

BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 1-79 (supplément spécial)

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__v1_0

© Bulletin de la S. M. F., 1914, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1914 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau.....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HADAMARD. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. LECORNU. MITTAG-LEFFLER. PAINLEVÉ. PICARD. VOLTERRA. ZEUTHEN.
Président.....	MM. VESSIOT.
Vice-Présidents.....	CARTAN. FONTENÉ. FOUCHÉ. MAILLET.
Secrétaires.....	P. LÉVY. MONTEL.
Vice-Secrétaires.....	FATOU. HALPHEN.
Archiviste.....	CAHEN.
Trésorier.....	SERVANT.
Membres du Conseil ⁽²⁾	ANDOYER, 1916. BIOCHE, 1917. BLUTEL, 1915. BOREL, 1917. BOULANGER, 1915. CARVALLO, 1916. COSSERAT (F.), 1917. DRACH, 1917. FOURET, 1915. GOURSAT, 1916. KOENIGS, 1915. LEBESGUE, 1915.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*,
rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris (17°).
1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig (Allemagne). S. P. (1).
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert d'), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de
Genevières, 14, à Lille (Nord).
1896. **ANDOVER**, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes,
rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5°).
1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Mouillière, 1, à Besançon.
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 bis, à Paris (6°).
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École
Centrale des Arts et Manufactures, rue du Bac, 32, à Paris (7°).
1910. **ARCHIBALD** (R.-C.), professeur à Brown-Université, Providence, Rhode Island (États-Unis).
1900. **AURIC**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Pierre-Corneille, 38, à Lyon.
1882. **AUTONNE**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur adjoint honoraire à la
Faculté des Sciences de Lyon, rue de l'Hospice, 69, à Châteauroux (Indre).
1900. **BAIRE**, professeur à la Faculté des Sciences, 24, rue Audra, à Dijon.
1896. **BAKER**, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
1905. **BARRÉ**, capitaine du génie, docteur ès sciences mathématiques, quai de la Répu-
blique, 8, à Verdun (Meuse).
1906. **BARTHELS**, docteur en philosophie, professeur honoraire de Mathématiques, à
Aschaffenburg (Bavière).
1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P.
1912. **BERGER** (T.), Storgatan 16, à Örebro (Suède).
1891. **BERTRAND DE FONTVIOLANT**, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures,
rue Brémontier, 16, à Paris (17°). S. P.
1910. **BERTRAND** (G.), rue de la Vieille-Église, 2, à Versailles.
1913. **BILIMOVITCH**, privat-dozent à l'Université de Kiew (Russie).
1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à
Paris (6°) S. P.
1900. **BLUMENTHAL** (Otto), professeur à la Technische Hochschule, Rütcherstrasse, 48, à
Aix-la-Chapelle (Allemagne).
1891. **BLUTEL**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110,
à Paris (14°).
1902. **BOBERIL** (vicomte Roger du), rue d'Antibes, 114, à Cannes (Alpes-Maritimes). S. P.
1907. **BOITEL DE DIENVAL**, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à
Cœuvres (Aisne). S. P.
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16°).
1895. **BOREL** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École
Normale, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°). S. P.
1913. **BORTOLOTTI** (E.), professeur à l'Université de Modène, via Maggiore, 23, à Bologne,
(Italie).
1909. **BOULAD** (F.), ingénieur au service des Ponts des Chemins de fer de l'État égyptien,
au Caire (Égypte).
1896. **BOULANGER**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur d'admission à l'École
Polytechnique, rue Gay-Lussac, 68, à Paris (5°).
1913. **BOULIGAND**, agrégé de mathématiques, rue de l'Estrapade, 3, à Paris (5°).

(1) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Date
de
l'admission.

1896. **BOURGET (H.)**, directeur de l'Observatoire, à Marseille.
1903. **BOUTIN**, rue Lavieuvville, 26, à Paris (18°).
1904. **BOUTROUX (P.)**, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. S. P.
1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (14°).
1911. **BRATU**, professeur, avenue Reille, 9, à Paris (14°).
1897. **BRICARD**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14°).
1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1912. **BROWNE**, Grange Mockler, à Carrick-on-Suir (comté de Tipperary, Irlande).
1901. **BUHL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1893. **BURKHARDT**, professeur à la Technische Hochschule, Martinstrasse, 3, à Munich (Bavière).
1894. **CAUEN**, chargé de cours à la Sorbonne, rue Cortambert, 46, à Paris (16°).
1893. **CALDARERA**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme (Italie).
1885. **CARON**, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, avenue Niel, 13, à Paris (17°).
1896. **CARTAN**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Vaugirard, 174, à Paris (15°).
1887. **CARVALLO**, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5°). S. P.
1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
1888. **CHAILAN (Édouard)**, professeur à l'Institut catholique, rue Denfert-Rochereau, 95, à Paris (14°).
1911. **CHALORY**, professeur au lycée Carnot, rue de Vaugirard, 38, à Paris (6°).
1896. **CHARVE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1911. **CHATELET**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Toulouse.
1907. **CHAZY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Lille.
1901. **CLAIRIN**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Giélée, 57 bis, à Lille.
1913. **COBLYN**, capitaine du génie, rue des Vignes, 34, à Paris (16°).
1896. **COSSERAT (E.)**, directeur de l'Observatoire, à Toulouse.
1896. **COSSERAT (F.)**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Rosa-Bonheur, 7, à Paris (15°).
1900. **COTTON (Émile)**, professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.
1904. **CURTISS**, professeur à l'Université Northwestern, Milburn Street, 720, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1872. **DARBOUX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Mazarine, 3, à Paris (6°).
1885. **DAUTHEVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.
1901. **DELIASSUS**, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.
1895. **DELAUNAY (N.)**, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1913. **DELVILLE (L.)**, ingénieur aux forges et aciéries de Huta-Bankowa, à Dombrowa (Pologne, Russie).
1885. **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. **DEMOULIN (Alph.)**, professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique)

Date
de
l'admission.

1905. **DENJOY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Duguesclin, 3, à Montpellier.
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17^e).
1900. **DICKSTEIN**, Marszatkowska, 117, à Varsovie.
1899. **DRACH**, chargé de cours à la Faculté des Sciences, square Lagarde, 3, à Paris (5^e).
1909. **DRURY**, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1907. **DULAC**, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1896. **DUMAS (G.)**, docteur de l'Université de Paris, professeur à l'Université, avenue du Léman, 41, à Lausanne (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Liberty Street, 55, New-York City.
1902. **EGOROFF (Dimitry)**, professeur à l'Université, Povarskaïa, Borissoglebsky per., n^o 8, à Moscou (Russie).
1912. **EISENHARDT (L.-P.)**, professeur à l'Université de Princeton, Alexander Street, 22, à Princeton (New-Jersey, États-Unis).
1903. **ESPANET**, ingénieur civil, Brazil Railway Company, rue Louis-le-Grand, 9, à Paris.
1900. **ESTANAVE**, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **ETZEL**, professeur de Mathématiques et d'Astronomie au Collège de Saint-Thomas, à Saint-Paul (Minnesota, États-Unis).
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7^e).
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Chaptal, 17, à Montpellier.
1906. **FARAGGI**, professeur, galerie Sarlande, 1, à Alger.
1904. **FATOU**, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Mont-Parnasse, 172, à Paris (14^e).
1891. **FAUQUEMBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.
1892. **FEHR (Henri)**, professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).
1885. **FIELDS (J.)**, professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1881. **FLOQUET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. **FONTENÉ**, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5^e).
1903. **FORD (WALTER B.)**, professeur de mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1889. **FOUCHÉ**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5^e).
1905. **FOUËT**, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6^e).
1872. **FOURET**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17^e). S. P.
1903. **FRAISSÉ**, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1911. **FRECHET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1903. **FUETER**, professeur à l'Université, Friedrichsplatz, 9^{III}, à Karlsruhe (Allemagne).
1911. **GALBRUN**, docteur ès sciences, avenue Émile-Deschanel, 14, à Paris (7^e).
1900. **GALDEANO (Z.-G. DE)**, correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1906. **GARGAM DE MONCETZ**, licencié ès sciences, square de Latour-Maubourg, 8, à Paris (7^e).
1872. **GARIEL**, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17^e).

Date
de
l'admission.

1908. **CARNIER**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1911. **CAU**, maître des conférences à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
1896. **CAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6°).
1890. **CEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1913. **GIRAUD**, agrégé de mathématiques, rue Le Verrier, 11, à Paris (6°).
1913. **GODEAUX**, rue Victor-Cousin, 6, à Paris.
1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16°).
1907. **GOT** (Th.), docteur ès sciences, villa Bianca, rue Fanelli, quartier Bompard, à Marseille.
1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 39, à Paris (5°). S. P.
1912. **GRAMONT** (A. DE), licencié ès sciences, rue de Ponthieu, 62, à Paris, (8°).
1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7°).
1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).
1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6°). S. P.
1900. **GUICHARD** (C.), professeur à la Faculté des Sciences, rue Boulainvilliers, 14, à Paris (16°).
1907. **GUICHARD** (L.), professeur de mathématiques au collège de Barbezieux (Charente).
1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, membre de l'Institut, boulevard Raspail, 284, à Paris (14°).
1896. **HADAMARD**, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14°). S. P.
1910. **HALPHEN** (Ch.), professeur de Géométrie descriptive au Collège Chaptal, Chaussée de la Muette, 8 bis, à Paris (16°).
1894. **HALSTED** (G.-B.), Colorado State Teachers College, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.
1901. **HANCOCK**, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1909. **HANSEN**, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6°). S. P.
1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1911. **HIERHOLTZ**, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).
1911. **HOLMGREN**, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, Upsal (Suède).
1913. **HOORN** (DE), rue de l'Odéon, 3, à Paris (6°).
1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École St-Croix de Neuilly, boulevard Pereire, 218 bis, à Paris (17°). S. P.
1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17°).

Date
de
l'admission.

1907. **HUSSON**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Tiercelins, 60, à Nancy.
1881. **IMBER**, ancien directeur des études à l'École Centrale, ancien membre du Conseil de l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11°).
1896. **JACQUET** (E.), professeur, rue Lagarde, 3, à Paris (5°).
1914. **JAGER** (F.), licencié ès sciences, avenue de la Grande-Armée, 69, à Paris (16°).
1898. **JAHNKE** (E.), professeur à l'Académie des Mines, Darmstädter strasse, 11, à Berlin, W.15 (Allemagne).
1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Frederiksberg allée, 68, à Copenhague (Danemark).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7°). S. P.
1914. **JORDAN** (Cu.), docteur ès sciences, Liszngai utca 15, à Budapest (Autriche-Hongrie).
1913. **KASNER** (E.), professeur à l'Université Columbia, à New-York (États-Unis).
1910. **KÉRAVAL**, professeur au lycée Louis-le-Grand, avenue du Maine, 46, à Paris (14°).
1913. **KIVELIOVITCH**, licencié ès sciences, rue Laromiguière, 6, à Paris (5°).
1892. **KOCH** (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. **KØNIGS**, professeur à la Faculté des Sciences, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14°).
1913. **KORN** (A.), ancien professeur de l'Université de Munich, Schlüterstrasse, 25, à Charlottenburg (Allemagne).
1913. **KOSTITZIN** (V.), avenue Villemin, 32, à Paris.
1912. **KOWALEWSKI** (G.), professeur à la Technische Hochschule, Huscgasse, 5, à Prague (Bohème).
1907. **KRYLOFF**, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines, à Saint-Petersbourg (Russie).
1897. **LACAUCHIE**, ingénieur civil, rue Brochant, 18, à Paris (17°).
1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, rue du Conseil, 5, à Asnières (Seine).
1906. **LALESCO**, maître de conférences à l'Université, str. Luterană, 31, à Bucarest.
1893. **LANCELIN**, astronome-adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14°).
1899. **LANDAU**, professeur à l'Université, Herzbergerchausee, 48, à Göttingen (Allemagne).
1896. **LAROZE**, ingénieur des télégraphes, rue Froidevaux, 8, à Paris (14°).
1908. **LATTÈS**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 24, à Toulouse.
1896. **LEAU**, professeur au lycée Michelet, rue Denfert-Rochereau, 83, à Paris (14°).
1880. **LÉAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17°). S. P.
1896. **LEBEL**, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.
1902. **LEBESGUE**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, avenue de la Tourelle, 7, à Saint-Mandé.
1903. **LEBEUF**, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.
1893. **LECORNU**, membre de l'Institut, Inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5°).
1895. **LÉMERAY**, licencié ès sciences mathématiques et physiques, ingénieur civil du génie maritime, villa Vêga, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1904. **LEMOYNE** (T.), rue Claude-Bernard, 41, à Paris (5°).
1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.
1898. **LE ROY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Cassette, 27, à Paris (6°).

Date
de
l'admission.

1891. LERY, agent-voyer en chef de Seine-et-Oise, rue Magenta, 5, à Versailles.
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1907. LESGOURGUES, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6°).
1903. LÉVY (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6°).
1907. LÉVY (Paul), ingénieur des mines, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, rue Chernoviz, 9, à Paris (16°).
1898. LINDELÖF (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Franz-Josefstrasse, 9, à Munich (Bavière).
1886. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4°).
1912. LOVETT (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue Boissière, 30, à Paris (16°).
1902. LUCAS-GIRARDVILLE, à la Manufacture de l'État, à Tonneins.
1902. LUCAS DE PESLOUAN, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7°).
1913. LUSIN, professeur adjoint à l'Université de Moscou, rue Stanislas, 14, à Paris (6°).
1895. MAILLET, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1913. MALAISE (J.), rue Grandgagnage, 7, à Liège (Belgique).
1905. MALUSKI, proviseur du lycée de Nîmes.
1906. MARGUS, licencié ès sciences, rue de Rambervilliers, 6, à Paris (12°).
1904. MAROTTE, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 bis, à Paris (12°).
1884. MARTIN (Artemas), 918 N. Street, N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1897. MEHNKE, professeur à l'École technique supérieure, Lowenstrasse, à Stuttgart-Degerloch (Wurtemberg).
1889. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. MERCEREAU, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7°). S. P.
1902. MERLIN (Émile), chargé des cours d'astronomie mathématique et de géodésie à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1907. MERLIN (Jean), astronome à l'Observatoire de Lyon, à Saint-Genis-Laval (Rhône).
1904. METZLER, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1909. MICHEL (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14°).
1893. MICHEL (François), ingénieur, licencié ès sciences, chef du service des parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10°).
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1902. MOLK (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1907. MONTEL, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15°).
1898. MONTESSUS DE BALLORE (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard Bigot-Danel, 15, à Lille (Nord).
1911. MOORE (CH.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati (États-Unis).
1903. MULLER (J.-O.), Venusbergerweg, 32, à Bonn (Allemagne).
1909. NEOVIVUS, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr. Vinthersvei 31, à Copenhague (Danemark).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).

Date
de
l'admission.

1897. **NICOLLIER**, professeur, la Chataigneraie, à Saint-Clarens (Vaud, Suisse).
1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5°).
1882. **OCAGNE** (M. v'), ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées, rue La Boétie, 30, à Paris (8°). S. P.
1905. **OUIVET**, 49, rue d'Arras, à Douai.
1873. **OVIDIO** (E. v'), professeur à l'Université, Corso Sommeiller, 16, à Turin (Italie).
1901. **PADÉ** (H.), recteur de l'Académie de Besançon.
1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6°).
1912. **PANGE** (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François I^{er}, 32, à Paris (8°).
1888. **PAPÉLIER**, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Recouvrance, 29, à Orléans.
1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17°).
1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).
1902. **PETROVITCH** (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Saint-Petersbourg.
1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).
1905. **PFEIFFER**, maître de conférences à l'Université, Szaoudl Wladimirskaïa 45, log II, à Kiew (Russie).
1906. **PHILIPPE** (Léon), inspecteur général des ponts et chaussées, rue de Turin, 23 bis, à Paris (8°).
1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, membre du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6°).
1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6°).
1899. **PIERPONT** (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).
1913. **PODTIAGUINE** (N.), rue Stanislas, 14, à Paris (6°).
1906. **POPOVICI**, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).
1894. **POTRON** (M.), docteur ès sciences, professeur aux Facultés catholiques de l'Ouest, rue Rabelais, 46, à Angers (Maine-et-Loire).
1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à Mûnich (Bavière).
1896. **PRUVOST**, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16°).
1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue Madame, 54, à Paris (6°).
1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5°).
1903. **RÉMOUNDOS**, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridion Tricoupis, 54, à Athènes (Grèce).
1906. **REMY**, docteur ès sciences, ingénieur des mines, rue Jeanne-d'Arc, 25, à Arras (Pas-de-Calais).

Date
de
l'admission.

1903. **RICHARD**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Fonds, 100, à Châteauroux.
1908. **RICHARD D'ABONCOURT** (DE), anc. élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.
1908. **RISSER**, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7°).
1903. **ROCHE**, agrégé de mathématiques, rue d'Assas, 76, à Paris (6°).
1909. **ROSENBLATT**, docteur en philosophie, rue Basztowa, 19, à Cracovie (Autriche).
1908. **ROTHROCK**, Professeur à l'Université, à Bloomington (Indiana, États-Unis).
1896. **ROUGIER**, professeur au lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1906. **ROUSIERS**, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14°).
1911. **RUDNICKI**, licencié ès sciences, avenue Reille, 28, à Paris (14°).
1900. **SALTYKOW**, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.
1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **SCHENFLIES**, professeur à l'Université, Schumannstrasse, 62, à Francfort (Allemagne).
1897. **SCHOU** (Erik), ingénieur, Hollaendervez, 12, à Copenhague (Danemark).
1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue du Bac, 114, à Paris (7°).
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg. S. P.
1900. **SERVANT**, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).
1908. **SHAW** (J.-B.), professeur à l'Université, West California, 901, Ave Urbana (Illinois, États-Unis).
1912. **SIRE**.
1900. **SPARRE** (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.
1909. **SPEISER** (Andreas), privat-docent à l'Université, Stephansplan, 7, à Strasbourg (Allemagne).
1912. **STECKER** (H.-F.), professeur de Mathématiques, à Pennsylvania State College, Miles St. 306 (Pennsylvanie, États-Unis).
1912. **STEINHAUS** (H.), docteur de l'Université de Göttingen, à Jaslo (Rynek) (Autriche-Hongrie).
1879. **STEPHANOS**, professeur à l'Université, rue Solon, 20, à Athènes (Grèce).
1898. **STÖRNER**, professeur à l'Université, Cort Adellers gade, 12, à Christiania (Norvège).
1904. **SUDRIA**, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14°).
1904. **SUNDMAN**, maître de conférences à l'Université, Fredriksgatan, 19, à Helsingfors (Finlande).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, Majorstuveien, 16 III, à Christiania (Norvège). S. P.
1913. **TAMARKINE**, répétiteur à l'École impériale des Ponts et Chaussées, rue Liteinaia, 45, App. 33, à Saint-Petersbourg (Russie).
1882. **TARRY** (G.), membre de la Société philomathique de Paris, boulevard de Strasbourg, 182, au Havre. S. P.
1899. **THYBAUT**, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5°).
1910. **TINOCHEKNO**, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1913. **TINO** (O.), via Lagrange, 2, à Turin (Italie).
1912. **TOUCHARD**, ingénieur des Arts et Manufactures, boulevard Haussmann, 150, à Paris (8°).
1910. **TRAYNARD**, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

Date
de
l'admission.

1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. **TRESSE**, professeur au collège Rollin, rue Mizon, 6, à Paris (15°).
1907. **TRIER (H.)**, licencié ès sciences, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17°).
1911. **TURRIÈRE**, docteur ès sciences, professeur au lycée de Montpellier.
1913. **VALIRON**, agrégé de l'Université, rue Adolphe-Focillon, 8, à Paris (5°).
1893. **VALLÉE-POUSSIN (Ch.-J. de la)**, membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université, rue de la Station, 149, à Louvain (Belgique).
1904. **VANDEUREN**, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. **VAN VLECK**, professeur de mathématiques, University of Wisconsin, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1897. **VASSILAS-VITALIS (J.)**, professeur à l'École militaire supérieure, rue Epicure, 13, à Athènes (Grèce).
1898. **VASSILIEF**, membre du Conseil d'État, Vassili Ostrow ligne 12, m. 19, à Saint-Petersbourg (Russie).
1909. **VEIL (M^{lle} S.)**, licenciée ès sciences, boulevard de Strasbourg, 55, à Paris (10°).
1913. **VEBLEN (O.)**, professeur à l'Université de Princeton (États-Unis).
1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Raspail, 234, à Paris (14°).
1911. **VILLAT**, maître de conférences à l'Université de Montpellier.
1888. **VOLTERRA (Vito)**, professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.
1900. **UIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5°).
1880. **WALCKENAER**, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7°).
1879. **WEILL**, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8°).
1906. **WILSON (E.-B.)**, professeur à l'Institut de technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1911. **WINTER**, avenue d'Iéna, 66, à Paris (16°).
1909. **WOODS (F.-S.)**, professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1878. **WORMS DE ROMILLY**, inspecteur général des mines, en retraite, quai de Passy, 14, à Paris (16°).
1912. **YOUNG (W.-H.)**, membre de la Société Royale de Londres, professeur à l'Université de Liverpool, à la Nonette de la Forêt, Genève (Suisse).
1882. **ZABOUDSKI**, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie Znamenskaïa, 22, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. **ZAREMBA**, professeur à la Faculté de Philosophie de l'Université, rue Zytnia, 21, à Cracovie (Autriche).
1903. **ZERVOS**, professeur agrégé à l'Université, rue Acharnon, 41, à Athènes (Grèce).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Forchhammers Vej. 12, à Copenhague (Danemark).
1898. **ZIVET**, professeur de Mathématiques à l'Université de Michigan, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1911. **ZOARD DE GÉOCZE**, professeur à l'Université, V. ker főréal, à Budapest (Hongrie).
1909. **ZORETTI**, professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Caen.

Membres décédés en 1913 : MM. BOURLET, LEZ, DE POLIGNAC, PRUYOST, SCHOUTE.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — BOURLET. — CANET.
CHASLES. — CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE.
HIRST. — LAFON DE LADÉBAT. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). — POINCARÉ. — DE
POLIGNAC. — RAFFY. — TANNERY (PAUL). — TCHÉBICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1894	PICQUET.
1874	LAFON DE LADÉBAT.	1895	GOURSAT.
1875	BIENAYMÉ.	1896	KÖNIGS.
1876	DE LA GOURNERIE.	1897	PICARD.
1877	MANNHEIM.	1898	LECORNU.
1878	DARBOUX.	1899	GUYOU.
1879	O. BONNET.	1900	POINCARÉ.
1880	JORDAN.	1901	D'OCAGNE.
1881	LAGUERRE.	1902	RAFFY.
1882	HALPHEN.	1903	PAINLEVÉ.
1883	ROUCHÉ.	1904	CARVALLO.
1884	PICARD.	1905	BOREL.
1885	APPELL.	1906	HADAMARD.
1886	POINCARÉ.	1907	BLUTEL.
1887	FOURET.	1908	PERRIN (R.).
1888	LAISANT.	1909	BIOCHE.
1889	ANDRÉ (D.).	1910	BRICARD.
1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.	1911	LÉVY (L.).
1891	COLLIGNON.	1912	ANDOYER.
1892	VICAIRE.	1913	COSSERAT (F.).
1893	HUMBERT.	1914	VESSIOT.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Pays-Bas.
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta.....	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge.....	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Copenhague.....	<i>Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	N ^{lle} -Écosse (Canada)
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas.....	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow.....	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Archiv der Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Liège.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate.</i>	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa.....	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Interim des Actuaires français.	France.
Paris.....	<i>Intermédiaire des Mathématiciens.</i>	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Princeton.....	<i>Annals of Mathematics.</i>	New-Jersey, États-Unis
Rennes.....	<i>Travaux de l'Université.</i>	France.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincci.</i>	Italie.
Rome.....	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome.....	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Sophia.....	<i>Annuaire de l'Université de Sophia.</i>	Bulgarie.
Stockholm.....	<i>Acta mathematica.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Archiv. for Mathematik.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Bibliotheca mathematica.</i>	Suède.
Tokyo.....	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie.....	Prace Matematyczno Fizyczne.	Russie.
Venise.....	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshfte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Zagreb (Agram)..	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Autriche-Hongrie.
Zurich.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 14 JANVIER 1914.

PRÉSIDENTE DE M. F. COSSERAT.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et d'une partie du Conseil; elle entend le rapport de la Commission des Comptes et en adopte les conclusions à l'unanimité.

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. François Jager, présenté par MM. Appell et Lebesgue, et M. Charles Jordan, présenté par MM. Turrière et Montel.

Communication :

M. Cartan : *Sur certaines familles naturelles de courbes.*

Étant donné un système d'équations différentielles dont la solution générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument, on peut indiquer la condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire ce système pour que la solution générale puisse s'obtenir en prenant, pour la variable indépendante et les fonctions inconnues, des expressions dépendant d'une manière déterminée d'un paramètre variable, d'une fonction arbitraire de ce paramètre et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre, enfin de constantes arbitraires en nombre fini.

Cette condition s'énonce assez simplement lorsque le système différentiel a été ramené, ce qui est toujours possible, à un système d'un certain nombre n d'équations aux différentielles totales à $n + 2$ variables, dont $n + 1$ dépendantes et 1 indépendante. Nous dirons qu'un système qui satisfait à cette condition est de classe zéro.

On peut se proposer de chercher tous les systèmes de classe zéro qui définissent une famille *naturelle* de courbes, c'est-à-dire qui s'obtiennent en établissant une relation donnée entre la courbure, la torsion et leurs dérivées par rapport à l'arc jusqu'à un certain ordre.

Si la relation considérée ne contient que la courbure et la torsion, elle exprime nécessairement que le rapport de la torsion à la courbure a une valeur constante donnée : ce résultat, *en ce qu'il a de positif*, est classique.

Si la relation considérée contient en outre la dérivée de la courbure par rapport à l'arc, on trouve d'abord une famille de courbes, également classique, définie par la relation

$$R^2 + T^2 \left(\frac{dR}{ds} \right)^2 = a^2 ;$$

ce sont les courbes gauches tracés sur une sphère de rayon donné a . En dehors de cette famille de courbes, il en existe trois autres, toutes imaginaires, qui sont intéressantes par les relations qu'elles ont avec la famille des courbes minima. Elles sont définies respectivement par les équations

$$\begin{aligned} \frac{dR}{iR ds} + \frac{1}{T} + \frac{i}{a} &= 0, \\ \frac{dR}{\sqrt{a^2 - R^2} ds} + \frac{1}{T} + \frac{i}{a} &= 0, \\ \frac{dR}{\sqrt{a^2 - R^2} ds} + \frac{1}{T} + i \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{aR} &= 0. \end{aligned}$$

La courbe (C) la plus générale de la première famille s'obtient en portant à partir d'un point variable P d'une courbe minima quelconque (Γ) un vecteur \overrightarrow{PM} égal à $\sqrt{a} \frac{dP}{d\sigma}$, où σ désigne le *pseudo-arc* de la courbe minima. L'arc de la courbe (C) a une expression remarquable : c'est le pseudo-arc de la courbe (Γ), multiplié par le facteur constant \sqrt{a} . On a donc ainsi une construction géométrique ramenant la notion de pseudo-arc d'un courbe minima à la notion ordinaire d'arc d'une courbe non minima.

La courbe (C) la plus générale de la seconde famille s'obtient en partant d'une courbe minima quelconque (Γ), en portant à partir d'un point quelconque P de cette courbe la longueur $PQ = -\frac{a}{2}$ sur le vecteur $\frac{d^2P}{d\sigma^2}$ et en menant par le point Q la parallèle à la tangente en P à la courbe (Γ) jusqu'à son intersection M avec le plan mené par P parallèlement à un plan isotrope fixe Π . *Ici encore l'arc de la courbe (C) est égal à $\sqrt{a} \sigma$.*

Enfin la courbe (C) la plus générale de la troisième famille s'obtient en menant par un point variable P d'une courbe minima quel-

conque (Γ) un vecteur \overrightarrow{PM} parallèle à la direction isotrope d'un plan isotrope fixe Π et tel que le produit géométrique du vecteur \overrightarrow{PM} par le vecteur \overrightarrow{PO} , où O est un point fixe, d'ailleurs quelconque, du plan Π , soit égal à $-\frac{1}{2}a^2$. Si l'on choisit les axes de manière que le plan Π ait pour équation

$$x - iy = 0,$$

l'arc de la courbe (C) est égal à $ia \log(x - iy)$.

Les courbes de la troisième famille sont ainsi rectifiables. Il n'en est pas de même de celles des deux premières familles : je veux dire par là qu'il est impossible d'exprimer les coordonnées d'un point, ainsi que l'arc de la courbe la plus générale d'une de ces familles, par des formules dépendant d'une manière déterminée d'un paramètre variable, d'une fonction arbitraire de ce paramètre et de ses dérivées, ainsi que de constantes arbitraires.

On peut résoudre des problèmes analogues en Géométrie non euclidienne, en Géométrie conforme, en Géométrie projective, etc. Par exemple en Géométrie non euclidienne elliptique, la seule famille naturelle de courbes de classe zéro définie par une relation entre la courbure et la torsion est, en dehors de la famille des courbes planes, celle qui est fournie par la relation

$$\frac{1}{T} \pm 1 = \frac{a}{R}$$

(on suppose la courbure de l'espace égale à 1). Ces courbes sont les trajectoires sous un angle (non euclidien) constant (égal à $\text{arc cot } a$) des droites qui rencontrent deux génératrices imaginaires conjuguées fixes de la quadrique fondamentale. Ce sont les analogues des hélices euclidiennes; mais, contrairement à ces dernières, elles ne sont pas rectifiables, au sens donné plus haut à ce mot.

SÉANCE DU 28 JANVIER 1914

PRÉSIDENCE DE M. VESSIOT.

Communication :

M. Paul Lévy : *Sur le calcul approché des intégrales définies.*

L'objet de cette Communication est de comparer les diverses mé-

S. M. — *Comptes rendus.*

thodes de calcul approché des intégrales définies, au point de vue de la rapidité avec laquelle elles permettent d'obtenir une approximation déterminée. La plus avantageuse, qu'il y aurait intérêt à faire connaître davantage, consiste à calculer l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx$$

à l'aide des premiers termes du développement

$$(1) \quad S - \frac{1}{6} \frac{h^2}{2} [f'(b) - f'(a)] + \dots \\ + (-1)^n B_n \frac{h^{2n}}{(2n!)} [f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a)] + \dots,$$

où h est un nombre qui divise exactement $b - a$, où B_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli, et où

$$S = h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-h) + \frac{1}{2} f(b) \right].$$

M. Montel fait quelques remarques sur la convergence du développement (1), M. Lebesgue indique que ce développement, connu sous le nom de *formule sommatoire* d'Euler et Maclaurin, est en général divergent, mais se prête très bien au calcul à cause de la décroissance rapide de ses premiers termes.

SÉANCE DU 11 FÉVRIER 1914.

PRÉSIDENTE DE M. VESSIOT.

Élection : Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. G. Giraud, présenté par MM. Lebesgue et Picard.

Communication :

M. J.-H. Coblyn : *Perspective d'observation*.

Lorsqu'on dessine, on est obligé de tourner la tête dans toutes les directions, ce qui modifie l'aspect du paysage : le but de la perspective d'observation est de chercher des paramètres perspectifs invariables et directement mesurables.

Si l'on considère un système d'axes de coordonnées trirectangulaires, issu de l'œil O, l'axe des z vertical, l'axe des y perpendiculaire au tableau et dirigé vers le point principal P (distance principale D),

une direction OM sera définie par l'angle φ que fait son plan vertical avec le plan des yz (méridien principal) et par l'angle γ que fait la direction OM avec la verticale Oz.

Si l'on rapporte la perspective sur le tableau à deux axes, la ligne d'horizon et la verticale issue du point P (méridienne principale), on aura, en désignant par l et h les coordonnées de la perspective M d'une direction OM,

$$l = D \operatorname{tang} \varphi,$$

$$h = \frac{D}{\operatorname{tang} \gamma \cos \varphi}.$$

$D \operatorname{tang} \varphi$ est le paramètre horizontal ou distance azimutale, facile à évaluer avec une réglette tenue à bras tendu; on ne peut mesurer directement h , mais on peut évaluer à bras tendu la hauteur h_c de la perspective cylindrique ayant D comme rayon, et l'on a

$$h_c = \frac{D}{\operatorname{tang} \gamma}.$$

Si l'on prend la méridienne principale comme axe polaire et que l'on considère un point μ dont les coordonnées polaires sont h_c et φ , le point μ est le *point correspondant* du point M, et ses coordonnées cartésiennes λ et θ sont liées aux coordonnées l et h du point M par les relations

$$\lambda = \frac{Dlh}{D^2 + l^2}, \quad l = D \frac{\lambda}{\theta},$$

$$\theta = \frac{D^2 h}{D^2 + l^2}, \quad h = \frac{\lambda^2 + \theta^2}{\theta}.$$

Une construction géométrique très simple permet de déduire du point μ , que l'on construit préalablement, le point M cherché; cette construction montre d'ailleurs que la transformation quadratique définie ci-dessus est univoque et a la méridienne principale comme *axe de correspondance*: on appelle ainsi une droite pour laquelle un point se confond avec son correspondant; la considération de ces axes permet une classification des transformations quadratiques qui sera exposée ultérieurement.

Les points correspondants des perspectives contenues dans le tableau sont toujours dans celui-ci.

Lorsqu'on fait tourner l'espace d'un angle α autour de la verticale de l'œil, la figure correspondante des deux perspectives initiale et finale a tourné sans déformation de l'angle α autour du point principal.

Si l'on appelle x, y, z les coordonnées d'un point de l'espace, on a

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{D} = \frac{z}{h},$$

d'où

$$\frac{x + yi}{l + Di} = \frac{x - yi}{l - Di} = \frac{z}{h}$$

et

$$(l + Di)(\lambda - \theta i) = (l - Di)(\lambda + \theta i) = hD.$$

Si l'on considère des figures dans un plan horizontal, qu'on désigne par V l'intersection de ce plan avec l'axe vertical passant par l'œil, par V_∞ la perspective de V à l'infini sur la méridienne principale, par D_i et D_j des points imaginaires sur la ligne d'horizon à une distance $\pm Di$ du point P , on a entre les trois triangles de référence du plan horizontal, de sa perspective et de sa transformée, la relation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} & V & & I & & J & \\ & & & & & & \\ V_\infty & & & D_i & & D_j & V_\infty \\ & & & & & & \\ & & & I & & P & J \end{array}$$

la dernière transformation se faisant de droite à point et réciproquement.

Dans le même cas particulier d'une figure horizontale, les angles d'espace se restituent dans la figure transformée, de sorte que l'involution déterminée sur la méridienne principale par un faisceau des perspectives de deux horizontales rectangulaires pivotant autour du point M est vue de son correspondant μ sous un angle droit.

La transformée d'une droite est un cercle passant par l'origine et relié à la perspective de la droite par une construction très simple.

Dans la plupart des applications, c'est le point d'intersection p , autre que P , de ce cercle avec la méridienne principale, qui seul importe. Or, si l'on substitue à la droite Mp de l'espace un cercle horizontal passant par M et p et s'appuyant sur la verticale de l'œil, sa perspective sera une hyperbole à asymptote verticale, et sa transformée sera une droite, ce qui simplifiera notablement les constructions.

En résumé, on arrive, avec cette méthode de transformation, à des constructions qu'on peut effectuer directement sur le tableau avec un triple décimètre, sans équerres, ni compas; ces constructions sont toujours contenues dans le tableau et sont géométriques.

SÉANCE DU 25 FÉVRIER 1914.

PRÉSIDENTE DE M. VESSIOT.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. G. Polyà, présenté par MM. Hadamard et Montel.

Communications :

M. Garnier : *Sur la formation de l'équation différentielle vérifiée par la fonction p_x de Weierstrass.*

Pour démontrer que la fonction p_x vérifie une équation différentielle du premier ordre, on s'appuie habituellement sur le théorème de Liouville appliqué aux fonctions doublement périodiques; mais on peut aussi employer une méthode *directe*. C'est la voie adoptée par l'auteur; partant du développement en série doublement infinie qui sert de définition à la fonction p_x , il démontre que ce développement satisfait à l'équation $y'' = 6y^2 - \frac{1}{2}g_2$ en utilisant des identités sommatoires déduites de la considération d'un tableau quadruplement infini, absolument convergent.

La même méthode s'applique, comme le montre l'auteur, à la fonction $y = \cot \pi x$. Partant *a priori* du développement de y en série de Mittag-Leffler, il est facile de démontrer que cette série vérifie une équation du premier ordre et coïncide, par suite avec la fonction $\cot \pi x$. On a ainsi une méthode nouvelle pour introduire dans l'enseignement le développement de $\sin \pi x$ en produit infini; cette méthode évite les longueurs d'un passage à la limite toujours laborieux dans les méthodes classiques.

M. Dontot : *Les invariants intégraux et l'optique.*

Les rayons lumineux, dans un milieu isotrope à indice variable $n(x, y, z)$, sont les extrémales de l'intégrale I.

$$I = \int n ds.$$

Les équations de ces extrémales, par un changement de variables, se ramènent à six équations différentielles linéaires à six inconnues,

par exemple x, y, z et des nombres proportionnels aux paramètres directeurs de la tangente en ce point, ces six équations se réduisent à cinq indépendantes.

Le mouvement défini par

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u} = \dots = \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

x, y, z, u, v, w étant six variables indépendantes et H la fonction $\frac{u^2 + v^2 + w^2}{n^2}$ de ces variables, a lieu sur des trajectoires qui sont des extrémales de $\int n ds$, si aux équations (1) on ajoute $H = 1$, qui est compatible avec elles. En général, ces trajectoires (H) diffèrent des extrémales (E).

Au mouvement (H) défini par (1) est attaché l'invariant intégral volume

$$\int dx dy dz du dv dw.$$

On en tire aisément un invariant attaché à un mouvement sur les extrémales (E).

Faisons le changement de variables,

$$u = m n \alpha, \quad v = p n \alpha, \quad w = q n \alpha;$$

m, p, q étant les paramètres directeurs d'une droite (la tangente aux trajectoires) d , une variable nouvelle ($m^2 = 1 - p^2 - q^2$). Les équations (1) se transforment en six équations (2), parmi lesquelles il y aura $\frac{dx}{dt} = 0$ évidemment.

L'invariant devient

$$\int \frac{D(x, y, z, u, v, w)}{D(x, y, z, p, q, \alpha)} dx dy dz du dv dw = \int \frac{n^3 \alpha^2}{m} dx dy dz dp dq d\alpha$$

(nous désignerons désormais par $d\omega$, portion de surface découpée sur la sphère de rayon 1 par une parallèle à la droite m, p, q , menée par le centre, la quantité $\frac{dp dq}{m}$). Étendons l'intégrale sextuple au volume formé par un cylindre de base quelconque, à cinq dimensions et de hauteur $\alpha_0 < \alpha < \alpha$, ce cylindre demeure un cylindre : et l'on voit ainsi aisément que la quantité

$$(S) \quad \int n^3 dx dy dz d\omega$$

est un invariant pour les extrémales de $\int n ds$.

Transformons celui-ci en un autre indépendant en quelque sorte du mouvement. Les conditions initiales dépendent de quatre paramètres arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; par suite x, y, z, p, q dépendent de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, t$: choisissons $\alpha, \beta, \gamma, \delta, t$ comme variables indépendantes : un tel choix est possible *a priori*; Poincaré a d'ailleurs fait de ces variables un grand usage, particulièrement dans l'étude des invariants intégraux; l'intégrale (S) devient

$$(S') \quad \int n^3 \frac{D(x, y, z, p, q)}{D(\alpha, \beta, \gamma, \delta, t)} d\alpha d\beta d\gamma d\delta dt.$$

Choisissons une multiplicité à cinq paramètres, constituée par les portions d'extrémales comprises entre deux multiplicités (U), (U') quelconques à quatre paramètres : étant donnée une multiplicité (U), si l'on fait varier très peu le temps, les points correspondants définissent une nouvelle multiplicité (U₁), voisine de la première. Puisque (S'), étendue à la multiplicité à cinq paramètres (UU') ou à celle (U₁U'₁) voisine, a la même valeur, ces deux multiplicités ayant celle (U₁U) commune, on en conclut que (S'), étendue à (UU₁) ou à (U'U'₁), a la même valeur. Choisissons pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les paramètres suivants : x, y, z sont fonctions de u, v et le point correspondant décrit une surface S; p et q sont deux variables indépendantes; l'intégrale

$$J = \int n^3 \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \frac{dz}{dt} + \dots + \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \frac{dy}{dt} \right] du dv d\omega$$

se conserve qu'on l'étende à S et au faisceau d'extrémales qui en émanent, ou à Σ surface quelconque à deux paramètres et aux extrémales qui y aboutissent.

Or on a $\frac{dx}{dt} = \frac{2u}{n^2} \dots$, on a posé $u = mn\alpha$ et fait $\alpha = t$,

$$\frac{dx}{dt} = 2 \frac{\alpha}{n} m,$$

$$J = \int n^2 \left[m \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \dots \right] du dv d\omega;$$

désignons par $d\sigma$ l'élément d'aire de S, par θ l'angle d'une extrémale émanant d'un point avec la normale à S en ce point

$$\int n^2 \cos \theta d\sigma d\omega$$

est un invariant dans les conditions précitées.

On vérifie sans peine qu'une réfraction n'altère pas l'invariant, et l'on retrouve ainsi l'important théorème d'optique énoncé par Straubel,

pressenti par Helmholtz et Clausius. Il exprime simplement d'ailleurs la proportionalité de l'éclat d'un faisceau élémentaire au carré de l'indice.

La méthode exposée s'étend aisément aux bicaractéristiques de certaines équations aux dérivées partielles.

M. P. Montel : *Sur le flambage des pièces comprimées et le mouvement du pendule.*

Désignons par OA la fibre moyenne d'une pièce cylindrique de longueur L, de section droite constante et dont les dimensions transversales sont faibles par rapport à la longueur. Cette pièce étant fléchie suivant la courbe plane OMA, on applique aux extrémités O et A des forces P, égales et directement opposées, leur direction commune coïncidant avec celle de la fibre OA non fléchie. Le calcul et l'expérience montrent que la flexion ne peut subsister que si la force P est supérieure à la valeur $P_0 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, trouvée par Euler : E désigne le coefficient d'élasticité à la traction, I le moment d'inertie d'une section droite par rapport à la normale au plan de la courbe fléchie, passant par le centre de gravité de cette section. Prenons la direction OA comme axe des x et comme axe des y la perpendiculaire à OA dirigée du côté de la fibre fléchie : l'ordonnée y d'un point M de la fibre fléchie satisfait à l'équation

$$(1) \quad \frac{d\theta}{dt} = - \frac{P y}{EI},$$

dans laquelle t désigne la longueur de l'arc OM et θ l'angle de la demi-tangente positive à la courbe avec l'axe des x . On déduit de cette équation

$$(2) \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \frac{P}{EI} \sin \theta.$$

Cette dernière équation est celle du mouvement d'un pendule simple dont la longueur est $l = g \frac{EI}{P}$, à condition de supposer que t désigne maintenant le temps et θ l'angle du fil avec la verticale descendante.

Il résulte de là qu'on peut faire correspondre, à chaque problème relatif au flambage des pièces chargées debout, un problème relatif au mouvement du pendule et que la solution de l'un entraîne celle de l'autre. Reprenons l'exemple du début : pour trouver la figure d'équi-

libre de la pièce fléchie, il faut trouver une intégrale de l'équation (2) telle que $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule pour $t = 0$ et $t = L$. Le pendule correspondant fait donc une oscillation pendant le temps L . Or la durée d'une oscillation est toujours supérieure à $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; on doit donc avoir

$$L \geq \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{ou} \quad L \geq \pi\sqrt{\frac{EI}{P}} \quad \text{ou} \quad P \geq \frac{\pi^2 EI}{L^2} :$$

c'est la formule d'Euler.

Si P est inférieur à P_0 , le problème n'admet que la solution $\theta = 0$. Supposons $P > P_0$; il importe de calculer la flèche f , c'est-à-dire l'ordonnée maximum de l'élastique : elle correspond à $\theta = 0$ et l'on a

$$f = -\frac{EI}{P} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0,$$

d'après l'équation (1). Si θ_0 est l'angle initial du pendule, on a

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0^2 = \frac{2g}{l} (1 - \cos \theta_0) = \frac{4g}{l} \sin^2 \frac{\theta_0}{2},$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0 = -\theta_0 \sqrt{\frac{g}{l}} = -\theta_0 \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

d'où

$$f = \theta_0 \sqrt{\frac{EI}{P}};$$

or,

$$L = \pi \sqrt{\frac{EI}{P}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right),$$

donc,

$$f = 4 \sqrt{\frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{EI}{P}} - \frac{EI}{P}},$$

et comme

$$\frac{L}{\pi} = \sqrt{\frac{EI}{P_0}},$$

il vient

$$f^2 = \frac{16 EI}{\sqrt{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{P_0}} - \frac{1}{\sqrt{P}} \right) = \frac{16 EI (P - P_0)}{P \sqrt{P_0} (\sqrt{P} + \sqrt{P_0})}$$

ou sensiblement, en remplaçant au dénominateur P par P_0 ,

$$f = \frac{2\sqrt{2} L^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{P - P_0}{EI}} = 2\sqrt{2} \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{P - P_0}{P_0}}.$$

Ce sont les formules usuelles.

On peut traiter de la même manière le problème d'une pièce encastree à un bout et posée à l'autre, ou encastree aux deux extrémités. Considérons, par exemple, ce dernier cas, on aura

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{(P.y - m)}{EI}, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{P}{EI} \sin\theta.$$

m désignant le moment d'encastrement. Le pendule doit faire ici deux oscillations; il faut donc qu'on ait

$$L \geq 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{ou} \quad P \geq \frac{4\pi^2 EI}{L^2}.$$

Soit θ_0 l'angle initial du pendule; pour $\theta = \pm \theta_0$, l'élastique présente une inflexion et comme $t = \frac{L}{4}$ ou $t = \frac{3}{4}L$, les points d'inflexion sont aux distances $\frac{L}{4}$ et $\frac{3L}{4}$ du point O. L'ordonnée des points d'inflexion est $\frac{m}{P}$ et la valeur de la flèche f est le double $\frac{2m}{P}$. On déduit aisément de là les formules

$$f = 8 \sqrt{\frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{P} - \frac{EI}{P_0}}} = 2\sqrt{2} \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{P - P_0}{P_0}},$$

SÉANCE DU 11 MARS 1914.

PRÉSIDENCE DE M. VESSIOT.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. Powalo-Schweikowski, présenté par MM. Kiveliovitch et Lusin.

Communications :

M. Coblyn : *Classification des transformations quadratiques.*

Une transformation rationnelle quelconque est définie par les relations

$$\frac{x'}{U} = \frac{y'}{V} = \frac{1}{T}.$$

On désignera par D une fonction linéaire en x et en y contenant un terme constant, par Δ une même fonction sans terme constant.

En général, les courbes

$$xT - U = 0, \quad yT - V = 0,$$

que nous appellerons *caractéristiques*, n'ont que $(n + 1)^2$ points d'intersection, si la transformation est de degré n . On désignera sous le nom de *courbe ou axe de correspondance* une courbe ou un axe pour tous les points desquels $M(x, y)$ se confond avec son correspondant $M'(x', y')$. Pour qu'il y ait une courbe de correspondance, il faut et il suffit que les caractéristiques aient une partie commune.

Il existe sept classes de transformations.

CLASSE I : Transformations à pôle à l'infini ou à caractéristiques identiques. — Ces deux propriétés sont réciproques. Pour que les caractéristiques puissent être identiques, il faut que le degré de T soit inférieur à celui de la transformation.

Dans le cas particulier des transformations quadratiques, on a les types suivants, qui ne peuvent se réduire les uns aux autres :

$$(I)_1 \quad \frac{x'}{\alpha(y - mx)D + \beta D_1 D_2} = \frac{y'}{(1 + mx)(y - mx)D + \beta m D_1 D_2} = \frac{1}{D},$$

$$(I)_2 \quad V - mU \text{ est une droite,} \quad \frac{x'}{U} = \frac{y'}{mU + K(y - mx)} = \frac{1}{K}.$$

Transformations quadratiques univoques. — Il en existe trois types :

$$(I)_{U_1} \quad \frac{x'}{\alpha(y - mx)D + D_1} = \frac{y'}{(1 + mx)(y - mx)D + mD_1} = \frac{1}{D},$$

$$(I)_{U_2} \quad \frac{x'}{(y - mx)D_1} = \frac{y'}{(y - mx)(D + mD_1)} = \frac{1}{D},$$

$$(I)_{U_3} \quad V - mU \text{ est une droite,} \quad \frac{x'}{(y - mx)\Delta_1 + D_2} = \frac{y'}{(y - mx)(m\Delta_1 + K) + mD_2} = \frac{1}{K}.$$

Le pôle sera à l'infini dans la direction $y = mx$.

CLASSE II : Transformations à pôle à distance finie différent de l'origine. Les caractéristiques ont une conique commune sans être identiques. — Les deux propriétés énoncées ci-dessus sont réciproques. Le type unique de ces transformations est, x_0, y_0 étant les coordonnées du pôle,

$$(II) \quad \frac{x'}{x_0 \Delta_1 \Delta_2 + D_3 x - D(x - x_0)} = \frac{y'}{y_0 \Delta_1 \Delta_2 + D_3 y - D(y - y_0)} = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2 + D_3}.$$

Pour que la transformation soit univoque, il faut et il suffit que le pôle A (x_0, y_0) soit sur la conique T; il se trouvera alors aussi sur les coniques U et V.

Il s'ensuit que la droite D est arbitraire; or on a

$$U - x_0 T = (D_3 - D)(x - x_0), \quad V - y_0 T = (D_3 - D)(y - y_0).$$

Soient B et C les intersections de la conique T et de la droite $D_3 - D$. Ce sont, avec le pôle A, les sommets du triangle de référence inscrit dans les coniques U, V et T.

Si la droite $D_3 - D$, qu'on peut choisir d'une façon quelconque, puisque D est arbitraire, se confond avec la tangente en A à la conique T, les trois coniques U, V et T sont osculatrices.

Soient : a et b les coordonnées du centre de courbure;

$$C = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

l'équation du cercle de courbure;

$$x_0 = a + r \cos \varphi_0, \quad y_0 = b + r \sin \varphi_0$$

les coordonnées du pôle;

$$T_1 = r(x - x_0) \cos \varphi_0 + r(y - y_0) \sin \varphi_0 = 0$$

la tangente commune aux trois coniques en A.

Les trois coniques osculatrices en A sont de la forme

$$U = K_3 x_0 C + K'_3 x_0 T_1 [(y - y_0) - m_1(x - x_0)],$$

$$V = K_3 y_0 C + K'_3 \frac{y_0 - m_1 x_0}{y_0 - m_2 x_0} y_0 T_1 [(y - y_0) - m_2(x - x_0)],$$

$$T = K_3 C + K'_3 T_1 \left[(y - y_0) - (x - x_0) \frac{y_0 - m_1 x_0}{y_0 - m_2 x_0} m_2 \right].$$

CLASSE III : Transformations ayant pour pôle l'origine. Les caractéristiques ont une conique commune sans être identiques. — Les deux propriétés ci-dessus énoncées sont réciproques : le seul type de cette classe est

$$(III) \quad \frac{x'}{x(D_3 - D)} = \frac{y'}{y(D_3 - D)} = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2 + D_3}.$$

La transformation est univoque si T passe par l'origine; alors D_3 doit également passer par l'origine $D_3 = \Delta_3$.

Si l'on a

$$\Delta_3 \equiv 0, \quad \Delta_1 \Delta_2 = x^2 + y^2, \quad D = -K^2,$$

la transformation se fait par rayons vecteurs réciproques; la conique commune est le cercle

$$x^2 + y^2 - K^2 = 0.$$

(A suivre.)

M. Georges Giraud : *Sur la résolution approchée en nombres entiers d'un système d'équations linéaires non homogènes.*

L'énoncé du problème est le suivant :

Étant donnés p polynômes du premier degré à m inconnues

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m + b_2, \\ \dots\dots\dots, \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pm}x_m + b_p, \end{aligned}$$

et un nombre positif arbitraire ε , est-il possible de trouver des valeurs entières de x_1, x_2, \dots, x_m telles que tous ces polynômes soient inférieurs à ε en valeur absolue ?

Ce problème a été résolu pour la première fois par Kronecker (*Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, 1884).

L'auteur, laissant de côté le cas des équations homogènes et celui d'une seule équation, arrive au cas de deux inéquations à trois inconnues x, y, z ,

$$(1) \quad \begin{aligned} |x - az - A| < \varepsilon, \\ |y - bz - B| < \varepsilon, \end{aligned}$$

et pose la question de rechercher pour quelles valeurs de a et b le problème n'est pas possible quels que soient A, B et ε . Parmi ces systèmes sont tous ceux où a ou b est rationnel; écartons ce cas. Le système (1) sera compatible quels que soient A, B et ε si le système

$$(2) \quad \begin{aligned} |x - ay - A| < \varepsilon, \\ |y - bz| < \varepsilon, \end{aligned}$$

l'est quels que soient A et ε . Supposons que cela n'arrive pas: les valeurs de A pour lesquelles le problème est possible quel que soit ε seront dites *valeurs dont on peut approcher*. Si A est une telle valeur $\lambda A + \mu$ en est une autre, λ et μ étant entiers. On en conclut aisément que A est un multiple de $\frac{1}{m}$, m étant un entier fixe. Alors,

pour le système

$$(5) \quad \begin{aligned} |x - maz - A| &< \varepsilon, \\ |y - bz| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

les seules valeurs dont on peut approcher sont les valeurs entières de A.

On prouve alors que, si l'on prend toujours x de telle façon que $|x - maz|$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$, et si ε est donné, on peut trouver η tel que l'inégalité $|y - bz| < \eta$ entraîne $|x - maz| < \varepsilon$. Et même, il existe un nombre k tel que l'inégalité $|y - bz| < \varepsilon$ entraîne $|x - az| < k\varepsilon$. Développons alors b en fraction continue, soient $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ les quotients incomplets

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= a_{n+1}P_n + P_{n-1}, \\ Q_{n+1} &= a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}. \end{aligned}$$

Supposons n assez grand pour que Q_n soit supérieur à $4k$. On a les inégalités

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - b \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}, \quad \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - b \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}},$$

et par suite, pour des entiers X_n, X_{n+1} convenables,

$$\left| \frac{X_n}{Q_n} - ma \right| < \frac{k}{Q_n Q_{n+1}}, \quad \left| \frac{X_{n+1}}{Q_{n+1}} - ma \right| < \frac{k}{Q_n Q_{n+1}};$$

d'où

$$\left| \frac{X_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{X_n}{Q_n} \right| < \frac{2k}{Q_n Q_{n+1}};$$

mais, si l'on considère dans cette inégalité l'entier X_{n+1} comme inconnue, elle n'a qu'une solution, car $Q_n > 4k$; or

$$X'_{n+1} = a_{n+1}X_n + X_{n-1}$$

est solution; donc $X'_{n+1} = X_{n+1}$ ou $X_{n+1} = a_{n+1}X_n + X_{n-1}$; puis $X_{n+2} = a_{n+2}X_{n+1} + X_n$; etc. Alors

$$b = \frac{\alpha P_n + P_{n-1}}{\alpha Q_n + Q_{n-1}}, \quad ma = \frac{\alpha X_n + X_{n-1}}{\alpha Q_n + Q_{n-1}},$$

α étant la fraction continue $(a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$. Éliminant α , on trouve

$$ma(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) - b(X_n Q_{n-1} - X_{n-1} Q_n) + P_{n-1} X_n - P_n X_{n-1} = 0.$$

C'est une relation linéaire à coefficients entiers entre a et b

$$ma + nb + p = 0.$$

On trouve que, si les entiers m , n , p sont premiers entre eux, la condition nécessaire et suffisante de solubilité de (1) est alors que $mA + nB$ soit entier.

Si l'on a résolu la question pour $n - 1$ équations et si l'on en prend n ,

$$|x_i - a_i y - A_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

on est ramené au cas de $A_n = 0$, et une suite de raisonnements analogue à la précédente montre que, si le problème n'est pas toujours possible, il y a des entiers m_i tels que

$$|x_n - a_n y| < \varepsilon$$

entraîne que

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_{n-1} x_{n-1} - y(m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_{n-1} a_{n-1})$$

soit très voisin d'un entier; on applique alors la proposition relative à deux équations, et l'on obtient un énoncé analogue.

Si l'on considère le cas général de n équations à $n + p$ inconnues

$$|x_i - a_{i1} y_1 - a_{i2} y_2 - \dots - a_{ip} y_p - A_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

on trouve sans difficulté que :

La condition nécessaire et suffisante pour la compatibilité du système quel que soit r est que toutes les formes

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + m_n X_n,$$

qui prennent des valeurs entières quand on y remplace les indéterminées successivement par les p systèmes de valeurs $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ ($j = 1, 2, \dots, p$), prennent aussi des valeurs entières quand on y remplace ces indéterminées par A_1, A_2, \dots, A_n .

Pratiquement, s'il y a r de ces formes algébriquement distinctes, elles sont toutes des combinaisons linéaires à coefficients entiers de r d'entre elles convenablement choisies; on peut se borner à substituer A_1, A_2, \dots, A_n dans ces r formes.

On obtient exactement le même énoncé avec des équations à coefficients complexes, en entendant par entiers les nombres $a + bi$, où a et b sont entiers; ou de la forme $a + b \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$; ou égaux aux

entiers d'un corps quadratique imaginaire admettant l'algorithme du plus grand commun diviseur.

Si le corps n'admet pas cet algorithme, on peut affirmer seulement, dans la seconde partie de l'énoncé, qu'il y a au plus $2r$ formes dont toutes les autres sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers. Le reste de l'énoncé est le même.

Géométriquement, le problème revient à chercher les points à coordonnées entières de l'espace à $n + p$ dimensions très voisins d'une variété à p dimensions; l'existence des r formes $\sum m_i X_i$ signifie que cette variété à p dimensions est située dans la variété à $n + p - r$ dimensions déterminée par $n + p - r + 1$ points à coordonnées entières.

M. Maurice Fouché : *Remarques sur un théorème classique et sur le théorème de Meusnier.*

Dans les cours de Géométrie supérieure, on s'est ingénié à chercher des démonstrations géométriques, du fait que, si l'on applique une développable sur un plan, le rayon de courbure de la courbe plane transformée d'une courbe tracée sur la développable est égal au rayon de courbure de celle-ci divisé par le cosinus de l'angle que fait au point considéré le plan osculateur à la courbe avec le plan tangent à la développable. La plupart des démonstrations qui ont été enseignées sont longues, pénibles et, en réalité, peu satisfaisantes. Or, l'énoncé même du théorème montre qu'il doit avoir une relation étroite avec le théorème de Meusnier, et c'est effectivement ce qui a lieu.

Soient C la courbe tracée sur la développable et D le transformé de C dans le plan tangent P au point M. Si l'on fait rouler sans glisser le plan P sur la développable, la courbe D engendre une surface-canal, et tous les points de cette courbe s'appliquent sur la courbe C. Celle-ci fait donc partie de la surface-canal. Au point M les deux courbes sont tangentes et le plan P est normal à la surface-canal. Donc, d'après le théorème de Meusnier, le rayon de courbure de C est égal à celui de D multiplié par le cosinus de l'angle que fait le plan osculateur de C avec le plan P, et c'est ce qu'il fallait démontrer.

On pourrait objecter que la courbe C est une ligne de rebroussement de la surface-canal. Il faut donc donner du théorème de Meusnier une démonstration qui s'applique aux lignes singulières, pourvu que le plan osculateur et le plan tangent à la surface soient bien déterminés. Or, si A est un point d'une courbe, M un point infiniment

voisin pris sur la tangente et N le point où la perpendiculaire à AM coupe la courbe, on sait que le rayon de courbure au point M est la limite du rapport $\frac{\overline{AM}^2}{2MN}$. Pour démontrer le théorème de Meusnier, il suffit alors de prendre, sur la tangente commune aux deux courbes, un point M infiniment voisin du point de contact, de mener par ce point un plan perpendiculaire à la tangente qui rencontre les deux courbes en N et N', et de remarquer que NN' est, aux infiniment petits près, normale au plan de la section normale, parce qu'elle est perpendiculaire à la tangente AM et infiniment voisine du plan tangent à la surface en M. Il suit de là que le rapport des deux vecteurs MN et MN', et par suite le rapport des rayons de courbure, est égal au cosinus de l'angle des deux plans.

M. Fontené présente quelques observations au sujet de l'application des démonstrations précédentes aux cas singuliers.

M. Fontené : *Sur le calcul approché des intégrales définies.*

1. a. Considérons l'intégrale

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \quad h = \beta - \alpha,$$

où $f(x)$ est d'abord un polynome de degré p . Un tel polynome étant déterminé par les valeurs qu'il prend pour $p + 1$ valeurs de x , en particulier par les valeurs y_0, y_1, \dots, y_p qu'il prend pour les $p + 1$ valeurs

$$x = \alpha, \alpha + \frac{h}{p}, \alpha + \frac{2h}{p}, \dots, \beta,$$

séparées par des intervalles égaux en nombre p , on peut évaluer S en fonction de y_0, y_1, \dots, y_p et de h . On a ainsi les formules suivantes, où je groupe la formule (a_q) relative au cas $p = 2q$ et la formule (a'_q) relative au cas $p = 2q + 1$:

(a'_0)	$S = h \frac{y_0 + y_1}{2},$
(a_1)	$S = h \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6},$
(a'_1)	$S = h \frac{y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3}{8},$
.....

La formule (a_q) relative au cas $p = 2q$ s'applique également au cas $p = 2q + 1$, tout aussi bien que la formule (a'_q) . Considérons, par exemple, avec $q = 1$, le polynome $ax^3 + bx^2 + cx + d$, et donnons à x , comme on le peut, les valeurs

$$x = -\eta, 0, \eta \quad \left(\eta = \frac{h}{2} \right);$$

on a

$$\begin{aligned} y_0 + y_2 &= 2b\eta^2 + 2d, \\ y_1 &= d, \\ S &= 2b\frac{\eta^3}{3} + 2d\eta = \frac{\eta}{3}(2b\eta^2 + 6d), \end{aligned}$$

où entrent seulement b et d , que l'on peut éliminer; on a bien

$$S = \frac{h}{6}(y_0 + y_2 + 4y_1).$$

Observons en passant que, pour la formule (a'_1) , par exemple, on a un calcul simple en prenant, comme on le peut,

$$x = -3\theta, -\theta, \theta, 3\theta \quad \left(2\theta = \frac{h}{3} \right).$$

[On lit, dans le *Traité d'Analyse* de Rouché et Lévy (t. II, p. 312), que la règle des trois niveaux

$$V = \frac{h}{6}(B + 4B' + B'')$$

a été donnée par Képler pour le cas où l'aire de la section est une fonction du second degré de la cote du plan sécant : c'est la formule (a_1) pour le cas où $f(x)$ est un polynome du second degré; Newton a donné la formule (a'_1) pour un polynome du troisième degré; Catalan a montré (*Nouvelles Annales*, 1857, p. 312) que la formule (a_1) s'applique aussi à un polynome du troisième degré.

Cotes a donné les valeurs des coefficients pour les formules suivantes, jusqu'à la formule (a_3) inclusivement (*De methodo differentiali Newtoniana*); pour la formule (a_2) , ces coefficients sont

$$7, \quad 32, \quad 12, \quad 32, \quad 7.$$

Maleyx a montré (*Nouvelles Annales*, 1880, p. 543) que la formule (a_q) s'applique à un polynome de degré $p = 2q + 1$.]

b. La fonction $f(x)$ étant maintenant quelconque, si l'on pose

$$\Delta_1 = f'(\beta) - f'(x), \quad \Delta_3 = f'''(\beta) - f'''(x), \quad \dots,$$

on a les formules suivantes :

$$(A'_0) \quad S = h \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \dots,$$

$$(A_1) \quad S = h \frac{f(x) + 4f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f(\beta)}{6} + \dots,$$

$$(A'_1) \quad S = h \frac{f(\alpha) + 3f\left(\alpha + \frac{h}{3}\right) + 3f\left(\alpha + \frac{2h}{3}\right) + f(\beta)}{8} + \dots,$$

$$(A_2) \quad S = \frac{7f(\alpha) + 32f\left(\alpha + \frac{h}{4}\right) + 12f\left(\alpha + \frac{2h}{4}\right) + \dots + 7f(\beta)}{90} + \dots,$$

les termes non écrits étant successivement

$$\begin{aligned} (A'_0) & (A_1 h^2 \Delta_1 + A_2 h^4 \Delta_3 + A_3 h^6 \Delta_5 + \dots + A_n h^{2n} \Delta_{2n-1}) + A_{n+1} h^{2n+2} f^{2n+2}(\xi), \\ (A_1) & (B_2 h^4 \Delta_3 + B_3 h^6 \Delta_5 + \dots + B_n h^{2n} \Delta_{2n-1}) + B_{n+1} h^{2n+2} f^{2n+2}(\xi), \\ (A'_1) & (B'_2 h^4 \Delta_3 + B'_3 h^6 \Delta_5 + \dots + \dots) + \dots, \\ (A_2) & (C_3 h^6 \Delta_5 + \dots + \dots) + \dots, \\ (A'_2) & (C'_3 h^6 \Delta_5 + \dots + \dots) + \dots, \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

les coefficients A, B, B', ... étant des coefficients numériques, ξ désignant un nombre compris entre α et β .

Quand on prend $f(x), f\left(\alpha + \frac{h}{p}\right), \dots$, avec $p = 2q$ ou $p = 2q + 1$, on a, après le terme en h , un terme en $h^{2(q+1)}$.

Relativement à la structure de ces formules, on peut observer que, si l'on échange α et β , chacun des termes du second membre prend la valeur opposée à celle qu'il avait. La formule (A'_0) est la formule d'Euler-Maclaurin; l'expression du reste est due à Malmsten.

Je reviendrai plus loin sur les autres formules.

c. On peut calculer les coefficients numériques en prenant $f(x) = e^x$, et en faisant, pour abrégier l'écriture, $\alpha = 0, \beta = h$. Pour la formule d'Euler, après avoir divisé par $e^h - 1$, on a

$$1 = \frac{e^h + 1}{2} \frac{h}{e^h - 1} + A_1 h^2 + \dots = \frac{h}{2} \left(1 + \frac{2}{e^h - 1} \right) + A_1 h^2 + \dots,$$

d'où

$$\frac{h}{e^h - 1} = 1 - \frac{h}{2} - A_1 h^2 - A_2 h^4 - \dots;$$

si l'on compare au développement connu de $\frac{h}{e^h - 1}$, on voit que

$$A_i = (-1)^i \frac{\alpha_i}{(2i)!},$$

les α étant les nombres de Bernoulli, $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$

On a ainsi

$$A_1 = -\frac{1}{12}, \quad A_2 = \frac{1}{720}, \quad A_3 = -\frac{1}{30240}, \quad \dots$$

Pour la formule (A₁), on a

$$1 = \frac{e^h + 4e^{\frac{h}{2}} + 1}{6} \frac{h}{e^h - 1} + B_2 h^2 + \dots = \frac{h}{6} + \frac{2e^{\frac{h}{2}} + 1}{3} \frac{h}{e^h - 1} + B_2 h^2 + \dots,$$

où l'on remplace $\frac{h}{e^h - 1}$ par son développement connu; on trouve ainsi des valeurs que Maclaurin (*voir plus loin*) obtient directement sous la forme

$$B_2 = -\frac{1}{2^2 \times 720}, \quad B_3 = \frac{2^2 + 1}{2^4 \times 30240}, \quad \dots$$

On a de même

$$B'_2 = -\frac{1}{3^2 \times 720}, \quad B'_3 = \frac{3^2 + 1}{3^4 \times 30240}, \quad \dots$$

On a encore

$$C_3 = -\frac{1}{64 \times 30240};$$

la valeur donnée par Maclaurin est fautive.

d. Si l'on prend seulement le terme en h au second membre de chacune de ces formules, l'expression du reste est

$$\begin{aligned} (A'_0, n = 0), & \quad -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \\ (A_1, n = 1), & \quad -\frac{h^5}{2^2 \times 720} f^{IV}(\xi), \\ (A'_1, n = 1), & \quad -\frac{h^5}{3^2 \times 720} f^{IV}(\xi), \\ (A_2, n = 2), & \quad -\frac{h^7}{64 \times 30240} f^{VI}(\xi), \\ \dots\dots\dots, & \quad \dots\dots\dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite, l'exposant de h étant $2q + 3$, la dérivée étant d'ordre $2q + 2$. Lorsque $f(x)$ est un polynôme de degré $2q$ ou $2q + 1$ indifféremment, la dérivée f^{2q+2} est identiquement nulle et l'on a les formules (a_q) et (a'_q) .

2. Soit à calculer l'intégrale $\int_{\alpha}^{\lambda} f(x) dx$, l'intervalle $\beta - \alpha$, que nous désignerons par H , étant un peu grand. Décomposons cet intervalle total en k intervalles égaux

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta = \dots = \lambda - z = \frac{H}{k} = h,$$

à chacun desquels nous appliquerons l'une des formules précédentes, et faisons la somme des résultats obtenus. Nous aurons facilement, par la formule d'Euler,

$$[A_0] \quad \int_{\alpha}^{\lambda} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(\alpha) + 2f(\beta) + \dots + 2f(z) + f(\lambda)] \\ + (A_1 h^2 \Delta_1 + A_2 h^4 \Delta_3 + \dots + A_n h^{2n} \Delta_{2n-1}) \\ + A_{n+1} h^{2n+3} f^{2n+2}(\xi) \times k,$$

Δ_1 représentant $f'(\beta) - f'(\alpha)$, ..., ξ étant compris entre α et λ .

Cette formule, limitée au terme en h , est une formule bien connue de quadrature approchée; l'expression du reste est alors

$$- \frac{h^3}{12} f''(\xi) k.$$

On a de même

$$[A_1] \quad \int_{\alpha}^{\lambda} f(x) dx = \frac{h}{6} \left[f(\alpha) + 4f\left(\alpha + \frac{h}{2}\right) + 2f(\beta) \right. \\ \left. + 4f\left(\beta + \frac{h}{2}\right) + 2f(\gamma) + \dots + f(\lambda) \right] \\ + (B_2 h^4 \Delta_3 + \dots + B_n h^{2n} \Delta_{2n-1}) \\ + B_{n+1} h^{2n+3} f^{2n+2}(\xi) \times k.$$

Limitée au terme en h , cette formule est la formule de Simpson; l'expression du reste est alors

$$- \frac{h^5}{2^2 \times 720} f^{iv}(\xi) k,$$

et ainsi de suite.

Dans chaque exemple, on choisira le mieux possible les trois nombres p , k et n . Si la précision cherchée est grande, on fera croître simultanément ces trois nombres en gardant entre eux un certain

équilibre. M. Paul Lévy, dans sa Communication de janvier, avait fait cette remarque relativement aux nombres k et n , pour le cas de la formule d'Euler qui correspond à $p = 1$.

3. Maclaurin, après avoir retrouvé la formule d'Euler, obtient comme il suit les formules (A_1) et (A'_1) , sauf l'expression du reste (*Traité des fluxions*, n° 848).

Il écrit d'abord

$$S = h \frac{f(x) + f(\lambda)}{2} + A_1 h^2 \Delta_1 + A_2 h^4 \Delta_3 + A_3 h^6 \Delta_5 + \dots;$$

en appliquant cette même formule aux p intervalles égaux (α, β) , (β, γ) , ..., comme on vient de le dire, il écrit

$$S = \frac{h}{p} \left[\frac{f(x) + f(\lambda)}{2} + f(\beta) + \dots + f(x) \right] \\ + A_1 \frac{h^2}{p^2} \Delta_1 + A_2 \frac{h^4}{p^4} \Delta_3 + A_3 \frac{h^6}{p^6} \Delta_5 + \dots;$$

l'élimination de Δ_1 donne

$$S = \frac{h}{p+1} \left\{ \frac{f(x) + f(\lambda)}{2} + \frac{p[f(\beta) + \dots + f(x)]}{p-1} \right\} \\ - \frac{A_2}{p^2} h^4 \Delta_3 - \frac{A_3(p^2+1)}{p^4} h^6 \Delta_5 - \dots,$$

le premier terme non écrit renfermant $p^4 + p^2 + 1$, ...

Pour $p = 2$, on obtient la formule (A_1) ; pour $p = 3$, on a la formule (A'_1) .

Maclaurin obtient la formule (A_2) d'une manière analogue. Il écrit d'abord, d'après la formule (A_1) ,

$$S = h \frac{f(\alpha) + 4f(\gamma) + f(\varepsilon)}{6} + B_2 h^4 \Delta_3 + \dots;$$

en appliquant cette même formule aux deux intervalles (α, γ) et (γ, ε) , il écrit

$$S = \frac{h}{2} \frac{f(\alpha) + 4f(\beta) + 2f(\gamma) + 4f(\delta) + f(\varepsilon)}{6} + B_2 \frac{h^4}{16} \Delta_3 + \dots;$$

l'élimination de (Δ_3) donne la formule cherchée.

Le procédé de Maclaurin n'est pas applicable au delà de la formule (A_2) . Si l'on essaie, par exemple, de déduire la formule (A_3) de la formule (A_2) en éliminant Δ_3 , il faut considérer huit intervalles, tandis que la formule (A_3) suppose seulement six intervalles.

L'expression du reste, pour le cas où l'on prend comme valeur approchée

$$S = h \frac{f(x) + 4f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f(\beta)}{6},$$

à savoir

$$- \frac{h^5}{2^2 \times 720} f^{IV}(\xi),$$

se trouve dans les *Leçons d'Algèbre et d'Analyse* de Tannery.

J'ai indiqué les formules (A) sans démonstration dans les *Nouvelles Annales*, en 1910; je ne connaissais pas alors les recherches de Maclaurin, et je les ai connues seulement depuis la séance dans laquelle j'ai fait la Communication que je développe ici. Mon but, en rédigeant cette Note, a été de provoquer une démonstration simple de ces formules, y compris l'expression du reste.

SÉANCE DU 25 MARS 1914.

PRÉSIDENCE DE M. VESSIOT.

Élections : Sont élus à l'unanimité membres de la Société, M. W. Goloubeff, présenté par MM. Hadamard et Montel, et M. H. Cédié, présenté par MM. Kœnigs et Léauté.

M. le Président fait part à la Société de la mort de M. François Cosserat et de celle de M. Félix Lucas : sur sa proposition, la séance est levée en signe de deuil.

Voici le texte du discours prononcé par M. le Président aux obsèques de M. F. Cosserat :

Je viens apporter à François Cosserat l'hommage, douloureusement ému, de la Société mathématique de France, dont il était le président il y a quelques mois encore. Le deuil que sa mort cause à notre Société m'atteint encore personnellement, en raison des liens de vieille camaraderie et d'amitié qui m'unissent à son frère, notre collègue aussi, doublement frappé, comme frère et comme collaborateur scientifique, par ce coup foudroyant. Et c'est avec une émotion profonde que j'essaierai de dire combien grande est la perte que viennent d'éprouver la Société mathématique et la Science française elle-même.

François Cosserat appartenait à notre Société depuis 1896. C'est à cette époque qu'il se révéla au public mathématique en publiant dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, en collaboration avec son frère, un Mémoire sur la *Théorie de l'élasticité*, où les principes classiques de cette branche de la Physique mathématique étaient présentés sous une forme ingénieuse et nouvelle, par l'application des idées qui venaient de renouveler les fondements de la Géométrie.

Il serait indiscret et téméraire de chercher ce que cette collaboration, dont le mystère même est touchant, a dû à l'un et à l'autre des deux frères; de chercher auquel revient plus particulièrement telle ou telle des qualités par lesquelles se distinguent ces productions : l'ingéniosité et l'élégance géométriques, l'habileté analytique, la profondeur des idées directrices, et leur puissance d'adaptation aux applications mécaniques et physiques. Bornons-nous à constater combien elle fut féconde, et à la saluer respectueusement, à l'heure où la mort est venue la rompre, avant qu'elle ait porté tous les fruits qu'on en pouvait attendre.

De 1898 à 1908, François et Eugène Cosserat publièrent, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, une suite de Notes sur le problème de l'équilibre élastique, où ils jetaient un jour nouveau sur la vraie nature mathématique de ce difficile problème, dont ils donnaient la solution dans des cas importants. En même temps, ils étaient conduits, par l'étude même de l'élasticité, à élaborer, sous le nom de *Théorie de l'action euclidienne*, une théorie mathématique des phénomènes matériels, tendant à donner à la Mécanique et à la Physique théorique une forme déductive irréprochable, fondée sur l'idée moderne et fondamentale des invariants différentiels, assez souple pour pouvoir s'adapter aux découvertes physiques les plus récentes, et comprenant la Mécanique classique comme un cas particulier de première approximation.

La première partie de cette théorie, consacrée à la Mécanique proprement dite, se trouve exposée dans des Notes étendues de cette belle édition française de la *Physique* de Chwolson, qui est ainsi l'œuvre commune de la famille Cosserat. Elle a été résumée par leurs auteurs dans le *Traité classique* de M. Appell, où les autres recherches de François et Eugène Cosserat avaient déjà pris place. Elle devait être continuée, dans de nouvelles études, de manière à conduire naturellement aux principes de la théorie de la chaleur et aux doctrines électriques actuelles.

En nommant François Cosserat à sa vice-présidence, puis, en 1913, à sa présidence, la Société mathématique ne reconnaissait pas seule-

ment la haute valeur de son œuvre mathématique ; elle y voyait le précieux avantage d'appeler à la diriger un homme d'une égale valeur technique et d'une grande expérience ; elle marquait ainsi son désir constant de ne pas séparer les Mathématiques abstraites des Mathématiques appliquées, dont l'influence réciproque est si indispensable au progrès de la Science tout entière. Elle fut profondément reconnaissante à François Cosserat d'avoir accepté des fonctions qui s'ajoutaient à ses occupations professionnelles, déjà si lourdes et si absorbantes ; elle lui fut plus reconnaissante encore de la conscience, du zèle et de la parfaite simplicité avec lesquelles il les remplit.

Il y a quelques jours à peine, nous étions heureux de le revoir à notre dernière séance mensuelle, heureux de retrouver en lui cet accueil toujours plein, dans sa délicate réserve, de douceur affable et de bonté, qui rendait si sympathique cet homme de haute valeur et de grande modestie, qu'on sentait immédiatement si sûr, si foncièrement droit et loyal. Sa mort prématurée est pour nous tous un deuil que nous ressentons comme des amis ; et c'est avec une affectueuse émotion que nous adressons à François Cosserat le dernier adieu de la Société mathématique.

Que sa famille veuille bien agréer toutes nos condoléances et nous permettre de nous associer respectueusement à sa douleur !

SÉANCE DU 1^{er} AVRIL 1914.

PRÉSIDENTE DE M. VESSIOT.

La séance a eu lieu à la Sorbonne, dans la salle n°3, galerie Richelieu. Les membres de la Conférence internationale de l'Enseignement mathématique avaient répondu en grand nombre à l'invitation de prendre part à cette séance.

M. le Président prononce le discours suivant :

MESSIEURS,

La Société mathématique est heureuse de recevoir aujourd'hui MM. les Membres de la Conférence internationale de l'Enseignement mathématique, et de manifester ainsi à la fois l'intérêt qu'elle porte

aux travaux de cette Conférence et les sentiments de sympathie qu'elle éprouve pour les savants qui vont y prendre part.

La Commission internationale de l'Enseignement mathématique a été instituée par le quatrième Congrès international mathématique tenu à Rome en 1908, sur la proposition de M. le Prof. Dav. Eug. Smith (New-York). Son Comité central est composé aujourd'hui de MM. les Prof. F. Klein (Göttingue), Président; G. Greenhill (Londres), vice-président; Fehr (Genève), Secrétaire général; Castelnuovo (Rome), Czuber (Vienne), Hadamard (Paris); des délégués de vingt-six États participants la constituent. Son but est de faire une étude d'ensemble de l'enseignement mathématique des divers pays, dans les divers types d'écoles et aux divers degrés; cette étude doit mettre en évidence les tendances actuelles de l'enseignement et les besoins auxquels il paraît désirable de le voir s'adapter; la comparaison des résultats de cette enquête, l'échange de vues qu'elle aura suscité, contribuera, en éclairant les professeurs, à perfectionner l'enseignement mathématique et à le rendre plus fructueux.

En dehors des réunions préparatoires de son Comité central, la Commission s'est réunie à Bruxelles en 1910, à Milan en 1911 et, en 1912, à Cambridge, à l'occasion du cinquième Congrès international des mathématiciens. Son œuvre est considérable, puisque 280 Rapports ont été publiés en 150 fascicules ou volumes, représentant un ensemble de plus de 900 pages in-8°.

Ce résumé rapide suffit à montrer l'utilité que présente, pour le développement des Sciences mathématiques, auquel notre Société s'efforce de contribuer, l'œuvre de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

La réunion actuelle de la Commission internationale a pour objet principal l'étude des deux questions suivantes :

- a. Résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement moyen;
- b. Place et rôle des mathématiques dans l'enseignement technique supérieur.

Ces deux questions qu'elle va étudier ont pour nous un intérêt particulier : non seulement parce que nous comptons, parmi nos membres, beaucoup de professeurs de l'enseignement secondaire et de nombreux techniciens, qu'elles touchent directement; mais, plus encore, parce que la diffusion des notions mathématiques fondamentales dans l'enseignement moyen et l'étude des conditions d'applica-

tion des mathématiques aux sciences expérimentales sont d'une importance essentielle pour les progrès de la Science mathématique elle-même.

Il nous a donc paru que la Société mathématique ne pouvait pas rester étrangère à cette Conférence. Nous avons considéré aussi que la présence à Paris des mathématiciens étrangers qui viennent y prendre part, nous créait l'agréable devoir de les réunir.

Nous n'oublions pas, en effet, avec quelle cordialité les mathématiciens français ont été reçus à l'étranger dans les précédentes réunions internationales, et nous sommes heureux de prouver le souvenir reconnaissant que nous gardons de ces amicales réceptions.

La Société mathématique considère, du reste, comme une de ses fonctions essentielles de resserrer les liens de camaraderie scientifique entre les mathématiciens français et étrangers, et de faciliter entre eux les fructueux échanges d'idées. Notre *Bulletin* publie des traductions de Mémoires étrangers destinées à permettre en France la lecture de ces travaux et la diffusion des idées nouvelles qu'ils contiennent. Nous tenons à rappeler aussi que plus d'un tiers des membres de la Société mathématique est composé de savants étrangers. J'ajoute qu'il nous serait agréable de voir s'augmenter encore le nombre de nos collègues étrangers.

Je souhaite donc à MM. les Membres de la Commission internationale qui ont bien voulu se rendre à notre invitation, la plus cordiale bienvenue : ceux d'entre eux qui sont nos collègues de la Société mathématique sont naturellement chez eux ici; nous prions les autres de se considérer aussi, ce soir, comme des nôtres; et nous souhaitons que tous emportent de cette réunion, simple et amicale, un agréable souvenir.

Je salue, tout particulièrement, MM. les membres du Comité central : MM. G. Greenhill, Fehr, Castelnuovo, Czuber; MM. les Rapporteurs Stœckel et Beke, et je prie M. Stœckel de vouloir bien transmettre à M. le Prof. F. Klein, avec nos regrets pour son absence, nos souhaits pour le rétablissement de sa santé.

M. FEHR, secrétaire général de la Conférence, et M. DE DEMECZKY, membre de la délégation hongroise, remercient M. le Président de ses paroles et la Société de son accueil.

Communications :

M. Hadamard : *Points-pinces, arêtes de rebroussement et représentation paramétrique des surfaces.*

Les *points-pinces* de Cayley sont assurément, en un sens, une particularité très spéciale, très exceptionnelle des surfaces. Il ne semble pas, au premier abord, qu'il puisse y avoir lieu de s'y arrêter dans un cours d'analyse destiné aux débutants.

Or je me trouve amené presque obligatoirement à y faire une brève allusion dans l'enseignement très condensé cependant que je professe à l'École Polytechnique.

C'est à propos de la représentation paramétrique des surfaces que je suis conduit à opérer ainsi.

Soient les équations

$$(1) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

u et v désignant deux paramètres variables.

On se borne généralement à dire que, u et v variant indépendamment de toutes les manières possibles, ces équations définissent :

a. Une surface si l'on n'a pas simultanément

$$(2) \quad \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \frac{D(z, x)}{D(u, v)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0;$$

b. Une courbe, si ces relations (2) ont lieu ensemble, quels que soient u, v .

J'ai été frappé de ce qu'il y avait d'antiscientifique et, par contre-coup, de vicieux au point de vue éducatif, dans cette énumération volontairement incomplète, faussée, des cas possibles.

Il tombe sous le sens, en effet, que ces cas ne sont pas au nombre de deux mais de quatre, savoir (outre *a* et *b*) :

c. Les trois déterminants s'annulent simultanément en des points isolés;

d. Les trois déterminants (2) s'annulent ensemble en tous les points d'une ligne.

En ce qui concerne ce dernier, il n'y a qu'avantage à l'introduire dans l'enseignement. Il correspond, en effet, à une *arête de rebroussement*.

Quant au cas *c*, on constate que, s'il est réalisé, la surface peut, en général, par une transformation ponctuelle

$$(I) \quad f(x, y, z) = X, \quad g(x, y, z) = Y, \quad h(x, y, z) = Z$$

régulière, à jacobien non nul à l'origine, se ramener à

$$(S_0) \quad Y^2 = XZ^2.$$

Sur celle-ci, il apparaît aisément que l'origine appartient à une ligne double et joue le rôle de *point-pince*.

M. Lebesgue : *Sur les courbes orbiformes, à propos d'une Note récente de M. R. Bricard.*

Étant donné un ensemble de points, il existe une circonférence et une seule qui enveloppe l'ensemble et dont le rayon est minimum. On l'appelle *la circonférence circonscrite à l'ensemble*. A propos d'un article ⁽¹⁾ où M. R. Bricard détermine une limite supérieure du rayon de la circonférence circonscrite aux ensembles dont les points sont au plus à la distance E (élongation) les uns des autres M. Lebesgue développe les considérations suivantes :

On démontre facilement qu'étant donné un ensemble quelconque d'élongation E, il est compris dans un ensemble de même élongation et complet, c'est-à-dire tel qu'on ne pourrait lui ajouter aucun point sans qu'il cesse d'être d'élongation E. Il suffit évidemment de se poser le problème de M. Bricard pour ces ensembles complets. Or ceux-ci sont les domaines convexes qui sont limités par ces courbes qu'Euler a appelées *orbiformes* et qui jouissent de la propriété que deux tangentes menées à une telle courbe parallèlement à une direction quelconque sont toujours à la même distance E indépendante de la direction des tangentes ⁽²⁾.

Si Γ est la circonférence circonscrite à une orbiforme C d'élongation E et si R est le rayon de Γ , la circonférence concentrique à Γ et de rayon E — R est la plus grande circonférence intérieure à C. La circonférence Ω concentrique à Γ et γ et de rayon $\frac{E}{2}$ jouit de la propriété suivante : si l'on établit une correspondance par tangentes parallèles et de même sens entre C et Ω , l'écartement maximum des tangentes correspondantes est plus petit avec cette circonférence Ω qu'avec toute autre par laquelle on pouvait remplacer Ω .

Si l'on définit C par ses tangentes données sous la forme

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p(\varphi) = 0.$$

La recherche de Ω revient à la recherche de la meilleure approximation, au sens de Tchebycheff, de $p(\varphi)$ par une expression de la forme

$$A \sin \varphi + B \cos \varphi + C.$$

Les théorèmes généraux sur l'approximation des fonctions par des

⁽¹⁾ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier 1914.

⁽²⁾ Au sujet de ces courbes, voir *Contribution à l'Étude des courbes convexes*, par Ch. JORDAN et R. FIEDLER (Paris, Hermann, 1912).

suites de Fourier fournissent alors sur Ω des renseignements équivalents à ceux que donnent les raisonnements de M. Bricard et permettent de traiter autrement la question que ce géomètre s'était posée. Le résultat qu'il a obtenu peut, du point de vue actuel, être ainsi énoncé :

De toutes les orbiformes de même élongation, celle qui a le plus grand cercle circonscrit, celle qui a le plus petit cercle inscrit, celle qui, au point de vue tangentiel, s'écarte le plus d'une circonférence, c'est l'orbiforme équilatérale; c'est-à-dire celle qu'on obtient en traçant, de chacun des sommets d'un triangle équilatéral comme centre, l'arc sous-tendu par le côté opposé.

Les minimum et maximum corrélatifs des maximum et minimum qui sont ainsi donnés par l'orbiforme équilatérale sont obtenus pour l'orbiforme circulaire.

Toutes les orbiformes de même longueur ayant même élongation, celle de ces courbes qui a la plus grande aire est le cercle; M. Lebesgue énonce que celle qui a la plus petite aire est l'orbiforme équilatérale.

La séance a été suivie d'une réception amicale.

SÉANCE DU 22 AVRIL 1914.

PRÉSIDENCE DE M. VESSIOT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Crelier, présenté par MM. Bioche et Hadamard; de Donder, présenté par MM. P. Lévy et Vessiot; Lauer, présenté par MM. Bouligand et Montel; Perès, présenté par MM. Hadamard et Montel.

Communications :

M. Chatelet : *Sur une Communication de M. Georges Giraud.*

Il s'agit de trouver une condition pour qu'on puisse résoudre en nombre entiers, quel que soit ε , le système d'inégalités :

$$(1) \quad |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m + b_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

La condition donnée par M. G. Giraud résulte immédiatement de

quelques considérations que j'ai développées dans mon Livre : *Leçons sur la théorie des Nombres* (Note I, p. 130 et suiv.) et dont je transcris ci-dessous l'essentiel pour la question considérée.

Considérons les p nombres :

$$(2) \quad \xi_{i1} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{im}x_m \\ (i = 1, 2, \dots, p; x_1, x_2, \dots, x_m \text{ entiers}).$$

On peut les considérer comme des coordonnées de points d'un espace à p dimensions. Ils y formeront ce que j'ai appelé dans mon Livre *module de points*, généralisation des *grilles de points*, des *sommets de réseaux de parallélépipèdes*, etc. Si les formes ξ_i sont indépendantes, ce qu'on peut toujours supposer, ces points seront répartis dans tout l'espace, c'est-à-dire n'appartiendront pas à une *variété linéaire* ou *sous-espace* d'ordre inférieur à p .

Or, j'ai indiqué (théorème I de la Note citée) comment se répartissent les points d'un tel module ou réseau. Ou bien ils sont isolés (module type), dans ce cas le problème n'est possible que si (b_1, b_2, \dots, b_p) est un point du module et alors les p premiers membres des inégalités peuvent s'annuler pour des valeurs entières des x ; ou bien les points se répartissent en sous-espaces ou variétés linéaires (P) de dimension k . Dans chaque variété les points du module qui y sont contenus forment un *ensemble dense*. Parmi ces variétés, l'une d'entre elles (P_0) passe par l'origine des coordonnées; les autres s'en déduisent en menant des *parallèles* à (P_0) par tous les points d'un certain module type (à points isolés) d'ordre $p - k = q$.

En langage algébrique, (P_0) peut être défini par k relations

$$(3) \quad u_{i1}\xi_1 + \dots + u_{ip}\xi_p = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

et les variétés (P) par les équations

$$(3') \quad u_{i1}\xi_1 + \dots + u_{ip}\xi_p = \lambda_1 x_{i1} + \dots + \lambda_q x_{iq} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

les λ étant des *indéterminées entières* quelconques, et les α certaines quantités déterminées.

C'est dire que si dans (3') on remplace les ξ par les valeurs (2), on pourra trouver des valeurs entières des λ telles que ces équations soient vérifiées. Si, réciproquement, on se donne un système de valeurs entières des λ , il y aura une infinité de valeurs (2) vérifiant les équations (3'), d'aucunes se rapprochant autant qu'on le voudra d'une solution donnée *a priori* de ces mêmes équations pour lesdites valeurs des λ .

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour la possibilité des inégalités est que (b_1, b_2, \dots, b_p) vérifie les équations (3') pour un système de valeurs entières des λ . C'est la condition donnée par M. G. Giraud, à une combinaison près des équations (3').

Je ne donne pas ceci comme une réclamation de priorité : la Note que je cite m'a été inspirée par le Mémoire de M. Esclangon sur les fonctions quasi-périodiques. Les démonstrations que je donne dans cette Note sont des conséquences assez immédiates d'un principe général (*Leçons*, p. 29) que j'avais déjà indiqué dans ma Thèse et que je crois avoir été le premier à énoncer explicitement. Mais ce même principe m'avait été lui-même inspiré par de nombreuses démonstrations de nombreux auteurs. Ce n'est donc pas pour moi que je serais en droit de réclamer une priorité.

Mais je pense que le mode de démonstration que je préconise ainsi est peut-être, à certains points de vue, préférable à celui de M. Giraud, il a surtout le gros avantage de ne pas faire intervenir les fractions continues dans une question où elles n'ont pas une utilité essentielle (sur la non-nécessité de cette introduction, j'ai indiqué quelques considérations dans mes *Leçons*, p. 35, en note).

M. Coblyn : *Classification des transformations quadratiques* (suite et fin).

CLASSE IV. — *Transformations à axe de correspondance quelconque, T étant quadratique.*

Soit $D = 0$ l'axe de correspondance appartenant aux deux caractéristiques; les formules de la transformation sont :

$$(IV) \quad \frac{x'}{xD_4 - DD_1} = \frac{y'}{yD_4 - DD_2} = \frac{1}{D\Delta_3 + D_4},$$

où

$$(1) \quad D = ux + vy + w,$$

la conique $uU + vV + wT = 0$ contient la droite D et l'on a

$$(2) \quad uU + vV + wT = D(D_4 - uD_1 - vD_2 + w\Delta_3) = DD_5.$$

D_5 est appelée la *droite conjointe*.

Transformation univoque. — Un sommet du triangle ABC circonscrit aux trois coniques U, V et T est le point de rencontre A de D et de D_4 ; comme la conique (2) est également circonscrite à ce triangle et que la droite D coupe U, V et T en A et en des points forcément

distincts, on en déduit que D_3 est le côté BC. Si l'on écrit que les coniques U, V et T coupent D_3 aux deux mêmes points, la transformation sera univoque. En désignant par x_1, y_1 les coordonnées du point de rencontre, forcément à distance finie, de D et de D_3 , la transformation univoque de la classe IV sera définie par les relations suivantes :

$$(IV)_U \left\{ \begin{array}{l} D = (x-x_1)\sin\varphi - (y-y_1)\cos\varphi \quad D_3 = (x-x_1)\sin\varphi_1 - (y-y_1)\cos\varphi_1 \\ D_1 = -x_1\Delta_3 + a_1\cos\varphi_1 D_4 + b_1 D_3 \\ D_2 = -y_1\Delta_3 + a_1\sin\varphi_1 D_4 + b_2 D_3 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} a_1, b_1 \text{ et } b_2 \text{ arbitraires} \\ \frac{x'}{xD_4 - \frac{DD_1}{a_1\sin(\varphi-\varphi_1)}} = \frac{y'}{yD_4 - \frac{DD_2}{a_1\sin(\varphi-\varphi_1)}} = \frac{1}{\frac{D\Delta_3}{a_1\sin(\varphi-\varphi_1)} + D_4} \end{array} \right.$$

Ces formules établies dans le cas où les coefficients u, v, w de la droite D ne sont ni nuls, ni infinis, s'appliquent même dans ce cas.

CLASSE V. — Transformations à axe de correspondance quelconque, T étant linéaire.

$$(V) \quad \frac{x'}{xD_3 - DD_1} = \frac{y'}{yD_3 - DD_2} = \frac{1}{D_3}.$$

Cette transformation se déduit de (IV) en faisant $\Delta_3 \equiv 0$.

Transformation univoque. — On démontre que les droites D, D_1 , D_2 et D_3 sont parallèles et l'on établit les formules :

1° Cas général

$$(V)_{U_1} \quad \Delta = y - mx,$$

$$\frac{x'}{v_3 x \left[\Delta + \frac{w_2 - m w_1}{v_2 - m v_1} \right] - (v\Delta + w)(v_1\Delta + w_1)} = \frac{y'}{v_3 y \left[\Delta + \frac{w_2 - m w_1}{v_2 - m v_1} \right] - (v\Delta + w)(v_2\Delta + w_2)} = \frac{1}{v_3 \left[\Delta + \frac{w_2 - m w_1}{v_2 - m v_1} \right]};$$

2° L'axe de correspondance est parallèle à l'un des axes de coordonnées

$$(V)_{U_2} \quad \left\{ \begin{array}{l} D = ux + w, \quad D_2 = u_2x + w_2, \quad D_3 = u_3x + w_3, \\ \frac{x'}{D_3 \left(x - D \frac{u_1}{u_3} \right)} = \frac{y'}{yD_3 - DD_2} = \frac{1}{D_3}. \end{array} \right.$$

Cas particulier. — L'axe de correspondance est la droite de l'infini :

$$(V_1) \quad \frac{x'}{x(ax + by) + D_1} = \frac{y'}{y(ax + by) + D_2} = \frac{1}{D_3}.$$

Transformation univoque :

$$(V)_{U_3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x'}{x(ax + by) + D_1} = \frac{y'}{y(ax + by) + \frac{x D_3 - u_3 D_1}{v_3}} = \frac{1}{D_3}, \\ D_3 = u_3 x + v_3 y + w_3. \end{array} \right.$$

CLASSE VI. — *Transformations à axe de correspondance confondu avec l'un des axes de coordonnées.* — Soit $x = 0$ l'axe de correspondance. Groupons dans U, V et T les termes contenant x et les termes indépendants de x :

$$\frac{x'}{x D_1 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3} = \frac{y'}{x D_2 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3} = \frac{1}{x D_3 + c_1 y^2 + c_2 y + c_3}.$$

Écrivons que les caractéristiques contiennent l'axe $x = 0$:

$$(VI) \quad \frac{x'}{x D_1} = \frac{y'}{x D_2 + y(a y + b)} = \frac{1}{x D_3 + a y + b}.$$

Les coniques U, V et T passent par le point A $\left(0, -\frac{b}{a}\right)$.

Transformation univoque. — La droite D_1 est la droite conjointe et contient les sommets B et C du triangle inscrit dans les coniques U, V et T.

On obtient les subdivisions suivantes :

1° *La droite conjointe ne passe pas par l'origine*

$$(VI)_{U_1} \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = u_1 x + v_1 y + w_1, \\ \frac{x'}{x D_1} = \frac{y'}{x D_2 + y(a y + b)} \\ = \frac{1}{x \left[\frac{\alpha D_1 - v_1 D_2 + u_1(a y + b)}{w_1} \right] + a y + b}. \end{array} \right.$$

Cas particuliers. — La conique T contient la droite conjointe; la droite conjointe est la droite de l'infini, T étant linéaire.

2° La droite conjointe passe par l'origine

$$\begin{aligned} (VI)_{U_2} \quad & \frac{x'}{x(u_1x + v_1y)} \\ &= \frac{y'}{x \left[u_2x + v_2y + \frac{(w_3v_1 - au_1)(u_2v_1^2 - v_1v_2u_1 + au_1^2)}{v_1^2(u_3v_1 - v_3u_1)} \right] + ay^2} \\ &= \frac{1}{x(u_3x + v_3y + w_3) + ay}. \end{aligned}$$

3° La conique V contient la droite conjointe

$$(VI)_{U_3} \quad \frac{x'}{x(u_1x + v_1y)} = \frac{y'}{(u_1x + v_1y)(u_2x + v_2y + w_2)} = \frac{1}{xD_3 + v_1(v_2y + w_2)}.$$

4° La droite conjointe est la droite de l'infini, T étant quadratique

$$(VI)_{U_4} \quad \frac{x'}{a_1x} = \frac{y'}{x(a_2\Delta + b_2) + by} = \frac{1}{x(a_3\Delta + b_3) + b}.$$

Transformation quadratique perspective. — En perspective d'observation, on est amené à considérer la transformation quadratique univoque

$$\frac{x'}{xyd} = \frac{y'}{yd^2} = \frac{1}{d^2 + x^2},$$

d étant une constante, la distance de l'œil au tableau.

La transformation inverse est

$$\frac{x}{x'd} = \frac{y}{x'^2 + y'^2} = \frac{1}{y'}.$$

Ces transformations ont pour axe de correspondance $x = 0$; on voit, pour la première, que la conique V contient la droite conjointe [transformation $(VI)_{U_2}$]; pour la seconde, que la droite conjointe est la droite de l'infini, T étant linéaire [transformation $(VI)_{U_4}$, cas particulier].

CLASSE VII. — *Les caractéristiques n'ont pas de partie commune.* — C'est la classe la plus générale qui comprend toutes les transformations ne rentrant pas dans les classes précédentes. Pour établir des subdivisions dans cette catégorie, il faudra chercher d'autres critères que les caractéristiques ou l'existence d'un pôle.

SÉANCE DU 13 MAI 1914.

PRÉSIDENTE DE M. VESSIOT.

*Conférence de M. Harald Bohr, Sur la fonction $\zeta(s)$
de Riemann.*

La fonction $\zeta(s)$ de Riemann, où $s = \sigma + it$ désigne la variable complexe, est définie, comme on sait, dans le demi-plan $\sigma > 1$ par la série absolument convergente

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

La série étant uniformément convergente pour $\sigma > 1 + \delta$ ($\delta > 0$), on voit immédiatement que, dans ce demi-plan $\sigma > 1$, la fonction $\zeta(s)$ est une fonction holomorphe. A la vérité, la fonction $\zeta(s)$ définie par la série pour $\sigma > 1$ existe, comme l'a prouvé Riemann, dans tout le plan; c'est une fonction uniforme et méromorphe, ayant pour seule singularité un pôle simple au point $s = 1$; autrement dit, la fonction $\zeta(s) \cdot (s - 1)$ est une fonction entière. Pour mettre en évidence le fait que la fonction $\zeta(s)$, définie d'abord seulement pour $\sigma > 1$, peut être prolongée dans tout le plan comme une fonction uniforme et méromorphe, le procédé suivant est peut-être aujourd'hui le plus simple. On multiplie la fonction $\zeta(s)$ par le facteur $(1 - 2^{1-s})$, qui a un zéro pour $s = 1$ et l'on en déduit immédiatement que, pour $\sigma > 1$,

$$\zeta(s) (1 - 2^{1-s}) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots,$$

c'est-à-dire que $\zeta(s) (1 - 2^{1-s})$ est représentée par la série de zêta avec des signes alternés. Mais cette dernière série est, comme je l'ai prouvé, sommable dans tout le plan par les moyennes de Cesaro et, même uniformément dans tout domaine fini; c'est un cas spécial de la théorie générale de la sommabilité des séries de Dirichlet. On en déduit immédiatement que cette série représente une fonction $\varphi(s)$ régulière dans tout le plan, c'est-à-dire une fonction entière.

Ainsi $\zeta(s) = \frac{\varphi(s)}{1 - 2^{1-s}}$ existe dans tout le plan, et c'est une fonction

uniforme et méromorphe, pour laquelle on peut montrer aisément que, parmi les pôles éventuels, c'est-à-dire les zéros $1 + \frac{2\pi i\nu}{\log 2}$ du dénominateur $1 - 2^{1-s}$, c'est seulement le point $s = 1$ qui est véritablement un point singulier de $\zeta(s)$.

Pour prolonger $\zeta(s)$ définie d'abord pour $\sigma > 1$ sur tout le plan complexe, Riemann a suivi la voie suivante : Il représente $\zeta(s)$, multiplié par un facteur simple, à l'aide d'une intégrale complexe, prise sur un certain contour. De cette représentation il ne conclut pas seulement que $(s-1)\zeta(s)$ est une fonction entière, mais aussi, d'une manière très élégante, en déformant le chemin de l'intégration, que $\zeta(s)$ satisfait à une équation fonctionnelle de la forme suivante :

$$\zeta(s) = \zeta(1-s) F(s),$$

où $F(s)$ est une fonction composée de la fonction $\Gamma(s)$ et des fonctions élémentaires, c'est-à-dire une fonction que l'on connaît presque complètement. Cette équation fonctionnelle combine les valeurs de la fonction $\zeta(s)$ aux deux points s et $1-s$, c'est-à-dire en deux points symétriquement situés par rapport au point $s = \frac{1}{2}$. Ainsi, si l'on connaît par exemple, l'allure de $\zeta(s)$ dans le demi-plan $\sigma > \frac{1}{2}$, l'équation fonctionnelle permet d'en étudier l'allure dans le demi-plan $\sigma < \frac{1}{2}$; ou bien, si par exemple on a trouvé des propriétés de $\zeta(s)$ pour $\sigma > 1$, l'équation fonctionnelle permet d'en déduire des propriétés pour le demi-plan $\sigma < 0$.

Dans le demi-plan $\sigma > 1$, $\zeta(s)$ est représentée par la série $\sum \frac{1}{n^s}$, mais on a aussi, comme on le démontre immédiatement, une autre représentation dans ce même demi-plan, la représentation suivante par un produit infini

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

où p parcourt à la suite des nombres premiers 2, 3, 5, ...

Il faut remarquer, en passant, que c'est grâce à cette identité, due à Euler,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

que la fonction zêta joue un rôle fondamental dans la théorie des nombres premiers. La raison en est d'une manière générale la suivante. On a ici une identité où, dans l'un des membres, les nombres premiers apparaissent d'une manière explicite, tandis que dans l'autre, ils ne figurent qu'implicitement. Ainsi donc, on peut étudier la série $\sum \frac{1}{n^s}$ sans rien connaître sur les nombres premiers, parce qu'ils ne paraissent pas explicitement, et ayant étudié cette série, on peut par l'identité d'Euler, des propriétés trouvées sur $\zeta(s)$, tirer des conséquences sur les nombres premiers.

La théorie de la fonction zêta est aujourd'hui si vaste, qu'il est impossible dans une conférence de suivre cette théorie dans toutes les directions où elle s'est développée. Je ne m'occuperai pas du tout ici de l'application de la fonction zêta à la théorie des nombres premiers, et me consacrerai entièrement à l'étude de la fonction zêta au point de vue de la théorie des fonctions analytiques. En effet, c'est à l'étude des propriétés analytiques de la fonction zêta que les mathématiciens, dans ces dernières années, se sont de plus en plus attachés, et pour la théorie des nombres premiers, c'est aussi l'étude des propriétés analytiques de zêta, et en particulier l'étude de la situation des zéros, qui est aujourd'hui de la première importance. On a en effet poussé la théorie des nombres premiers plus loin que la connaissance actuelle des propriétés analytiques de $\zeta(s)$ ne peut la soutenir; c'est ainsi qu'on a prouvé, en introduisant des hypothèses sur les zéros de zêta, quelques théorèmes fondamentaux sur les nombres premiers, mais on n'a pas jusqu'ici réussi à vérifier si ces hypothèses sont exactes ou non.

Mais reprenons le fil de notre développement systématique. Du fait que $\zeta(s)$ dans le demi-plan $\sigma > 1$ est représentée par un produit, on conclut immédiatement que $\zeta(s)$ est différent de zéro pour $\sigma > 1$. Soit maintenant s un point du demi-plan $\sigma < 0$. Alors $1 - s$ est un point du demi-plan $\sigma > 1$ et l'équation fonctionnelle

$$\zeta(s) = \zeta(1 - s) F(s)$$

nous montre immédiatement que les zéros de $\zeta(s)$ pour $\sigma < 0$ sont les mêmes que les zéros de $F(s)$, parce que $1 - s$ étant un point du demi-plan $\sigma > 1$, le facteur $\zeta(1 - s)$ est différent de zéro. Mais la fonction $F(s)$, composée de la fonction $\Gamma(s)$ et des fonctions élémentaires, a, comme on le démontre immédiatement, dans le demi-plan $\sigma > 0$ des zéros simples pour $s = -2, -4, -6, \dots$ et seulement en ces points. Il en résulte qu'il en est de même pour $\zeta(s)$. En

résumé, nous avons obtenu ce résultat que $\zeta(s)$ est différent de zéro pour $\sigma > 1$ et que, pour $\sigma < 0$, il a des zéros simples aux points $s = -2, -4, \dots$, et en ces points seulement. On appelle généralement les zéros situés sur l'axe négatif, les *zéros trivials* de $\zeta(s)$.

M. Hadamard et M. de la Vallée-Poussin ont démontré le fait important que, sur la droite $\sigma = 1$, la fonction $\zeta(s)$ est aussi $\neq 0$.

Il en résulte, grâce à l'équation fonctionnelle, que $\zeta(s)$ est $\neq 0$ aussi sur la droite $\sigma = 0$, c'est-à-dire sur l'axe imaginaire. Ainsi, s'il existe des zéros en dehors des zéros trivials sur l'axe négatif, ces zéros appartiennent certainement à la bande $0 < \sigma < 1$, ou, comme l'on dit souvent, à la bande critique de $\zeta(s)$.

On sait que Riemann, dans son célèbre Mémoire sur les nombres premiers, a formulé des hypothèses diverses à l'égard des zéros dans la bande critique, hypothèses qui sont aujourd'hui toutes prouvées, excepté une seule, qu'on désigne comme l'hypothèse de Riemann, et sur laquelle j'insisterai tout à l'heure.

D'abord Riemann a supposé qu'il existe une infinité de zéros ρ dans la bande critique et, de plus, que la fonction $\zeta(s)(s-1)$ est, suivant le langage actuel, une fonction entière du genre 1, c'est-à-dire que $\zeta(s)(s-1)$ est représentée dans tout le plan par le produit canonique

$$(s-1)\zeta(s) = ae^{bs} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}},$$

où a et b sont des constantes, le facteur $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)}$ donne les zéros

trivials $s = -2, -4, \dots$ et ρ parcourt les zéros dans la bande critique. Il est bien connu que M. Hadamard a prouvé la vérité de ces deux hypothèses, à l'aide de la théorie des fonctions entières de genre fini, qu'il a créée dans ce but.

Des recherches de M. Hadamard il résulte en outre que, par exemple, $\sum \frac{1}{|\rho|}$ est divergente, tandis que $\sum \frac{1}{|\rho|^2}$ est convergente. Ces deux derniers résultats sur les zéros ρ donnent, évidemment, des renseignements sur la distribution des ρ . Le premier, c'est-à-dire la divergence de $\sum \frac{1}{|\rho|}$, exprime que les ρ ne tendent pas trop vite vers l'infini, tandis que l'autre, la convergence de $\sum \frac{1}{|\rho|^2}$, donne au contraire une limite inférieure de cette croissance. Mais Riemann a

énoncé une hypothèse beaucoup plus précise sur la distribution des ρ , la voici : Soit T un nombre positif, et soit $N(T)$ le nombre des zéros $\rho = \beta + i\gamma$, pour lesquels $0 < \gamma < T$, c'est-à-dire le nombre des racines non triviales qui sont situées entre l'axe réel et la droite parallèle $t = T$. Alors Riemann a supposé que

$$N(T) = AT \log T + BT + R(T),$$

où A et B sont des constantes numériques, et où le reste $R(T)$ est pour T tendant vers l'infini plus petit que $K \cdot \log T$, K étant une constante, ce qu'on peut écrire avec la notation de M. Landau :

$$N(T) = AT \log T + BT + O(\log T) \text{ (1)}.$$

Remarquons en passant que, pour étudier les zéros de $\zeta(s)$, il suffit d'étudier les zéros dans le demi-plan au-dessus de l'axe réel, car $\zeta(s)$ étant réelle pour s réel prend des valeurs conjuguées en des points s conjugués, et il en résulte que, si $\beta + i\gamma$ est un zéro, $\beta - i\gamma$ en est aussi un, et inversement.

C'est un des grands mérites de M. von Mangoldt dans la théorie des nombres premiers, que d'avoir démontré la vérité de l'hypothèse de Riemann sur $N(T)$. La méthode de démonstration de M. von Mangoldt, qui repose essentiellement sur les résultats de M. Hadamard, peut être esquissée, sans entrer dans les difficultés, comme il suit : Le nombre des racines d'une fonction holomorphe $f(s)$ dans un domaine donné étant égal à l'intégrale $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(s)}{f(s)} ds$ prise sur le contour du domaine, on voit immédiatement que $N(T)$ est égal à $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$, où l'intégrale étant prise sur le contour du rectangle PQRS (*fig. 1*), où par exemple

$$P = 2, \quad Q = 2 + iT, \quad R = -1 + iT, \quad S = -1,$$

et où l'on a évité le pôle $s = 1$ et les zéros éventuels sur la droite $t = T$ par de petits demi-cercles. D'abord, on a $\int_{SP} = \text{const.}$, c'est-à-dire indépendante de T . Ensuite, on prouve facilement, à l'aide de l'iden-

(1) M. Landau désigne par $O[f(t)]$, où $f(t)$ est une fonction positive, toute fonction $g(t)$, qui pour t suffisamment grand est en valeur absolue plus petite que $K \cdot f(t)$.

tité d'Euler, que $\int_{TQ} = O(1)$, c'est-à-dire est plus petite qu'une constante indépendante de T ; et, à l'aide de l'équation fonctionnelle, on trouve sans difficulté que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{RS} = AT \log T + BT + O(1),$$

où A et B sont exactement les constantes numériques de la formule

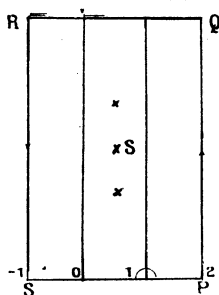


Fig 1.

de Riemann-von Mangoldt. En résumé, nous avons trouvé que

$$N(T) = AT \log T + BT + O(1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{OR} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds.$$

Jusqu'ici, nous n'avons eu aucune difficulté, et, en vérité, l'expression trouvée était connue longtemps avant les recherches de M. von Mangoldt. Il reste à apprécier \int_{OR} , c'est-à-dire l'intégrale sur la droite $2 + iT$, $-1 + iT$ traversant la bande critique. C'est l'évaluation de cette intégrale qui constitue toute la difficulté. Le résultat obtenu par M. von Mangoldt, par des artifices très élégants, est que cette intégrale est égale à $O(\log T)$, c'est-à-dire plus petite que $K \log T$.

Nous nous tournons maintenant vers l'étude d'un autre problème important pour la théorie de la fonction zêta elle-même et pour les applications, savoir le problème concernant la croissance de $\zeta(s)$, quand s tend vers l'infini dans une direction parallèle à la bande critique, c'est-à-dire à l'axe imaginaire.

Soit σ_0 un nombre réel quelconque; on démontre aisément que, sur la droite verticale $\sigma = \sigma_0$, la fonction $\zeta(s)$ ne tend pas vers zéro, mais,

d'autre part, qu'elle ne croît pas plus vite qu'une puissance de l'ordonnée t , c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha = \alpha(\sigma_0)$ de telle manière que

$$\zeta(\sigma_0 + it) = O(t^\alpha),$$

Soit, pour σ_0 fixe, $\mu = \mu(\sigma_0)$ la limite inférieure de toutes les valeurs de α pour lesquelles

$$\zeta(\sigma_0 + it) = O(t^\alpha),$$

c'est-à-dire soit $\mu(\sigma_0)$ le nombre fini non négatif pour lequel $\zeta(\sigma_0 + it)$ est égal à $O(t^{\mu(\sigma_0) + \varepsilon})$ pour tout ε positif, mais n'est pas égal à $O(t^{\mu(\sigma_0) - \varepsilon})$ pour aucun ε positif. Nous voulons étudier la fonction $\mu = \mu(\sigma)$ définie pour toute valeur réelle de σ , ou, comme on dit généralement, la courbe μ . Soit d'abord σ_0 un nombre > 1 ; alors on déduit immédiatement du produit d'Euler l'existence de deux constantes positives $k(\sigma_0)$ et $K(\sigma_0)$ de telle manière que, pour toute valeur réelle de t ,

$$k < |\zeta(\sigma_0 + it)| < K.$$

Il s'ensuit que, pour $\sigma > 1$, $\mu(\sigma)$ est égale à zéro, c'est-à-dire pour $\sigma > 1$ la courbe μ concorde avec l'axe réel. Après avoir déterminé la fonction μ pour $\sigma > 1$, on en peut immédiatement conclure, à

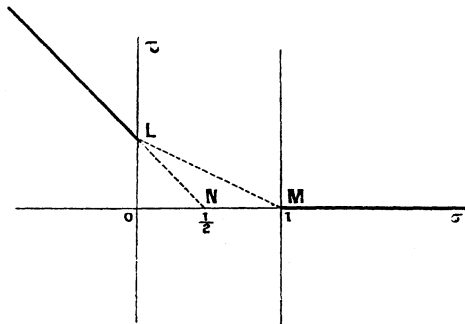


Fig. 2.

l'aide de l'équation fonctionnelle, la valeur de la fonction μ pour tout $\sigma < 0$. On trouve que, pour $\sigma < 0$, la fonction μ est déterminée par $\mu = \frac{1}{2} - \sigma$, c'est-à-dire que la courbe μ est, pour $\sigma < 0$, une demi-droite partant du point L de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ et ayant le coefficient angulaire -1 .

Il reste à étudier la fonction μ dans la bande critique. M. Lindelöf a démontré, à l'aide des recherches générales de M. Phragmen et M. Lindelöf lui-même, concernant les fonctions analytiques dans les environs d'une singularité essentielle (dans notre cas $s = \infty$), que la fonction $\mu = \mu(\sigma)$ est une fonction continue et de plus une fonction convexe, c'est-à-dire que si P et Q sont deux points sur la courbe μ , alors la partie de la courbe entre P et Q n'a pas de point au-dessus de la droite PQ. Il s'ensuit immédiatement (*fig. 2*) que, dans la bande critique, la courbe L est contenue dans le triangle MNL (le périmètre inclus), car il est évident qu'une courbe convexe qui, pour $\sigma > 1$, tombe sur l'axe réel, et qui, pour $\sigma < 0$, est donnée par la droite $\mu = \frac{1}{2} - \sigma$, ne peut contenir aucun point au-dessus de ML ou au-dessous de la ligne brisée MNL. Les recherches de M. Lindelöf ne permettent pas de déterminer d'une manière complète la courbe μ dans la bande critique, et cette détermination est aujourd'hui un problème non résolu. M. Lindelöf a supposé que la courbe μ tombe sur l'axe réel, non seulement pour $\sigma > 1$, mais encore pour $\sigma > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que μ soit égal à zéro pour $\sigma > \frac{1}{2}$. Dans la suite, nous verrons que M. Littlewood a réussi à prouver que, si l'hypothèse de Riemann sur les zéros de zêta est vraie, l'hypothèse de M. Lindelöf sur la courbe μ l'est aussi. M. Lindelöf a ajouté encore, que si pour $\sigma > \frac{1}{2} + \delta$ (le pôle $s = 1$ exclu par un petit cercle) la valeur absolue de $\zeta(s)$ n'est pas bornée, ce qui dit beaucoup plus que $\mu = 0$ pour $\sigma > \frac{1}{2}$, la fonction zêta devrait avoir à plusieurs égards des propriétés assez curieuses. Mais l'hypothèse, sous cette forme plus précise, n'est pas exacte. En vérité, la fonction $\zeta(s)$ n'est pas bornée pour $\sigma > \frac{1}{2} + \delta$, même pas, comme je l'ai prouvé, dans le demi-plan $\sigma > 1$ (le pôle exclu), mais seulement, ce qu'on voit immédiatement, pour $\sigma > 1 + \delta$; et en effet, comme l'a énoncé M. Lindelöf, la fonction zêta a des propriétés analytiques qui, au premier abord, semblent être assez remarquables.

Pour prouver que $\zeta(s)$ et d'ailleurs aussi $\frac{1}{\zeta(s)}$ ne sont pas bornées dans le demi-plan $\sigma > 1$, nous étudierons d'une manière générale les valeurs que prend $\zeta(s)$ sur une droite fixe $\sigma = \sigma_0$, où σ_0 est > 1 . La méthode à employer repose essentiellement sur un théorème de Kronecker sur les approximations diophantiques. Je me permettrai

de parler d'une manière un peu détaillée de cette méthode arithmétique, qui s'est montrée assez utile aussi dans la théorie générale des séries de Dirichlet. Pour étudier les valeurs que prend $\zeta(s)$ sur la droite $\sigma = \sigma_0 > 1$, c'est-à-dire les valeurs que prend $\zeta(\sigma_0 + it)$, quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, nous partons du produit d'Euler

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-s}},$$

où p_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre premier. Pour $s = \sigma_0 + it$, on a

$$p_n^{-s} = p_n^{-(\sigma_0 + it)} = p_n^{-\sigma_0} e^{-it \log p_n},$$

c'est-à-dire que p_n^{-s} a pour module $p_n^{-\sigma_0}$ indépendant de t , et pour argument $\mu_n = \mu_n(t) = -t \log p_n$. Nous aurons ainsi

$$\zeta(\sigma_0 + it) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n}},$$

où les nombres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$, sont des fonctions ($\mu_n = -t \log p_n$) de la variable réelle t . Mais en vérité, on peut démontrer que ces arguments $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$, en nombre infini, qui sont, je le répète, des fonctions d'une seule variable indépendante t , se comportent à plusieurs égards tout à fait comme si elles étaient des variables indépendantes. D'une manière précise, si N est un nombre entier, et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont N nombres réels quelconques, il existe une valeur de t telle que, pour toutes les valeurs de $n = 1, 2, \dots, N$, l'argument $\mu_n = \mu_n(t)$ diffère (mod 2π) d'un nombre donné φ_n de moins de ε donné, c'est-à-dire que les N inégalités

$$|-t \log p_n - \varphi_n - 2\pi g_n| < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

où g_1, g_2, \dots, g_N sont des nombres entiers, sont toutes remplies. L'existence d'une valeur de t satisfaisant aux inégalités en question se démontre comme suit. En divisant par 2π , les inégalités prennent la forme

$$\left| t \left(-\frac{\log p_n}{2\pi} \right) - \frac{\varphi_n}{2\pi} - g_n \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Or, Kronecker a démontré que les N inégalités

$$|t \alpha_n - \beta_n - g_n| < \varepsilon' \quad (n = 1, 2, \dots, N),$$

où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ sont des nombres réels arbitraire et ε' arbitrairement

petit, peuvent toujours être satisfaites par une valeur réelle de t et N nombres entiers g_1, g_2, \dots, g_N , si les $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ sont linéairement indépendants, c'est-à-dire s'il n'existe aucune relation de la forme

$$C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 + \dots + C_N \alpha_N = 0,$$

où les C sont des entiers non tous nuls. Dans notre cas $\alpha_n = -\frac{\log p_n}{2\pi}$; et, fort heureusement, il n'existe aucune relation $C_1 \alpha_1 + \dots + C_N \alpha_N = 0$, c'est-à-dire

$$C_1 \log p_1 + \dots + C_N \log p_N = 0.$$

C'est une conséquence immédiate du théorème fondamental sur la décomposition unique d'un nombre entier en facteurs premiers; en effet, ce théorème dit que si C_1, \dots, C_N sont des entiers, qui ne sont pas tous nuls, $p_1^{C_1} \dots p_N^{C_N}$ est toujours différent de 1, c'est-à-dire que $C_1 \log p_1 + \dots + C_N \log p_N$ est toujours différent de zéro. Après avoir constaté de cette manière que les arguments μ_1, μ_2, \dots sont de la sorte indépendants les uns des autres, il est naturel d'envisager en même temps que la fonction

$$\zeta(\sigma_0 + it) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n t}},$$

où les μ_n sont des fonctions de la variable t , la fonction d'une infinité de variables réelles indépendantes

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}.$$

Soit $U = U(\sigma_0)$, l'ensemble des valeurs que prend $\zeta(\sigma_0 + it)$ quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, et soit de plus $V = V(\sigma_0)$ l'ensemble des valeurs que prend la fonction $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots)$, quand les variables réelles $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ varient indépendamment les unes des autres de 0 à 2π . Alors en faisant usage du théorème de Kronecker on prouve que l'ensemble U , qui est évidemment contenu dans l'ensemble V , est partout dense dans V . Mais l'importance dans la théorie de zêta, de l'ensemble V introduit ci-dessus des valeurs, que prend le produit $F(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n \dots)$ quand les variables $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ varient indépendamment les unes des autres, est encore plus grande. Soit, en effet, W l'ensemble des valeurs que prend $\zeta(s)$, non pas sur la droite $\sigma = \sigma_0$, mais dans le voisinage infiniment petit de la droite $\sigma = \sigma_0$, c'est-à-dire soit W l'ensemble de toutes les valeurs w ,

telles que, pour tout $\delta > 0$, l'équation $\zeta(s) = \omega$ ait au moins une racine dans la bande $\sigma_0 - \delta < \sigma < \sigma_0 + \delta$. Alors on peut démontrer que ce dernier ensemble W est identique à l'ensemble V . On voit que, pour l'étude des valeurs que prend la fonction $\zeta(s)$ sur la droite $\sigma = \sigma_0$ et dans le voisinage immédiat de cette droite, c'est vraiment le produit $F(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n \dots)$ d'une infinité de variables qu'on doit envisager. Mais, dans ce dernier produit, les facteurs

$$f_n = \frac{1}{1 - p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}$$

varient indépendamment les uns des autres. Quand φ_n varie de 0 à 2π , le nombre $\alpha_n = p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}$ parcourt dans le plan complexe un cercle de centre 0 et de rayon $p_n^{-\sigma_0}$. Par suite, le nombre f_n parcourt lui aussi un cercle C_n , savoir le cercle, qui se déduit du cercle $|x_n| = p_n^{-\sigma_0}$ par la transformation linéaire $f_n = \frac{1}{1 - x_n}$. Les facteurs $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ parcourent donc, indépendamment les uns des autres, des cercles $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ qui, comme on le voit immédiatement, contiennent tous le point 1 à l'intérieur et sont tels que le rayon du $n^{\text{ième}}$ cercle C_n tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Ainsi, l'ensemble V des valeurs que prend la fonction $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ est l'ensemble des points dans le plan complexe, obtenu par la multiplication d'une infinité des cercles $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs $f_1 f_2 \dots f_n \dots$, où f_1 est un point quelconque sur C_1 , f_2 un point quelconque sur C_2 , etc. La détermination de cet ensemble est un problème tout à fait géométrique. Je ne peux pas ici entrer dans les détails. Mais je veux me restreindre à cette remarque que, comme on le voit assez aisément à l'aide de recherches géométriques, cet ensemble $V = V(\sigma_0)$ est pour σ_0 assez voisin de 1, un domaine limité par deux courbes c et C : c est très petit et contient le point 0 à l'intérieur, tandis que C est très grand. D'après les théorèmes mentionnés ci-dessus, les valeurs de $\zeta(s)$ sur la droite $\sigma = \sigma_0$ sont, je le répète, tous contenus dans ce domaine et y sont partout denses, et les valeurs que prend $\zeta(s)$ dans le voisinage immédiat de $\sigma = \sigma_0$ sont exactement toutes les valeurs du domaine limité par c et C . Si σ_0 tend vers 1, la courbe c tend vers zéro et la courbe C vers l'infini. Il résulte de là, en particulier, que la fonction $\zeta(s)$ pour tout $\delta > 0$ prend dans la bande $1 < \sigma < 1 + \delta$ toutes les valeurs complexes excepté seulement la valeur zéro et prend toutes ces valeurs une infinité de fois.

L'allure de $\zeta(s)$ sur une droite $\sigma = \sigma_0$, où σ_0 est très voisin de 1,

semble indiquer comme très probable que les valeurs de zêta sur la droite $\sigma = 1$, limitant la bande critique, sont partout denses dans tout le plan complexe, et en vérité c'est ainsi, comme M. Courant et moi-même l'avons démontré; mais la démonstration est assez difficile parce que le produit d'Euler ne converge plus uniformément sur la droite $\sigma = 1$. D'ailleurs, la méthode de M. Courant et moi-même, basée encore sur la théorie des approximations diophantiques, nous a permis de démontrer que, non seulement sur la droite $\sigma = 1$, mais plus généralement sur toute droite $\sigma = \sigma_0$ où $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq 1$, les valeurs que prend $\zeta(s)$, sont partout denses dans tout le plan.

J'ai essayé jusqu'ici de vous présenter à grands traits, et sans entrer dans une foule de questions dignes d'intérêt, une esquisse de la théorie analytique de la fonction zêta, c'est-à-dire de la partie de cette théorie qui est traitée d'une manière complètement rigoureuse et solide. Cependant, on a, dans ces dernières années, poussé la théorie analytique de zêta beaucoup plus loin, mais sur une base, il faut le dire, qui n'est pas du tout solide, en supposant l'exactitude d'une hypothèse désignée par l'hypothèse de Riemann. Cette hypothèse, dont on n'a pas réussi à démontrer la vérité, est que les zéros dans la bande critique $0 < \sigma < 1$ sont tous situés sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. Avant de terminer ma conférence en disant quelques mots sur les raisons, qui rendent cette hypothèse assez probable, je veux, le plus rapidement possible et en me limitant à deux exemples caractéristiques, indiquer la nature des progrès qu'on a pu faire en faisant usage de l'hypothèse de Riemann, progrès qui, à divers égards, ont réellement un caractère assez définitif. Mais d'abord il me semble utile de considérer, d'une manière générale, quelle est la raison pour laquelle on n'a pu obtenir, en travaillant dans l'hypothèse de Riemann, des résultats beaucoup plus précis sur l'allure analytique de zêta.

Commençons par mentionner qu'il suffit d'étudier la fonction dans le demi-plan $\sigma > \frac{1}{2}$, car si l'on connaît la fonction dans ce demi-plan, l'équation fonctionnelle nous permet d'étudier cette fonction dans le demi-plan $\sigma < \frac{1}{2}$. Cela posé, rappelons que la fonction $\zeta(s)$ prend dans le demi-plan $\sigma > \frac{1}{2}$ (en fait déjà dans le demi-plan $\sigma > 1$), toute valeur différente de zéro et même une infinité de fois. Ainsi, dans l'hypothèse de Riemann, qui, comme nous le verrons dans la suite, est identique à l'hypothèse que $\zeta(s)$ est différente de zéro pour $\sigma > \frac{1}{2}$,

et seulement si cette hypothèse est vraie, il existe une valeur α , savoir $\alpha = 0$, de telle manière que $\zeta(s)$ est différente de α dans tout le demi-plan en question $\sigma > \frac{1}{2}$, et c'est précisément sous cette forme, c'est-à-dire en supposant l'existence d'une valeur exceptionnelle, qu'on emploie, dans la théorie analytique de zêta, l'hypothèse de Riemann. La manière dont on utilise le fait, que $\zeta(s)$ ne prend pas la valeur zéro dans le demi-plan $\sigma > \frac{1}{2}$, consiste simplement à opérer, avec $\log \zeta(s)$ et non avec $\zeta(s)$ elle-même; en supposant que $\log \zeta(s)$ est une fonction holomorphe, on a implicitement utilisé que $\zeta(s)$ est toujours différente de zéro. Autrement dit, dans l'hypothèse de Riemann, on peut pousser l'étude de $\log \zeta(s)$ jusqu'à la droite $\sigma = \frac{1}{2}$ et non pas seulement jusqu'à la droite $\sigma = 1$. Pour vous donner une idée de l'importance d'une telle supposition (ici la supposition qu'il existe une valeur exceptionnelle), laissez-moi vous rappeler les belles recherches de M. Lindelöf concernant la théorie générale des fonctions holomorphes qui ne prennent pas dans un demi-plan $\sigma > \sigma_0$ deux valeurs distinctes, par exemple les valeurs 0 et 1. Il est bien connu que M. Lindelöf a démontré qu'une fonction $f(s)$, soumise à cette condition restrictive, a des propriétés très simples et ne peut pas du tout présenter une allure singulière, par exemple si elle est bornée sur une droite $\sigma = \text{const.}$, elle est bornée aussi sur toute autre droite verticale dans le demi-plan en question. On sait, que, après le célèbre théorème de M. Picard, on prouve de telles propositions en prenant la fonction modulaire de $f(s)$. En se servant de cette fonction comme d'une fonction holomorphe, on a d'une manière implicite fait usage du fait, que $f(s)$ est toujours différent de 0 et 1. Dans le cas de la fonction $\zeta(s)$ on a, d'une manière analogue, en opérant avec $\log \zeta(s)$ comme une fonction holomorphe, utilisé complètement la supposition que $\zeta(s)$ est toujours différente de zéro dans le demi-plan en question. Parmi les résultats obtenus dans l'hypothèse de Riemann, je veux, comme je l'ai dit, me limiter à deux exemples caractéristiques. Envisageons d'abord la courbe $\mu = \mu(\sigma)$ dont j'ai parlé plus haut, et qui indique, je le répète, la croissance de zêta sur une droite verticale comparée à une puissance de l'ordonnée t . Dans l'hypothèse de Riemann, M. Littlewood a réussi à démontrer que, en effet, comme l'a supposé M. Lindelöf, $\mu(\sigma) = 0$ pour tout $\sigma > \frac{1}{2}$; il s'ensuit, à l'aide de l'équation fonctionnelle, que $\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$

pour $\sigma < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que la courbe μ se compose de deux demi-droites se rencontrant au point $s = \frac{1}{2}$.

L'autre théorème, démontré par M. Landau et moi-même à l'aide d'une forme généralisée du théorème de M. Picard, exprime que la fonction $\zeta(s)$ dans toute bande arbitrairement mince $\alpha < \sigma < \beta$ contenue dans la bande $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ prend toutes les valeurs, excepté naturellement la valeur zéro, une infinité de fois ⁽¹⁾.

Considérons maintenant les raisons qui ont conduit les mathématiciens à considérer l'hypothèse de Riemann comme une hypothèse très probable.

D'abord, il y a une certaine symétrie à l'égard de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$; en effet, si $\rho = \beta + i\gamma$ est un zéro de zêta dans la bande critique, le point conjugué $\beta - i\gamma$ l'est aussi et, d'après l'équation fonctionnelle, il en est de même pour les deux points $1 - (\beta + i\gamma)$ et $1 - (\beta - i\gamma)$. On voit ainsi qu'un zéro ρ , qui n'est pas situé sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$, donne naissance à trois autres zéros (formant avec le premier les sommets d'un rectangle). Seulement, dans le cas où ρ est situé précisément sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$, le point conjugué et le point $(1 - \rho)$ coïncident, et les quatre zéros se réduisent à deux.

De plus, et c'est une raison assez forte pour admettre que l'hypothèse de Riemann est vraie, on a réussi à montrer, par des recherches numériques, que les premiers cinquante zéros, c'est-à-dire les cinquante zéros dont les ordonnées sont les plus petites, ont en vérité tous leur partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

Jusqu'à ces derniers temps, ces résultats ont été les plus forts arguments pour croire à la justesse de l'hypothèse de Riemann. Mais dans ces derniers mois, deux théorèmes — et dans deux directions tout à fait différentes — ont été établis qui semblent affirmer ultérieurement la vraisemblance de l'hypothèse en question.

Le premier de ces théorèmes, démontré par M. Landau et moi-même, exprime que presque tous les zéros dans la bande critique sont dans un voisinage infiniment petit de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$; d'une manière pré-

(1) Après ma conférence, j'ai obtenu des résultats ultérieurs sur les valeurs de $\zeta(s)$ dans la bande $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. (*C. R. de l'Ac. d. Sc.*, 29 juin 1914.)

cise, soit $N_1(T)$ le nombre des zéros dont l'ordonnée est plus petite en valeur absolue que T , et qui appartiennent à la bande

$$\frac{1}{2} - \delta < \sigma < \frac{1}{2} + \delta,$$

tandis que $N_2(T)$ indique le nombre des zéros dont l'ordonnée est plus petite que T , qui appartiennent à la bande critique $0 < \sigma < 1$, mais qui ne sont pas situés dans la bande mince $\frac{1}{2} - \delta < \sigma < \frac{1}{2} + \delta$. Alors nous avons prouvé, que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_2(T)}{N_1(T)} = 0,$$

quel que soit le nombre positif δ .

L'autre théorème, démontré il y a quelques semaines par M. Hardy, énonce qu'il existe une infinité de zéros ρ situés exactement sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$.

En terminant ma conférence, je voudrais dire deux mots sur les raisons pour lesquelles la fonction spéciale $\zeta(s)$ a joué un rôle important dans les Mathématiques du dernier demi-siècle, et a été étudiée d'une manière si détaillée. Sans doute, la fonction $\zeta(s)$ s'introduit d'abord à cause de son importance fondamentale pour le problème des nombres premiers. Mais, abstraction faite des applications, l'étude de la fonction $\zeta(s)$ elle-même a aussi joué un très grand rôle pour le développement de la théorie générale des fonctions analytiques; il suffit de rappeler, une fois encore, que c'est dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ que les recherches fondamentales de M. Hadamard sur les fonctions entières de genre fini ont pris naissance. Mais aussi pour la théorie moderne des fonctions analytiques, la fonction $\zeta(s)$ semble avoir une importance individuelle, si je puis parler ainsi. En vérité, la fonction $\zeta(s)$ est la seule fonction spéciale définie d'une manière assez simple et qui se présente d'elle-même, pour l'étude de laquelle on a vraiment besoin de tous les différents résultats de la théorie moderne des fonctions analytiques, pour citer quelques exemples: les recherches fondamentales autour du théorème de MM. Picard-Landau, le théorème de Stieltjes, les résultats de MM. Phragmen-Lindelöf, etc.

En résumé, on pourrait peut-être dire que l'importance que possède la fonction $\zeta(s)$, dans la théorie des fonctions analytiques, réside dans ce fait qu'elle constitue, pour ainsi dire, une pierre de touche, pour éprouver la vigueur des méthodes de la théorie générale.

Communication :

M. Lusin : *Sur un problème de M. Baire.* L'auteur a montré que si l'on admet que la puissance du continu est \aleph_1 , il existe des fonctions qui n'appartiennent pas à la classification de M. Baire.

SÉANCE DU 27 MAI 1914.

PRÉSIDENTE DE M. FOUCHÉ.

Communication :

M. Pál : *Sur les courbes et surfaces de M. Jordan.*

Soit $u = F(t)$, $v = G(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, une courbe simple fermée au sens de M. Jordan. M. Carathéodory ⁽¹⁾ a démontré que le domaine fermé du plan $w = u + iv$, entouré par cette courbe, peut être représenté d'une manière biunivoque, continue et conforme sur le domaine fermé $|z| \leq 1$ (naturellement, on n'exige la conformité que pour les points intérieurs des domaines). M. Fejér ⁽²⁾ a prouvé que, $\varphi(z)$ étant la fonction qui effectue cette représentation, la série de puissances

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

converge uniformément même sur le cercle $|z| = 1$. D'où le théorème :

Si les fonctions $u = F(t)$, $v = G(t)$ représentent une courbe de Jordan, on peut changer le paramètre t par une transformation biunivoque et continue $t = m(\mathfrak{S})$, de telle manière que les fonctions $F[m(\mathfrak{S})]$ et $G[m(\mathfrak{S})]$ admettent des séries de Fourier qui convergent uniformément.

Existe-t-il une telle transformation pour chaque fonction continue de période 2π ? Cette question, à laquelle on peut donner une réponse affirmative ⁽³⁾, a donné naissance à quelques questions intéressantes qui se rattachent à la topologie des courbes et surfaces de Jordan. Voici quelques résultats :

Étant donnée une fonction continue de période 2π , $x = F(t)$, il n'existe pas toujours une deuxième fonction $y = G(t)$, qui détermine avec $F(t)$ une courbe de Jordan. D'ailleurs, on connaît les conditions

⁽¹⁾ CARATHÉODORY, *Math. Ann.*, t. LXXIII, 1913, p. 305.

⁽²⁾ FEJÉR, *C. R.*, t. 156, 1913, p. 46.

⁽³⁾ PÁL, *C. R.*, t. 158, 1914, p. 101.

nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction complétante ⁽¹⁾.

Étant données deux fonctions $x = F(t)$, $y = G(t)$ de période 2π , il n'existe pas toujours une troisième fonction $z = H(t)$, qui détermine avec $F(t)$ et $G(t)$ une courbe de Jordan de l'espace. Cependant, l'existence d'un unique point simple de la courbe $x = F(t)$, $y = G(t)$ suffit pour l'existence d'une fonction complétante $z = H(t)$ ⁽²⁾.

M. Tietze ⁽³⁾ donne de nouvelles démonstrations de ces résultats; ses démonstrations reposent sur quelques théorèmes intéressants relatifs aux fonctions bornées définies sur un ensemble borné A et continues pour les points d'un sous-ensemble fermé de A. En outre, M. Tietze donne une formule explicite qui résout la question suivante : Soit B un ensemble fermé situé sur le cercle $x^2 + y^2 \leq 1$, et soit $f(x, y)$ une fonction définie sur B et continue en chaque point de B : construire une fonction continue sur le cercle, qui coïncide sur B avec la fonction donnée.

MM. Borel et Lebesgue présentent quelques remarques au sujet de la Communication précédente.

SÉANCE DU 10 JUIN 1914.

PRÉSIDENTE DE M. VESSIOT.

Communications :

M. Halphen : *Résumé du travail exposé par l'auteur au Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, tenu à Tunis en 1913.*

M. Fouché : *Sur une question d'approximation numérique.*

SÉANCE DU 24 JUIN 1914.

PRÉSIDENTE DE M. FOUCHÉ.

Communications :

M. Hadamard : *Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées.*

(1) PÁL, *J. de Crelle*, t. 143, 1913, p. 294.

(2) PÁL, *J. de Crelle*, t. 144, 1914, p. 1.

(3) TIETZE, *J. de Crelle*, t. 144, 1914, p. 15.

Les remarques qui vont suivre ont pour point de départ un théorème qui intervient dans plusieurs questions relatives aux équations différentielles et à la Dynamique ⁽¹⁾ et qui, récemment, s'est montré non moins utile ⁽²⁾ à la théorie des fonctions et à ses applications à la théorie des nombres. Son énoncé est :

Si $f(x)$ tendant vers une limite pour $x = \infty$, sa dérivée seconde $f''(x)$ reste bornée, la dérivée première $f'(x)$ tend vers zéro.

A cet énoncé M. Landau a pu donner la forme précise suivante ⁽³⁾ :

Si, dans un intervalle de longueur ≥ 2 , on a constamment

$$|f(x)| \leq 1, \quad |f''(x)| \leq 1,$$

on a aussi constamment, dans le même intervalle,

$$|f'(x)| \leq 2.$$

La restriction relative à la longueur de l'intervalle est indispensable, comme l'a montré M. Landau. Cependant, en vue des applications que j'ai eu à faire de ces résultats au Calcul des Variations, j'ai dû me demander si un énoncé, rendant des services équivalents, ne pouvait pas être donné lorsqu'elle n'est pas remplie; et un tel énoncé est, en effet, on ne peut plus aisément à obtenir.

Soient $\tau, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots$ les plus grandes valeurs de

$$|f(x)|, |f'(x)|, |f''(x)|, \dots, |f^{(i)}(x)|, \dots$$

dans un intervalle donné de longueur a . En calculant comme le fait M. Landau (travail cité), on trouve que

$$(1) \quad \tau_1 \leq \frac{2\tau}{a} + \frac{a'}{2} \tau_2,$$

a' désignant n'importe quel intervalle intérieur à a .

Le minimum du second membre a lieu pour

$$(2) \quad a' = 2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_2}}.$$

⁽¹⁾ Voir KNESER, *J. f. Math.*, 1896. — HADAMARD, *Journ. de Math.*, 1897.

⁽²⁾ Voir surtout les travaux de MM. HARDY et LITTLEWOOD, *Proc. London Math. Soc.*, 2^e série, t. 9, p. 434-448, et t. 11, p. 411-478.

⁽³⁾ Même recueil, 2^e série, t. 13, p. 43.

Si donc cette valeur est une valeur acceptable de a' , c'est-à-dire dans l'hypothèse

$$(I) \quad 2\sqrt{\frac{\tau}{\tau_2}} \leq a,$$

on a l'inégalité

$$(\alpha) \quad \tau_1 \leq 2\sqrt{\tau\tau_2},$$

équivalente à l'énoncé de M. Landau.

Mais l'hypothèse contraire

$$(II) \quad 2\sqrt{\frac{\tau}{\tau_2}} > a$$

fournit une limite supérieure de τ_2 en fonction de τ . Reportant cette dernière dans (I) avec $a' = a$, il vient

$$(\beta) \quad \tau_1 < \frac{4\tau}{a}.$$

Ainsi, en toute hypothèse, l'une au moins des inégalités (α) , (β) est toujours vérifiée.

Considérons maintenant les dérivées d'ordre supérieur. On aura de même, soit

$$(x') \quad \tau_i^2 \leq 4\tau_{i-1}\tau_{i+1} \quad (\text{hypothèse I}),$$

soit

$$(\beta') \quad \tau_i < \frac{4\tau_{i-1}}{a} \quad (\text{hypothèse II}).$$

Supposons que nous connaissions une limite supérieure de τ et une limite supérieure de τ_m . Dans le cas (le plus défavorable) où c'est l'hypothèse I qui a lieu pour toute valeur de i entre 1 et m , l'inégalité (x') , qui peut s'écrire

$$(x'') \quad \frac{\tau_i}{\tau_{i-1}} \leq 4 \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i},$$

donne aisément

$$\tau_1 \leq 2^{i-1} \tau \sqrt{\frac{\tau_i}{\tau}}.$$

Les choses se passent d'une manière bien plus simple si, pour une quelconque des valeurs citées de i , on a l'hypothèse II. Dans ce cas (cette valeur de i étant supposée la plus petite pour laquelle l'hypo-

(thèse II se présente) on a non seulement

$$\frac{\tau_i}{\tau_{i-1}} < \frac{4}{a}$$

d'après (β'), mais, en vertu de (α'_1),

$$\frac{\tau_{i-j}}{\tau_{i-j-1}} < \frac{4^{j+1}}{a},$$

et, pour $j = i - 1$,

$$\tau_1 < \frac{4^i}{a} \tau.$$

La question que j'avais à résoudre se posait d'ailleurs d'une manière un peu différente. Il s'agissait de trouver une limite supérieure de τ , connaissant la valeur de l'intégrale

$$T = \int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

bien connue par les recherches récentes sur la « convergence en moyenne », et en particulier d'examiner le cas où la fonction f varie de manière que T tende vers zéro.

A elle seule, la connaissance de T ne fournit aucune limite supérieure pour τ ; mais il en est autrement si l'on connaît τ_i (ou une limite supérieure de τ_i).

On établira aisément, comme précédemment, l'inégalité

$$(3) \quad \tau \leq \sqrt{\frac{T}{a'}} + a' \tau_1.$$

Celle-ci, dans une première hypothèse, celle où

$$(4) \quad a' = \sqrt[3]{\frac{T}{4\tau_1^2}} \leq a,$$

donne

$$(\alpha'') \quad \tau \leq \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} (T \tau_1)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\left(\frac{\tau}{\sqrt{T}}\right)^2 \leq \frac{3^2}{2^2} \frac{\tau_1}{\tau}.$$

Dans l'hypothèse contraire, on trouve

$$(\beta'') \quad \tau \leq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{T}{a}}.$$

Si l'on est constamment dans la première hypothèse, l'élimination de τ_1, τ_2, \dots entre (α'') et (α') donnera

$$\tau \leq \frac{2^{i+1} \sqrt{27^i 2^{i(i-3)}} \tau_i}{T^{2+\frac{1}{i}}}.$$

Pour i très grand, le second membre (τ_i restant constant) tend vers zéro à peine plus lentement que \sqrt{T} .

Si l'on a (β'') , ou s'il existe une valeur de i qui donne lieu à (β'') , τ tend vers zéro comme \sqrt{T} .

M. Lebesgue : *Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante.*

Le problème des isopérimètres peut, comme l'on sait, être ainsi posé : tracer un domaine pour lequel le rapport $\frac{L^2}{S}$, du carré du périmètre à l'aire du domaine, soit le plus petit possible. C'est sous cette forme que je l'envisagerai.

J'admets démontré, ce qui est facile, que la solution de ce problème ne peut être donnée que par un domaine convexe. Le contour convexe qui limite un tel domaine, étant supposé parcouru dans le sens direct, admet parallèlement à toute direction une et une seule tangente dirigée; en entendant par tangente au contour une droite qui a des points communs avec le contour, mais aucun point intérieur au domaine. Un contour convexe est défini par l'ensemble de ces tangentes ou, ce qui revient au même, par un ensemble dénombrable de tangentes correspondant à des directions denses dans tout angle. Si l'on compte les directions à partir d'une origine quelconque, et si α désigne un arc incommensurable avec π , toutes les tangentes parallèles aux directions $m\alpha$ où m est entier suffiraient à déterminer le contour. Les directions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ étant choisies pour les tangentes, chacune des tangentes correspondantes dépend d'un paramètre, par exemple sa distance à un point fixe. Le problème des isopérimètres, problème du calcul des variations, est remplacé par un problème de minimum pour une fonction de ces paramètres en nombre infini. C'est là une transformation purement formelle et très banale, mais elle mérite cependant d'être signalée parce que, ici, on peut raisonner sur les paramètres comme s'ils étaient indépendants. Je veux dire que l'on peut déterminer chaque paramètre par la condition que le rapport $\frac{L^2}{S}$ considéré comme fonction de ce paramètre, supposé seul variable, soit minimum.

Soit C un contour convexe solution du problème des isopérimètres. Un tel contour, à supposer qu'il existe, n'est déterminé qu'à une similitude près; mais peu importe, raisonnons sur un contour C déterminé. Soient T_1, T_2, T_3, \dots les tangentes à ce contour de directions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$.

Considérons le polygone Π_p convexe limité par les tangentes dirigées T_1, T_2, \dots, T_p . Je suppose ce polygone fini, c'est-à-dire ne s'étendant pas à l'infini, ce qui est vrai dès $p = 3$ si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont bien choisies. Le polygone Π_p admet p côtés ou du moins, s'il admet moins de p côtés et s'il n'admet pas, par exemple, de côté porté par T_k , c'est que T_k passe par un de ses sommets, que ce sommet est un point de C, car sans quoi T_k ne serait pas tangente à C. On peut donc toujours dire que Π_p a p côtés, à condition, peut-être, de considérer des côtés infiniment petits. Ceci va se préciser de suite : passons de Π_p à Π_{p+1} en coupant Π_p par T_{p+1} ; on sait à l'avance que les côtés de Π_p , qui seront coupés par T_{p+1} , sont ceux qui, dans la rose des directions, comprennent la direction α_{p+1} . Soient AB, AC ces deux côtés, qui sont finis ou infiniment petits, peu importe; la tangente T_{p+1} coupe certainement AB entre A et B et AC entre A et C, mais elle peut passer par A, par B ou par C. Dans tous les cas, pour passer de Π_p à Π_{p+1} on enlève de Π_p un triangle et non un polygone plus compliqué; c'est la remarque essentielle.

Ce triangle enlevé pour passer de Π_p à Π_{p+1} est de grandeur inconnue, mais il est connu à une homothétie près. Si L_p et S_p sont la longueur et l'aire de Π_p et si l'on coupe Π_p par une parallèle à T_{p+1} qui passe entre A et B et entre A et C, on remplace Π_p par Π'_{p+1} et L_p et S_p respectivement par $L_p - kl, S_p - k^2s$; l et s étant des nombres qu'on peut calculer dès que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}$ sont donnés. Par suite $\frac{(L_{p+1})^2}{S_{p+1}}$ est au moins égal au minimum de $\frac{(L_p - kl)^2}{S_p - k^2s}$; cherchons ce minimum. On l'obtient pour

$$\frac{2l}{L_p - kl} = \frac{2ks}{S_p - k^2s}$$

ou

$$(1) \quad \frac{L_p - kl}{S_p - k^2s} = \frac{kl}{k^2s} = \frac{L_p}{S_p}.$$

Et ce minimum est

$$(2) \quad \frac{(L_p - kl)^2}{S_p - k^2s} = \frac{L_p}{S_p} [L_p - kl] = \frac{L_p^2}{S_p} \left[1 - \frac{l S_p}{L_p} \frac{l}{L_p} \right] = \frac{L_p^2}{S_p} - \frac{l^2}{s}.$$

Ainsi, quand on passe de Π_p à Π_{p+1} , on gagne au plus $\frac{l^2}{s} = \varepsilon_p$,

quantité connue à l'avance et ne dépendant que de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}$; et l'on ne gagne cette quantité que si l'égalité (1) est vérifiée par la tangente T_p . Cette égalité s'interprète géométriquement d'une façon très simple : $\frac{2S_p}{L_p}$ est le rayon d'un cercle inscrit dans un polygone de longueur L_p et d'aire S_p ; $\frac{2k^2s}{kl}$ est le rayon du cercle exinscrit dans le triangle enlevé pour passer de Π_p à Π_{p+1} et inscrit dans l'angle A de ce triangle, c'est-à-dire dans celui des angles de Π_p dont le sommet n'est pas sommet de Π_{p+1} . Si donc Π_p est un polygone circonscriptible et si l'on gagne $\frac{l^2}{s} = \varepsilon_p$ en passant de Π_p à Π_{p+1} , Π_{p+1} est circonscrit au même cercle que Π_p .

Ceci étant, et supposant, comme précédemment, que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soient choisies de manière que Π_3 soit un triangle, soit m le rapport $\frac{L^2}{S}$ pour ce triangle, m est connu, puisque le triangle est connu à une homothétie près. Le rapport $\frac{L^2}{S}$ pour Π_{p+1} sera au moins

$$m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \dots - \varepsilon_p$$

et il ne sera égal à cette quantité que si la condition (1) est constamment remplie, c'est-à-dire si $\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_{p+1}$ sont circonscrits au cercle inscrit dans Π_3 . Si cette condition n'était pas remplie par Π_{k+1} , ayant été remplie par $\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_k, \dots, \Pi_{p+1}$, $\frac{L^2}{S}$ serait au moins

$$m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \dots - \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_{k+1} - \dots - \varepsilon_p - \eta,$$

avec $\eta < \varepsilon_k$. Et ce « manque à gagner » $\varepsilon_k - \eta$ ne pourrait jamais être rattrapé dans la suite.

$\frac{L^2}{S}$ pour le contour C étant la limite du rapport correspondant pour les polygones Π_m , on voit que le cas où C est un cercle est une solution du problème des isopérimètres et que c'est la seule solution.

Chemin faisant, nous avons vu que le minimum de $\frac{L^2}{S}$ pour un polygone dont les côtés ont des directions données est toujours fourni par un polygone circonscriptible. Signalons encore une quantité de curieuses expressions, savoir toutes celles qui résultent de la formule

$$4\pi = m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \dots;$$

inutile de les expliciter ici.

J'ai déjà parlé à la Société mathématique des domaines de largeur constante et des courbes convexes qui les limitent appelées *orbiformes*. J'ai annoncé, à cette occasion, que de toutes les orbiformes de même largeur, orbiformes qui ont toutes la même longueur, celle qui a la plus grande aire est l'orbiforme circulaire, ce qui est évident d'après le théorème des isopérimètres et que celle qui a la plus petite aire est l'orbiforme équilatérale. Cela peut se démontrer très facilement par le procédé précédent.

Je définis comme précédemment l'orbiforme par des tangentes de direction $\alpha_1, \alpha_2, \dots$; seulement je considérerai toujours, en même temps que la tangente T_p , de direction α_p , la tangente T'_p de direction $\alpha_p + \pi$. Par Π_p je désignerai maintenant le polygone convexe de $2p$ côtés, dont certains pourront être infiniment petits, circonscrit à l'orbiforme, et formé par les tangentes $T_1, T'_1, T_2, T'_2, \dots, T_p, T'_p$. Pour passer de Π_p à Π_{p+1} il faudra maintenant retrancher de Π_p deux triangles et non plus un seul. Ces deux triangles $AMN, A'M'N'$ ont leurs côtés parallèles et de sens contraires; ils sont homothétiques, le centre d'homothétie est le point de rencontre de AA', MM', NN' . D'ailleurs AA' est un axe de symétrie pour la figure formée par les droites indéfinies $AM, A'M'; AN, A'N'$, parce que ces droites sont deux à deux parallèles et que la distance de AM à $A'M$ est, comme celle de AN à $A'N'$, la largeur constante de l'orbiforme. Donc AA' est bissectrice de \widehat{MAN} et le centre O d'homothétie des triangles $AMN, A'M'N'$ est le centre commun de deux circonférences exinscrites respectivement dans $MAN, M'A'N'$.

La somme des longueurs $MN + M'N'$ est la base d'un triangle semblable à MON , dont les côtés ont donc des directions connues dès que l'on connaît $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, et dont la hauteur est la largeur de l'orbiforme. De même $AM + A'M'$ a une valeur connue, et aussi $AN + A'N'$. De là résulte que la longueur de Π_{p+1} est la même pour toutes les orbiformes et de là résulte une démonstration peut-être nouvelle du fait connu et déjà rappelé que toutes les orbiformes de largeur d ont la même longueur πd .

Je reviens à la question de l'aire. On a, je l'ai dit,

$$(3) \quad MN + M'N' = C,$$

C étant une constante. La somme des aires des deux triangles $AMN, A'M'N'$, différence entre Π_p et Π_{p+1} , est

$$(4) \quad k(\overline{MN}^2 + \overline{M'N'}^2),$$

k étant connu et ne dépendant que des α_i . Le minimum de l'expression (4), MN et $M'N'$ étant liés par la relation (3), s'obtient pour $MN = M'N'$ et le maximum pour MN ou $M'N' = 0$. Dans le premier cas, O est au milieu de AA' , MM' , NN' et les deux triangles AMN , $A'M'N'$ sont circonscrits au même cercle; dans le second cas, ou bien MN passe par A ou bien MN passe par A' .

Ceci étant, en raisonnant comme précédemment, on voit que l'orbiforme d'aire maximum est celle pour laquelle tous les polygones Π_p sont circonscriptibles, mais cela est évident d'après le théorème des isopérimètres.

Pour avoir l'orbiforme d'aire minimum, je pars de $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$, ce qui me donne pour Π_2 un losange. Si $\alpha_3 = \frac{\pi}{3}$, l'une des tangentes T_3 ou T'_3 doit passer par un sommet du losange; on voit ainsi que Π_3 est un triangle équilatéral. On peut supposer qu'il est formé par $T_1 T_2 T_3$, les tangentes T'_1 , T'_2 , T'_3 passant par les sommets de ce triangle. Quel que soit α_4 , il faudra maintenant que T_4 ou T'_4 passe par un sommet du triangle, et de là on conclut de suite que l'orbiforme cherchée est constituée par les trois arcs de circonférences tracés respectivement de chacun des trois sommets de Π_3 pour centres et sous-tendus respectivement par les trois côtés de Π_3 .

M. J. Coblyn : *De l'anallagmatisme des transformations quadratiques.*

La transformation quadratique

$$x' = \frac{U(x, y)}{T(x, y)}, \quad y' = \frac{V(x, y)}{T(x, y)}$$

fait correspondre à chaque point $M(x, y)$ du plan un point $M'(x', y')$. L'auteur étudie le déplacement de la droite MM' .

Il détermine les transformations quadratiques à pôle qui possèdent des courbes anallagmatiques.

Dans les transformations dépourvues de pôle, il recherche les droites anallagmatiques.

Il applique ses résultats à la transformation perspective.

SÉANCE DU 8 JUILLET 1914.

PRÉSIDENCE DE M. VESSIOT.

Communication :

M. Coblyn : *Sur la perspective du cercle.*

SÉANCE DU 28 OCTOBRE 1914.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

Communications :

M. Bioche : *Sur une construction géométrique fournissant une valeur approchée du nombre e.*

M. Fouché : *Sur les transformations de Malus.*

SÉANCE DU 23 DÉCEMBRE 1914.

PRÉSIDENCE DE M. VESSIOT.

Rapport de la Commission des Comptes.

(MM. G. FOURET, G. HUMBERT ; C. BOCHE, rapporteur.)

MESSIEURS ET CHERS COLLÈGUES,

Conformément à l'article 16 de nos Statuts et aux articles 33 et 34 de notre Règlement administratif, j'ai l'honneur de vous présenter le résultat de l'examen auquel a procédé la Commission chargée par votre Conseil d'administration de vous faire un Rapport sur la gestion de notre trésorier et sur la situation morale et financière de notre Société.

Les comptes de l'exercice clos, s'étendant du 1^{er} novembre 1912 au 31 octobre 1913, s'établissent comme il suit :

État des recettes et des dépenses courantes.

Solde actif au 1 ^{er} novembre 1912	fr 1936,86
<i>Recettes.</i>	
Cotisations.....	4115 »
Abonnements, ventes de volumes.....	1386,90
Boni sur facture Gauthier-Villars de 1912.....	95,10
Subvention du Ministère.....	400 »
Intérêts et revenus.....	1510,60
Total de l'actif.....	<u>9444,46</u>
<i>Dépenses.</i>	
<i>Bulletin</i> (T. XLI) : impression, brochage, expédition.....	5763 ^{fr} ,44
Tirages à part.....	433,75
Traitement de l'agent, gratifications.....	550 »
Frais de bureau, de poste et divers.....	458,05
Souscription aux œuvres d'Euler.....	129,80
Traduction.....	100 »
Total des dépenses....	<u>7435,04</u>
Excédent de l'actif.....	<u>2009,42</u>
Total comme ci-dessus....	<u>9444,46</u>

Réserve disponible.

Il y avait au 1 ^{er} novembre 1912, à titre de réserve disponible,	fr
498 ^{fr} de rente 3 pour 100 sur l'État, ayant coûté.....	16313,09
Excédent d'actif disponible en espèces.....	2009,42

Réserve inaliénable.

La réserve inaliénable se composait au 1^{er} novembre 1912 de :

1 ^o <i>En portefeuille</i> : 886 ^{fr} de rente 3 pour 100 sur l'État;	
» 3 obligations du Chemin de fer de l'Ouest 3 pour 100;	
» 2 obligations des Chemins de fer du Sud;	fr
ayant coûté ensemble.....	<u>25677,36</u>

2° <i>En espèces</i> : A la Société Générale.....	fr 280,33
» En Ca. se.....	250,00
Dans le cours de l'année 1912-1913 il a été encaissé, comme droits d'entrée et souscriptions perpétuelles (droits d'entrée 180 ^{fr} , souscriptions perpétuelles 600 ^{fr}).....	780,00
ce qui constituait au 31 octobre 1913 un total en espèces de :	<u>1310,33</u>

J'ai cru devoir signaler à part, au lieu de les faire entrer dans les comptes de dépenses diverses : 1° une souscription aux œuvres d'Euler; 2° des frais de traduction; ces dépenses sont un peu spéciales et il peut y avoir intérêt à les mentionner.

La subvention du Ministère qui, en 1912, avait été portée à 1000^{fr} n'a été en 1913 que de 400^{fr}, comme dans les années antérieures à 1912. Le trésorier se propose de faire des démarches pour tâcher d'obtenir un relèvement de la subvention.

La Commission des comptes vous propose de voter une gratification de 150^{fr} à M. Vézinaud et une autre de 100^{fr} à la secrétaire du trésorier. Elle vous prie aussi de voter des remerciements à notre trésorier ainsi qu'aux secrétaires qui donnent leurs soins à l'administration de la Société et à la publication du *Bulletin* et d'approuver, avec les comptes qui vous sont présentés, la conclusion du présent Rapport.

CH. BLOCHE.

