N + p' \sum_{n=1}^{N} \sum_{X \leqslant S_o + Q_n} (S_o + Q_n - X)\,\delta_n\,(X)$$

C'est la fonction (5), (où $p'' = 0$) ; on est ramené au même problème qu'au paragraphe II-1, mais plus simple car d'une part Φ est ici non décroissante par rapport à tous les Q_n, et d'autre part le domaine où il faut l'étudier est considérablement réduit par les inégalités (10).

b) CAS OÙ LES DÉLAIS DE LIVRAISON SONT ALÉATOIRES

Désignons toujours par $Z_n^{(o)}$, $Z_n^{(1)}$, ..., $Z_n^{(i_n)}$ les valeurs possibles de la variable aléatoire Z_n, et $\Pi_n^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, i_n$) leurs probabilités. Ces valeurs $Z_n^{(i)}$ sont fonction du vecteur $\vec{q}$ choisi. Et il faut déterminer $\vec{q}$ de sorte que, pour tout n, on ait :

(12) $$\Pr\left[S_o + Z_n > A_n\right] > 1 - \varepsilon$$

Ce qui est connu, ce sont les probabilités $\Pi_n^{(i)}$; les valeurs de Z_n ne sont elles-mêmes connues et bien ordonnées que lorsqu'on s'est donné un vecteur $\vec{q}$. Mais on sait cependant que, avant que $\vec{q}$ soit choisi, l'ensemble des $Z_n^{(i)}$ n'a pas une structure quelconque : il a la structure du treillis complet des parties d'un ensemble. En effet, désignons par $q_a, q_b, q_c, \dots, q_e$ les commandes faites pour une date antérieure à n, et qui ont une probabilité comprise entre 0 et 1 (bornes exclues) d'être livrées avant la date n et par $Z_n^{(o)}$ la somme des commandes faites avant n et qui ont une probabilité 1 d'être livrées avant n. Alors les valeurs que peut prendre Z_n sont :

$$Z_n^{(o)}$$

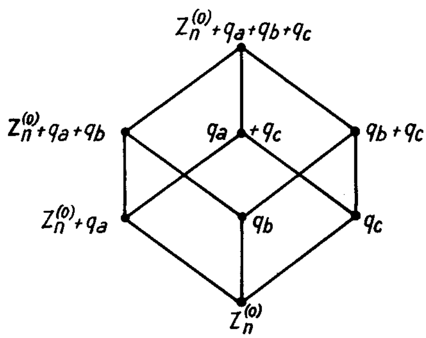
$$Z_n^{(o)} + q_a , \quad Z_n^{(o)} + q_b , \qquad\qquad , \; Z_n^{(o)} + q_e$$

$$Z_n^{(o)} + q_a + q_b , \qquad\qquad , \; Z_n^{(o)} + q_e + q_k$$

etc

$$Z_n^{(o)} + q_a + q_b + \dots + q_e$$

On ne sait pas, avant d'avoir choisi $\vec{q}$, si $q_a \geqslant q_b$, mais on est sûr que $q_a + q_b \geqslant q_a$. La figure illustre le treillis des valeurs de Z_n dans le cas où il n'y aurait que trois valeurs q_a, q_b, q_c à considérer.



Chacun des points du treillis a une masse, qui est l'un des $\Pi_n^{(i)}$, bien déterminée.

Ceci étant, soit $Z_n^{(i)}$ un point quelconque du treillis, et $\mathfrak{J}(Z_n^{(i)})$ l'ensemble de ses descendants.

Alors, si :

$$\Pi_n^{(i)} + \Pr\left[\mathfrak{J}(Z_n^{(i)})\right] \geqslant \varepsilon \tag{13}$$

il est nécessaire, pour satisfaire à (12), que :

$$Z_n^{(i)} > A_n - S_o$$

$\left(\Pr\left[\mathfrak{J}(Z_n^{(i)})\right]\right.$ est la somme des masses des points de $\left.\mathfrak{J}(Z_n^{(i)})\right)$. En effet, si $Z_n^{(i)} \leqslant A_n - Z_o$ on aura :

$$\Pr\left[Z_n \leqslant A_n - S_o\right] \geqslant \Pr\left[Z_n^{(i)}\right] + \Pr\left[\mathfrak{J}(Z_n^{(i)})\right] \geqslant \varepsilon$$

donc

$$\Pr\left[Z_n > A_n - S_o\right] \leqslant 1 - \varepsilon$$

D'autre part, désignons par $\mathcal{J}(Z_n^{(i)})$ l'ensemble des antécédents de $Z_n^{(i)}$, et considérons un ensemble $(Z_n^{(i_1)}, Z_n^{(i_2)}, \dots, Z_n^{(i_k)})$ de k points situés sur k chaines distinctes. Si :

$$\sum_{j=1}^{k} \Pi_n^{(i_j)} + \Pr\left[\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{J}(Z_n^{(i_j)})\right] > 1 - \varepsilon \tag{14}$$

il suffit, pour satisfaire à (12), que :

$$Z_n^{(i_j)} > A_n - S_0 \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

En effet, on a alors :

$$\Pr\left[Z_n > A_n - S_0\right] \geqslant \sum_{j=1}^{k} \Pi_n^{(i_j)} + \Pr\left[\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{S}(Z_n^{(i_j)})\right] > 1 - \varepsilon$$

(autrement dit, l'ensemble des valeurs de Z_n supérieures à $A_n - Z_0$. comprend l'ensemble des $Z_n^{(ij)}$ et de leurs antécédents, lequel a une probabilité supérieure à $1 - \varepsilon$).

Il en résulte que l'on pourra écrire toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour que (12) soit satisfaite au moyen d'inégalités linéaires portant sur les q_i. On pourra commencer par les conditions nécessaires en partant du niveau 0 (du point $Z_n^{(0)}$) et en remontant chaque chaîne jusqu'à un point d'arrêt tel que (13) soit satisfaite; on déterminera ainsi une frontière des conditions nécessaires. Si l'ensemble des points frontière satisfait à (14), ces conditions sont aussi suffisantes. Sinon, il faudra leur adjoindre des points au-dessous de la frontière et tels que (14) soit vérifiée; autrement dit, on déplacera la frontière vers le bas jusqu'à ce que (14) soit vérifiée. Et pour l'ensemble de points ainsi obtenus, soient $Z_n^{(i_1)}, Z_n^{(i_2)}, \ldots, Z_n^{(i_k)}$, les k inégalités :

$$Z_n^{(i_j)} > A_n - S_0 \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

constitueront les conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$\Pr\left[Z_n > A_n - S_0\right] > 1 - \varepsilon$$

Il est intuitif que l'ensemble des points donnant des conditions nécessaires et suffisantes n'est pas nécessairement unique. Cela dépendra des valeurs des probabilités $\Pi_n^{(i)}$; il pourra se faire que l'on ait le choix entre plusieurs ensembles de points. Les systèmes d'inégalité correspondants seront dits alternatifs. La discussion complète montre que dans le cas où Z_n ne peut prendre que quatre valeurs :

$$Z_n^{(0)} \qquad Z_n^{(0)} + q_a \qquad Z_n^{(0)} + q_b \qquad Z_n^{(0)} + q_a + q_b$$

il y a six systèmes d'inégalités possibles, dont un alternatif. Dans le cas de la figure, avec 8 valeurs de Z_n, vingt systèmes sont possibles (suivant les valeurs des $\Pi_n^{(i)}$) dont six alternatifs.

La fonction économique sera alors :

$$(15) \qquad \Phi(\vec{q}) = p Q_N + \sum_{n=1}^{N} p' \sum_{S_0 + Z_n^{(i)} > A_n} (S_0 + Z_n^{(i)} - A_n) \, \Pi_n^{(i)}$$

c'est-à-dire encore une fonction du type (9) (où $p'' = 0$). Mais le domaine où elle prend ses valeurs n'est plus convexe, à cause des systèmes d'inégalités linéaires alternatifs que l'on aura éventuellement eu à écrire pour certaines valeurs de n, parmi les N systèmes que l'on aura dû former pour que la condition (13) soit vérifiée pour tout n ; on peut même construire des exemples où les N systèmes sont tous alternatifs. En voici un où la loi des délais de livraison est homogène dans le temps :

$$\alpha_{n0} = \alpha_{n1} = 0 \qquad \text{pour tout } n$$

$$\alpha_{n2} = \alpha > 0 \qquad \alpha_{n3} = \beta \geqslant \alpha \qquad \beta < 1$$

$$\alpha_{nh} = 1 \qquad \text{si} \qquad h \geqslant 4$$

où α et β satisfont à :

$$1 - \varepsilon < \alpha \qquad \text{et} \qquad \alpha\beta \leqslant 1 - \varepsilon$$

(on rappelle que $\alpha_{nh} = \Pr\left[t_n \leqslant h\right]$)

Les conditions à écrire seront alors :

$$S_0 + Q_{n-3} > A_n$$

ou

$$S_0 + Q_{n-4} + q_{n-2} > A_n$$

pour tout n.

Bien entendu, il pourra se faire que l'on ait à éliminer certaines inégalités superflues ou incompatibles. Cela dépendra des valeurs des A_n.

IV. CONCLUSIONS

Il apparaît entre tous les cas envisagés une unité de structure remarquable : toutes les contraintes s'écrivent sous forme d'inégalités linéaires et la fonction économique est toujours du même type, à savoir convexe et linéaire par morceaux (sauf dans le cas où la demande, aléatoire, aurait une distribution continue; la fonction économique est alors convexe mais à dérivées continues). Une différence cependant apparaît entre le cas où la demande est aléatoire et celui où ce sont les délais de livraison : la possibilité, dans la seconde hypothèse, que les contraintes s'écrivent sous forme de systèmes alternatifs d'inégalités linéaires ; cela a pour conséquence que le domaine où l'on doit choisir le vecteur $\vec{q}$ n'est plus convexe.

Mais les plus grandes difficultés dans la recherche du minimum de la fonction économique Φ viendront de sa forme. A cet égard, il semble qu'une voie soit offerte à une étude plus poussée :

On peut chercher à déterminer des approximations de Φ par des fonctions plus simples. Par exemple, dans le cas où l'on se donne un risque de défaillance, Φ étant toujours croissante, la fonction linéaire :

$$H(\vec{q}) = p\,Q_N + p'\sum_{n=1}^{N} E(S_0 + Q_n - X_n)$$

si la demande est aléatoire, ou :

$$H(\vec{q}) = p\,Q_N + p'\sum_{n=1}^{N} E\,(S_o + Z_n - A_n)$$

si les délais de livraisons sont aléatoires, converge uniformément vers Φ si ε (le risque accepté) tend vers zéro. Elle pourra donc fournir une bonne approximation linéaire pour ε assez petit. Mais on ne peut espérer obtenir une bonne approximation linéaire dans les cas où les dérivées partielles de Φ, qui ne sont pas constantes, ont des valeurs très "dispersées"; il faudrait alors chercher une fonction H voisine de Φ qui soit à dérivées continues, ou linéaire par morceaux mais ayant moins de "morceaux" que Φ. Enfin ajoutons que le mot voisinage pourra être entendu dans le sens de la topologie de la convergence uniforme, puisqu'il faut non seulement que H soit voisine de Φ, mais que le minimum de H soit voisin de celui de Φ dans un certain domaine.