SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 66 (1938), p. 1-85 (supplément spécial)

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__v1_0>

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

ET CONFÉRENCES

DE L'ANNÉE 1938.

27 JANVIER 1938–12 JANVIER 1939.

S'adresser, pour ce qui concerne les *listes des Membres* et les *adresses*,
à M. GIBRAT, 56, Faubourg Saint-Honoré, Paris (8^e),
et pour ce qui concerne les *Comptes rendus des Séances*,
à M. BOULIGAND, 46, rue Saint-André-des-Arts, Paris (6^e).

NOTE.

Sur la nouvelle organisation de la Société Mathématique de France.

Les modifications aux statuts et au règlement intérieur, proposées par le Conseil de la Société lors de l'Assemblée générale du 13 janvier 1937, ont été adoptées, à l'unanimité des membres présents, par l'Assemblée générale du 14 avril 1937, et ont reçu l'approbation des Pouvoirs publics le 19 novembre 1937 (approbation notifiée le 27 décembre 1937). La nouvelle organisation de la Société est donc désormais en vigueur.

La nouvelle rédaction des articles des statuts et du règlement intérieur a été publiée dans les *Comptes rendus des Séances* de l'année 1936 (p. 37-40). Il est rappelé que la Société Mathématique comprend deux catégories de membres : les *membres actifs*, résidants et non résidants, à qui sont adressées toutes les publications de la Société, et les *membres adhérents*, résidants et non résidants, qui reçoivent seulement les *Comptes rendus des Séances et Conférences*.

Les listes des membres actifs et des membres adhérents, arrêtées à la date du 25 mai 1938, sont publiées dans le présent fascicule.

1er juin 1938.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

(MEMBRES ACTIFS ET MEMBRES ADHÉRENTS)

AU 25 MAI 1938 (1).

MEMBRES HONORAIRES DU BUREAU

MM. BOREL.
BRILLOUIN (M).
BROGLIE (LOUIS DE)
CARTAN (E.).
CHAZY.
DEMOULIN.
DERUYTS.
DRACH.
ESCLANGON.
GODEAUX.
GONSETH.
HADAMARD.
JOUGUET.
JULIA.

MM. LEBESGUE.
LEVI-CIVITA.
LINDELÖF.
MONTEL.
OCAGNE (D').
PICARD.
VALLÉE-POUSSIN (DE LA).
VEBLEN.
VESSIOT.
VILLAT.
VOLTERRA.
YOUNG (W. H.).
ZAREMBA.

BUREAU ET CONSEIL (1938).

Président	MM. VERGNE.
Vice-Présidents	GOT. CHAPELON. GAMBIER. PLATRIER.
Secrétaires	DARMOIS. BOULIGAND.
Vice-Secrétaires	GIBRAT. LE CORBEILLER.
Archiviste	DEDRON.
Trésorier	TURMEL.
Membres du Conseil (2)	MM. CARTAN (HENRI), 1941. CHÂTELET (ALBERT), 1942. DELSARTE. DESFORGE, 1942. Mme DUBREIL, 1942. FAVARD, 1941. HUMBERT, 1940. LABROUSSE, 1941. MARIJON, 1941. MAROTTE, 1941. PÉRÈS, 1940. RISSER. ULLMO (JEAN). VALIRON (GEORGES), 1941.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à ces listes au Vice-Secrétaire : M. GIBRAT, 56, Faubourg Saint-Honoré, Paris (8e).

(2) La date qui suit le nom d'un Membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce Membre.

I. — Liste des Membres actifs (¹).

Date de l'admission.

1922. **ABRAMESCO** (N.), professeur à l'Université de Cluj (Roumanie).
1935. **ADAD**, professeur au Lycée de Mustapha (Alger).
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert D'), rue de Lille, 87, à Lambersart (Nord). **S. P.** (²).
1929. **AHLFORS** (Lars), docteur ès sciences, professeur adjoint à l'Université d'Helsinki (Finlande).
1919. **ALMÉRAS**, professeur honoraire, 5, rue Nansouty, quartier Fould, à Tarbes (Hautes-Pyrénées).
1931. **AMIRA** (B.), lecteur à l'Université de Jérusalem, P. O. B. 715.
1918. **ANGELESCO**, professeur à l'Université de Bucarest (Roumanie).
1925. **ANGHELUTZA** (Th.), docteur ès sciences, professeur à l'Université de Cluj (Roumanie).
1919. **ANTOINE**, professeur à la Faculté des Sciences, 11, avenue Aristide-Briand, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1934. **APPERT** (Antoine), docteur ès sciences, Le Rolland, Auray (Morbihan).
1935. **ARNOULD** (Francis), ingénieur des Ponts et Chaussées, 10, rue Oudinot, à Paris.
1931. **ARONSZAJN** (N.), 42, rue Sibuet, Paris (12ᵉ).
1920. **ARVENGAS** (Gérard), ingénieur en chef des poudres, poudrerie de Saint-Médard (Gironde).
1900. **AURIC**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue du Val-de-Grâce, 2, à Paris (5ᵉ). **S. P.**
1919. **BACHELIER**, professeur à la Faculté des Sciences, à Besançon (Doubs).
1929. **BADESCU** (Radu), professeur à l'Université, Str. Avram Yaneu 1-4 Cluj (Roumanie).
1928. **BAKER** (H. F.), professeur à Saint-John College, Walcott, 3 Storey's Way, Cambridge (Angleterre).
1917. **BARRAU** (J.-A.), professeur à l'Université, Marritzweg, 92, à Utrecht (Hollande).
1932. **BARRILLON**, directeur de l'École du génie maritime, 3, avenue Octave-Gréard, à Paris (7ᵉ).
1918. **BARRIOL** (A.), secrétaire général de la Société de Statistique de Paris, rue des Martyrs, 40, à Paris (9ᵉ). **S. P.**
1927. **BARY** (Mˡˡᵉ Nina), Pokrovka ulitza 29, app. 22, à Moscou, U. R. S. S.
1920. **BAYS**, professeur ordinaire de mathématiques à l'Université de Fribourg, Le Châtelet, à Fribourg (Suisse).
1939. **BELA DE SZ. NAGY**, docteur ès sciences, Kossuth u. 3. *Szeged* (Hongrie).
1919. **BÉNÉZÉ**, professeur au lycée Condorcet, 8, rue du Havre, à Paris (9ᵉ).
1929. **BERGEOT**, docteur ès sciences mathématiques, répétiteur d'analyse mathématique à l'École centrale des Arts et Manufactures, rue de Turin, 22, à Paris (8ᵉ).
1929. **BERRIAT** (Jean), ingénieur en chef des Manufactures de l'État, avenue Maurice-Berteaux, 97, au Vésinet (Seine-et-Oise).

(¹) Les rectifications qu'il y aurait lieu d'apporter à cette liste doivent être adressées à M. GIBRAT, 56, Faubourg Saint-Honoré, Paris (8ᵉ).

(²) Les initiales **S. P.** indiquent les Sociétaires perpétuels.

Date de l'admission.

1923. **BERNSTEIN** (S.), professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Leningrad (Russie).

1891. **BERTRAND DE FONTVIOLANT**, professeur honoraire à l'École Centrale des Arts et Manufactures, Domaine de Labat, à Valesville, par Lanta (Haute-Garonne). **S. P.**

1927. **BESSONOFF**, professeur à l'Institut des chaussées, 2^e Neopalimovsky 11, app. 1, à Moscou 2^e, U. R. S. S.

1932. **BIERNACKI**, professeur à l'Institut mathématique de l'Université de Poznan (Pologne).

1937. **BIGGERI** (Carlos), professeur, Acevedo 1934, à Buenos-Ayres (République Argentine).

1888. **BIOCHE**, professeur honoraire au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6^e). **S. P.**

1926. **BIRKHOFF**, professeur à l'Université de Harvard, 984, Memorial Drive, à Cambridge, Massachusetts, U. S. A.

1932. **BLANC**, professeur, Les Palmiers, Vallon Beauséjour, Toulon (Var).

1922. **BLOCH**, Grande-Rue, 57, à Saint-Maurice (Seine).

1891. **BLUTEL**, inspecteur général honoraire, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14^e).

1936. **BOGOLIOUBOFF**, professeur, Box 135, Kieff. Ukraine (U. R. S. S.).

1926. **BOHR** (H.), Universitates Matematiske Institut, Blegdamsvej 15, Kopenhagen (Danemark).

1895. **BOREL** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Haussmann, 86, à Paris (8^e). **S. P.**

1913. **BORTOLOTTI** (Ettore), professeur à l'Université, via Sgambati, 4, Rome (Italie).

1931. **BORTOLOTTI** (Enea), professeur à la Faculté des Sciences de l'Université, via Dupré, 24, Firenze (Italie).

1934. **BORUVKA** (Otakar), professeur à l'Université Masaryk, Kounicova, 63, à Brno, (Tchécoslovaquie).

1913. **BOULIGAND**, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, 46, rue Saint-André-des-Arts, à Paris (6^e).

1936. **BOUTIN** (Pierre), professeur au Lycée Janson-de-Sailly, 6, rue Albert-Sorel, Paris (14^e).

1933. **BRASSIER**, professeur honoraire, 21, rue d'Aubilly, à Charleville (Ardennes).

1911. **BRATU**, professeur à l'Université de Cluj (Roumanie).

1924. **BREGUET** (Louis), ingénieur-constructeur, président de la Chambre syndicale des industries aéronautiques, rue de la Pompe, 115, à Paris (16^e).

1932. **BRELOT** (Marcel), professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux (Gironde).

1897. **BRICARD**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14^e).

1919. **BRILLOUIN** (M.), membre de l'Institut, professeur au Collège de France, boulevard de Port-Royal, 31, à Paris (13^e).

1920. **BRILLOUIN** (Léon), professeur à la Faculté des Sciences, quai du Louvre, 30, à Paris.

1920. **BROGLIE** (Louis DE), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, 94, rue Perronnet, à Neuilly-sur-Seine.

1901. **BUHL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse (Haute-Garonne).

1929. **BUREAU** (Florent), docteur ès sciences de l'Université de Liége, à Jemeppe-sur-Sambre (Belgique).

1894. **CAHEN** (E.), rue de Passy, 1, à Paris (16^e).

Date de l'admission.

1928. **CAIRNS** (W. D.), professeur Oberlin College, Peters Hall, Oberlin, Ohio (U. S. A.).

1927. **CALLANDREAU**, ingénieur des Arts et Manufactures, professeur à l'École Centrale, boulevard Edgar-Quinet, 1, à Paris (14e).

1928. **CALUGAREANO**, docteur ès sciences, Calea Motilor, 40, à Cluj (Roumanie).

1931. **CAPOULADE**, professeur au collège Chaptal, 65 *bis*, rue Denis-Papin, à Colombes Seine).

1934. **CAQUOT** (Albert), membre de l'Institut, 1, rue Beethoven, à Paris (16e).

1919. **CARRUS**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Bab-Azoum, 11, à Alger.

1937. **CÂRSTOÏU** (Jean) 23, rue des Écoles, à Paris (5e).

1896. **CARTAN** (E.), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, 95, boulevard Jourdan, à Paris (14e).

1930. **CARTAN** (Henri), maître de conférences à la Faculté des Sciences, 22, rue de Verdun, à Strasbourg (Bas-Rhin).

1887. **CARVALLO**, directeur honoraire des études à l'École Polytechnique, rue des Bourdonnais, 27, à Versailles (Seine-et-Oise). **S. P.**

1919. **CERF**, professeur à la Faculté des Sciences, à Strasbourg (Bas-Rhin).

1925. **CHAMBAUD** (R.), ingénieur E. C. P., rue Félix-Faure, 1, à Paris (15e).

1919. **CHANDON** (Mme), astronome adjoint à l'Observatoire, avenue de l'Observatoire, 38, à Paris (14e).

1935. **CHAPAS**, professeur, 25, rue du Plat, à Lyon (Rhône).

1919. **CHAPELON**, professeur à la Faculté des Sciences de Lille, examinateur à l'École Polytechnique, boulevard Morland, 2, à Paris (4e). **S. P.**

1931. **CHARDOT** (Jacques), ancien élève de l'École Polytechnique, villa des Iris, à Mont-Saint-Martin (Meurthe-et-Moselle).

1930. **CHARPENTIER** (Mlle), docteur ès sciences, 8, rue d'Alsace-Lorraine, à Poitiers (Vienne).

1933. **CHARRUEAU** (A.), ingénieur des Ponts et Chaussées, docteur ès sciences, avenue du Général-Sarrail, 33, à Paris (16e).

1911. **CHATELET** (Albert), directeur de l'Enseignement du second degré, au Ministère de l'Éducation nationale, 17, rue Auguste-Comte, à Paris (6e).

1937. **CHATELET** (François), agrégé des Sciences mathématiques, 17, rue Auguste-Comte, Paris (6e).

1935. **CHAUDUN** (Mlle), Docteur ès sciences physiques, 77, rue Notre-Dame-des-Champs, à Paris (6e).

1935. **CHAZEL**, professeur au Lycée Janson de Sailly, 9, rue Léon-Vaudoyer, à Paris (7e).

1907. **CHAZY** ((Jean), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École centrale des Arts et Manufactures, 6, rue Joseph-Bara, à Paris (6e). **S. P.**

1923. **CHENEVIER**, inspecteur général de l'Enseignement secondaire, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).

1933 **CHENG** (Chuan Chang), rue Gay-Lussac, 46, à Paris (5e).

1934. **CHERENZI-LIND**, professeur, 2239, Ewing Street, c/o Ronald Clifton, Los Angeles, California (U. S. A.).

1938. **CHUANG** (Chi Tai), fellow de la fondation chinoise pour l'avancement des sciences, Fondation hellénique, Cité Universitaire, boulevard Jourdan, à Paris (14e).

1928. **CIORANESCO** (Nicolas), maître de conférences à l'École Polytechnique, Strada Maria Hagi-Mosco, 12, Bucarest II (Roumanie).

1929. **CLAPIER**, docteur ès sciences, 47, avenue de Lodève, à Montpellier (Hérault).

1920. **COISSARD**, professeur au lycée Janson-de-Sailly, 106, rue de la Pompe, à Paris (16e).

Date de l'admission.

1933. **COISSARD** (M.), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Douai (Nord).
1900. **COTTON** (Émile), correspondant de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, place Saint-Laurent, 1, à Grenoble (Isère). **S. P.**
1933. **COURRIER**, professeur au lycée Fustel-de-Coulanges, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1926. **CRAWLEY** (A.-G.), Esq., directeur du British Museum, à Londres.
1904. **CURTISS**, professeur à l'Université Northwestern, Sherman Avenue, 2023, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1919. **DANJOY**, ingénieur des constructions civiles, rue de Villersexel, 9, à Paris (7ᵉ).
1938. **DARGENTON** (A.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, 2, rue de la Planche, à Paris (7ᵉ).
1919. **DARMOIS**, Professeur à la Faculté des Sciences, 7, rue de l'Odéon, à Paris, (6ᵉ).
1885. **DAUTHEVILLES**, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, 3, boulevard Ledru-Rollin, à Montpellier (Hérault).
1920. **DEDRON**, professeur au lycée Saint-Louis, avenue de Suffren, 112 *ter*, à Paris (15ᵉ).
1936. **DEICHA** (A.), ancien professeur à l'Académie des Mines de Moscou, 6 *bis*, rue Jadot, à Saint-Germain-en-Laye (Seine-et-Oise).
1920. **DELENS**, professeur au lycée, rue de Sainte-Adresse, 35, Le Havre (Seine-Infér.). **S. P.**
1934. **DELGLEIZE**, répétiteur à l'Université de Liége, Thier des Critchions n° 28, Chênée (Liége), Belgique.
1926. **DELLOUE**, professeur au lycée Henri-IV, rue Clovis, à Paris (5ᵉ).
1932. **DELSARTE**, professeur à la Faculté des Sciences, 4, rue de l'Oratoire, Nancy (M.-et-M.).
1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Van-Hulthem, 36, à Gand (Belgique).
1905. **DENJOY** (Arnaud), professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Raspail, 116, à Paris (6ᵉ).
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue Louvrex, 37, à Liége (Belgique).
1936. **DESCHAMPS**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Clemenceau, à Nantes (Loire-Inférieure).
1931. **DESFORGE** (J.), professeur au lycée Saint-Louis, 11 *bis*, rue Le Bouvier, à Bourg-la-Reine (Seine).
1930. **DEVISME** (Jacques), professeur de mathématiques spéciales, au lycée de Tours (Indre-et-Loire). **S. P.**
1932. **DEVISMÉ** (Mˡˡᵉ Odette), professeur au lycée Victor-Hugo, 27, rue de Sévigné, à Paris (3ᵉ). **S. P.**
1900. **DICKSTEIN**, professeur à l'Université, Marszatkowska, 117, à Varsovie (Pologne).
1936. **DIEULEFAIT** (Charles), professeur à l'Université « del Littorale », à Rosario de Santa Fé (République Argentine).
1931. **DIVE** (P.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1935. **DŒBLIN** (W.), 5, square Delormel, à Paris (14ᵉ).
1926. **DOLLON**, professeur de mathématiques spéciales au lycée, 35, rue Isabey, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1929. **DOUGLAS** (Jesse), professeur, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge. Mass. (U. S. A.).
1899. **DRACH**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue Geoffroy-Saint-Hilaire, 53, à Paris (5ᵉ).
1930. **DUBOURDIEU**, docteur ès sciences, rue d'Antin, 3, à Paris.
1935. **DUBREIL-JACOTIN** (Mᵐᵉ), docteur ès sciences, 11, rue Pierre-Ducreux, à Paris (16ᵉ).

Date de l'admission.

1933. **DUBREIL**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1922. **DUCHANGE**, ingénieur en chef des mines, 25, rue Cortambert, à Paris (16e).
1939. **DUFRESNOY** (Jacques), agrégé des Sciences mathématiques, 127, rue Notre-Dame-des-Champs, à Paris (6e).
1937. **DUGUÉ** (Daniel), agrégé de mathématiques, 35, boulevard Jourdan, à Paris (14e).
1907. **DULAC** (Henri), professeur à la Faculté des Sciences, 2, boulevard Jules-Favre, à Lyon (Rhône).
1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, professeur à l'Université, Cabrières, avenue Mont-Charmant, à Béthusy-Lausanne (Suisse).
1917. **DU PASQUIER** (L.-Gustave), professeur à l'Université, 3, rue Desor, à Neuchâtel (Suisse). **S. P.**
1930. **DURAND** (Georges), docteur ès sciences, astronome à l'Observatoire, 87, rue du Dix-Avril, à Toulouse (Haute-Garonne).
1938. **DVORETZKY**, Université de Jérusalem, P. O. B. 715.
1916. **ELCUS**, banquier, 57, avenue Montaigne, à Paris (8e). **S. P.**
1920. **ERRERA**, professeur à l'Université de Bruxelles, chaussée de Waterloo, 1039, à Uccle (Belgique).
1915. **ESCLANGON**, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire de Paris.
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7e).
1929. **EVANS**, professeur de mathématiques, University of California, Berkeley (Californie). U. S. A.
1935. **EYRAUD**, professeur à la Faculté des Sciences de Lyon (Rhône).
1888. **FABRY**, correspondant de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, traverse Magnan, 1, à Mazargues (Bouches-du-Rhône).
1924. **FANTAPPIÉ** (Luigi), docteur ès sciences, professeur à l'Université de Sao Paulo (Brésil).
1909. **FARID BOULAD BEY**, membre de l'Institut d'Égypte, 10, rue Bustan El-Magsi (Faggalah), le Caire (Égypte).
1926. **FAVARD** (J.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Grenoble (Isère). **S. P.**
1932. **FAYET**, docteur ès sciences, professeur au lycée Gouraud, à Rabat (Maroc).
1892. **FEHR** (Henri), professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).
1936. **FELDHEIM** (Ervin), Gróf Zichy Jenó-Ucca 47/11/12, Budapest VI (Hongrie).
1928. **FÉRAUD** (L.), docteur ès sciences, 24, rue H.-Mussard, à Genève (Suisse).
1929. **FERRIER** (R.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, directeur central au Ministère de la Marine, rue de Franqueville, 2, à Paris (16e). **S. P.**
1926. **FINIKOFF** (Serge), professeur à l'Université, Sobatchia Plochadka n° 3, app. 10, Moscou 2e (U. R. S. S.)
1919. **FLAMANT**, 2, rue Georges-de-Porto-Riche, à Paris (14e).
1920. **FLAVIEN**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, maître de conférences à l'École normale supérieure de Sèvres, 35, avenue du Parc, à Sceaux (Seine).
1903. **FORD** (Walter B.), professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, 904, Forest Ave., Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1919. **FORGERON**, agrégé de mathématiques, sous-directeur de la Caisse syndicale de retraites des Forges, rue de la Pompe, 1, à Paris (16e).

Date de l'admission.

1935. **FORTET**, agrégé de mathématiques, 45, rue d'Ulm, à Paris (5e).
1929. **FOUARGE** (L.), professeur à l'Université, Villa des Roches, Tilff-les-Liége (Belgique).
1905. **FOUET**, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6e).
1903. **FRAISSÉ**, proviseur du lycée de Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1920. **FRANCESCHINI**, avenue du Petit-Chambord, 40, à Bourg-la-Reine (Seine).
1911. **FRÉCHET**, professeur à la Sorbonne, Institut H.-Poincaré, rue Pierre-Curie, 11, à Paris (5e).
1911. **GALBRUN**, docteur ès sciences, avenue Bosquet, 40 *bis*, à Paris (7e).
1919. **GAMBIER**, professeur à la Faculté des Sciences de Lille, 23, rue du Laos, à Paris (15e).
1908. **GARNIER** (René), professeur à la Faculté des Sciences, rue Decamps, 21, à Paris (16e).
1920. **GAY**, professeur au lycée, à Montpellier (Hérault).
1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy (Meurthe-et-Moselle). **S. P.**
1929. **GERMAY** (R.-H.), professeur à l'Université de Liége, à Saive (Wandre), Belgique.
1920. **GEVREY**, professeur à la Faculté des Sciences, à Dijon (Côte-d'Or).
1935. **GHAFFARI.**
1931. **GHERMANESCU** (Michel), docteur ès sciences, professeur à l'Ecole Polytechnique de Timisoara (Roumanie).
1935. **GIBRAT**, ingénieur au corps des Mines, docteur en droit, professeur à l'École des Mines de Paris, 56, faubourg Saint-Honoré, Paris (8e).
1935. **GILLIS**, docteur ès sciences, 42, rue de l'Harmonie, à Vilvorde (Belgique).
1913. **GIRAUD** (Georges), route de la Villeneuve, à Bonny-sur-Loire (Loiret).
1938. **GLODEN** (A.), professeur d'Athénée à Luxembourg, 11, rue Jean-Jaurès, Luxembourg.
1938. **GODEAU** (R.), professeur à l'Université de Bruxelles, 94, rue de Livourne, à Bruxelles (Belgique).
1913. **GODEAUX**, professeur à l'Université de Liége, 37, quai Orban, à Liége (Belgique).
1928. **GONSETH**, professeur à l'École Polytechnique fédérale, Scheuchzersstrasse, 7, à Zurich (6) (Suisse).
1923. **GOSSE**, doyen de la Faculté des Sciences, à Grenoble (Isère).
1907. **GOT** (Th.), professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers, 3, rue du Dragon, à Paris (6e).
1935. **GRANDCHAMP** (R. de), préparateur à l'École des Hautes Études, détaché à l'Observatoire, 20, rue Demours, à Paris (17e).
1933. **GROOTENBOER** (B.), docteur ès sciences, Breedstraat, 30, à Utrecht (Hollande).
1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7e).
1930. **GUÉRARD DES LAURIERS**, agrégé de mathématiques, rue Brûle-Maison, 96, à Lille (Nord).
1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, 57, rue du Cherche-Midi, à Paris (6e) **S. P.**
1907. **GUICHARD** (L.), professeur de mathématiques au collège de Barbezieux (Charente).
1938. **GUIGUE** (R.), professeur au Lycée Ampère, 60, rue de Marseille, Lyon (Rhône).
1935. **GUMBEL**, maître de recherches, 1, rue P.-Huvelin, à Lyon (Rhône).
1919. **HAAG**, correspondant de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, 25, rue du Polygone, à Besançon (Doubs).
1938. **HAARBLEICHER** (André), ingénieur général de la Marine, 29, rue Octave-Feuillet, à Paris (16e).

Date de l'admission.

1896. **HADAMARD**, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Émile-Faguet, 12, à Paris (14e). **S. P.**
1901. **HANCOCK**, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel, Ohio (U. S. A.).
1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université de Californie, à Los Angeles, Californie (U.S.A.). **S. P.**
1919. **HELBRONNER**, docteur ès sciences, membre de l'Institut, avenue Kléber, 94, à Paris (16e). **S. P.**
1935. **HENNEQUIN**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis, 3, avenue Carnot, à Sceaux (Seine).
1929. **HERSENT** (Georges), ingénieur, rue de Londres, 60, à Paris (8e). **S. P.**
1929. **HERSENT** (Jean), ingénieur, rue de Londres, 60, à Paris (8e). **S. P.**
1937. **HIBBERT** (Lucien), Docteur ès sciences, 20, rue des Écoles, à Paris (5e).
1911. **HIERHOLTZ**, professeur, Villa La Bruyère, à Montreux, Vaud (Suisse).
1933. **HIONG** (King-Lai).
1911. **HOLMGREN**, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, à Upsal (Suède).
1921. **HOSTINSKY**, professeur à l'Université Masaryk, Kounicovo, 63, à Brno (Tchécoslovaquie).
1927. **HULUBEI** (Dan), maître de conférences à l'Université de Cernauti (Roumanie).
1918. **HUMBERT** (P.), professeur à la Faculté des Sciences, rue Lunaret, 82, à Montpellier (Hérault).
1920. **HUSSON**, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy (Meurthe-et-Moselle). **S. P.**
1932. **HURWITZ** (W.), professeur à l'Université Cornell, Ithaca, N. Y. (U. S. A.).
1919. **ILIOVICI**, professeur au lycée Buffon, 12, rue Émile-Faguet, à Paris (14e).
1934. **ITARD**, professeur de mathématiques au lycée Michelet, à Vanves (Seine).
1932. **JACOB** (Caïus), docteur ès sciences, Laboratoire de Mécanique, Université de Bucarest (Roumanie).
1921. **JACQUES**, professeur à la Faculté des Sciences, 79, rue du Taur, à Toulouse (Haute-Garonne).
1919. **JANET** (Maurice), professeur à la Faculté des Sciences de Caen (Calvados).
1920. **JANSSON** (Tim), docteur de l'Université d'Upsal, SPP. Box 7.052, à Stockholm (Suède).
1931. **JARDETSKY** (W.), professeur à l'Université, Séminaire mathématique, à Belgrade (Yougoslavie).
1927. **JONESCO** (D. V.), professeur à la Faculté des Sciences, à Cluj (Roumanie).
1914. **JORDAN**, professeur à l'Université, 46, Maria Utca, à Budapest VIII (Hongrie). **S. P.**
1919. **JOUGUET**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Pierre-Curie, 12, à Paris (5e). **S. P.**
1919. **JULIA** (Gaston), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, rue Traversière, 4 *bis*, à Versailles (Seine-et-Oise). **S. P.**
1937. **JYENGAR**, professeur de mathématiques au Central College, Bengalore (S. India).
1916. **KAMPÉ DE FÉRIET**, professeur à la Faculté des Sciences de Lille (Nord).
1928. **KARAMATA** (Yovan), dozent à l'Université, Séminaire de mathématiques, Beograd (Yougoslavie).
1924. **KAUCKY** (Jos), Kounicovo, 63, à Brno (Tchécoslovaquie).
1932. **KEMPISTY**, professeur à l'Université de Wilno (Pologne).
1931. **KÉRÉKJARTO** (B. DE), professeur à l'Université de Szeget (Hongrie).
1928. **KHARADZÉ** (A.), professeur adjoint à l'Université, à Tiflis (Russie).
1921. **KOGBETLIANTZ**, professeur à l'Université de Téhéran (Perse).

Date de l'admission.

1913. **KOSTITZIN** (V.), ancien professeur à l'Université de Moscou, 1, square Vermenouze, à Paris (5e).
1938. **KRASNER**, docteur ès sciences, 107, rue du Mont-Cenis, à Paris (18e).
KRAWTCHOUK, École polytechnique de Kiew.
1907. **KRYLOFF**, ingénieur des mines, docteur ès sciences, membre des Académies des Sciences de l'Ukraine et de l'U. R. S. S., Box n° 135, Kieff, Ukraine (U. R. S. S.)
1929. **KUNIGUI**, professeur à l'Université de Hokkaïdo (Japon).
1931. **KUNZ** (Alfred), 22, rue Vernier, à Nice (Alpes-Maritimes).
1936. **KUREPA** (G.), docteur ès sciences, Glina, près Zagreb (Yougoslavie).
1919. **LABROUSSE**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Léon-Vaudoyer, 7, à Paris (7e)
1920. **LAGORSSE**, proviseur du lycée Pasteur, 17, boulevard d'Inkermann, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1922. **LAGRANGE**, professeur à la Faculté des Sciences, 7, rue du Château, à Dijon (Côte-d'Or).
1921. **LAINÉ**, docteur ès sciences, professeur à l'Institut catholique d'Angers (Maine-et-Loire).
1934. **LALAN**, professeur à l'Institut catholique, 93 *bis*, avenue de Clamart, à Issy-les-Moulineaux (Seine).
1919. **LAMBERT**, astronome à l'Observatoire, boulevard Arago, 99, à Paris (14e).
1937. **LA MENZA** (François), Calle Bustamente, n° 2046, Buenos-Aires (République Argentine).
1927. **LAVRENTIEFF**, professeur à l'Université de Moscou, Machkoffpereoulov, 1-A, log. 24, à Moscou (U. R. S. S.).
1896. **LEAU**, Doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Nancy, 24, rue de Lorraine, Saint-Germain-en-Laye (Seine-et-Oise).
1896. **LEBEL**, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon (Côte-d'Or).
1902. **LEBESGUE**, membre de l'Institut, professeur au Collège de France, rue Saint-Sabin, 35 *bis*, à Paris (11e).
1919. **LECONTE**, inspecteur général de l'Enseignement secondaire, 5, rue Le Bouvier, Bourg-la-Reine (Seine). **S. P.**
1920. **LE CORBEILLER**, ingénieur des télégraphes, 278, boulevard Raspail, à Paris (14e).
1938. **LEE** (Ping Kwok), 1, rue de l'École-Polytechnique, Paris (5e).
1925. **LEFEBVRE** (Éloi), licencié ès sciences mathématiques, avenue de la Station, 22, à Arcueil (Seine).
1918. **LEFSCHETZ**, professeur à l'Université, 190, Prospect Street, Princeton, New-Jersey, (U. S. A.).
1935. **LEIMANIS** (Eugène), Maître de conférences à l'Université, Zumaros Ula 11, dz 10, à Riga (Lettonie).
1934. **LERAY** (Jean), docteur ès sciences, 28, rue d'Essey, à Malzeville, par Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fougères, 93, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1898. **LE ROY**, membre de l'Institut, professeur au Collège de France, rue Cassette, 27, à Paris (6e).
1900. **LEVI-CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Sardegna, 50, à Rome, 25 (Italie).
1907. **LÉVY** (Paul), ingénieur en chef des mines, professeur d'analyse à l'École Polytechnique, rue Théophile-Gautier, 38, à Paris (16e). **S. P.**

Date de l'admission.

1927. **LEWICKY** (Valdemar), rue Teatynska, 3, à Lwów (Pologne).
1920. **LHERMITTE**, professeur au lycée Janson-de-Sailly, rue de Lubeck, 32, à Paris (16e).
1920. **LHOSTE**, chef d'escadron, rue Jacob, 52, à Paris (6e).
1938. **LICHNEROWITZ**, agrégé des Sciences mathématiques, 47, rue Denfert-Rochereau, à Paris (5e).
1929. **LIÉNARD**, directeur honoraire de l'École Nationale supérieure des Mines, 20, rue de Tournon, à Paris (6e).
1929. **LIMOUSIN**, ingénieur-constructeur, rue de Miromesnil, 67, à Paris (8e). **S. P.**
1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).
1924. **LINFIELD** (Ben Zin), professeur à l'Université de Virginia (U. S. A.).
1935. **LINSMAN** (Marcel), rue Michel-Thiry, 10, à Liége (Belgique).
1934. **LOEVE**, professeur, 7, rue du Musée, à Alexandrie (Égypte).
1925. **LOÏCIANSKY** (L.), professeur à l'École Polytechnique et à l'Institut de Marine, à Léningrad (Russie).
1938. **LOISEAU**, conservateur du Musée des Arts et Métiers, 292, rue Saint-Martin, à Paris (3e).
1923. **LOUVET**, Lieutenant-Colonel honoraire, Société Scientifique Flammarion, Cours du Vieux-Port, 38, à Marseille (Bouches-du-Rhône). **S. P.**
1912. **LOVETT** (E.-O.), professeur au Rice Institute, à Houston, Texas, U. S. A. **S. P.**
1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, Room 1120, Lexington Building, Plaza 3532, Baltimore, Maryland, U. S. A. **S. P.**
1925. **LUSIN** (N.), membre de l'Académie de Léningrad, Arbat ulitza 25, app. 8, à Moscou (Russie).
1935. **LŪSIS**, Docent à l'Université de Riga, Séminaire mathématique, 19, boulevard Rainis, à Riga (Lettonie).
1895. **MAILLET**, inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite, examinateur honoraire des élèves à l'École Polytechnique, 7, rue des Vollandes, à Genève (Suisse). **S. P.**
1937. **MALÉCOT**, 118 *bis*, rue du 11-novembre, à Saint-Étienne (Loire).
1924. **MALET** (Henri), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue du Colonel-Moll, 25, à Paris (17e).
1922. **MANDELBROJT**, professeur à la Faculté des Sciences, 25, rue Raynaud, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1919. **MARCHAUD**, recteur de l'Académie de Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1938. **MARCOU** (René-J.), professeur de mathématiques, Boston College, Chestnut Hill (Massachusetts), U. S. A.
1906. **MARCUS** (O.), agrégé de mathématiques, 15, rue Frédéric-Passy, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1919. **MARIJON**, inspecteur général de l'Instruction publique, avenue Félix-Faure, 37, à Paris (15e).
1920. **MARMION**, général du génie, 39, rue de Bellechasse, à Paris (7e).
1904. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12e).
1932. **MARTY** (Frédéric), maître de conférences à la Faculté des Sciences de Marseille (Bouches-du-Rhône).
1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jésus, 13, à Mexico (Mexique). **S. P.**

Date de l'admission.

1927. **MENCHOFF**, professeur à l'Université, Dievitschie Polie, Bojeninovski per 5, log. 14, à Moscou, 21 (U. R. S. S.).

1931. **MESSONIER** (M^{me}), bibliothécaire à l'Université, quai Claude-Bernard, 18, à Lyon (Rhône).

1919. **MÉTRAL** (P.), professeur de mathématiques au Lycée de Marseille (B.-du-R.).

1904. **METZLER** (William), 5003.10, Saline Street, Syracuse, N.-Y. (U. S. A.).

1932. **MIHAÏLESCO** (Tibère), professeur, lycée Cantemir, Strada Palade 21, Bucarest (3^{e}) (Roumanie).

1920. **MILHAUD**, professeur au collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8^{e}).

1928. **MILLET**, professeur au lycée Janson-de-Sailly, 78, avenue du Roule, à Neuilly-sur-Seine (Seine).

1921. **MILLOUX**, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, 1, rue Lenôtre, à Caudéran (Gironde).

1927. **MINEUR** (Henri), astronome adjoint à l'Observatoire, avenue Trudaine, 16, à Paris (9^{e}).

1935. **MIRABEL**, professeur au Lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (15^{e}).

1934. **MIRANDA**, Privat-Docent à l'université de Naples, via Crispi, 31, à Naples (Italie).

1934. **MIRGUET**, docteur ès sciences, route de Pomeil, 9, à Guéret (Creuse).

1928. **MIRIMANOFF**, professeur à l'Université, rue Michel-Chauvet, 4, à Genève (Suisse).

1935. **MITRINOVITCH** (Dragoslav), docteur ès sciences, Smiljaniceva, 9, Beograd (8^{e}) (Yougoslavie).

1922. **MOCH** (F), ingénieur aux Chemins de fer de l'Est, 4, rue Rockfeller, à Reims (Marne). S. P.

MODJTAHEDI (docteur) Lahidjan, Iran (Perse).

1933. **MONTEIRO** (Antonio), 8, boulevard Pasteur, à Paris (15^{e}).

1907. **MONTEL**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Jacques, 79, à Paris (14^{e}).

1911. **MOORE** (Ch.-N.), professeur à l'Université de Cincinnati (États-Unis).

1920. **MOREL**, professeur de mathématiques spéciales au Prytanée militaire, à La Flèche (Sarthe).

1939. **MORSE** (Marston), professeur à l'Institut of advanced Sciences Fine Holl Princeton (U. S. A.).

1933. **MOTCHANE** (Léon), licencié ès sciences, 5, rue Champagny, à Paris (7^{e}).

1920. **MOUTHON**, professeur au lycée Lakanal, rue Alphonse-Daudet, 15, à Paris (14^{e}).

1935. **MURRAY**, Mathematical Library, South african public Library Cape Town (South Africa).

1931. **MYARD** (Francis), chef des travaux à l'École centrale des Arts et Manufactures, 21, boulevard Saint-Michel, à Paris (5^{e}).

1928. **MYLLER** (Alexandre), professeur à l'Université, à Jassy (Roumanie).

1910. **MYRBERG** (P. J.), professeur à l'Université, Temppelik, 21, Helsinki (Finlande).

1926. **NEVANLINNA** (Rolf), professeur à l'Université, Museig, 9 A., Helsinki (Finlande).

1926. **NEYMANN**, professeur à l'Université, 84, Brentmead Place, London N. W. 11 (Angleterre).

1928. **NICOLESCO** (Miron), professeur à la Faculté des Sciences de Cernauti, 14, strada Paris, Bucarest 3 (Roumanie).

Date de l'admission.

1926. **NIKODYM** (O.), docteur ès sciences, Koszykowa, 53, 35, à Varsovie (Pologne).
1921. **NOAILLON**, docteur ès sciences, 7, rue de la Barre, à Saint-Maur (Seine).
1919. **NÖRLUND** (E.), professeur à l'Université, Malmögade, 8, Copenhague (Danemark). **S. P.**
1926. **ORE** (Oystein), professeur, Yale University, New Haven (Conn.), États-Unis.
1924. **ORY** (Herbert), professeur, chemin des Fauconnières, 6, à Chailly-sur-Lausanne (Suisse).
1912. **PANGE** (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François-Ier, 32, à Paris (8e). **S. P.**
1919. **PARODI** (H.), ingénieur-conseil, 12, avenue Alphand, à Paris (16e).
1921. **PASQUIER**, docteur ès sciences, professeur à la Faculté libre des Sciences d'Angers, 6, rue Volney, à Angers (Maine-et-Loire). **S. P.**
1935. **PAUC**, agrégé de mathématiques, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14e).
1914. **PÉRÈS**, professeur à la Faculté des Sciences, 95, boulevard St-Michel à Paris (5e).
1896. **PETROVITCH**, profr à l'Université, Kossancicev Venac, 26, à Belgrade (Yougoslavie).
1925. **PEYOVITCH** (Tadya), professeur à l'Université, 35, Stojana Novakovica, à Belgrade (Yougoslavie).
1927. **PFEIFFER** (Georges), membre de l'Académie des Sciences de l'Ukraine, rue Korolensko, à Kieff (Russie).
1879. **PICARD** (Émile), de l'Académie française, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, professeur honoraire à la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, quai Conti, 25, à Paris (6e). **S. P.**
1919. **PICART** (L.), directeur de l'Observatoire de Bordeaux, à Floirac (Gironde).
1925. **PINTE** (l'abbé), séminaire des missions, École supérieure de Philosophie, à Vals près Le Puy (Haute-Loire).
1934. **PLÂTRIER** (Charles), professeur à l'École Polytechnique, 12, Parc Henry-Paté, rue François-Gérard, Paris (16e).
1935. **PODTIAGUINE**, professeur, Buikova, 27, Praha-Bubeneč (Tchécoslovaquie).
1935. **POISVILLIERS**, Ingénieur des Arts et Manufactures, 11, boulevard de Levallois, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1939. **POLI**, rue Desfarges, à Lyon.
1924. **PÓLYA**, professeur à l'École Polytechnique fédérale, Dunantstrasse, 4, à Zurich (Suisse). **S. P.**
1920. **POMEY** (Étienne), professeur à l'École de Physique et de Chimie, boulevard Saint-Marcel, 70, à Paris (5e).
1920. **POMEY** (J.-B.), répétiteur honoraire à l'École Polytechnique, 120, boulevard Raspail, à Paris (6e).
1920. **POMEY** (Léon), examinateur à l'École Polytechnique, ingénieur en chef des Manufactures de l'État, 140, rue de Paris, à Pantin (Seine).
1918. **POMPEIU**, professeur à l'Université, 101, strada Barbu Vacaresco, à Bucarest (Roumanie). **S. P.**
1937. **POPOVICI** (Constant), Professeur à l'Université, directeur de l'Observatoire de Bucarest (Roumanie).
1920. **PORTALIER**, professeur au lycée Henri-IV, rue Clovis, Paris (5e).
1932. **POSSEL** (René DE), professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand, 18, rue Le Dantec, Paris (13e).

Date de l'admission.

1894. **POTRON** (M.), docteur ès sciences, rue de Grenelle, 42, à Paris (7e).
1928. **POULIOT** (Adrien), professeur à l'Université Laval, rue Garnier, 140, à Québec (Canada).
1931. **PRASAD** (B. N.).
1919. **PRÉVOST** (J.), ingénieur civil des mines, rue Huysmans, 1, à Paris (6e).
1930. **RACINE** (Ch.), docteur ès sciences, Saint-Joseph's College, Teppakulam P. O., Trichinopoly (Indes anglaises).
1930. **RADOITCHITCH** (Miloch), assistant de mathématiques à l'Université, à Belgrade (Yougoslavie).
1935. **RAMBAUD**, ingénieur, professeur à l'École Centrale Lyonnaise, à Lyon (Rhône).
1937. **RANSON**, professeur au Lycée du Parc, 101, boulevard des Belges,à Lyon (Rhône).
1930. **RAUCH**, professeur au Lycée Voltaire, avenue de la République, 101, à Paris (11e).
1928. **RHAM** (Georges DE), 7, avenue Bergières, à Lausanne (Suisse).
1926. **RIABOUCHINSKY**, directeur adjoint du Laboratoire de Mécanique des Fluides de la Faculté des Sciences, rue Edmond-Roger, 10, à Paris (15e).
1932. **RICCI** (Giovanni), Viale Ramagna 76, Milano (Italie).
1930. **RICHARD**, route de Thionville, à Uckange (Moselle).
1908. **RISSER**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, 10, rue Oswaldo-Cruz, à Paris (16e).
1919. **ROBERT** (Paul), professeur au lycée Louis-le-Grand, 4, rue de Villiers, à Levallois (Seine).
1925. **ROBERT** (Pierre), docteur ès sciences, professeur au collège Chaptal, 59, boulevard des Batignolles, à Paris (8e).
1916. **ROBINSON** (L.-B.), 131 E. North Ave, à Baltimore (Maryland, États-Unis).
1936. **ROGER** (Frédéric), agrégé de mathématiques, 172, avenue du Maine, Paris (14e).
1931. **ROMANOSKY** (V.), professeur de mathématiques à l'Université rue Karl-Marx, 71, Tachkent (U. R. S. S.).
1919. **ROQUES** (Mme, née Masson), docteur ès sciences, actuaire de la « Métropole », Caixa Postal, 1020, Rio de Janeiro (Brésil).
1934. **ROTH**, Ingénieur, 38, avenue Kléber, à Paris (16e).
1926. **ROUSSEL**, professeur à la Faculté des Sciences, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1920. **ROUYER.**
1921. **ROWE** (Ch.), professeur à l'Université, 38, Trinity College, à Dublin (Irlande).
1932. **RUDNICKI**, professeur à l'Université de Wilno (Pologne).
1937. **SADE** (Albert), professeur au lycée d'Auxerre, 42, Boulevard Vauban, à Auxerre (Yonne).
1920. **SAINTE-LAGUË**, professeur au lycée Janson-de-Sailly, rue Barye, 12, à Paris (17e)
1919. **SAKELLARIOU**, professeur à l'Université, rue Voulgaroctonou, 22A, à Athènes (Grèce).
1923. **SALEM**, rue Léonard-de-Vinci, 16, à Paris (16e).
1900. **SALTYKOW** (N.), professeur à l'Université, Varchavska no 38, à Belgrade (Yougoslavie). S. P.
1921. **SARANTOPOULOS**, docteur ès sciences des Universités d'Athènes et de Strasbourg, assistant et répétiteur à l'École Polytechnique, 37, rue Notara, à Athènes (Grèce).
1936. **SARTRE** (Louis), directeur de la Compagnie Parisienne de distribution d'électricité, rue de Vienne, 23, Paris (8e).
1926. **SAXER** (Walther), professeur au Polytechnicum, à Zurich (Suisse).

Date de l'admission.

1936. **SCHIFFER** (Menahem), Institute of Theoretical Physics, Hebrew University, Jérusalem.
1901. **SÉE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Califormie). **S. P.**
1927. **SEGRE** (Beniamino), 10^3 via Alamandini, Bologna (Italie).
1920. **SERGESCU**, professeur à l'Université de Cluj (Roumanie). **S. P.**
1900. **SERVANT**, Grande-Rue, 159, à Bourg-la-Reine (Seine). **S. P.**
1908. **SHAW** (J.-B.), professeur à l'Université, Cochise, Arizona (U. S. A.).
1935. **SHIH HSUN KAO**, assistant chargé de Cours à l'Université normale nationale de Peiping, 3, rue de l'Estrapade, à Paris (5e).
1930. **SHOKAT** (James-A.), Faculty-House, South Hadley, Massachusetts (États-Unis).
1936. **SIDDIGI**, professor of mathematics, Osmania University, Hyderabad, Deccan (India).
1935. **SINGH** (A. N.), de l'Université de Lücknow, Wingfield Park, Lücknow (Indes Anglaises).
1912. **SIRE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Lyon (Rhône).
1931. **SOKOLKA** (Yehoudith), Zichron-Mosché, Jérusalem, Eretz-Israel (Palestine).
1916. **SOULA**, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, 14, rue des Carmes, à Montpellier (Hérault).
1930. **STIHI**, assistant à l'Université, à Jassy (Roumanie).
1918. **STOÏLOW** (S.), professeur à l'Université de Cernauti (Roumanie).
1898. **STÖRMER**, professeur à l'Université, Huitfeldts Gate, 9, à Oslo (Norvège).
1929. **STOYANOFF** (A.), professeur à l'Université, Rakowski, 110a, à Sofia (Bulgarie).
1904. **SUDRIA**, directeur de l'École spéciale de mécanique et d'électricité, 161, rue de Sèvres, à Paris (15e).
1904. **SUNDMAN**, professeur à l'Université, directeur de l'Observatoire, Helsinki (Finlande).
1920. **TAKAGI**, professeur à l'Université de Tokio (Japon).
TAMARKINE, professeur à Brown-University Providence (U. S. A.)
1921. **TAMBS LYCHE**, professeur à l'École Polytechnique de Trondhjem, Hovedbiblioteket, Norgestekniske hoiskole, Trondhjem (Norvège).
1928. **TCHAO-TSIN-YI**, professeur à la Faculté des Sciences, Université Normale Nationale, à Pékin (Chine).
1936. **THIBERGE**, professeur au Lycée Saint-Louis, 4, square Lagarde, Paris (5e).
1920. **THIRY**, correspondant de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, 2, rue Dotzinger, à Strasbourg (Bas-Rhin).
1930. **THOMAS** (Joseph Miller), 4785, Duke Station, Durham, North Carolina (U. S. A.).
1899. **THYBAUT**, inspecteur de l'Académie de Paris, chargé de Conférences à la Sorbonne, boulevard Saint-Germain, 50, à Paris (5e).
1934. **TONOLO** (Angelo), professeur d'analyse à l'Université de Padoue (Italie).
1912. **TOUCHARD** (Jacques), ingénieur des Arts et Manufactures, 55, avenue de Rumine, Lausanne (Suisse).
1910. **TRAYNARD**, professeur à la Faculté des Sciences, 5, quai de la Joliette, à Marseille (Bouches-du-Rhône). **S. P.**
1896. **TRESSE**, inspecteur général de l'Enseignement secondaire, rue Mizon, 6, à Paris (15e).
1907. **TRIPIER** (H.), ingénieur des Arts et Manufactures, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17e). **S. P.**
1934. **TRJITZINSKY** (W.-Z.), professeur, Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana (U. S. A.).

Date
de
l'admission.

1920. **TROUSSET**, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux (Gironde).
1935. **TUAN TSEMEI**, c/o Tseng Chao-an, Mathematical Professor of national university of Wu-Han, Wuchang, Hupeh (Chine).
1919. **TURMEL**, professeur au lycée Saint-Louis, 3, rue Bargue, à Paris (15e).
1911. **TURRIÈRE**, professeur à la Faculté des Sciences, 10, rue de la Vieille, à Montpellier (Hérault).
1926. **TZITZÉICA** (G.), professeur à l'Université, strada Dionisie, 82, à Bucarest (Roumanie).
1930. **TZORTZIS** (Anastasios), docteur ès sciences, Séminaire mathématique de l'Université, à Athènes (Grèce).
1929. **ULLMO** (Jean), ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 45, à Paris (16e).
1913. **VALIRON** (Georges), professeur à la Faculté des Sciences, 95, boulevard Jourdan, à Paris (14e).
1932. **VALIRON** (René), professeur, 44, rue Pelleport, à Paris (20e).
1893. **VALLÉE-POUSSIN** (Ch.-J. DE LA), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université, avenue des Alliés, 149, à Louvain (Belgique).
1927. **VANEY** (Félix), professeur à l'École d'ingénieurs, 37, boulevard de Grancy, à Lausanne (Suisse).
1905. **VAN VLECK**, professeur à l'Université, 519 N. Pinckney Street, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1920. **VAROPOULOS**, professeur à l'Université de Salonique, rue Thémistocle, 35, à Athènes (Grèce).
1932. **VASSEUR** (Marcel), docteur ès sciences, professeur au lycée Hoche, à Versailles (S.-et-O.).
1920. **VAULOT**, docteur ès sciences, 12, rue de la Madeleine, à Bourg-la-Reine (Seine).
1913. **VEBLEN** (O.), professeur à l'Université de Princeton (États-Unis). **S. P.**
1920. **VERGNE**, professeur à l'École Centrale, rue de Lubeck, 31, à Paris (16e). **S. P.**
1901. **VESSIOT**, directeur honoraire de l'École Normale supérieure, 11, avenue Beauséjour, à Bourg-la-Reine (Seine).
1922. **VICTOR**, ingénieur, rue Boissière, 20 *bis*, à Paris (16e).
1911. **VILLAT**, membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, boulevard Blanqui, 47, à Paris (13e).
1928. **VINCENSINI** (Paul), professeur à la Faculté des Sciences de Besançon (Doubs).
1933. **VIOLA** (Tullio), professeur, Piazza Vespri, Siciliani 17, Rome (Italie).
1888. **VOLTERRA** (Vito), sénateur, professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome (Italie).
1926. **VRANCEANU**, professeur à la Faculté des Sciences, à Cernauti (Roumanie).
1900. **VUIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5e).
1936. **VYCICHLO**, 7, Jyrsova, Prague II.
1928. **WACHS** (Sylvain), chaussée de l'Étang, 96, à Saint-Mandé (Seine).
1919. **WAVRE**, professeur à l'Université, rue Le Fort, 25, à Genève (Suisse).
1933. **WEIL** (André), Institut de mathématiques de l'Université de Strasbourg, et 3, rue Auguste-Comte, à Paris (6e). **S. P.**
1919. **WEILL** (Émile), professeur au lycée Saint-Louis, 6, rue Leclerc, Paris (14e).
1937. **WEINSTEIN** (A.), docteur ès sciences, 7, rue des Fossés-Saint-Jacques, Paris (5e).
1926. **WILKOSZ** (Witold), professeur à l'Université, rue Zyblikiewiera, donn. P. K. O., à Cracovie (Pologne).

Date de l'admission.

1934. **WINANTS** (Marcel), professeur à l'Athénée royal, 12, rue Étienne-Soubre, à Liége (Belgique).
1933. **WINN**, assistant à l'Université du Caire (Égypte).
1924. **WOLFF** (Julius), professeur d'analyse à l'Université, Stadhouderslaan, 51, à Utrecht (Pays-Bas).
1938. **WOLKOWITSCH** (D.), 3, impasse du Débarcadère, à Versailles (Seine-et-Oise).
1928. **YOITI-YOSIDA**, professeur à la Faculté des Sciences, à Hokkaïdo, Sapporo (Japon).
1937. **YOUNG** (M^lle Rosalind C.), Imperial College of Science, S. Kensington, London S. W. 7 (Angleterre).
1912. **YOUNG** (W.-H.), membre de la Société Royale de Londres, professeur à l'Université de Liverpool, villa Collonge, La Conversion, à Vaud (Suisse).
1920. **ZAREMBA**, professeur à l'Université de Cracovie, 6, rue Zytnia, à Cracovie (Pologne).
ZAREMBA Fils (S. Z.).
1903. **ZERVOS**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Mytilène, 20, à Athènes (Grèce).
1929. **ZYGMUND** (Antoine), professeur à l'Université, Séminaire mathématique, à Wilno (Pologne).

II. — Liste des Membres adhérents [1].

Date de admission.

1939. **BOHR** (H.), Univesitates Matematiske Institut Blegdamvej, 15, Kopenhagen (Danemark).
1937. **COSTABEL** (Pierre), professeur au Lycée Malherbe, 17, rue de Bayeux, à Caen (Calvados).
1938. **DEBEY**, (Jean), professeur au Lycée Pasteur, 8, rue Vauvenargues, Paris (18^e).
1919. **DELTHEIL**, recteur de l'Académie de Toulouse 20, rue Saint-Jacques, à Toulouse (Haute-Garonne).
1927. **DEMTCHENKO** (Basile), docteur ès sciences, 4, rue Voisembert, à Issy-les-Moulineaux (Seine).
1932. **DIEUDONNÉ** (Jean), maître de conférences à la Faculté des Sciences, 149, rue Jeanne-d'Arc, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
1936. **DINGHAS** (Alexander), docteur en philosophie, Johann Sigismund Str. 10, Berlin Halensee (Allemagne).
1930. **DRESDEN** (A.), professeur à Swarthmore College, 606, Elen Avenue, à Swarthmore, Pensylvanie (U. S. A.).
1939. **GAY**, professeur au Lycée, Montpellier (Hérault).
1903. **GODEY** (Félix), ancien élève de l'École Polytechnique, 59, rue de Prony, à Paris (17^e), et Villa Lygie, Roquebrune, Cap-Martin (A.-M.).
1920. **LANGE NIELSEN** (Frederik), directeur du Rureau statistique des Compagnies norvégiennes d'Assurances sur la vie, Stortingsgatte 22^{VII}, Oslo (Norvège).
1933. **MALCHAIR** (Henri), docteur ès sciences, répétiteur à l'Université de Liége, avenue de la Rousselière, 71, à Beyne-Hensay (Belgique).
1933. **MAZET** (Robert), professeur à la Faculté des Sciences, 2, rue de Bruxelles, à Lille (Nord).
1935. **MERCIER** (André), docteur ès sciences, Institut for teoretisk Physik, École fédérale de Zurich (Suisse).
1920. **NEPVEU**, professeur honoraire de mathématiques, à Belâbre (Indre).
1934. **PERRIN** (Louis), licencié ès sciences, 15, rue Baron, à Reims (Marne).
1903. **ROCHE** (Louis), agrégé de l'Université, docteur ès sciences, Taulé-Penzé (Finistère).
1939. **WEILL** (Émile), professeur au Lycée Saint-Louis, 6, rue Leclerc, Paris (14^e).

---

[1] Les rectifications qu'il y aurait lieu d'apporter à cette liste doivent être adressées à M. GIBRAT, 56, Faubourg Saint-Honoré, Paris (8^e).

III. — Liste des Membres n'ayant pu être touchés, en 1937-1938, par les communications de la Société (1).

Date de l'admission.

1935. **BALANZAT DE LOS SANTOS** (Manuel), 9, boulevard Jourdan, à Paris (14e).
1920. **BRANTUT**, ingénieur général de l'Artillerie navale, 13, rue de Poissy, à Paris (5e).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, rue du Marché, 15, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1935. **GRÜNBERGS**, 45, rue d'Ulm, à Paris (5e).
1928. **HLAVATY** (V.), professeur à l'Université Charles, Charwatské, 5, Prague (Tchécoslovaquie).
1938. **KRIGOWSKI.**
1929. **LEPAGE** (Th.), professeur à la Faculté des Scienees, 21, rue Auguste-Delporte, à Bruxelles (Belgique).
1934. **MINETTI** (Silvio), libero docente alla R. Universita, Via Aventina, 26, à Rome (Italie).
1923. **MUSSEL**, général à l'Inspection générale de l'Artillerie, 1, place Saint-Thomas-d'Aquin, Paris (7e).
1932. **WORONETZ** (Constantin), docteur ès sciences, 7 *bis*, avenue de Montespan, à Paris (16e).

(1) Les adresses indiquées ici sont les dernières dont le Secrétariat ait eu connaissance. MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'envoyer les renseignements qu'ils posséderaient, concernant cette liste, à M. GIBRAT, 56, Faubourg Saint-Honoré, Paris (8e).

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BOBERIL (COMTE ROGER DE). — BORCHARDT. — BOURLET. — BOUTROUX. — BROCARD. — CANET. — CHASLES. — CLAUDE-LAFONTAINE. — FIELDS. — FOURET. — GAUTHIER-VILLARS. — GOURSAT. — HALPHEN. — HATON DE LA GOUPILLIÈRE. — HERMITE. — HIRST. — JORDAN. — KŒNIGS. — LAFON DE LADÉBAT. — LÉAUTÉ. — MANNHEIM. — MESNAGER. — PERRIN (R.). — POINCARÉ. — DE POLIGNAC. — RAFFY. — SÉLIVANOFF. — DE SPARRE. — SYLOW. — TANNERY (PAUL). — TCHEBICHEF. — VIELLARD.

LISTE
DES
PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
DEPUIS SA FONDATION.

	MM.		MM.
1873	CHASLES.	1905	BOREL.
1874	LAFON DE LADEBAT	1906	HADAMARD.
1875	BIENAYMÉ.	1907	BLUTEL.
1876	DE LA GOURNERIE.	1908	PERRIN (R.).
1877	MANNHEIM.	1909	BIOCHE.
1878	DARBOUX.	1910	BRICARD.
1879	O. BONNET	1911	LÉVY (L.).
1880	JORDAN.	1912	ANDOYER.
1881	LAGUERRE.	1913	COSSERAT (F.).
1882	HALPHEN.	1914	VESSIOT.
1883	ROUCHÉ.	1915	CARTAN.
1884	PICARD.	1916	FOUCHE.
1885	APPELL.	1917	GUICHARD.
1886	POINCARÉ.	1918	MAILLET.
1887	FOURET.	1919	LEBESGUE.
1888	LAISANT.	1920	DRACH.
1889	ANDRÉ (D.).	1921	BOULANGER.
1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.	1922	CAHEN (E.).
1891	COLLIGNON.	1923	APPELL.
1892	VICAIRE.	1924	LÉVY (P.).
1893	HUMBERT.	1925	MONTEL (P.).
1894	PICQUET.	1926	FATOU.
1895	GOURSAT.	1927	BERTRAND DE FONTVIOLANT.
1896	KŒNIGS.	1928	THYBAUT.
1897	PICARD.	1929	AURIC.
1898	LECORNU.	1930	JOUGUET.
1899	GUYOU.	1931	DENJOY.
1900	POINCARÉ.	1932	JULIA.
1901	D'OCAGNE.	1933	LIÉNARD.
1902	RAFFY.	1934	CHAZY.
1903	PAINLEVÉ.	1935	FRÉCHET.
1904	CARVALLO.	1936	GARNIER.
		1937	PÉRÈS.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam........	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam........	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Athènes..........	*Bulletin mathématique de l'Union interbalkanique.*	Grèce.
Bâle..............	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore (Maryland).	*American Journal of Mathematics.*	États-Unis.
Beograd..........	*Bulletin des Sciences mathématiques de l'Académie royale serbe.*	Yougoslavie.
Bologne...........	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bologne...........	*Bolletino della Unione matematica.*	Italie.
Bordeaux..........	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles..........	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles..........	*Mathesis.*	Belgique.
Bucarest..........	École Polytechnique.	Roumanie.
Bucarest..........	Société roumaine de Mathématiques.	Roumanie.
Calcutta...........	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge........	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania........	*Archiv. for Mathematik og Naturvidenskab.*	Norvège.
Cluj...............	*Matematica.*	Roumanie.
Coïmbre..........	*Annales scientificos da Academia Polytechnica do Porto.*	Portugal.
Copenhague.......	*Nyt Tidsskrift for Mathematik.*	Danemark.
Copenhague.......	*Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.*	Danemark.
Cracovie...........	Académie polonaise des Sciences et Lettres.	Pologne.
Cracovie...........	Société polonaise de Mathématiques.	Pologne.
Dellt..............	Académie technique.	Pays-Bas.
Dublin.............	Royal Irish Academy.	Irlande.
Durham (north carolina).	*Duke Mathematical Journal.*	U. S. A.
Édimbourg.........	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.........	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Göttingen.........	*Nachrichten.*	Allemagne.
Halifax............	Nova Scotian Institute of Science.	Nlle-Écosse (Canada).
Hambourg.........	Séminaire mathématique.	Allemagne.
Hambourg.........	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem............	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors........	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Istanbul..........	*Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul.*	Turquie.
Kazan.............	Société physico-mathématique de Kazan.	U. R. S. S

Kharkhow.........	Société mathématique de l'Université.	U. R. S. S.
Kieff..............	*Bulletin de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de l'Ukraine.*	U. R. S. S.
Lawrence (Kansas).	Université de Kansas.	États-Unis.
Léeds (Yorkshire).	Université Library.	Grande-Bretagne.
Léningrad.........	Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.	U. R. S. S.
Léningrad.........	Travaux de l'Institut mathématique de l'Académie des Sciences.	U. R. S. S.
Leopol............	Société mathématique.	Pologne.
Liége..............	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne..........	*Periodico di Matematica.*	Italie.
Londres...........	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres...........	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres...........	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Louvain...........	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Lund..............	Séminaire mathématique.	Suède.
Luxembourg......	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Lwow.............	*Studia mathematica.*	Pologne.
Marseille..........	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Mexico............	Sociedad cientifica *Antonio Alzate.*	Mexique.
Milan.............	Institut Royal lombard Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou...........	Société mathématique de Moscou.	U. R. S. S.
Moscou...........	Recueil mathématique (Bibliothèque scientifique du commissariat du Peuple de l'Industrie Lourde).	U. R. S. S.
Munich............	Académie des Sciences.	Allemagne.
Naples............	Académie Royale des Sciences physiques et mathémathiques de Naples.	Italie.
New-Haven........	Académie des Arts et Sciences du Connecticut.	États-Unis.
New-York.........	American mathematical Society.	États-Unis.
Palerme...........	*Circolo matematico di Palermo.*	Italie.
Paris..............	Académie des Sciences.	France.
Paris..............	Annales de l'Institut Henri-Poincaré.	France.
Paris..............	Association franç. pour l'avant des Sciences.	France.
Paris..............	Société philomathique de Paris.	France
Paris..............	*Bulletin des Sciences mathématiques.*	France.
Paris..............	*Journal de l'École Polytechnique.*	France.
Paris..............	Institut des Actuaires français.	France.
Paris..............	*Intermédiaire des Mathématiciens.*	France.
Pise..............	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise..............	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise..............	*Il Nuovo Cimento.*	Italie.
La Plata..........	Faculté des Sciences physico-mathématiques.	Rép. Argentine.
Prague............	Académie des Sciences de Bohême.	Tchécoslovaquie.
Prague............	*Jednota československých mathematicu a fysiku.*	Tchécoslovaquie.
Prague............	Société mathématique de Bohême.	Tchécoslovaquie
Princeton (New-Jersey).	*Annals of Mathematics.*	États-Unis.
Quito.............	*Polytechnica.*	Équateur.
Rennes...........	*Travaux de l'Université.*	France.

Riga	Acta Universitis Latvientis.	Lettonie.
Rome	R. Accademia Nazionale dei *Lincei*.	Italie.
Rome	Accademia Pontificia delle Scienze (*Nuovi Lincei*).	Italie.
Rome	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome	Società Italiana per il Progresso delle Scienze.	Italie.
Strasbourg	Travaux de l'Institut mathématique de l'Université de Strasbourg.	France.
Stockholm	*Acta mathematica.*	Suède.
Stockholm	*Arkiv for Matematik.*	Suède.
Stockholm	*Bibliotheca mathematica.*	Suède.
Tokyo	Mathematico-physical Society.	Japon.
Tomsk	Travaux de l'Intitut de mathématique et de mécanique de l'Université Kouybicheff.	U. R. S. S.
Tooku	*Bulletin de l'Institut mathématique de l'Université impériale.*	Japon.
Toulouse	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Turin	Académie Royale des Sciences de Turin.	Italie.
Turin	*Bulletin des conférences de Mathématiques et de Physique de l'Université Royale.*	Italie.
Upsal	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie	*Mathesis Polska.*	Pologne.
Varsovie	*Monografje Matematyczne.*	Pologne.
Varsovie	Prace Matematyczno Fizyczne.	Pologne.
Varsovie	Séminaire mathématique de l'Université.	Pologne.
Venise	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne	Académie des Sciences.	Autriche.
Vienne	*Monatshefte für Mathematik und Physik.*	Autriche.
Washington	National Academy of Sciences.	États-Unis
Zagreb (Agram)	Académie Yougoslave des Sciences et Beaux-Arts.	Yougoslavie.
Zurich	Commentarii Mathematici Helvetici.	Suisse.
Zurich	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

SÉANCE DU 26 JANVIER 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

Élection :

M. Lichnerowicz, agrégé de mathématiques, présenté par MM. Darmois et Valiron, est élu à l'unanimité.

M. Aronszajn fait une conférence sur un problème de représentation conforme.

SÉANCE DU 9 FÉVRIER 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

M. Biggeri fait une communication sur les singularités des fonctions analytiques.

SEANCE DU 23 FÉVRIER 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

Élections :

M. André Dargenton, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, présenté par MM. d'Ocagne et Bricard ; M. R. J. Marcou, présenté par MM. Valiron et Desforge, sont élus à l'unanimité.

M. Hibbert fait une communication sur la résolution par itération de l'équation $z^n = z - a$.

M. Paul Lévy fait une communication sur les courbes composées de parties qui sont semblables au tout.

M. Lichnerowicz fait une communication sur les espaces-temps extérieurs réguliers partout.

SÉANCE DU 9 MARS 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

Élection :

M. Loiseau, Conservateur des Arts et Métiers, présenté par MM. Bricard et Le Corbeiller, est élu à l'unanimité.

M. Biggeri fait une communication sur les points singuliers des fonctions analytiques.

SÉANCE DU 23 MARS 1938.

Élection :

M. Dvoretzky, de l'Université de Jérusalem, présenté par MM. Hadamard et Valiron, est élu à l'unanimité.

M. Valiron présente des observations au sujet d'une Note récente de M. Mandelbrojt.

M. Marcus présente des observations au sujet d'une propriété récemment démontrée par M. Lichnerowicz.

M. Gambier fait une communication sur les tétraèdres de Möbius.

Communication de M. Valiron : *Remarques sur un théorème de M. Mandelbrojt.*

Si la série entière $\Sigma a_n z^n$ admet pour rayon de convergence l'unité et si $f(z)$ est la fonction qu'elle définit, prolongée radialement, on sait, d'après M. Mandelbrojt (*C. R. Acad. Sc.*, t. **204**, 1937, p. 1456; *voir* aussi une démonstration simplifiée, *ibid.*, p. 1458) que l'argument φ du point singulier de $f(z)$ situé sur $|z|=1$ et le plus proche de $z=1$ est donné par

$$\cos\varphi = \lim_{t=0} \frac{D(t)-1}{t}, \qquad D(t) = \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}|f^{(n)}(t)|} \qquad (0<t<1).$$

D'après M. Biggeri (*C. R. Acad. Sc.*, t. **206**, 1938, p. 231), on peut remplacer dans $D(t)$, $\frac{f^{(n)}(t)}{n!}$ par le polynome

$$P_n(t) = a_n + C_{n+1}^1 a_{n+1} t + \ldots + C_{n+p}^p a_{n+p} t^p, \qquad p=[nd] \qquad (d>0).$$

Procédant comme M. Mandelbrojt (*C. R. Acad. Sc.*, t. **206**, 1938, p. 730), mais ce qui est plus simple, sur

$$\psi_n(u) = \sqrt[n]{P_n(u)} = \sqrt[n]{a_n}\left[1 + \frac{n+1}{n}\frac{a_{n+1}}{a_n}u + \ldots\right],$$

on voit que, s'il existe une suite de valeurs n_q de n telles que, pour ces n, $P_n(u)$ ne s'annule pas dans un cercle $|u|<r$, r fixe, et telles que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \qquad n = n_q,$$

on a

$$D(t) \geqq 1 + t\,\overline{\lim}\,\mathcal{R}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

donc

$$\cos\varphi \geqq \overline{\lim_{q=\infty}}\,\mathcal{R}\frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad n = n_q.$$

On peut de même, dans le cas traité explicitement par M. Mandelbrojt (*loc. cit.*, t. **206**), remplacer son polynome $d_n(t)$ par un autre ne contenant que les termes dont le rang est compris entre $\frac{n}{d}$ et $n+1$. Ceci facilite la formation des exemples; notamment, la conséquence relative aux séries lacunaires est immédiate. Mais cette conséquence est aussi indépendante de l'étude de $\psi_n(u)$, elle découle directement de la formule de M. Biggeri (formule non explicitée dans les *Comptes rendus*). On voit que

I. *Si la série donnée présente des lacunes telles que*

$$a_{n_q+1} = a_{n_q+2} = \ldots = a_{n'_q-1} = 0, \qquad n'_q \geqq d n_q, \qquad d>0, \qquad \lim n_q = \infty,$$

et si $\sqrt[n]{|a_n|}$ *tend vers* 1, *soit pour* $n = n_q$, *soit pour* $n = n'_q$ *lorsque* q *tend vers l'infini, tout arc de longueur* π *de* $|z| = 1$ *contient (au sens large) un point singulier au moins de* $f(z)$.

Remarques. — G. Bourion a montré (*Actualités scientifiques*, n° 472, p. 13) que les hypothèses faites dans I entraînent que $|z| = 1$ est coupure. Le théorème II de M. Biggeri (Note citée) fournit directement des théorèmes connus : si $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$ pour une suite $n = n_q$ et si $a_n > 0$ pour $4n_q < n < \mathrm{K}n_q$, $k < 1$, $\mathrm{K} > 1$; $z = 1$ est singulier; si $a_n = 0$ pour $kn_q < n < n_q$, $n_q < n < \mathrm{K}n_q$, $|z| = 1$ est coupure (cas particulier du théorème de Fabry).

SÉANCE DU 27 AVRIL 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

Élection :

M. André Häarbleicher, ingénieur général de la Marine, présenté par MM. d'Ocagne et Darmois, est élu à l'unanimité.

M. Hibbert fait une conférence sur la résolution par itération des équations algébriques $z^n = z - a$.

M. Dœblin fait une communication sur la théorie métrique des fonctions continues.

Communication de M. W. Dœblin : *Remarques sur la théorie métrique des fractions continues.*

L'étude des propriétés métriques des fractions continues peut être ramenée à celle d'une chaîne à liaisons complètes du type étudié dans un Mémoire récent [1]. Il découle comme conséquence immédiate des résultats y démontrés que la mesure relative de l'ensemble où $X_{n+m} < \lambda$ dans l'ensemble où $a_1, \ldots, a_m$ ont certaines valeurs données est égale à la valeur résultant de la formule de Gauss multipliée par un facteur de la forme $(1 + \theta k e^{-\sqrt{n}})$. En appliquant les méthodes de

---

[1] W. Dœblin et R. Fortet, *Bull. Soc. Math. Fr.* (*Sur des chaînes à liaisons complètes*, t. LXV, 1937, p. 132).

notre thèse on étend aux sommes $\sum_{1}^{n} f(a_i)$, $\sum_{1}^{n} f(X_i)$, etc., le théorème sur la loi de Gauss et celui du logarithme itéré (sous certaines hypothèses). On obtient alors comme corollaire un certain nombre d'énoncés tels que les suivants. Soit $z_n = \left| X - \frac{P_n}{Q_n} \right|$, la mesure des points de $(0, 1)$ pour lesquels on a

$$a\sigma\sqrt{n} < \frac{\pi^2}{6 \log 2} n + \log z_n < b\sigma\sqrt{n},$$

tend vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Pour presque tout point X on a, si $n > n(x, z)$ et $c > \frac{3}{2}$

$$\left| \frac{\pi^2}{6 \log 2} n + \log z_n \right| < \sqrt{2\sigma^2 n (\log_2 n + c \log_3 n)}$$

et pour presque tout X l'inégalité inverse est satisfaite pour une infinité de n, si $c < \frac{1}{2}$. On peut également étendre la loi de Poisson, et par des raisonnements absolument élémentaires, prouver que le zéro $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{\log 2}{n \log n} \right)$, où $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ est pour presque tout X absolument convergente.

SÉANCE DU 11 MAI 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

Élections :

M. Chi Tai Chuang, Fellow de la Fondation chinoise pour l'avancement des sciences, présenté par MM. Borel et Valiron,

M. Krasner, docteur ès sciences, présenté par MM. Hadamard et Fréchet,

sont élus à l'unanimité.

M. Marston Morse, professeur à l'Université de Princeton, fait une conférence sur : *Dynamique symbolique et transitivité* (Cf. p. 46).

SÉANCE DU 25 MAI 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

M. Hibbert fait une communication sur la configuration des points singuliers essentiels.

M. Gambier fait une communication sur les couples de tétraèdres de Möbius.

SÉANCE DU 8 JUIN 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

M. Krasner fait une communication sur l'existence des limites projectives.

SÉANCE DU 22 JUIN 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

M. Valiron signale une communication de M. Ch. Bioche sur le nombre e et les nombres qui s'écrivent avec des chiffres différents.

M. B. Gambier fait une conférence sur les couples de tétraèdres de Möbius.

Communication de M. Ch. Bioche : *Sur le nombre e, et les nombres qui s'écrivent avec des chiffres différents.*

Un entier écrit avec p chiffres, dans le système de base n, correspond à un arrangement de chiffres, ne commençant pas par zéro.

Le nombre des arrangements qui commencent par un même chiffre étant $\frac{1}{n} A_n^p$, le nombre N_p des entiers écrits avec p chiffres différents est

$$N_p = \frac{n-1}{n} A_n^p,$$

et comme $A_n^p = \frac{P_n}{P_{n-p}}$, on peut écrire

$$N_p = \frac{n-1}{n} \frac{P_n}{P_{n-p}} = \frac{(n-1)P_{n-1}}{P_{n-p}}.$$

Le nombre N de tous les entiers à chiffres différents est

$$N = \sum_{p=1}^{p=n} N_p = (n-1)P_{n-1}\left[\frac{1}{P_{n-1}} + \frac{1}{P_{n-2}} + \ldots + \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_0}\right].$$

Or la parenthèse est la somme des n premiers termes de la série e, de sorte qu'on obtient la formule

$$\text{(I)}\quad N = (n-1)P_{n-1}\left[e - \frac{\theta}{n-1}\,\frac{1}{(n-1)!}\right] = (n-1)P_{n-1}e - \theta,$$

où $0 < \theta < 1$. On en conclut que *le rapport du nombre* N *des entiers écrits avec p chiffres différents* ($1 \leq p \leq n$) *dans le système de base, au nombre de ceux de ces entiers qui ont n chiffres est donné par la formule*

$$\text{(II)}\qquad \frac{N}{(n-1)P_{n-1}} = e - \frac{\theta}{(n-1)P_{n-1}}.$$

La quasi-constance de ce rapport, et la valeur de celui-ci m'ont parues particulièrement curieuses ([1]).

SÉANCE DU 9 NOVEMBRE 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

M. Hibbert fait une communication sur la structure du point singulier essentiel le plus général.

([1]) J'ai déjà signalé la formule (I) dans la *Revue de Mathématiques spéciales* (38e année, p. 57), ainsi que quelques autres sur les nombres d'entiers où les chiffres sont rangés en ordre, croissant ou décroissant.

M. Paul Lévy fait une communication sur l'arithmétique des lois de probabilités enroulées.

M. Marcinkiewicz donne la solution d'un problème posé par M. Paul Lévy.

Communication de M. Paul Lévy : *Sur l'arithmétique des lois de probabilités enroulées.*

Dans un mémoire qui paraîtra dans le *Bulletin,* et dont un résumé a paru dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 22 août 1938, j'ai établi quelques théorèmes sur l'addition des variables aléatoires définies mod 1 ; une telle variable pouvant être considérée comme une abscisse curviligne sur une courbe fermée de longueur *un*, la loi dont elle dépend peut être appelée loi enroulée. J'ai montré en particulier que la théorie connue des lois indéfiniment divisibles s'applique sans modification essentielle aux lois enroulées; ces lois forment un groupe, dont les éléments constituants sont la loi de Laplace-Gauss enroulée, et la loi de Poisson enroulée, définies par

$$\Pr\{X = nu\} = e^{-\theta}\frac{\theta^n}{n!} \qquad (\theta \geqq 0;\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

du moins si u est irrationnel $\Big[$si $u = \frac{p}{q}$, les différents nombres $(n_0 + qh)\frac{p}{q}$, où h est un entier variable, sont égaux mod 1, et il faut ajouter les probabilités qui leur correspondent$\Big]$. Chaque loi indéfiniment divisible peut d'une manière et d'une seule être représentée par un produit formé avec les éléments indiqués, ou du moins par un produit généralisé (son logarithme étant une intégrale de Stieltjes). On peut se demander si ces lois peuvent admettre aussi des décompositions où figureraient des facteurs non indéfiniment divisibles, et notamment si les théorèmes que MM. Cramer et Raikow ont établis au sujet des lois de Laplace-Gauss et de Poisson non enroulées s'étendent aux lois enroulées.

Pour la loi de Laplace-Gauss, M. Marcinkiewicz vient de me dire à l'instant qu'il a pu montrer que la réponse est négative ; je ne connais pas encore sa démonstration ; j'espère qu'il voudra bien nous la communiquer tout à l'heure.

Pour la loi de Poisson, si u est irrationnel, la réponse est au contraire affirmative. En termes de lois déroulées, le théorème à démontrer est le suivant : *si une variable aléatoire Z peut être mise à la fois* *sous la forme* X, Y, X *et* Y *étant stochastiquement indépendants, et sous la forme* $Nu + N'$, *u étant une constante irrationnelle,* N *et* N' *étant des entiers aléatoires, et* N *dépendant de la loi de Poisson* (écrite pour $u = 1$), *alors* X *et* Y *sont respectivement des formes* $x + N_1 u + N'_1$ *et* $y + N_2 u + N'_2$, *x et y étant des constantes,* N_1, N'_1, N_2, N'_2 *étant des entiers aléatoires, et* N_1 *et* N_2 *dépendant de la loi de Poisson* (formée avec $u = 1$, et des paramètres θ_1 et θ_2 non négatifs et de somme θ).

La démonstration, obtenue indépendamment par M. W. Dœblin et moi [1], est très simple. Comme $\Pr\{Z = 0 \pmod 1\} = e^{-\theta} > 0$, il existe au moins une valeur x de X et une valeur y de Y, à probabilités positives, et telles que $x + y = 0 \pmod 1$; toutes les valeurs de X à probabilités positives sont alors de la forme $nu + n' - y$ (n et n' étant des valeurs possibles de N et N'); en d'autres termes X est de de la forme $x + N_1 u + N'_1$, N_1 et N'_1 étant des entiers aléatoires; Y est de même de la forme $y + N_2 u + N'_2$, et l'identification de $X + Y$ et de Z, compte tenu de ce que u est irrationnel, donne $N_1 + N_2 = N$. Comme N dépend de la loi de Poisson, que N_1 et N_2 sont indépendants, et que $\Pr\{N_1 = 0\}$ et $\Pr\{N_2 = 0\}$ sont positifs, il résulte du théorème de Raikow sur la loi de Poisson déroulée que N_1 et N_2 dépendent de la loi de Poisson. C. Q. F. D.

Pour u rationnel, je n'ai traité que le cas où $u = \frac{1}{2} \pmod 1$. Dans ce cas, pour la loi de Poisson enroulée, les valeurs possibles de Z sont zéro et $\frac{1}{2}$, et la probabilité de la seconde croît avec θ depuis zéro (pour $\theta = 0$) jusqu'à $\frac{1}{2}$, limite non atteinte. Le cas où les deux valeurs considérées sont également probables est donc le seul où une variable aléatoire définie mod 1 et n'ayant que zéro et $\frac{1}{2}$ comme valeurs possibles n'est ni de la forme $\frac{N}{2}$, ni de la forme $\frac{N+1}{2}$, N dépendant de la loi de Poisson. Or, si X et Y sont indépendants et n'ont que zéro et $\frac{1}{2}$ comme valeurs possibles, leur somme n'a que ces deux valeurs possibles, et, pour que ces deux valeurs soient également probables

[1] Nous nous la sommes communiquée réciproquement par des lettres du 23 septembre 1938 qui se sont croisées. Cette coïncidence s'explique par le fait que j'avais peu de jours avant signalé à M. Dœblin l'intérêt de ce problème.

pour Z, il faut et il suffit qu'elles le soient pour au moins un des termes X et Y. Si alors Z dépend de la loi de Poisson, c'est que la condition suffisante pour l'hypothèse inverse $\Pr\{Z=0\}=\frac{1}{2}$ n'est pas réalisée, c'est-à-dire que X et Y dépendent de la loi de Poisson. *Le théorème de M. Raikow s'applique donc, pour* $u=\frac{1}{2}$, *à la loi de Poisson enroulée.*

Il reste à traiter le cas où u est une fraction de la forme $\frac{p}{q}$ $(q>2)$.

M. Joseph Marcinkiewicz : *Sur les variables aléatoires enroulées.*

Des variables aléatoires dont les valeurs sont considérées mod 1 sont appelées les variables aléatoires *enroulées* (¹). Une variable aléatoire enroulée dont la fonction de densité de probabilité est

$$g(x)=\text{const.}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+n)^2}{2\sigma^2}}$$

est appelée gaussienne. M. P. Lévy m'a posé le problème suivant : les variables aléatoires enroulées X et Y étant indépendantes et leur somme étant gaussienne va-t-il en résulter que les termes X et Y eux-mêmes sont aussi gaussiens ? Il est presque évident que la réponse est *négative*. En effet, toute variable gaussienne peut être décomposée en somme de deux variables gaussiennes, soient g_1, g_2, g_3 les fonctions de densité de deux composants et de la somme. Posons

$$g_i(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu^{(i)} e^{2\pi i\nu x} \qquad (i=1,\,2,\,3).$$

On a $c_\nu^{(3)}=c_\nu^{(1)}c_\nu^{(2)}$. Les fonctions g_1 et g_2 étant positives, on peut trouver un nombre λ différent de l'unité de manière qu'en multipliant les termes $c_1^{(1)}e^{2\pi ix}$ et $c_{-1}^{(1)}e^{-2\pi ix}$ par λ et en divisant les termes correspondants de la fonction g_2 par le même facteur on trouve encore les fonctions de densité, $\overline{g}_1$ et $\overline{g}_2$.

On vérifie immédiatement que la somme de deux variables indé-

(¹) Pour la définition et propriétés, voir P. Lévy. *L'addition des variables aléatoires définies* mod 1 (*Comptes rendus*, 1938, p. 444-446).

pendantes dont les fonctions de densité sont $\bar{g}_1$ et $\bar{g}_2$ est gaussienne.

On peut retrouver le même résultat en remarquant que la fonction

$$g^* = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu r^{-\nu} e^{2\pi i\nu x} \qquad (\nu < 1)$$

est encore une fonction de densité dès que r est assez proche de l'unité, ce qui montre que *toute loi gaussienne admet comme facteur des lois de la forme* $\dfrac{(1-r)}{(1-2r\cos x + r^2)}$.

Le même est du reste vrai toujours si la fonction de densité

$$p(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{2\pi i x}$$

est positive, admettant les coefficients c_ν réels et vérifiant la condition $|c_\nu| \leqq r^\nu$ avec $r < 1$.

Remarquons enfin que *toute loi gaussienne admet aussi des facteurs indécomposables*. En effet, considérons la variable aléatoire enroulée Z admettant les valeurs ξ et $1 - \xi$ $\left(0 < \xi < \frac{1}{2}\right)$ avec la probabilité égale $\frac{1}{2}$. Une telle loi est indécomposable sauf le cas $\xi = \frac{1}{4}$. Si la fonction de densité d'une variable aléatoire enroulée X est

$$p(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu c^{2\pi i\nu x}$$

et Z est indépendant de X, alors la fonction de densité de la somme $X + Z$ est

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \cos 2\pi\nu\xi \, a_\nu e^{2\pi i\nu\xi}.$$

D'autre part il est facile de trouver ξ de manière que la fonction

$$\sum \frac{c_\nu}{\cos 2\pi\nu\xi} e^{2\pi i x}$$

soit encore une fonction de densité, ce qui prouve que Z est bien un diviseur de la loi de Gauss.

Il est évident que la même méthode permet de retrouver les facteurs indécomposables des lois d'une classe assez vaste.

Remarquons enfin la propriété suivante de lois de variables enroulées.

Soit $p(x)$ une fonction de densité positive et continue. La variable aléatoire correspondante peut être mise sous la forme de deux variables indépendantes.

En effet, soit $p(x) = \sum a_\nu e^{2\pi i \nu}$, d'après un théorème de M. P. Salem (¹), on peut trouver une suite $\omega(x)$ convexe et décroissante telle que

$$\sum \frac{a_\nu}{\omega(|\nu|)} e^{2\pi i \nu x}$$

soit encore une fonction de densité. D'autre part la fonction

$$\sum \omega(|\nu|) e^{2\pi i \nu x} \qquad [\omega(0) = \Delta]$$

est elle-même une fonction de densité, ce qui achève la démonstration.

M. Paul Lévy : *Observation sur la communication précédente* (commnniquée après la séance).

La démonstration très simple de M. Marcinkiewicz, qui repose essentiellement sur l'existence d'une borne inférieure positive pour la densité de probabibité, s'étend à l'arithmétique des lois de probabilités enroulées pour lesquelles toutes les valeurs possibles sont multiples de $\frac{1}{q}$. Chacune de ces lois est définie par une suite périodique de coefficients de Fourier, de sorte qu'il suffit de considérer les coefficients $a_0 = 1$, a_1, a_2, ..., a_{q-1}; d'ailleurs a_h et $a_{-h} = a_{q-h}$ sont imaginaires conjugués. La formule de composition de deux lois est toujours

$$A_n = a_n b_n.$$

Supposons alors que les A_n définissent une loi $\mathcal{L}$ pour laquelle les probabilités des q valeurs possibles soient toutes positives, et que les A_n définissent une loi $\mathcal{L}_1$ très voisine d'une loi unité (c'est-à-dire qu'une des valeurs, on peut supposer que ce soit zéro, ait une probabilité $1 - \varepsilon$ très voisine de l'unité); alors les a_n sont très peu différents de l'unité; donc les b_n sont très voisins des A_n, et par suite (si ε est assez petit) définissent une loi $\mathcal{L}_2$ pour laquelle toutes les probabilités

(¹) *Fund. Math.*, 1939 (sous presse).

sont positives; c'est bien une loi de probabilité, et $\mathcal{L}$ est divisible par $\mathcal{L}_1$.

Si $q = 2$, $\mathcal{L}_1$ est une loi de Poisson. Si au contraire $q > 2$, on peut, tout en conservant deux valeurs effectivement possibles, annuler la probabilité d'au moins une des q valeurs multiples de $\frac{1}{q}$; alors $\mathcal{L}_1$ n'est pas une loi indéfiniment divisible. Si même on ne conserve que deux valeurs possibles, zéro et une autre qui ne soit pas $\frac{1}{2}$, $\mathcal{L}$ est indécomposable. Donc, *si $q > 2$, $\mathcal{L}$ admet des diviseurs indécomposables dépendant d'au moins un paramètre* ε (et même, on le voit aisément, d'un nombre de paramètres qui croît indéfiniment avec q).

Ce résultat, si $q > 2$, s'applique non seulement aux lois de Poisson, mais à toutes les lois indéfiniment divisibles du groupe considéré, avec cette seule restriction qu'il faut exclure la loi de Poisson relative à $u = \frac{1}{2}$ (qui appartient à ce groupe si q est pair), et celles qui s'en déduisent par l'addition d'une constante, c'est-à-dire celles pour lesquelles il n'y a que deux valeurs possibles, correspondant à deux sommets opposés du polygone des q valeurs considérées, et inégalement probables.

Le problème posé à la fin de ma communication est donc complètement résolu.

SÉANCE DU 23 NOVEMBRE 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VERGNE.

M. Bioche fait une communication sur les multiples de 11 qui s'écrivent avec 10 chiffres différents.

M. Krasner fait une communication sur une généralisation de la théorie de Galois.

Communication de M. Ch. Bioche : *Sur les multiples de* 11 *qui s'écrivent avec* 10 *chiffres différents.*

La condition pour qu'un entier soit divisible par 11 est que la différence entre les sommes S et S′ des nombres représentés par les chiffres pris de deux en deux soit un multiple de 11. Si l'entier a 10 chiffres, ceux-ci étant différents, on a

$$S + S' = 45.$$

Donc les sommes S et S' sont de parités différentes, par suite leur différence est impaire.

D'autre part la plus petite valeur d'une de ces sommes étant

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$

la plus grande est 35. La différence ne peut alors dépasser 25, et comme elle doit être un multiple impair de 11 elle ne peut être que 11 et S et S' sont 17 et 28.

Il est facile de voir que la plus petite ne peut être donnée que par

$$\begin{array}{lll} 0+1+2+6+8, & 0+1+2+5+9, & 0+1+3+4+9, \\ 0+1+3+5+8, & 0+1+3+6+7, & 0+1+4+5+7, \\ 0+2+3+4+8, & 0+2+3+5+7, & 0+2+4+5+6. \\ 1+2+3+5+6, & 1+2+3+4+7, & \end{array}$$

On en déduit les décompositions correspondantes de la plus grande.

Les nombres entiers considérés auront pour chiffres de rangs ayant des parités différentes, les chiffres figurant dans l'une ou l'autre de deux sommes correspondantes.

Si l'on écrit un entier en répartissant dans les rangs pairs à partir des unités les chiffres figurant dans une somme dont tous les termes sont *significatifs*, chacune de ces répartitions correspond à une permutation de 5 éléments, et à cette permutation correspondent les permutations des autres chiffres. On a ainsi $(120)^2$ entiers déduits d'un couple de sommes.

Si l'on répartit dans les rangs pairs les chiffres d'une somme comprenant 0, on doit écarter les 24 permutations commençant par ce chiffre; et l'on n'a plus que 120×96 entiers.

Donc d'un couple de sommes correspondantes, on déduit

$$(120)^2 + 120 \times 96 = 25920$$

entiers multiples de 11 et écrits avec 10 chiffres différents. Comme il y a 11 couples de sommes, on obtient finalement

$$25920 \times 11 = 285120$$

entiers considérés.

SÉANCE DU 14 DÉCEMBRE 1938.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

M. Paul Lévy fait une communication sur les discontinuités de certains processus stochastiques.

Communication de M. Paul Lévy : *Sur les discontinuités de certains processus stochastiques.*

Désignons par $X(t)$ une fonction aléatoire du temps, définie par un *processus stochastique non héréditaire.* Nous entendons par là que :

1° La probabilité conditionnelle de $X(t) < y$, évaluée à l'instant $s < t$ (ou bien $s = \tau - 0$ et $t = \tau + 0$, ces deux valeurs étant dans tout ce qui suit considérées comme distinctes) en supposant $X(\sigma)$ connu pour tout $\sigma \leqq s$, ne dépend que de y, s, t, et de la valeur actuelle $X(s) = x$. Nous la désignerons par $F(x, y - 0, s, t)$. Elle doit vérifier l'équation connue de M. Kolmogoroff, et, considérée comme fonction de y, être une fonction de répartition.

2° $X(t - 0)$ et $X(t + 0)$, définis comme limites de $X(t - \varepsilon)$ et $X(t + \varepsilon)$ quand ε tend vers zéro, existent presque sûrement en tout point de l'intervalle où le processus est défini.

Il ne peut alors exister, du moins avec une probabilité positive, que des discontinuités de première espèce. Dans le cas, souvent étudié, où $X(t)$ est une fonction à accroissements aléatoires indépendants, c'est-à-dire que $F(x, x + u - 0, s, t)$ ne dépend pas de x, il y a lieu de distinguer les discontinuités fixes et les discontinuités mobiles. Dans le cas général, la distinction importante est différente : il faut distinguer les *discontinuités prévisibles* et les *discontinuités instantanées.*

Il y a *discontinuité instantanée* à un instant τ si la probabilité de cette discontinuité, évaluée à l'instant $\tau - 0$, est nulle. Cela n'empêche pas que ces discontinuités peuvent exister dans un intervalle fini avec une probabilité positive. Ainsi, considérons un événement E, sûrement réalisé une fois et une seule dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$, l'instant τ de sa réalisation étant choisi au hasard entre 0 et 1 suivant une loi continue, et prenons pour $X(t)$ le nombre de réalisations de E dans l'intervalle $(0, t)$. Si $\tau < 1$ (et ce cas est presque sûrement réalisé), même à l'instant $\tau - 0$ la probabilité de la réalisation de E à cet instant est nulle.

La loi de Poisson, dans le cas général comme dans celui où $X(t)$ est à accroissements aléatoires indépendants, joue un grand rôle dans l'étude des discontinuités instantanées. Nous reviendrons ailleurs sur cette question.

Les *discontinuités prévisibles* peuvent être *fixes* ou *mobiles*. Nous nous proposons de donner un exemple simple de cette dernière circonstance, qui ne peut pas se présenter si $X(t)$ est à accroissements aléatoires indépendants et semble n'avoir pas encore été signalée.

Soit $Y(t)$ la fonction aléatoire presque sûrement continue, à accroissements aléatoires indépendants, telle que $\mathfrak{M}\{Y(t)\} = 0$, $\mathfrak{M}\{Y^2(t)\} = t\ (t \geq 0$. Soit $N(t+0)$ la partie entière du maximum $M(t)$ de $-Y(s)$ pour $0 \leq s \leq t$. La fonction $X(t) = 1 + Y(t) + N(t)$ est alors toujours ≥ 0. Chaque fois qu'elle atteint la valeur zéro à un instant τ, c'est-à-dire chaque fois que $X(\tau - 0) = 0$, donc $N(\tau - 0) = -1 - Y(\tau)$, on a $N(\tau + 0) = -Y(\tau)$, et $X(t)$ passe brusquement de zéro à 1; $N(\tau)$ est le nombre des discontinuités qui existent ainsi dans l'intervalle $(0, 1)$.

La loi dont dépend $M(t)$ (donc N, à une erreur près < 1) est bien simple : c'est celle dont dépend $|Y(t)|$, c'est-à-dire que

$$(1) \qquad \Pr\left\{\frac{M(t)}{\sqrt{t}} < \xi\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad (\xi > 0).$$

La valeur probable et l'écart type de $M(t)$ sont respectivement $\sqrt{\frac{2t}{\pi}}$ et $\sqrt{\frac{\pi - 2}{\pi} t}$.

Examinons maintenant, à un instant s, et sachant que $X(s) = x > 0$, la loi dont dépend le temps $\sigma = \tau - s$ au bout duquel se produira la prochaine discontinuité. On a

$$(2) \qquad \Pr\left\{\frac{\sigma}{x^2} < \eta\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{\eta}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

de sorte que $\tau = s + \sigma$ dépend d'une loi continue. Mais, quand $X(s)$ tend vers 0, la probabilité qu'il y ait au moins une discontinuité entre les instants s et $s + \varepsilon$ tend vers l'unité quelque petit que soit ε. Bien qu[illegible]e une valeur précise de τ ait toujours une probabilit[illegible]sion est possible avec une précision croissante, et, à l'[illegible], la discontinuité est connue avec certitude.

Dans d'autres schémas, la probabilité d'une discontinuité à l'instant τ passera brusquement, quand s passe de $\tau - \varepsilon$ à $\tau - 0$, de α à β, avec $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1$, et $\beta > 0$ (autrement il ne s'agirait pas de discontinuités prévisibles). Nous indiquerons d'autres exemples dans un travail plus développé.

Dans le schéma précédent, la valeur τ_n de t à l'instant où se produit la $n^{\text{ième}}$ discontinuité est la somme de n variables aléatoires indépendantes, dépendant de la loi dont dépend τ_1, c'est-à-dire la loi (2), écrite pour $x = 1$.

Or, on remarque d'ailleurs que, d'après (1),

$$\Pr\left\{\frac{\tau_n}{n^2} < t\right\} = \Pr\{M(tn^2) > n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{1}{2u}}}{u\sqrt{u}}\, du.$$

Le fait que ce résultat soit indépendant de n entraîne une conséquence très curieuse : la loi dont dépend τ_1 est une loi stable d'exposant $\frac{1}{2}$ $\left(\text{c'est-à-dire que les deux variables aléatoires indépendantes } \tau_1\right.$ et $\tau = \tau_2 - \tau_1$, ainsi que $\frac{\tau + \tau_1}{4}$, dépendant de la même loi$\left.\right)$; le fait qu'il s'agisse d'une variable aléatoire τ essentiellement positive, et que

$$\Pr\{\tau > t\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \qquad (t \to \infty)$$

permet alors de l'identifier avec la loi stable pour laquelle $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $c_0 = 1$ (pour les notations, *cf.* P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, p. 198-201), c'est-à-dire avec la loi dont la fonction caractéristique est

$$\varphi(z) = e^{(-1+\varepsilon i)\sqrt{|z|}} \qquad \left(\varepsilon = \frac{z}{|z|}\right).$$

La densité de probabilité de cette loi a donc l'expression simple

$$\frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{x\sqrt{2\pi x}},$$

qui semble n'avoir pas encore été signalée. En termes d'analyse pure, le résultat obtenu s'exprime par la formule

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2x} + izx} \frac{dx}{x\sqrt{2\pi x}} = e^{(i-1)\sqrt{z}} \qquad (z > 0),$$

[comme $\varphi(-z) = \bar{\varphi}(z)$, il suffit d'écrire cette formule pour $z > 0$] (1).

SÉANCE DU 11 JANVIER 1939.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

PRÉSIDENCE DE M. VALIRON.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement du Comité : 123 votants.

Sont élus :

MM.	Desforge	122 voix
	Godeaux	121 »
	Gonseth	119 »
	Vergne	119 »
	Châtelet (Albert)	119 »
	Dedron	119 »
	Risser	115 »
Mme	Dubreil	111 »

Ont obtenu : MM. Fréchet, 4 voix; Dieudonné, Weil, Milloux, Leray, Delsarte, 3 voix; Potron, Brelot, Mandelbrojt, de Broglie, 2 voix; Vasilesco, Galbrun, Marty, Garnier, Vincensini, de Possel, Chevalley, Eyraud, Massel, 1 voix.

L'Assemblée donne décharge au Trésorier de sa gestion financière.

Élection :

M. Losada y Puga, professeur à l'Université de Lima (Pérou), présenté par MM. Pérès et G. Darmois, est élu à l'unanimité.

(1) Dans *Fourier integrals for practical applications*, par Campbell et Foster (*Bell Telephon System*, technical publications, 1931) figure un tableau qui contient plus de mille paires de fonctions qui sont les transformées de Fourier l'une de l'autre. Notre formule présentant quelque analogie avec les formules 653.4 et 801, ne nous semble pouvoir se déduire d'aucune des formules de ce tableau.

GROUPE RHODANIEN (1)

(UNIVERSITÉS DE LYON, GRENOBLE, GENÈVE ET LAUSANNE).

Séance du 8 mai 1928, de 10h à 12h, à l'Université de Genève, du Groupe Rhodanien de la Société Mathématique de France.

Présidence de M. Dulac, de l'Université de Lyon.

Trois communications ont été présentées :

I. M. Cotton : *Sur l'intersection de deux surfaces données par des trièdres mobiles.*

II. M. de Rham : *Sur les événements intégraux de l'espace hermitien.*

III. M. Malécot : *La biométrie et les lois de Mendel.*

Communication de M. E. Cotton : *Sur l'intersection de deux surfaces données par les trièdres mobiles.*

La donnée des « translations » et « rotations » d'un trièdre de Darboux $Mxyz$ définit une famille de surfaces S égales entre elles. Nous supposons ces dix fonctions des paramètres u, v holomorphes et vérifiant les conditions connues d'intégrabilité. A des fonctions analogues de paramètres $u^\star v^\star$ correspondent les mouvements d'un trièdre $M^\star x^\star y^\star z^\star$ et une seconde famille de surfaces égales $S^\star$.

Les courbes Γ intersection d'une surface S et d'une surface $S^\star$ se rangent aussi en ∞^6 familles en groupant les courbes égales entre elles. A une famille correspondent les expressions de u, v, $u^\star$, $v^\star$ en fonction de l'arc s de Γ; ces fonctions $u(s)$, $v(s)$, $u^\star(s)$ et $v^\star(s)$ satisfont à un système différentiel E_1 obtenu en écrivant que M et $M^\star$ se meuvent sur S et $S^\star$ avec des vitesses égales à l'unité, que leurs accélérations ont même mesure et que le produit mixte des trois vecteurs vitesse, accélération, accélération du second ordre est le même pour M et $M^\star$.

On peut substituer à E_1 un second système E_2, dont les équations se forment en utilisant la composition des rotations, et où figurent trois nouvelles fonctions inconnues ω, $\omega^\star$ α, telles que ω, α, $-\omega^\star$ sont les angles d'Euler caractérisant l'orientation de $Mx^\star y^\star z^\star$ par

(1) Ex-section du Sud-Est.

rapport à $Mxyz$. E_2 présente le double avantage de ne contenir que des théories du premier ordre et de les contenir linéairement.

A des données initiales u_0, v_0, $u_0^\star$, $v_0^\star$, ω_0, ω_{03}, α_0 correspond une solution holomorphe de E_2 si $\sin\alpha_0 \neq 0$. Mais quand $\sin\alpha_0 = 0$ (contact de S et $S^\star$) il n'existe pas de solution correspondant à ces données initiales, à moins qu'elles ne remplissent une condition complémentaire. La singularité est alors une de ces singularités exceptionnelles pour lesquelles les coefficients différentiels prennent la forme $\frac{0}{0}$. Mais d'autres théorèmes d'existence montrent que dans les cas les plus compliqués qui peuvent se présenter pour la nature du contact, u, v, $u^\star$, $v^\star$ ω, $\omega^\star$, α sont fonctions algébroïdes de s.

Ce cas où les surfaces S et $S^\star$ sont superposables donne un exemple simple de système différentiel (E_1) admettant des solutions indéterminées (*Bulletin des Sciences mathématiques,* 2e série, t. LXII).

Communication de M. G. de Rham : *Sur les invariants intégraux de l'espace hermitien.*

En utilisant la théorie due à M. E. Cartan, des invariants intégraux d'un espace homogène, ainsi que les propriétés topologiques de l'espace projectif complexe, on peut retrouver presque sans calcul des résultats obtenus récemment par M. W. Wirtinger, en particulier le suivant : *dans l'espace hermitien elliptique à n dimensions complexes, le volume d'une variété algébrique à ν dimensions complexes et de degré* N *est égal à* $\frac{N}{\nu\,!}\,a^{2\nu}$, *a étant une constante qui ne dépend que du choix de l'unité de longueur.*

Communication de M. G. Malécot : *Sur la biométrie et les lois de Mendel.*

Les coefficients de corrélation entre parents mesurés par l'école de Pearson peuvent s'expliquer, en admettant que les caractères considérés résultent de l'addition des effets d'un certain nombre de couples de gènes mendéliens [1]. Soit K l'effet d'un de ces couples, c'est une aléatoire du troisième ordre prenant les valeurs i, j, k, avec les fréquences P, 2Q, R (qui correspondent aux trois génotypes AA, A*a*, *aa*). On peut la considérer comme la somme de deux aléatoires du deuxième ordre H et H′ prenant chacune les valeurs s ou t, complétée par un résidu D qui traduit la *dominance*. L'intérêt de cette décomposition

---

[1] R. A. Fisher, *Transact. of the R. S. of Edinburgh*, t. 52, 1918, p. 399.

est que, si l'on choisit les valeurs s et t de façon à rendre minimum la valeur moyenne de D^2

$$[M(D^2) = P(i - 2s)^2 + 2R(j - s - t)^2 + R(k - 2t)^2],$$

la valeur moyenne de $D(H + H')$ est nulle, et le caractère considéré $x = \Sigma(H + H' + D)$ se décompose en deux aléatoires $z = \Sigma(H + H')$ et $d = \Sigma D$ dont la valeur moyenne du produit est nulle (en supposant les différents couples de gènes indépendants, et les aléatoires rapportées à leur moyenne); elles sont par suite indépendantes si leur corrélation est gaussienne (c'est-à-dire si de nombreux couples produisent sur le caractère considéré des effets du même ordre de grandeur). Alors la régression de z en x est caractérisée par le coefficient $c = \frac{\sigma_z^2}{\sigma_x^2}$ ou *taux de dominance*.

Connaissant la corrélation μ entre les caractères $x = z + d$ et $\bar{x} = \bar{z} + \bar{d}$ chez le père et chez la mère on en déduit les régressions de z et $\bar{z}$ quand x est fixé, soit $M(z) = cx$ et $M(\bar{z}) = c\mu x$ et par suite pour les enfants (d'après la loi de Mendel)

$$M(x_1) = M(z_1) = \frac{M(z) + M(\bar{z})}{2} = C\frac{1 + \mu}{2}x.$$

D'où la corrélation parentale $c + \mu$ et d'une façon générale la corrélation ancestrale $c\frac{1 + \mu}{2}\left(\frac{1 + c\mu}{2}\right)^n$.

Cela concorde parfaitement avec les chiffres de Pearson, en partant de $\mu = 0{,}28$ et $c = 0{,}8$, ce qui montre que la dominance joue un rôle très appréciable, L'influence des facteurs non héréditaires, qui ont le même effet que la dominance sur la corrélation ancestrale, mais s'en distinguent dans la corrélation entre frères, est au contraire faible.

CONFÉRENCE

FAITE AU COURS DE LA SÉANCE DU 11 MAI 1938.

LA DYNAMIQUE SYMBOLIQUE.

PAR MARSTON MORSE.

1. *Introduction.* — La dynamique moderne commence avec Poincaré, Birkhoff, Hadamard et leurs successeurs ont poursuivi avec succès son développement. Un des procédés techniques les plus importants dans ce domaine a été l'emploi de suites infinies (c) de symboles, de la forme

$$(1.1) \qquad \ldots, \quad c_{-1}, \quad c_0, \quad c_1, \quad \ldots.$$

Ces suites représentent des trajectoires et seront appelées des *trajectoires symboliques*. Les symboles c_i sont pris dans un ensemble fini de symboles $a_1, \ldots, a_r$, qu'on appelle les symboles *générateurs*. En général, ces symboles générateurs sont déterminés par la topologie de l'espace dans lequel se trouvent les trajectoires.

Nous allons examiner un exemple d'une portée générale. Considérons les géodésiques sur une surface S de courbure négative. Nous supposons que S est limitée par une frontière formée de $\nu + 1$ géodésiques fermées C_i, et que S est topologiquement équivalente à un domaine plan limité par $\nu + 1$ cercles. Soit $(b_1, \ldots, b_\nu)$ une suite de ν arcs de géodésiques, simples et distincts, l'arc b_i joignant C_i à C_{i+1} pour $i = 1, \ldots, \nu$. Des coupures suivant les arcs b_i rendraient S simplement connexe. Maintenant, nous ne nous occuperons que des géodésiques qui demeurent toujours dans S, qu'on les prolonge dans l'un ou dans l'autre sens. De telles géodésiques peuvent être caractérisées par la manière dont elles traversent les arcs b_i. Nous dénoterons la traversée de b_i dans un sens par b_i, dans l'autre sens par b_i^{-1}. La géodésique est alors représentée par une suite (c) de symboles de la forme (1.1), les symboles générateurs étant les éléments de l'ensemble

$$(1.2) \qquad b_1, \quad \ldots, \quad b_\nu, \quad b_1^{-1}, \quad \ldots, \quad b_\nu^{-1}.$$

Dans une suite (c), b_i n'est jamais suivi ni précédé par b_i^{-1}. En effet, dans le cas contraire, il y aurait deux points A et B sur b_i qui seraient joints par un arc h de géodésique distinct de l'arc AB sur b_i, et ces deux arcs de géodésique formeraient la frontière d'une région simplement connexe de S. C'est impossible sur une surface à courbure négative, comme il résulte de la formule Gauss-Bonnet.

Des suites (c) de la forme (1.1), engendrées par les symboles générateurs (1.2) et soumises à la condition que b_i n'est jamais suivi ou précédé par b_i^{-1}, seront appelées *suites permises*. Après Hadamard, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème (1.I). — *Sur la surface à courbure négative* S, *la correspondance entre géodésiques permises et trajectoires symboliques permises, qui fait correspondre à une géodésique g la trajectoire symbolique définie par les intersections de g avec les coupures qui rendent* S *simplement connexe, est biunivoque.*

En outre, non seulement g est représentée par sa trajectoire symbolique (c) dans le sens du théorème (1.I), mais les propriétés dynamiques essentielles de g peuvent aussi être caractérisées au moyen de (c). (En particulier, on peut caractériser la transitivité topologique au moyen de la transitivité symbolique, comme nous verrons plus loin.) On trouvera dans l'*American Journ. of Math.* (*Hall. Memorial number*, automne, 1938) un mémoire de A. Hedlund et Morse, qui développe ce point de vue. Ce mémoire éclaire la division de la dynamique en ses composantes symboliques et différentielles souvent confondues dans des travaux antérieurs, où une partie de la dynamique purement symbolique a été développée en termes de la théorie des équations différentielles.

On peut commencer par étudier les trajectoires symboliques (c) de la forme (1.1) et développer une théorie de la dynamique symbolique complètement indépendante de la théorie des équations différentielles. Par exemple, (c) sera dite transitive si chaque n-bloc permis formé avec les symboles générateurs (1.2) apparaît dans (c). (Un n-bloc est un bloc de n symboles). Cette théorie formelle est seulement une des deux parties qui composent la théorie générale.

1° *Existence de systèmes dynamiques admettant une représentation symholique.*

2° *Dynamique symbolique.*

Nous ne ferons ici que quelques remarques sur la partie 1. Les conditions suffisantes qu'on connaît pour le problème 1 se rapportent à des géodésiques sur des variétés. Par exemple, il est suffisant que la surface soit orientable, que son premier nombre de Betti soit au moins égal à 3 et que la condition d'instabilité uniforme soit satisfaite. Ces conditions peuvent être aussi étendues à des variétés de dimensions n. Les recherches dans cette direction sont récentes et encore incomplètes. Les conditions cherchées doivent être d'une nature telle que :

1° *Les trajectoires permises g aient une correspondance biunivoque avec leur représentation par des trajectoires symboliques* (c);

2° *Les propriétés dynamiques essentielles, comme la transitivité des trajectoires, puissent être caractérisées entièrement symboliquement.*

La condition 2° sera plus claire si nous définissons la transitivité ordinaire. Une trajectoire g sera appelée transitive relativement à un système de trajectoires H si la fermeture de g contient H. Quand nous nous occupons de géodésiques, la définition doit être interprétée comme suit :

Soit Z une surface, u, v des coordonnées locales sur Z. Soit $\left(\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right)$ une direction sur Z au point (u, v). L'élément $\left(u, v, \frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}\right)$ constitue un point de ce que nous appellerons l'*espace des phases* correspondant à Z. Les éléments de contact le long d'une géodésique g définissent une courbe g' de l'espace des phases; un ensemble H de géodésiques définit un ensemble H′ de courbes dans l'espace des phases. La géodésique g est dite *transitive* relativement à H si la courbe g' est transitive relativement à H′. Quand H est l'ensemble de toutes les géodésiques sur Z, ce type de transitivité est appelé *transitivité topologique* (notation T. T.), pour le distinguer de la *transitivité métrique* (notation T. M.). Nous ne définirons pas T. M. complètement. Nous nous contentons de dire que c'est une propriété statistique de toutes les géodésiques, ce qui la distingue de T. T., où une certaine géodésique joue un rôle à part. Naturellement l'étude de T. T. précède celle de T. M., car on peut montrer que T. M. entraîne toujours T. T. La réciproque est douteuse, même dans le cas analytique. Dans l'état actuel de la théorie, les cas connus de T. M. pour les géodésiques, sont relatifs uniquement à des surfaces de courbure négative constante, et de tels exemples ne nous éclairent pas sur la généralité de T. M. Au contraire, nous verrons que T. T. existe dans des cas très généraux. La question de l'existence de T. T. pour une géodésique donnée a un intérêt physique immédiat. Considérons par exemple le système des planètes et du Soleil regardés comme des masses ponctuelles soumises à la loi de Newton. Est-ce que l'orbite de la Terre est transitive par rapport à une certaine région de l'espace des phases ? On n'a encore aucune réponse à ce sujet.

2. *Instabilité uniforme.* — Les conditions (1) et (2) sont satisfaites par les géodésiques de surfaces compactes, de courbure négative, sans frontières, ou ayant pour frontières des géodésiques fermées, quand le premier nombre de Betti de ces surfaces est au moins égal à 3. A notre point de vue, l'importance de la condition que la courbure soit négative, réside en cette propriété : Si g est une géodésique orientée, et g' une autre géodésique quelconque, g' tend à s'éloigner de g pour au moins l'un des deux sens sur g. Mais cette propriété subsiste sous des conditions beaucoup moins restrictives que celle de la courbure négative. *L'instabilité uniforme* est une telle condition, elle est définie en se servant de la première variation des géodésiques, plutôt que des géodésiques elles-mêmes, et l'on peut ainsi plus facilement vérifier si elle est satisfaite.

Soient g une géodésique de la surface Z, s la longueur d'arc sur g, $K(s)$ la courbure de Gauss de Z au point S de g. L'équation

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + K(s) w = 0 \tag{2.1}$$

est complètement définie quand g est donnée. C'est l'équation différentielle de Jacobi de g. Soit $w(s)$ une solution de 2.1, non identiquement nulle, et k une constante arbitraire. La géodésique g sera dite *instable* si aucune des solutions $w(s)$ ne s'annule plus d'une fois et si pour toute solution $w(s)$ et pour tout point $s = a$ il existe une constante positive H ne dépendant que de k et de g, telle que

$$| w(a - x) + w(a + y) | > k\, w(a) \tag{2.2}$$

quand x et y sont supérieurs à H. Si H ne dépend que de k et non de g, nous dirons que la condition *d'instabilité uniforme* (I.U) est satisfaite.

Par exemple, on vérifie immédiatement que la condition I.U. est satisfaite pour $K(s) \equiv -1$. On peut, sans restriction de généralité, supposer $w(a) = 1$ dans (2.2). Plus généralement la condition I.U. est satisfaite $k(s) < 0$, mais elle l'est aussi dans des cas plus étendus, quand la courbure n'est positive que dans des régions qui n'ont pas une distribution trop dense sur la surface, ou qui n'ont pas des dia-

D'un autre côté nous trouverons pour chaque α donné ($|\alpha| \leqq 1$) toujours des fonctions univalentes dans le domaine $|\zeta| > \rho$ et possédant un développement

$$(7) \qquad z = \zeta + \frac{\alpha\rho^2}{\zeta} + \ldots .$$

Prenons par exemple la fonction

$$(7') \qquad z = q_\alpha(\zeta) = \rho\sqrt{\alpha}\, p\left(\frac{\zeta}{\rho\sqrt{\alpha}}\right) = \zeta + \frac{\alpha\rho^2}{\zeta}$$

qui est holomorphe et univalente pour $|\zeta| > \rho$ à cause de $|\alpha| \leqq 1$.

La fonction

$$(8) \qquad q_\alpha[\varphi(z)] = z + k\rho + \frac{(\alpha + \mathcal{B}_1)\rho^2}{z} + \ldots$$

est, pour tout $|\alpha| \leqq 1$, holomorphe et univalente dans l'extérieur de $\mathfrak{S}$ et représente donc tout le domaine D_n (de frontière C_n) sur un domaine D'_n (de frontière C'_n), qu'on obtient aussi de $|\zeta| > 1$ à l'aide d'une fonction (1). Le domaine D_n appartenait à une fonction extrémale; nous trouvons donc

$$(9) \qquad \mathfrak{T}_n(C'_n) \leqq \mathfrak{T}_n(C_n)$$

ou

$$(9') \qquad \mathfrak{T}_n(C'_n;\, a'_1, \ldots, a'_n) \leqq \mathfrak{T}_n(C_n;\, a_1, \ldots, a_n)$$

si C'_n, a'_i résulte de C_n, a_i par la représentation (8) et si les a_i étaient l'ensemble de points, qui donnait à $\mathfrak{T}_n(C_n;\, a_1, \ldots, a_n)$ son maximum sur C_n. Ainsi nous obtenons

$$(10) \qquad \prod_{\nu<\mu}\left| a_\nu - a_\mu + (\alpha + \mathcal{B}_1)\rho^2\left(\frac{1}{a_\nu} - \frac{1}{a_\mu}\right) + \rho^3(\ldots)\right| \leqq \prod_{\nu<\mu} |a_\nu - a_\mu|$$

ou

$$(10') \qquad \prod_{\nu<\mu}\left| 1 - (\alpha + \mathcal{B}_1)\rho^2\frac{1}{a_\nu a_\mu} + \rho^3(\ldots)\right| \leqq 1,$$

$$(10'') \qquad \left| 1 - (\alpha + \mathcal{B}_1)\rho^2\sum_{\nu<\mu}\frac{1}{a_\nu a_\mu} + \rho^3(\ldots)\right| \leqq 1.$$

L'inégalité (10″) est valable pour tout ρ. Faisons converger ρ vers zéro; selon (6), $\mathcal{B}_1(\rho)$ est borné et il existe donc au moins une valeur limite $\mathcal{B}_0$ des $\mathcal{B}_1(\rho)$, et pour elle nous tirons de (10″)

$$(11) \qquad \mathcal{R}\left\{(\alpha+\mathcal{B}_0)\sum_{\nu<\mu}\frac{1}{a_\nu a_\mu}\right\}\geqq 0.$$

$\mathcal{R}(x)$ désignant la composante réelle de x. Le coefficient α est encore quelconque soumis à la condition $|\alpha|\leqq 1$. Puisqu'on a aussi $|\mathcal{B}_0|\leqq 1$, (11) peut être satisfait seulement pour $|\mathcal{B}_0|=1$. Soit donc $\mathcal{B}_0=e^{i\theta}$. Un choix correspondant des α donne à la somme $\alpha+\mathcal{B}_0$ tous les arguments de l'intervalle ouvert

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\theta,\ \frac{\pi}{2}+\theta\right).$$

Grâce à (11) nous avons

$$(12) \qquad \arg\sum_{\nu<\mu}\frac{1}{a_\nu a_\mu}=-\theta$$

ou

$$(12') \qquad \mathcal{B}_0\sum_{\nu<\mu}\frac{1}{a_\nu a_\mu}\geqq 0.$$

Il suit de (12), que l'argument θ de la valeur limite $\mathcal{B}_0$ est déterminé sans ambiguïté $\left(\text{excepté le cas } \sum_{\nu<\mu}\frac{1}{a_\nu a_\mu}=0\right)$. Donc

$$\lim_{\rho\to 0}\mathcal{B}_1(\rho)=e^{i\theta}$$

existe.

4. De $\lim\mathcal{B}_1(\rho)=e^{i\theta}$ et (6) on tire

$$(13) \qquad \lim_{\rho\to 0}\{\psi_\rho^{-1}(\tau)+k(\rho)\}=\tau-\frac{e^{i\theta}}{\tau}=p_\theta(\tau).$$

Cette fonction limite représente $|\tau|>1$ sur l'extérieur d'un segment de droite, qui a la direction $\sigma=\pm e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}$. Pour tout ε et des ρ suffisamment petits les points de frontière du domaine, représenté à l'aide de $\psi_\rho^{-1}(\tau)$ de $|\tau|>1$, se trouvent donc tous à une distance moindre de ε d'une droite de direction σ, et puisque cette frontière contient toujours l'origine, ils se trouvent aussi à une distance moindre de 2ε de la droite d par l'origine avec la direction σ. Pour $\rho\to 0$ nous avons $\varepsilon(\rho)\to 0$. La fonction (5) représente

Rappelons qu'un sous-ensemble A de points d'un espace Ω est appelé un ensemble de *première catégorie* s'il est réunion dénombrable de sous-ensembles nulle part denses de Ω. Un ensemble de la forme $\Omega - A$ est dit *ensemble résiduel* ou de *deuxième catégorie*. Il est bien connu que tout ensemble résiduel est partout dense dans Ω et qu'il a la puissance du continu. Si un sous-ensemble B de Ω est résiduel, cela veut dire, dans un sens topologique, que B contient la plupart des points de Ω. Ceci fait comprendre l'intérêt du théorème suivant :

Théorème 4.II. — *Les rayons transitifs qui possèdent des fonctions ergodiques $\varphi(n)$ telles que*

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\varphi(n)}{\theta(n)} = 1 \tag{3.3}$$

forment un ensemble résiduel dans l'espace de Baire Ω.

Rappelons-nous que $\varphi(n) \geq \theta(n)$ pour tout n, puisque $\theta(n)$ est le minimum de $\varphi(n)$, pour n fixe et des rayons transitifs variables. Quand la condition (3.3) est satisfaite pour un rayon transitif, la fonction ergodique $\varphi(n)$ est équivalente à $\theta(n)$ sur au moins une suite infinie de valeurs entières de n. Les rayons transitifs pour lesquels la relation (3.3) est satisfaite comprennent « la plupart » des rayons dans un sens topologique. A l'opposé, on peut aussi montrer que l'ensemble des rayons non transitifs est partout dense dans Ω et qu'il a la puissance du continu.

Revenons à nos géodésiques. Soit O un point arbitraire sur une surface close de genre $p > 1$. Si la condition I. U. est satisfaite, la correspondance entre les géodésiques issues de O et leurs rayons symboliques représentatifs est biunivoque; les rayons symboliques transitifs correspondent à des géodésiques transitives et réciproquement. De plus, la fonction ergodique $\varphi(n)$, exprimant la rapidité de la transitivité symbolique, a une interprétation immédiate.

Les théorèmes et les remarques donnés ci-dessus sont typiques de la théorie, mais ne prétendent pas en donner une idée exhaustive. Pour un exposé plus complet, nous renvoyons à l'article sur la Dynamique symbolique, cité plus haut. On y trouvera les références aux travaux de Poincaré, Birkhoff, Hadamard, Hedlund, Morse, Martin, Artin, Hilbert et Koebe dont il a été question.

CONFÉRENCE

FAITE AU COURS DE LA SÉANCE DU 8 FÉVRIER 1939.

APPLICATIONS DE L'ELLIPSOÏDE D'INERTIE DE CULMANN;

PAR M. D. WOLKOWITSCH.

RAPPEL DE PROPRIÉTÉS ÉLEMENTAIRES.

1. L'équation de l'ellipsoïde de Poinsot est

$$E_P = \Sigma A x^2 - 1 = 0,$$

où $A = (b^2 + c^2)$ est le carré du rayon de giration relatif à l'axe Ox; un ellipsoïde quelconque ne peut pas être pris à priori pour un ellipsoïde E_P, c'est une propriété classique.

L'ellipsoïde d'inertie de Culmann a pour équation

$$E_c = \sum \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$$

et son ellipsoïde conjugué

$$\varepsilon_c = \sum \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0,$$

où a est le rayon de giration relatif au plan yOz, etc.

E_c est l'enveloppe des plans dont la distance au centre de gravité est égale au rayon de giration relatif au plan diamétral parallèle.

Un ellipsoïde quelconque peut être pris pour un ellipsoïde E_c.

En transformant la quadrique E_P par polaires réciproques, nous obtenons

$$\Sigma(b^2 + c^2)u^2 - s^2 = 0,$$

qui s'écrit

$$(a^2 + b^2 + c^2)(u^2 + v^2 + w^2) - [\Sigma a^2 u^2 + s^2] = 0.$$

C'est une homofocale de la quadrique ε_c.

Dans le plan, les deux ellipses e_P et e_c sont homothétiques, leurs équations sont

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 1 = 0, \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

L'ellipsoïde E_c dont il sera dorénavant seul question, tient ses propriétés d'une transformation dualistique linéaire réciproque.

2. Considérons, dans l'espace, un système de masses m_i appliquées à des points A_i, puis un plan fixe P.

Soient d_i la distance du point A_i au plan P, O le centre de gravité du système, h sa distance à P

$$\Sigma m_i d_i = h \Sigma m_i.$$

Les masses $m_i d_i$ appliquées en A_i admettent un centre de gravité ω dont la distance δ, à P, est donnée par

$$\Sigma m_i d_i^2 = \Sigma m_i d_i d_i = \delta \Sigma m_i d_i = \delta h \Sigma m_i,$$

ce qui montre que δ ne peut être nulle puisqu'un moment d'inertie ne peut être nul; le point ω ne peut donc être dans le plan P.

Soient P′ un deuxième plan, d'_i les distances des points A_i à ce plan et ω' les centres de gravité des $m_i d'_i$; δ' sa distance à P′, ρ' sa distance à P, h' la distance de O à P′ et ρ la distance de ω à P′; on a

$$\Sigma m_i d_i d'_i = h\rho' \Sigma m_i,$$
$$\Sigma m_i d'_i d_i = h'\rho \Sigma m_i,$$

le moment des $m_i d_i$ par rapport à P′ et le moment des $m_i d'_i$ par rapport à P sont nuls simultanément; c'est-à-dire si ω est sur P′, ω' sera sur P.

Nous avons donc une correspondance linéaire (point plan) dualistique et réciproque, il existe donc une quadrique par rapport à laquelle le point et le plan sont pôle et polaire.

Comme le pôle ne peut être contenu dans son plan homologue, cette quadrique ne peut être qu'un ellipsoïde imaginaire ε, la quadrique conjuguée E est telle que le point est antipôle du plan homologue.

Lorsque $\delta = 2h$, le plan est tangent à l'ellipsoïde E, et comme dans ce cas le rayon de giration relatif au plan est $h\sqrt{2}$ et celui du plan diamétral parallèle h, on voit que l'ellipsoïde E n'est autre que l'ellipsoïde E_c.

3. Rappelons enfin quelques propriétés rencontrées au cours des développements précédents : le moment d'inertie du système relatif à un plan est le même que celui de deux masses ponctuelles, égales chacune à $\frac{M}{2}$ et placées aux extrémités du diamètre conjugué; le moment centrifuge par rapport à deux plans P, P', est le même que celui de deux masses égales chacune à $\frac{M}{2}$, et placées aux extrémités du diamètre conjugué de l'un des deux plans.

Soient u_0, v_0, w_1, s_0 les coordonnées tangentielles d'un plan, et $\varepsilon(u, v, w, s) = 0$ l'équation tangentielle de l'ellipsoïde ε; l'expression $\frac{\varepsilon(u_0, v_0, w_0, s_0)}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}$ est le carré du rayon de giration relatif au plan considéré. Il en résulte que les enveloppes des plans de moment d'inertie constante sont des homofocales de la quadrique conjuguée de l'ellipsoïde E_c.

Soient S_1 et S_2 deux systèmes de masses M_1 et M_2, et un système S de masse $M = \mu_1 + \mu_2$. L'antipôle ω d'un plan P, par rapport à l'ellipsoïde E est le centre de gravité des masses $m_i d_i$ du système S; ω se trouve donc sur la droite $\omega_1 \omega_2$ des antipôles du plan par rapport aux ellipsoïdes des systèmes composants E_1 et E_2, on en déduit que les quadriques conjuguées ε, ε_1, ε_2 appartiennent à un même faisceau tangentiel linéaire.

CHAPITRE I.

APPLICATIONS DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE.

1. *Moment d'inertie oblique. Théorème fondamental.* — Soit un système de masses m_i, appliquées en des points P_i de l'espace; à distance finie, posons

$$\Sigma m_i = M,$$

E, l'ellipsoïde central d'inertie de centre O;
d_i, la distance du point P_i à un plan π donné;
h_i, la distance au même plan, comptée suivant une direction fixe Δ, qui fait un angle ω avec la normale au plan π; de sorte que l'on a

$$h_i \cos\omega = d_i.$$

Les masses $m_i h_i$ et $m_i d_i$ sont proportionnelles; elles admettent, par suite, le *même centre de gravité* : *l'antipôle du plan π par rapport à la quadrique* E.

Une autre conséquence est que l'expression

$$\Sigma m_i h_i^2 = \mathrm{M} h^2,$$

moment d'inertie oblique relatif au plan π, est la même que pour deux masses

$$m = \frac{\mathrm{M}}{2}$$

placées aux extrémités du diamètre conjugué du plan π; de sorte que si le plan π est diamétral, nous voyons que le *rayon de giration oblique est égal à la distance oblique du centre* O *au plan tangent parallèle à* π.

La direction fixe Δ étant donnée, si nous cherchons à déterminer le plan diamétral pour lequel le rayon de giration oblique du système est *minimum*, nous trouverons, à cause de la nature *convexe* de la surface E, *le plan conjugué de la direction* Δ.

La démonstration analytique offre l'avantage de s'étendre à un espace à n dimensions, nous la donnons ci-après, car nous aurons l'occasion de nous y reporter dans la suite.

Rapportons le système des masses m_i aux axes de son ellipsoïde central d'inertie E, et soient α, β, γ les cosinus directeurs de la direction fixe Δ.

Les équations du diamètre de direction Δ sont

$$(1) \qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \rho.$$

L'équation d'un plan tangent à l'ellipsoïde est

$$(\mathrm{P}) \qquad ux + vy + wz + s = 0,$$

avec la condition

$$(2) \qquad a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - s^2 = 0.$$

Nous voulons déterminer le plan (P) tel que la distance du centre à ce plan, comptée suivant la direction Δ, soit minima.

L'expression de cette distance s'obtient à l'aide des équations (1) et (P) qui donnent

$$(3) \qquad \rho(u\alpha + v\beta + w\gamma) + s = 0.$$

Le problème revient donc à trouver les valeurs de $\frac{u}{s}$, $\frac{v}{s}$, $\frac{w}{s}$ reliées par (2) qui rendent maxima l'expression $\frac{u\alpha + v\beta + w\gamma}{s}$.

La méthode classique conduit aux relations

$$\alpha + \lambda a^2 \frac{u}{s} = 0, \qquad \beta + \lambda b^2 \frac{v}{s} = 0, \qquad \gamma + \lambda c^2 \frac{w}{s} = 0,$$

que nous écrirons

$$\frac{\frac{\alpha}{a^2}}{\frac{u}{s}} = \frac{\frac{\beta}{b^2}}{\frac{v}{s}} = \frac{\frac{\gamma}{c^2}}{\frac{w}{s}},$$

et, sous cette forme, on voit que le plan de direction u, v, w est diamétral conjugué de la direction Δ dans la quadrique E, ce plan est parallèle aux plans tangents à la surface aux extrémités du diamètre Δ.

2. *Problème de l'ajustement des lois empiriques à des résultats d'expérience, par la méthode des moindres carrés dans le plan.* — Le problème de l'ajustement des lois empiriques se traite d'ordinaire par le calcul; les opérations sont souvent fort laborieuses, car on procède par tâtonnement.

La propriété de l'ellipsoïde d'inertie exposée au numéro précédent donne une solution simple, rapide et directe de ce problème qui, dans le plan, se présente de la manière suivante :

On a fait un certain nombre d'expériences, n, pour tâcher de déceler la loi suivant laquelle une grandeur y varie en fonction d'une autre x; des mesures ont été effectuées, et l'on constate la correspondance entre les valeurs $y_1 y_2 \ldots y_n$ et $x_1 x_2 \ldots x_n$; ce qui permet de construire un diagramme de points figuratifs P_i, de coordonnées x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ distribués sur une bande, assez étroite (sans quoi il n'y aurait pas de loi) qui contient dans ses limites la courbe cherchée C donnant y en fonction de x.

On veut essayer une relation $y = af(x) + b$, où a et b sont des coefficients à déterminer, et $f(x)$ une fonction connue, soit qu'elle se déduise des considérations théoriques, soit qu'on l'ait choisie, parce qu'étant donnée l'allure de la bande, on a des raisons de croire qu'elle conviendra tout particulièrement.

En somme, il s'agit de « faire passer » la courbe (C) par les n points $P_1, \ldots, P_n$, et comme cela ne sera pas possible, en général, nous chercherons à déterminer la courbe telle qu'en appelant h_i la distance du point P au point où la verticale coupe C, on ait

$$\Sigma m_i h_i^2 \quad \text{minimum}$$

ou

$$\Sigma m_i[af(x_i)+b-y_i]^2 \quad \text{minimum.}$$

Les grandeurs m_i sont les poids des diverses expériences, elles caractérisent la précision que leur attribue l'observateur, et les quantités entre crochets sont les *écarts*. Faisons le changement de variables

$$Y_i = y_i, \qquad X_i = f(x_i);$$

les points P_i deviennent des points Q_i de mêmes ordonnées; leurs abscisses sont les valeurs de $f(x)$ quand on y remplace x par les quantités x_i.

La courbe $y = af(x) + b$ devient la droite $Y = aX + b$ dans le plan des points Q_i.

Nous devons chercher la droite (D) qui rend minima l'expression

$$\Sigma m_i[a_i X_i + b - Y_i]^2;$$

nous savons que (D) *est le diamètre conjugué de la direction* Oy *dans l'ellipse centrale d'inertie du système des masses* m_i *appliquées aux points* Q_i.

Notons qu'il n'est pas besoin de connaître l'ellipse centrale d'inertie elle-même, pour déterminer le diamètre conjugué de la direction Oy, car ce diamètre passe tout d'abord par le centre de gravité, de coordonnées X_0, Y_0 et par l'antipôle de OY, point ω de coordonnées ξ, η, ce dernier étant le centre de gravité des masses $m_i X_i$ appliquées aux points Q_i.

Ainsi le diamètre se trouve complètement déterminé. On a

$$X_0 = \frac{\Sigma m_i X_i}{\Sigma m_i}, \qquad Y_0 = \frac{\Sigma m_i Y_i}{\Sigma m_i}$$

et

$$\xi = \frac{\Sigma m_i X_i^2}{\Sigma m_i X_i}, \qquad \eta = \frac{\Sigma m_i Y_i X_i}{\Sigma m_i X_i},$$

ce qui donne l'équation de la droite (D)

$$Y = \frac{Y_0 - \eta}{X_0 - \xi} X + \frac{\eta X_0 - \xi Y_0}{X_0 - \xi}$$

et celle de la courbe cherchée

$$y = \frac{Y_0 - \eta}{X_0 - \xi} f(x) + \frac{\eta X_0 - \xi Y_0}{X_0 - \xi}.$$

Si, au lieu d'être indépendants, comme nous l'avons implicitement supposé jusqu'ici, les paramètres a et b sont assujettis à une relation qui, pour prendre un cas très simple, signifiera que la courbe

$$y = af(x) + b$$

passe par un point $x_1 y_1$, ce qui donne

$$y_1 = af(x_1) + b$$

et, pour la droite (D),

$$Y_1 = aX_1 + b;$$

le problème qui se pose revient à chercher, dans le plan des Q_i, la droite passant par le point Q_1 de coordonnées $X_1 Y_1$ qui rende minima la somme

$$\Sigma m_i[aX_i + b - Y_i]^2.$$

Étant donnée la définition adoptée pour l'ellipsoïde (l'ellipse) d'inertie qui nous intéresse, et qui est la même pour un point quelconque que pour le centre de gravité, nous voyons que le rayon de giration normal, relatif à une droite qui passe par Q_1, est la distance de ce point Q_1 à la droite, tangente à l'ellipse E_1 et parallèle à cette même droite. Nous concluons immédiatement que *la droite* D *cherchée est, dans l'ellipse d'inertie relative au point* Q_1, *le diamètre conjugué de la direction* OY.

On peut se dispenser de construire l'ellipse E_1 si l'on se rappelle que deux diamètres *conjugués* dans l'ellipse E_1 sont deux droites *anticonjuguées* dans l'ellipse centrale d'inertie, c'est-à-dire que le diamètre conjugué de la verticale dans E_1 passe par l'antipôle S de cette verticale dans l'ellipse centrale.

A son tour, cet antipôle est le centre de gravité des masses

$$m_i(X_i - X_{Q_1});$$

ses coordonnées ont pour expression

$$X_S = \frac{\Sigma m_i(X_i - X_{Q_1})X_i}{\Sigma m_i(X_i - X_{Q_1})}, \qquad Y_S = \frac{\Sigma m_i(X_i - X_{Q_1})Y_i}{\Sigma m_i(X_i - X_{Q_1})},$$

de sorte que l'équation de la droite cherchée est

$$Y = X\frac{Y_S - Y_{Q_1}}{X_S - X_{Q_1}} + \frac{Y_{Q_1}X_S - X_{Q_1}Y_S}{X_S - X_{Q_1}},$$

et celle de la courbe cherchée s'en déduit en remplaçant Y par y et X par $f(x)$.

Remarquons que la transformation ponctuelle rencontrée renseigne sur la qualité d'adaptation de la fonction $f(x)$, en ce que, si elle est bien appropriée, les points Q_i seront distribués sur une bande étroite, d'allure rectiligne.

Corrélation. — Dans le cas où l'on cherche l'ajustement d'une loi linéaire

$$y = ax + b,$$

en opérant comme nous avons dit, on attribue arbitrairement à la direction Oy une propriété privilégiée : on peut opérer de même avec la direction Ox et définir un deuxième antipôle

$$\xi' = \frac{\Sigma m_i x_i y_i}{\Sigma m_i y_i}, \qquad \eta' = \frac{\Sigma m_i y_i^2}{\Sigma m_i y_i}.$$

Si la loi linéaire convient, les droites $O\omega$ et $O\omega'$ doivent faire un angle très petit; une mesure de cet angle est donnée par son sinus, égal, à un facteur constant près, au quotient

$$\frac{\text{aire } O\omega\omega'}{O\omega\ O\omega'} = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ \xi & \eta & 1 \\ \xi' & \eta' & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2}\sqrt{(x_0-\xi')^2+(y_0-\eta')^2}}.$$

3. ***Problème dans l'espace.*** — Il s'agit d'ajuster une fonction z de deux variables indépendantes x et y, dont la forme est

$$(1) \qquad z = af(x) + b\varphi(y) + c,$$

aux résultats d'une série de n expériences représentées par des points figuratifs P_i de coordonnées x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ rapportées à un trièdre trirectangle.

On convient de déterminer les trois coefficients a, b, c par la condition de rendre minima la somme

$$\Sigma[z_i - af(x_i) - b\varphi(y_i) - c]^2.$$

Le changement de variables

$$Z = z, \qquad X = f(x), \qquad Y = \varphi(y)$$

transforme la surface (1) en un plan

$$(2) \qquad Z = aX + bY + c,$$

et, dans l'espace des XYZ, nous devons chercher le plan qui rend minima l'expression

$$\Sigma(Z_i - aX_i - bY_i - c)^2.$$

La solution est immédiate : le plan cherché est dans l'ellipsoïde central d'inertie du système des points Q_i, de coordonnées X_i, Y_i, Z_i, et affectés, s'il y a lieu, de masses m_i, le plan diamétral conjugué de la direction OZ.

Ce plan passe tout d'abord par le centre d'inertie ω dont les coordonnées sont

$$X = \sum \frac{X_i}{n}, \qquad Y = \sum \frac{Y_i}{n}, \qquad Z = \sum \frac{Z_i}{n},$$

en supposant les m_i égales; il passe, en outre, par les antipôles des plans ZOX et ZOY dans l'ellipsoïde considéré.

Le premier antipôle, désigné par ω_x, a pour coordonnées

$$\xi_1 = \frac{\Sigma X_i Y_i}{\Sigma Y_i}, \qquad \eta_1 = \frac{\Sigma Y_i^2}{\Sigma Y_i}, \qquad \zeta_1 = \frac{\Sigma Z_i Y_i}{\Sigma Y_i}$$

et le deuxième antipôle ω_y

$$\xi_2 = \frac{\Sigma X_i^2}{\Sigma X_i}, \qquad \eta_2 = \frac{\Sigma X_i Y_i}{\Sigma X_i}, \qquad \zeta_2 = \frac{\Sigma Z_i X_i}{\Sigma X_i}.$$

Le plan cherché se trouve donc déterminé par les trois points ω, ω_x et ω_y, son équation s'écrira donc sans peine et nous conduira, dans l'espace xyz, à l'équation d'une surface sous forme du déterminant

$$0 = \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(y) & z & 1 \\ \Sigma f(x_i) & \Sigma\varphi(y_i) & \Sigma z_i & n \\ \Sigma f(x_i)\varphi(y_i) & \Sigma[\varphi(y_i)]^2 & \Sigma z_i\varphi(y_i) & \Sigma\varphi(y_i) \\ \Sigma[f(x_i)]^2 & \Sigma f(x_i)\varphi(y_i) & \Sigma z_i f(x_i) & \Sigma f(x_i) \end{vmatrix}.$$

Si les fonctions f et φ étaient des fonctions de deux variables, le changement de variables

$$z = Z, \qquad X = f(x, y), \qquad Y = \varphi(x, y)$$

conduirait à une solution semblable à celle que nous venons d'exposer.

4. *Cas du trinome en x.* — Si le second membre a la forme

$$z = ax^m + bx^p + c,$$

un $n_0 \equiv n_0(\varepsilon)$ tel que si l'on prend

$$\frac{n}{\sigma}(1-\omega) \leqq \lambda_m \leqq \frac{n}{\sigma}(1+\omega), \qquad \text{pour } n \geqq n_0,$$

on a

$$e^{-\varepsilon \lambda_\mu} < p_m < e^{\varepsilon \lambda_\mu}, \tag{21}$$

μ étant la valeur de m pour laquelle

$$\lambda_\mu \leqq \frac{n}{\sigma}(1+\omega) \qquad \text{et} \qquad \lambda_{\mu+1} > \frac{n}{\sigma}(1+\omega)$$

De (21) on tire

$$e^{-\varepsilon \lambda_\mu} Q_n < P_n < e^{\varepsilon \lambda_\mu} Q_n,$$

et de celle-ci

$$e^{-\frac{1+\omega}{\sigma}\varepsilon} \sqrt[n]{Q_n} < \sqrt[n]{P_n} < e^{\frac{1+\omega}{\sigma}\varepsilon} \sqrt[n]{Q_n}. \tag{22}$$

De (20'), (22) et de la première observation faite au critère de M. Ostrowski on déduit

$$e^{-\frac{1+\omega}{\sigma}\varepsilon} \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{P_n} \leqq 1. \tag{23}$$

$$e^{-\frac{1+\omega}{\sigma}\varepsilon} \leqq \underline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{P_n} \leqq 1. \tag{24}$$

En prenant des limites, pour $\varepsilon \to 0$, dans (23) et (24), et en rapprochant les égalités qui en résultent, on conclut l'existence de la *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{P_n}$.

Cette dernière remarque peut être utile dans les applications des théorèmes II et III.

Si la série (1) se réduit à une série potentielle, $\lambda_n \equiv n$, de l'existence de la *limite ordinaire* de $\sqrt[n]{p_n}$, on tire l'existence de la *limite ordinaire* pour $\sqrt[n]{R_n}$, R_n étant la fonction O_n appliquée à la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{-nz}.$$

Cette affirmation peut se démontrer directement, ou bien se déduire du corollaire que nous avons tiré du théorème de M. Valiron.

Introduisons les notations suivantes : $p \equiv p(n, \sigma, \omega)$ est le *plus petit* indice pour lequel λ_m reste *supérieur* (*au sens large*) à $\frac{n}{\sigma}(1-\omega)$; $q \equiv q(n, \sigma, \omega)$ est le *plus grand* indice pour lequel λ_m reste *inférieur* (*au sens large*) à $\frac{n}{\sigma}(1+\omega)$, σ et ω étant deux valeurs arbitraires *fixes*, telles que : $\sigma > C$, et $0 < \omega < 1$. Posons : $d_n \equiv d \equiv q - p > 0$. Appelons Φ_n la plus grande (au sens large) des valeurs de $|\varphi_m - \varphi_{m+1}|$, pour $p \leqq m \leqq q$.

THÉORÈME I. — *Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1° *les abscisses de convergence simple et absolue de* (1) *sont égales;*

2° *il existe un couple de valeurs σ et ω tel que la limite supérieure du produit $d_n \Phi_n$ est plus petite que $\frac{\sqrt{2}}{2}$;*

alors, le point réel de la droite de convergence de la série (1) *est singulier pour $f(z)$.*

Démonstration. — Sans restreindre la généralité on peut supposer $C = C' = 0$; il faut, alors, démontrer la singularité de l'origine pour $f(z)$. Avec les notations introduites, la fonction O_n s'écrit

$$O_n \equiv \left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \sum_{m=p}^{q} a_m \lambda_m^n e^{-\sigma \lambda_m}.$$

Appelons O'_n, O''_n et P_n les fonctions qu'on obtient en substituant dans cette dernière expression $\rho_m \cos\varphi_m$, $\rho_m \sin\varphi_m$ et ρ_m, respectivement, à la place de a_m. En outre, posons

$$S_n \equiv \left(\frac{n}{\sigma e}\right)^n P_n,$$

$$A_n \equiv \sum_{m=p}^{q-1} \left[(\cos\varphi_m - \cos\varphi_{m+1}) \sum_{j=p}^{m} \rho_j \lambda_j^n e^{-\sigma\lambda_j} \right],$$

$$B_n \equiv \sum_{m=p}^{q-1} \left[(\sin\varphi_m - \sin\varphi_{m+1}) \sum_{j=p}^{m} \rho_j \lambda_j^n e^{-\sigma\lambda_j} \right],$$

$$C_n^2 \equiv \left(\frac{A_n}{S_n} + \cos\varphi_q\right)^2 + \left(\frac{B_n}{S_n} + \sin\varphi_q\right)^2 \geqq 0.$$

En appliquant la transformation d'Abel aux expressions de O'_n

sont, par définition, les distances des points $P_1, \ldots, P_k$ au plan π.

Nous pouvons désormais appliquer le langage géométrique par analogie avec ce que nous savons de l'espace à trois dimensions.

En répétant le raisonnement développé dans le *Journal de l'École Polytechnique* (2e série, Cahier n° 82), on démontre aisément que la transformation est réciproque, et qu'en outre, un plan π ne peut contenir le point ω qui lui correspond.

Comme conséquence, le déterminant des coefficients de la transformation est symétrique; il existe donc une quadrique Q_n telle que le plan π et le point ω soient pôle et polaire. Cette quadrique, qui a un centre réel, à distance finie, homologue du plan de l'infini, est nécessairement imaginaire, sinon un plan tangent, en un point réel, contiendrait son homologue, le point de contact.

L'équation réduite de la quadrique est de la forme

$$\sum_1^n \frac{x_i^2}{a_i^2} + 1 = 0;$$

celle de la quadrique conjuguée Q_n sera

$$\sum_1^n \frac{x_i^2}{a_i^2} - 1 = 0.$$

Par rapport à cette dernière, le point ω, homologue du plan π, est le symétrique du pôle de ce plan.

La quadrique Q_n est la quadrique centrale d'inertie, enveloppe des plans menés parallèlement aux plans passant par le centre d'inertie du système S, à des distances égales aux rayons de giration correspondants.

La propriété démontrée au début, concernant le moment d'inertie oblique, s'étend immédiatement à un nombre quelconque de dimensions, et nous pouvons dire que le plan diamétral donnant le moment d'inertie oblique minimum, quand la distance d est comptée suivant une direction $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, est le plan conjugué de cette direction dans la quadrique. L'équation de ce plan est

$$\sum_1^n \frac{\alpha_i x_i}{a_i^2} = 0.$$

Cela résulte directement du début du présent paragraphe.

2. *Ajustement d'une formule à $n+1$ paramètres, aux résultats*

d'une série de k expériences ($k \geq n+1$) *au cours desquelles* $n+1$ *grandeurs* y, x_1, x_2, ..., x_n *ont été mesurées; y dépendant des n autres grandeurs.* — Il s'agit de déterminer les coefficients b d'une formule

$$y = b_1 f_1(x_1) + b_2 f_2(x_2) + \ldots + b_n f_n(x_n) + b_{n+1},$$

où les f_i représentent des fonctions, choisies d'avance, d'une seule variable $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Cette détermination des b doit se faire de telle sorte que la somme des carrés des écarts $\Sigma(Y_j - y_j)^2$ soit minimum ($j = 1, 2, \ldots, k$); Y_j représente la valeur observée de y dans l'expérience d'indice j; et y_j, la valeur de y calculée, d'après les valeurs x observées dans cette même expérience, suivant l'expression

$$y_j = \Sigma b_i f_i(x_i^j) + b_{n+1}.$$

Dans un espace à $n+1$ dimensions, rapporté à $n+1$ axes de coordonnées Y, X_1, ..., X_n, chacune des k expériences sera représentée par un point figuratif P_j dont les coordonnées seront

$$Y_j = y_j, \qquad X_1^j = f_1(x_1^j), \qquad X_2^j = f_2(x_2^j), \qquad \ldots, \qquad X_n = f_n(x_n^j).$$

Il s'agit de trouver le plan d'équation

$$Y = \Sigma b_i X_i + b_{n+1}$$

qui rende minimum l'expression

$$\Sigma(Y_j - \Sigma b_i^j X_i^j - b_{n+1})^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, k).$$

Nous savons que ce plan est, dans la quadrique centrale d'inertie du système des points $P_j (j = 1, \ldots, k)$, le plan diamétral conjugué de la direction OY.

Il est possible de déterminer ce plan sans connaître la quadrique centrale d'inertie du système des points P_j, parce qu'il passe par le centre d'inertie de ce système et, en outre, par les antipôles des plans représentés chacun par l'une des équations

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_n = 0$$

qui représentent les plans obtenus en associant l'axe OY, successivement avec $n-1$ des axes X. Nous obtenons ainsi $n+1$ points qui permettent bien de déterminer un plan dans l'espace à $n+1$ dimensions.

3. *Équation du plan.* — Les coordonnées du centre d'inertie sont :

$$Y = \frac{\Sigma y_j}{k}, \qquad X_1 = \frac{\Sigma X_1^j}{k}, \qquad \ldots, \qquad X_n = \frac{\Sigma X_n^j}{k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k);$$

les masses m_i sont supposées égales à 1.

L antipôle du plan $X_1 = 0$ est le centre de gravité des masses $1\,X_1^j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ appliquées aux points figuratifs P_j. Les coordonnées de cet antipôle sont

$$Y' = \frac{\Sigma y_j X_1^j}{\Sigma X_1^j}, \quad X'_1 = \frac{\Sigma (X_1^j)^2}{\Sigma X_1^j}, \quad X'_2 = \frac{\Sigma X_2^j X_1^j}{\Sigma X_1^j}, \quad \ldots, \quad X'_n = \frac{\Sigma X_n^j X_1^j}{\Sigma X_1^j};$$

les coordonnées de l'antipôle du plan $X_2 = 0$ sont

$$Y'' = \frac{\Sigma y_j X_2^j}{\Sigma X_2^j}, \quad X''_1 = \frac{\Sigma X_1^j X_2^j}{\Sigma X_2^j}, \quad X''_2 = \frac{\Sigma (X_2^j)^2}{\Sigma X_2^j}, \quad \ldots, \quad X''_n = \frac{\Sigma X_n^j X_2^j}{\Sigma X_2^j},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous pouvons désormais écrire l'équation du plan cherché, par analogie avec celle du plan qui, dans l'espace à trois dimensions, passe par trois points donnés, sous la forme d'un déterminant à $n + 2$ lignes et $n + 2$ colonnes.

Nous chassons le dénominateur commun aux $n + 1$ premiers termes de chaque ligne, en l'écrivant à la place de 1, à la dernière colonne; nous obtenons ainsi

$$0 = \begin{vmatrix} y & X_1 & X_2 & \ldots & X_n & 1 \\ \Sigma y_j & \Sigma X_1^j & \Sigma X_2^j & \ldots & \Sigma X_n^j & k \\ \Sigma y_j X_1^j & \Sigma (X_1^j)^2 & \Sigma X_2^j X_1^j & \ldots & \Sigma X_n^j X_1^j & \Sigma X_1^j \\ \Sigma y_j X_2^j & \Sigma X_1^j X_2^j & \Sigma (X_2^j)^2 & \ldots & \Sigma (X_n^j X_2^j) & \Sigma X_2^j \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \Sigma y_j X_n^j & \Sigma X_1^j X_n^j & \ldots\ldots & \ldots & \Sigma (X_n^j)^2 & \Sigma X_n^j \end{vmatrix}$$

Nous achèverons de résoudre le problème de l'ajustement en remplaçant les $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, à la première ligne; le développement du déterminant donne bien y en fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

4. *Cas particuliers : Formule d'interpolation de Lagrange.* — Rien ne s'oppose à ce que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ soient des fonctions d'une même variable x, et, en particulier, des puissances de cette variable.

Le cas où il s'agit des n premières puissances entières, nous conduit à une vérification intéressante, quand le nombre des expériences est $n+1$; en effet, le plan cherché est alors le plan déterminé par les $n+1$ points figuratifs.

D'autre part, si nous revenons dans le plan ordinaire, il s'agit de faire passer par $n+1$ points, la courbe

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1}$$

qui nous conduit à la formule d'interpolation de Lagrange ; cette formule est donc un cas particulier de l'équation du paragraphe précédent, et nous devons la retrouver en généralisant ce qui a été dit à la fin du paragraphe 4.

Les mineurs du développement par rapport aux y sont des déterminants de Van der Mond, et les valeurs des coefficients $a_1, \ldots, a_n$ sont données par les rapports

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta}.$$

Et si, dans ces quotients, on supprime les facteurs communs aux deux termes, qui sont les différences deux à deux des lettres communes aux deux déterminants, on obtient

$$\begin{aligned} y = {} & y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} \\ & + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)} + \ldots \\ & + y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})}, \end{aligned}$$

qui est la forme classique de la formule d'interpolation de Lagrange.

Série de Fourier. — Un autre cas particulier intéressant, et susceptible d'applications pratiques, est celui où les fonctions f_1, f_2, ..., f_n sont des fonctions circulaires ; par exemple, pour une fonction impaire,

$$y = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots,$$

le déterminant du paragraphe 2 du présent Chapitre devient

$$0 = \begin{vmatrix} y & \sin x & \sin 2x & \ldots & \sin nx & 1 \\ \Sigma y_j & \Sigma \sin x_j & \Sigma \sin 2x_j & \ldots & \Sigma \sin nx_j & k \\ \Sigma y_j \sin x_j & \Sigma \sin^2 x_j & \Sigma \sin x_j \sin 2x_j & \ldots & \Sigma \sin x_j \sin nx_j & \Sigma \sin x_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma y_j \sin nx_j & \Sigma(\sin x_j \sin nx_j) & \Sigma(\sin 2x_j \sin nx_j) & \ldots & \Sigma(\sin^2 nx_j) & \Sigma \sin nx_j \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant, on obtient y sous la forme d'une suite de termes qui devient, quand le nombre des expériences augmente indéfiniment, ainsi que le nombre n, une série de Fourier.

5. *Autre manière de poser le problème ; transformation par dualité.* — Très fréquemment, on a à résoudre par la méthode des moindres carrés le problème suivant : deux grandeurs inconnues x et y sont liées par une relation

$$D_i = u_i x + v_i y + w_i = 0,$$

où u_i, v_i, w_i sont des données expérimentales, obtenues par l'observation dans l'expérience d'indice i. On a effectué n expériences, il s'agit de déterminer x, y de telle sorte que la somme $\Sigma(u_i x + v_i y + w_i)^2$ soit minimum; en somme, nous cherchons le point commun aux n droites figuratives D_i qui seraient concourantes si les mesures des grandeurs u_i, v_i, w_i n'étaient pas entachées d'erreurs.

Au paragraphe 2, nous cherchions *à faire passer une droite par n points;* ici, *nous voulons placer un point sur n droites;* c'est bien une transformation dualistique du problème.

Traitons directement le problème dans l'espace en utilisant les *coordonnées parallèles.*

Par trois points A, B, C d'un plan P, que nous dirons horizontal, menons trois verticales sur lesquelles nous portons trois segments

$$x = AA_1, \qquad y = BB_1, \qquad z = CC_1.$$

Puis nous appliquons aux trois points A, B, C des masses proportionnelles à trois nombres u, v, w, qui définiront un point D, dans le plan horizontal, centre d'inertie de ces trois masses (qui peuvent être d'ailleurs positives ou négatives).

Supposons connues les valeurs de x, y, z, que nous cherchons; les points A_1, B_1, C_1, correspondant, sur les arêtes du prisme, déterminent un plan ; la verticale du point D du plan ABC, correspondant aux trois valeurs v_i, v_i, w_i, sera coupée par le plan $A_1B_1C_1$, en un point D_1 tel que

$$DD_1 = \frac{u_i x + v_i y + w_i z}{u_i + v_i + w_i},$$

portons sur cette verticale DD_1 une longueur

$$DD' = \frac{-s_i}{u_i + v_i + w_i},$$

on a

$$D_1 D' = \frac{u_i x + v_i y + w_i z + s_i}{u_i + v_i + w_i} = d_i;$$

la quantité à rendre minimum est

$$\sum \left[\frac{(u_i x + v_i y + w_i z + s_i)^2}{(u_i + v_i + w_i)^2} (u_i + v_i + w_i)^2 \right] = \Sigma [d_i^2 (u_i + v_i + w_i)^2].$$

Les points D′ sont donnés ; nous les affecterons de masses $(u_i + v_i + w_i)^2$ et, dans l'ellipsoïde d'inertie de leur système, nous chercherons le plan diamétral conjugué de la verticale. Ce plan coupe les arêtes du prisme aux points A_1, B_1, C_1 cherchés.

Dans le problème de la recherche du centre des moindres carrés, dont les coordonnées, à déterminer, seront désignées par x, y, z, on veut rendre minimum l'expression

$$\sum \left[\frac{(u_i x + v_i y + w_i z + s_i)^2}{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2} \right] = \sum \left[\frac{(u_i x + v_i y + w_i z + s_i)^2}{(u_i + v_i + w_i)^2} \; \frac{(u_i + v_i + w_i)^2}{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2} \right].$$

On sera ramené au problème précédent en affectant les points D′ des masses

$$\frac{(u_i + v_i + w_i)^2}{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}.$$

6. *Généralisation de la transformation dualistique.* — Au paragraphe précédent, nous avons déterminé l'enveloppe de première classe (le point) dont les plans tangents sont « aussi proches que possible » d'un système de n plans donnés ; nous nous proposons maintenant de déterminer une surface quelconque « tangente » à n plans donnés.

L'équation de cette surface peut être donnée sous la forme

$$\text{(I)} \qquad \frac{s}{w} = a f\left(\frac{u}{w}\right) + b\,\varphi\left(\frac{v}{w}\right) + c$$

ou sous la forme

$$\text{(II)} \qquad \frac{s}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = a f\left(\frac{u}{w}\right) + b\,\varphi\left(\frac{v}{w}\right) + c,$$

f et φ sont des fonctions choisies d'avance. La forme (I) est une relation entre la cote à l'origine, du plan tangent, et les directions de ses traces sur les plans de coordonnées zOx et zOy ; la forme (II), une relation entre la distance de l'origine au plan tangent et ces mêmes directions.

Prenons tout d'abord la forme (I); n plans sont donnés, dont les coordonnées tangentielles sont

$$u_i v_i w_i s_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

les cotes à l'origine sont $\frac{s_i}{w_i}$, et nous voulons déterminer a, b et c par la condition de rendre minimum l'expression

$$\sum \left[\frac{s_i}{w_i} - af\left(\frac{u_i}{w_i}\right) - b\,\varphi\left(\frac{v_i}{w_i}\right) - c \right]^2,$$

effectuons la transformation tangentielle

$$S = s, \qquad U = w f\left(\frac{u}{w}\right), \qquad V = w\,\varphi\left(\frac{v}{w}\right), \qquad W = w,$$

la somme à rendre minimum la forme

$$\sum \left[\frac{S_i - aU_i - bV_i - cW_i}{W_i} \right]^2.$$

La parenthèse est la différence entre

$$\frac{S_i}{W_i} = \frac{s_i}{w_i},$$

cote à l'origine du plan P'_i de coordonnées U_i, V_i, W_i, S_i transformé du plan P_i de coordonnées u_i, v_i, w_i, s_i, et la cote à l'origine du plan P''_i parallèle à P'_i mené par le point de l'espace abc.

Nous nous trouvons devant le problème du paragraphe 5, nous n'insistons donc pas.

La forme (II) est plus intéressante parce qu'elle donne un résultat *indépendant des axes cartésiens* auxquels sont rapportées les coordonnées tangentielles u, v, w, s; nous déterminons a, b et c par la condition de rendre minima la somme des carrés des distances des plans donnés, P_i aux plans P'_i parallèles, qui sont tangents à la surface. L'expression de cette distance est

$$\frac{s_i}{\sqrt{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}} - \left[af\left(\frac{u_i}{w_i}\right) + b\,\varphi\left(\frac{v_i}{w_i}\right) + c \right],$$

puisque si un plan, de direction u_i, v_i, w_i, est tangent à la surface (II), le s'_i correspondant est donné par cette équation (II) et $\dfrac{s_i - s'_i}{\sqrt{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}}$ est la différence des distances de l'origine aux plans P_i et P'_i.

Effectuons la transformation définie par les relations

$$U = f\left(\frac{u}{w}\right)\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \qquad V = \varphi\left(\frac{u}{w}\right)\sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$
$$W = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \qquad S = s,$$

qui donne

$$U^2 + V^2 + W^2 = (u^2 + v^2 + w^2)\left\{\left[f\left(\frac{u}{w}\right)\right]^2 + \left[\varphi\left(\frac{v}{w}\right)\right]^2 + 1\right\},$$

l'expression à rendre minimum devient

$$\sum \frac{[S_i - (aU_i + bV_i + cW_i)]^2}{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}$$
$$= \sum \frac{[S_i - (aU_i + bV_i + cW_i)]^2}{U_i^2 + V_i^2 + W_i^2}\left\{\left[f\left(\frac{u}{w}\right)\right]^2 + \left[\varphi\left(\frac{v}{w}\right)\right]^2 + 1\right\},$$

le facteur des accolades est le carré de la différence des distances de l'origine au plan $U_iV_iW_iS_i$ et au plan parallèle mené par le point abc; c'est le même problème que pour le centre des moindres carrés, les masses à appliquer aux points O'_i sont

$$\frac{(U_i + V_i + W_i)^2}{U_i^2 + V_i^2 + W_i^2)}\left\{\left[f\left(\frac{u_i}{w_i}\right)\right]^2 + \left[\varphi\left(\frac{v_i}{w_i}\right)\right]^2 + 1\right\}.$$

CHAPITRE III.

APPLICATIONS A L'ÉLASTICITÉ ET A LA GÉOMÉTRIE DES SURFACES.

I. Dans une conique à centre, une ellipse par exemple, d'axes $OA = a$, $OB = b$, prenons un diamètre OD qui fait un angle φ avec OA, son diamètre conjugué OD′ et le diamètre OC perpendiculaire à OD.

Soient h la distance du point D′ au diamètre OD, d la distance à OC et l la longueur OD′. Entre φ, h, d et l existent les relations connues

$$h^2 = a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi,$$
$$h\,d = (a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$h\,l = \sqrt{h^4 + h^2 d^2} = \sqrt{a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi}.$$

II. En un point O d'un corps élastique à deux dimensions, dans un état de contrainte donnée, considérons une conique dont les axes, coïncidant avec les directions principales, ont des longueurs égales aux racines carrées des efforts principaux

$$OB = \sqrt{\sigma_1}, \qquad OA = \sqrt{\sigma_2}.$$

Nous obtenons une indicatrice de Culmann des *efforts au point* O, enveloppe des droites menées à des distances égales aux racines des composantes normales, des efforts agissant sur les diamètres parallèles.

III. Dans le plan tangent en un point O d'une surface, considérons une conique dont les axes, coïncidant avec les directions principales, ont pour longueurs les racines carrées des courbures principales

$$OB = \sqrt{\frac{1}{R_1}}, \qquad OA = \sqrt{\frac{1}{R_2}};$$

on obtient une conique que nous appellerons *indicatrice de Culmann des courbures normales.*

Elle est homothétique de l'indicatrice de Dupin, c'est l'enveloppe des droites menées à des distances du point O égales aux racines carrées des courbures des sections normales de traces parallèles.

IV. Nous étendons la notion de moment d'inertie à des systèmes de points dont une des coordonnées peut être imaginaire, et nous pourrons dès lors rapprocher les formules (1), (2), (3) de formules classiques que l'on rencontre dans l'étude de la conique d'inertie de Culmann, de la conique des efforts dans l'élasticité à deux dimensions, enfin de l'indicatrice de Dupin, et nous serons en mesure d'établir le triple parallélisme suivant.

Ce parallèle fait ressortir des analogies pleines d'enseignement entre la Géométrie des masses (A), l'élasticité à deux dimensions (B) et la Géométrie des surfaces (C).

L'intérêt de ce parallèle réside surtout dans la transposition de la propriété additive du moment d'inertie et de la conique d'inertie, propriété rappelée au début de cette étude. Ajoutons que la conique pourrait être remplacée pour chacune des interprétations (A), (B), (C) par deux cercles réels de rayon b, dont les centres sont les foyers réels (dans l'hypothèse $b < a$) ou deux cercles imaginaires de rayon a, et dont les centres sont les foyers imaginaires aux distances focales $i\sqrt{(a^2 - b^2}$.

1. A. Moment d'inertie relatif au diamètre OD.

B. Composante normale de l'effort sur OD.

C. Courbure de la section normale de trace $OD = \frac{1}{R}$.

2. A. Moment centrifuge relatif à OD et à OC.

B. Composante tangentielle de l'effort sur OD; égalité des composantes tangentielles sur deux directions rectangulaires.

C. Torsion géodésique suivant la direction $OD = \frac{1}{T}$.

3. A. Moment centifuge relatif à OD et au diamètre normal à OD'.

B. Effort résultant sur OD.

C. Angle de deux normales infiniment voisines (Demartres, *Cours de Géométrie infinitésimale*); ou bien angle de rotation du plan rectifiant de la géodésique tangente à la direction OD. cette rotation s'effectuant autour de OD'. résultante des rotations $\frac{ds}{R}$ et $\frac{ds}{T}$.

4. A. Système réduit à deux masses ponctielles. le moment d'inertie est nul pour la droite qui joint les deux points.

B. Point singulier : la direction de la droite qui joint les deux points n'est soumise à aucun effort.

C. Point parabolique de la surface.

5. A. Un système S est la somme de deux autres S_1 et S_2 concentriques; les trois coniques d'inertie appartiennent à un même faisceau linéaire tangentiel.

B. Un état de contrainte dû à une force S résultante de deux composantes S_1, S_2 appliquées au même point, et pour lesquelles sont connues les deux indicatrices des efforts. Les trois indicatrices des efforts appartiennent à un même faisceau linéaire tangentiel. La construction de l'indicatrice résultante devient particulièrement simple. L'effort sur un diamètre quelconque OD est dirigé suivant le diamètre conjugué OD' dont la direction s'obtient en cherchant le point d'application, ω, de la masse résultante des masses m_1 et m_2 (proportionnelles aux forces S_1, S_2) appliquées aux antipôles ω_1 et ω_2 d'une parallèle à OD.

En faisant varier le rapport $S_1 : S_2$ on a le moyen de faire en sorte qu'un diamètre donné devienne direction principale.

C. On donne deux surfaces S_1 et S_2, tangentes au point O, on se propose d'étudier les surfaces $S = m_1 S_1 + m_2 S_2$ passant par l'intersection des deux surfaces S_1 et S_2.

Prenons les équations des surfaces données sous la forme

$$z - f_1(x, y) = 0, \qquad z - f_2(x, y) = 0;$$

celle de la surface S sera

$$z = \frac{m_1 f_1 + m_2 f_2}{m_1 + m_2},$$

m_1 et m_2 étant deux facteurs dont le rapport seul importe.

Les indicatrices des surfaces S appartiennent au faisceau linéaire tangentiel déterminé par les indicatrices de S_1 et S_2. Les tangentes communes donnent la direction des tangentes au point double O de la section par le plan tangent commun; les courbures des sections normales correspondantes sont en effet constantes.

En faisant varier le rapport $\frac{m_1}{m_2}$, on obtiendra les surfaces pour lesquelles le point O devient point parabolique (le problème n'est pas plus compliqué d'ailleurs avec l'indicatrice de Dupin), en outre on saura construire le diamètre conjugué $O\omega$ d'une direction OD, et l'on saura quelle valeur de $\frac{m_1}{m_2}$ fait une direction quelconque OD, une direction principale, il suffira que $O\omega$ soit normale à OD.

Enfin on pourra déterminer aisément la torsion géodésique et l'angle de deux normales voisines d'une surface quelconque S pour une direction OD donnée, car le moment d'inertie de S, ou le moment centrifuge, est égal à la somme des moments d'inertie ou centrifuges de S_1 et S_2.

CONFÉRENCE

FAITE AU COURS DE LA SÉANCE DU 24 FÉVRIER 1939.

SUR LA MORPHOLOGIE DES POLYTOPES CONVEXES;

PAR M. FRANÇOIS LA MENZA

(Buenos-Aires).

La morphologie des polyèdres, et en général celle des polytopes convexes, peut être étudiée commodément et avec une certaine facilité, non dépourvue d'élégance, moyennant les systèmes d'inéquations linéaires. Le but de cette Note est précisément de remarquer telle question, limité par brièveté au cas général, et à énoncer les résultats obtenus [1].

1. Tout système d'inéquations linéaires composé d'un nombre fini d'inéquations positives, (>0), et négatives, (<0), peut être réduit au type positif si l'on multiplie par l'unité négative les inéquations négatives en changeant en même temps le sens. Un tel système s'appellera *système normal*

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j + c_i > 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

On peut considérer aussi des systèmes *mixtes* composés d'inéquations et d'équations. Dans ce cas toutes les inéquations doivent être réduites au type positif.

(1) On trouvera une exposition détaillée et systématique de la question dans notre mémoire : *Los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones al estudio de los cuerpos convexos* (*Anales de la Sociedad Cientifica Argentina*, 1936, p. 37-38, Buenos-Aires). — *Voir* aussi Th. MOTZKIN, *Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen*, Jerusalen, 1936. Avec une bibliographie très complète ~~sur les~~ inéquations linéaires.

2. Si l'on désigne par X une variable non négative, tout système normal, mixte ou non, peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j + c_i = X_i \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

qui s'appellera système *adjoint du système donné.*

3. Il est évident que tout système compatible d'inéquations représente une *région polyédrique convexe* dans l'espace euclidien à n dimensions. Particulièrement lorsque telle région est bornée, on obtient un polyèdre *convexe* ou *polytope :* segment, lorsque $n = 1$; polygone convexe pour $n = 2$; polyèdre convexe, pour $n = 3$.

La considération de ces systèmes et leur signification géométrique conduit de façon presque naturelle à l'étude systématique de la *morphologie* des polytopes.

La première question qui se pose est celle de la *compatibilité.* La condition nécessaire et suffisante peut s'exprimer en forme très simple dans le cas le plus général, le seul à considérer dans cette Note, avec certaines relations de signe entre quelques déterminants de la matrice $\| a_{ij} \|$ des coefficients du système donné et ceux de sa matrice amplifiée $\| a_{ij}, c_i \|$.

Si nous appelons h la caractéristique de la matrice $\| a_{ij} \|$, un déterminant quelconque d'ordre h constitué par les h lignes de rang $i_1, i_2, \dots, i_h$, de cette matrice sera indiqué par la notation $(i_1, i_2, \dots, i_h)$. Les déterminants d'ordre $h + 1$ de la matrice amplifiée dont leurs h premières lignes sont les mêmes $i_1, i_2, \dots, i_h$ et dont la dernière colonne est constituée par les termes indépendants, $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_h}$, sont simplement des déterminants bordés avec les autres lignes de celui que l'on considère, s'ils existent; et il est évident que l'on pourra les désigner, sans équivoque, avec une notation analogue.

Dans les cas où la caractéristique h est plus petite que le nombre m d'inéquations du système par le symbole $S_h(m, n)$ [système noté], et quand on suppose le système *régulier*, c'est-à-dire sans bornés nuls, on arrive à la conclusion suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un $S_h(m, n)$ *régulier soit compatible est qu'il existe dans la matrice du système un déterminant* δ*, d'ordre h dont ses bordés aient le même signe que* δ.

Dans ce cas nous dirons que δ est un *déterminant principal* du $S_h(m, n)$. Si $h = m$, le système est toujours compatible, d'après 2. Les cas singuliers sont ceux pour lesquels, quelques ou tous les déterminants bordés d'un même δ, sont nuls. Les conditions de compatibilité pour ces cas sont aussi simples.

4. Si $S_h(m, n)$ est un système régulier compatible, avec $h < m$, et δ un déterminant principal, l'application du théorème de Rouché au système **2** donne une expression de la forme

$$\delta X_{h+r} + \alpha_{rh} X_h + \ldots + \alpha_{r1} X_1 = \Delta_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m-h),$$

dans laquelle $X_{h+r}, X_h, \ldots, X_1$ sont des indéterminées non négatives, et Δ_r est le bordé de δ avec la ligne de rang r et la colonne de termes indépendants c_i. Ce nouveau système, composé de $m - h$ équations, s'appelle le *résolvant principal* de $S_h(m, n)$.

Les résolvants d'un système ont la propriété d'être *invariants* dans toute substitution linéaire entière parmi les h variables principales de $S_h(m, n)$, et ne dépendent que de la sélection de ces h variables principales. Ils permettent d'étudier la *compatibilité, l'irréductibilité,* et les systèmes *subordonnés* compatibles d'un système donné, c'est-à-dire ceux ayant les X_i nulles, devenant alors des systèmes mixtes.

Au point de vue géométrique, un système compatible détermine une *région convexe*, et un autre système quelconque dont les inéquations diffèrent de celles du système considéré dans des facteurs positifs arbitraires, détermine la même région. Tous les systèmes compatibles ayant un même résolvant principal sont transformables entre eux par des substitutions linéaires entières. Nous dirons alors qu'ils déterminent tous la même *figure* convexe.

Il est possible d'aller plus loin encore dans l'investigation, et d'obtenir une autre invariante de type *combinatoire,* lequel nous permettra de définir la *forme* d'une figure polyédrique convexe. Nous croyons qu'il est inutile de tenter aucune classification en types, familles, etc. de ces nombreux et divers corps géométriques, sans préciser, avant, ce que l'on doit considérer comme *forme* d'un polytope convexe.

Pour cela il suffit de remarquer que si dans chaque résolvant on fait abstraction de la valeur numérique des coefficients, c'est-à-dire des déterminants du système, et que l'on considère seulement leurs signes, dans le cas *régulier* et dans le cas *singulier,* les signes et les zéros, on obtient le nouvel « invariant » ci-dessus mentionné moyennant lequel on peut définir la *forme* avec toute précision, et avec l'avantage de proportionner un instrument analytique très simple pour l'étudier.

Il s'agit, en définitive, d'établir la loi d'après laquelle peuvent être associés les hyperplans limitant les semi-espaces donnés par les inéquations d'un système afin qu'ils déterminent les *faces*, *sommets*, *arêtes*, etc. de la figure.

5. Pour cela, considérons les systèmes $S_h(m, n)$ dans lesquels on préfixe le nombre m d'inéquations et la caractéristique h, $(h < m)$, des matrices respectives. Pour simplifier prenons aussi $n = h$, n étant les nombres d'inconnues x_j. Les a_{ij} et les c_i restent variables.

On dit que h lignes $i_1, i_2, \dots, i_h$, de la matrice d'un $S_h(m, n)$ forment une *permanence régulière* d'ordre h, lorsque son déterminant $\delta = (i_1, i_1, \dots, i_h)$ et ses bordés ont le même signe. Nous l'indiquerons avec la notation $(i_1, i_2, \dots, i_h)$. Il est évident qu'une permanence ne dépend pas de l'ordre des lignes.

Deux permanences d'ordres $h > 1$ d'une même matrice s'appellent *conjuguées* lorsqu'elles ont $h - 1$ lignes communes.

Il est facile à voir qu'une permanence correspond à un *sommet*, et que deux permanences conjuguées ont une *arête commune* dans les correspondantes figures de chaque résolvant de $S_h(m, n)$.

Nous dirons qu'un ensemble de permanences d'une même matrice de $S_h(m, n)$, $h > 1$, est une *chaîne* lorsque

a. Avec chaque permanence figure, au moins, une conjuguée dans l'ensemble.

b. Cet ensemble ne peut pas être partagé en deux sous-ensembles sans qu'une permanence de l'un ait une conjuguée dans l'autre.

Le cas $h = 1$, est *trivial*.

Les nombres h et m sont respectivement l'*ordre* et la *classe* de la chaîne que l'on désigne par $C_h(m, n)$.

On déduit les propriétés suivantes :

1° L'ensemble de toutes les permanences de la matrice d'un système, $S_h(m, n)$, régulier, constitue une *chaîne*.

2° A toute chaîne d'ordre h et classe m, d'une même matrice, correspondent une infinité de systèmes $S_h(m, n)$ compatibles.

On sait que tous les déterminants d'une même matrice ne sont pas indépendants entre eux, mais quand même, la conclusion suivante subsiste :

3° Il y a des matrices des systèmes $S_h(m, n)$ compatibles avec une chaîne préfixée de permanences régulières d'ordre h et classe m.

4° Une chaîne d'ordre h et classe m ne peut avoir, au plus, h permanences conjuguées.

5° Une chaîne d'ordre $h > 1$ ne peut avoir plus de deux permanences avec $h - 1$ lignes égales.

Une chaîne, $C_h(m, n)$ dans laquelle chaque permanence figure avec ses h conjuguées s'appelle *fermée* et, dans le cas contraire, *ouverte*.

Une chaîne $C_h(m, n)$ fermée peut s'obtenir de la façon suivante :

On énumère arbitrairement les m lignes de la matrice des $S_h(m, n)$. *On forme avec ses lignes les* $\binom{m}{h}$ *déterminants d'ordre h. On fixe à volonté une permanence et chacune de ces h conjuguées. On répète cette opération en partant successivement de chacune des permanences obtenues tant qu'il est possible. L'ensemble ainsi formé est une chaîne. De cette façon on peut obtenir toutes les chaînes fermées d'ordre h et classe m.*

Exemple. — Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six lignes de la matrice d'un $S_3(6, 3)$. Les $\binom{6}{3} = 20$, déterminants de troisième ordre sont donnés par les groupes suivants : 123; 124; 125; 126; 134; 135; 136; 145; 146; 156; 234; 235; 236; 245; 246; 256; 345; 346; 356; 456. Prenons comme première permanence la $\{123\}$. C'est-à-dire que

$$\mathrm{Sg}(123) = \mathrm{Sg}(1234) = \mathrm{Sg}(1235) = \mathrm{Sg}(1236).$$

Si l'on choisit arbitrairement ces trois conjugués, soit $\{124\}$, $\{135\}$ et $\{236\}$, on aura

$$\mathrm{Sg}(124) = \mathrm{Sg}(1243) = \mathrm{Sg}(1245) = \mathrm{Sg}(1246);$$
$$\mathrm{Sg}(135) = \mathrm{Sg}(1352) = \mathrm{Sg}(1354) = \mathrm{Sg}(1356);$$
$$\mathrm{Sg}(231) = \mathrm{Sg}(2314) = \mathrm{Sg}(2315) = \mathrm{Sg}(2316).$$

Il est facile à voir avec cet exemple qu'aucun autre terme des lignes contenant les paires 12; 23; 31 ne peut donner une permanence. Si l'on part de la permanence 124; on peut choisir seulement deux conjuguées parce qu'il existe déjà, dans l'ensemble, une de ces conjuguées, la $\{123\}$. Soient les $\{245\}$; et $\{145\}$; on a aussi

$$\mathrm{Sg}(243) = \mathrm{Sg}(2451) = \mathrm{Sg}(2453) = \mathrm{Sg}(2456);$$
$$\mathrm{Sg}(143) = \mathrm{Sg}(1452) = \mathrm{Sg}(1453) = \mathrm{Sg}(1456).$$

Continuant comme cela, et tenant compte que le degré d'arbitraire de la sélection diminue au fur et à mesure que le nombre des permanences choisies augmente, et que cette espèce de *cycle ternaire* finit pour se fermer, on a obtenu la chaîne fermée dont les permanences sont les suivantes :

$$C_3(6,3) \equiv \{123\}\{124\}\{135\}\{145\}\{236\}\{245\}\{256\}\{356\}.$$

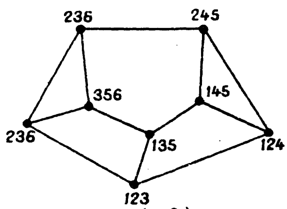
Avec le même procédé, on a obtenu la chaîne

$$C'_3(3,6) \equiv \{123\}\{125\}\{134\}\{145\}\{236\}\{256\}\{346\}\{456\}.$$

Ces deux chaînes sont fermées. La première correspond à un hexaèdre convexe constitué par deux faces triangulaires numérotées 4 et 6; deux faces quadrangulaires 1 et 3; et deux pentagonales 2 et 5.

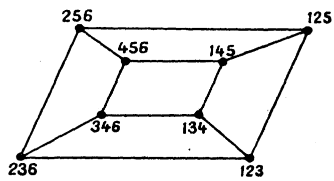
La deuxième correspond à un hexaèdre convexe avec faces quadrangulaires.

Fig. 1.



$\underline{C}_3\,(\sigma,\delta)$

Fig. 2.



$\underline{C}'_3\,(\sigma,\delta)$

Les chaînes ouvertes et celles qui correspondent à des systèmes singuliers peuvent s'obtenir en partant des chaînes fermées régulières.

6. La notion de chaîne permet de définir très clairement la forme d'une figure polyédrique convexe.

Nous dirons que toutes les figures polyédriques convexes déterminées par systèmes $S_h(m, n)$ appartenant à une même chaîne ont la même forme géométrique.

Ce concept abstrait de la forme coïncide avec la notion intuitive que nous avons sur elle, chose qui peut se prouver facilement considérant les systèmes subordonnés compatibles d'un même système et ses chaînes correspondantes.

La chaîne détermine aussi avec précision la forme des éléments limites des figures correspondantes, *faces* et *arêtes* des différents ordres. Pour cela, il suffit de considérer la *chaîne dérivée* d'une chaîne. Tel concept est la conséquence de la propriété suivante :

1° *Si dans une chaîne* $C_h(m, n)$, *d'ordre* $h > 1$, *on considère toutes les permanences contenant une même ligne i, on obtient une nouvelle chaîne d'ordre* $h - 1$, que l'on appelle *chaîne dérivée* de premier ordre de la chaîne donné par rapport à la ligne *i*. On peut considérer aussi des chaînes dérivées de deuxième, troisième, etc., ordre.

Les chaînes dérivées d'une autre ont une signification géométrique très simple; elles déterminent la *forme des faces* et des *arêtes* des différents ordres des figures correspondantes.

Par exemple, la dérivée du premier ordre par rapport à la ligne 1, de la chaîne $C_3(6,3)$ de l'exemple précédent, est une chaîne d'ordre 2

$$C'_2 \equiv \{23\}\{24\}\{35\}\{45\},$$

qui correspond à une face quadrangulaire dans toute figure ayant la forme définie par $C_3(6,3)$.

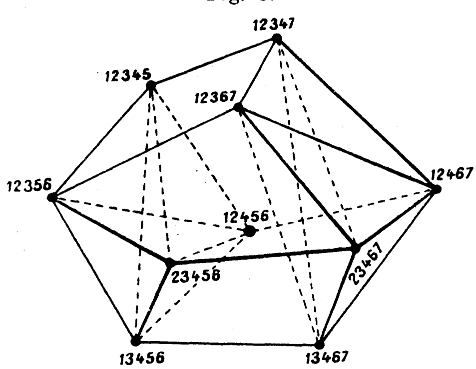
L'étude de la morphologie des figures polyédriques convexes se réduit pourtant à l'étude des chaînes des permanences.

Avec le même procédé a été obtenue la chaîne suivante d'ordre 5 et de classe 7

$$C(7,5) \equiv \{12345\}\{12347\}\{12367\}\{12356\}\{12456\}$$
$$\{12467\}\{13456\}\{13467\}\{23456\}\{23467\}.$$

Elle correspond à un polytope convexe dans l'espace de cinq dimensions

Fig. 3.



La dérivée de cette chaîne par rapport à la ligne 1 est la chaîne

$$C' \equiv \{2345\}\{2347\}\{2367\}\{2356\}\{2456\}\{2467\}\{3456\}\{3467\},$$

qui correspond à une face hexaédrique de quatre dimensions.

7. Touchant à l'irréductibilité d'un système régulier, c'est-à-dire au nombre d'inéquations strictement nécessaire pour le définir, est donné par la propriété suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une inéquation soit *excédente* dans un $S_h(m, n)$ est que sa ligne correspondante ne soit pas comprise dans aucune permanence de la chaîne à laquelle appartient le système.

Cette propriété trouve application dans la sommation des séries divergentes par la méthode de M. Borel, parce qu'elle donne un critérium analytique pour savoir quels sont effectivement les points singuliers qui déterminent le polygone de sommabilité.

8. Pour l'étude morphologique des polytopes convexes moyennant les chaînes, il faut établir des critériums de comparaison, puisque deux chaînes du même ordre et de la même classe peuvent définir des formes différentes.

Le critérium fondamental repose sur le fait qu'une chaîne de permanence $C_h(m, n)$ est *invariable* en toute substitution parmi les m lignes qu'elle comprend. Ainsi une chaîne de classe m admet m; expressions différentes entre elles.

Deux chaînes d'une même matrice des systèmes $S_h(m, n)$ réguliers, $C_h(m, n)$ et $C_{h'}(m, n')$, des mêmes classe et ordre, sont *égales*, c'est-à-dire qu'elles définissent la même forme, s'il existe une substitution σ, entre ses m lignes permettant la transformation de l'une en l'autre. Dans le cas contraire, on dira qu'elles sont différentes entre elles.

Ainsi les deux chaînes du n° 5 $C_3(6,3)$ et $C'_3(6,3)$ de la même matrice avec caractéristique $h = 3$ et lignes 1, 2, 3, 4, 5, 6, sont différentes entre elles parce qu'il n'existe aucune substitution σ entre les six lignes les transformant l'une en l'autre.

Il est clair qu'à des chaînes distinctes correspondent des formes distinctes, ce qui est conforme au point de vue intuitif.

En définitive, la forme d'un polytope convexe est donnée par une chaîne de permanences et par toutes les chaînes égales à elle.

Le problème fondamental de cette théorie, appelé problème de Steiner, traite précisément la détermination du nombre des polyèdres convexes avec m faces, différents entre eux.

La méthode exposée généralise le problème pour l'hyperespace et le résout d'une façon constructive. Il suffit, pour cela, de former toutes les chaînes d'un ordre et classe donnés et considérer seulement celles qui sont différentes entre elles.

On a ainsi des chaînes régulières qui correspondent à des figures définies par des systèmes eux-même réguliers. Mais il suffira d'obtenir seulement les réguliers parce que ceux des systèmes singuliers peuvent se déduire facilement d'elles.

Touchant à la résolution du problème dans le sens restreint, c'est-à-dire dans le sens de déterminer le nombre des polytopes sans les construire effectivement, c'est trivial lorsque $h = 1$ et $h = 2$. Pour $h > 2$ on n'a pas encore trouvé la résolution.

Mais pour $h = 3$, c'est-à-dire dans l'espace ordinaire, il présente moins de difficulté que dans l'hyperespace. (*Voyez* notre travail déjà cité à la page 1).

TABLE DES MATIÈRES

DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES.