BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 1-54 (supplément spécial)

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__v1_0>

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1912 (1).

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. LECORNU. MITTAG-LEFFLER. PAINLEVÉ. PICARD. POINCARÉ. VOLTERRA. ZEUTHEN.

Président..........................	MM. ANDOYER.
Vice-Présidents....................	COSSERAT (F.). FONTENÉ. MAILLET. VESSIOT.
Secrétaires........................	CARTAN. MONTEL.
Vice-Secrétaires...................	FATOU. HALPHEN.
Archiviste.........................	FOUCHÉ.
Trésorier..........................	SERVANT.
Membres du Conseil (2)	BIOCHE, 1913. BOREL, 1913. BRICARD, 1914. CAHEN (E.), 1915. D'OCAGNE, 1913. FOURET, 1915. GRÉVY, 1914. GUICHARD, 1914. HADAMARD, 1913. KŒNIGS, 1912. LEBESGUE, 1915. LÉVY (L.), 1915.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17^e^).

1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig (Allemagne). S. P. [1].

1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert D'), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).

1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5^e^).

1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Mouillière, 1, à Besançon.

1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6^e^).

1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue du Bac, 32, à Paris (7^e^).

1910. **ARCHIBALD** (R.-C.), professeur à Brown-Université, Providence, Rhode Island (États-Unis).

1900. **AURIC**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Pierre-Corneille, 38, à Lyon.

1882. **AUTONNE**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur adjoint honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon, rue de l'Hospice, 69, à Châteauroux (Indre).

1900. **BAIRE**, professeur à la Faculté des Sciences, 24, rue Audra, à Dijon.

1896. **BAKER**, professeur à l'Université de Toronto (Canada).

1905 **BARRÉ**, capitaine du génie, docteur ès sciences mathématiques, quai de la République, 8, à Verdun (Meuse).

1906. **BARTHELS**, docteur en philosophie, professeur honoraire de Mathématiques, à Aschaffenburg (Bavière).

1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P.

1904. **BERNSTEIN** (S.), docteur ès sciences, privat docent à l'Université, Apterkarsky, 22, à Kharkow (Russie).

1891. **BERTRAND DE FONTVIOLANT**, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Brémontier, 16, à Paris (17^e^). S. P.

1910. **BERTRAND** (G.), professeur à l'École Sainte-Geneviève, rue Lhomond, 18, à Paris (5^e^).

1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6^e^) S. P.

1900. **BLUMENTHAL** (Otto), professeur à la Technische Hochschule, Rütscherstrasse, 48, à Aix-la-Chapelle (Allemagne).

1891. **BLUTEL**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14^e^).

1902. **BOBERIL** (vicomte Roger DU), à Saint-Barthélemy, Marseille. S. P.

1907. **BOITEL DE DIENVAL**, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne). S. P.

1892. **BONAPARTE** (prince Roland), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16^e^).

1895. **BOREL** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e^). S. P.

1909. **BOULAD** (F.), ingénieur au service des Ponts des Chemins de fer de l'État égyptien, au Caire (Égypte).

1896. **BOULANGER**, docteur ès sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 68, à Paris (5^e^).

1896. **BOURGET** (H.), directeur de l'Observatoire, à Marseille.

1896. **BOURLET**, docteur ès sciences, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Beaux-Arts, rue Raynouard, 56, à Paris (16^e^). S. P.

---

[1] Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Date
de
admission.

1903. **BOUTIN**, rue Lavieuville, 26, à Paris (18^e).

1904. **BOUTROUX** (P.), professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. S. P.

1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (14^e).

1911. **BRATU**, professeur, rue Galipeau, 3, à Antony (Seine).

1897. **BRICARD**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14^e).

1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.

1912. **BROWNE**, Collège des Irlandais, rue des Irlandais, 5, à Paris (5^e).

1901. **BUHL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.

1893. **BURKHARDT**, professeur à la Technische Hochschule, Martinstrasse, 3, à Munich (Bavière).

1894. **CAHEN**, professeur au collège Rollin, rue Cortambert, 46, à Paris (16^e).

1893. **CALDARERA**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Liberta, à Palerme (Italie).

1885. **CARON**, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5^e).

1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 *bis*, à Paris (17^e).

1896. **CARTAN**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Vaugirard, 174, à Paris (15^e).

1887. **CARVALLO**, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5^e). S. P.

1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).

1892. **CELLÉRIER** (Gustave), ancien astronome à l'Observatoire, cours de Rive, 12, à Genève (Suisse).

1888. **CHAILAN** (Édouard), professeur à l'Institut catholique, rue Denfert-Rochereau, 95, à Paris (14^e).

1911. **CHALORY**, professeur au lycée Carnot, rue de Vaugirard, 38, à Paris (6^e).

1896. **CHARVE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.

1911. **CHATELET**, ancien élève de l'École Normale supérieure, rue de la Californie, 69, à Tours.

1907. **CHAZY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Lille.

1884. **CHRYSTAL**, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).

1901. **CLAIRIN**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Giélée, 57 *bis*, à Lille.

1898. **COMBEBIAC**, chef de bataillon du génie en retraite, docteur ès sciences, rue Arbonneau, 7, à Limoges.

1896. **COSSERAT** (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse.

1896. **COSSERAT** (F.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10^e).

1900. **COTTON** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.

1904. **CURTISS**, professeur à l'Université Northwestern, Milburn Street, 720, à Evanston (Illinois, États-Unis).

1872. **DARBOUX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Mazarine, 3, à Paris (6^e).

1885. **DAUTHEVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.

1901. **DELASSUS**, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.

1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).

1885. **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).

Date de l'admission

1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).
1905. **DENJOY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Duguesclin, 3, à Montpellier.
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liége (Belgique).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17^e).
1900 **DICKSTEIN**, Marszalkowska, 117, à Varsovie.
1899. **DRACH**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Japon, 12, à Toulouse.
1909. **DRURY**, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1907. **DULAC**, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, privat-docent à l'École Polytechnique fédérale, Asylstrasse, 81, à Zurich (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1885. **DYCK** (Walther), professeur à l'École Polytechnique de Munich, membre de l'Académie des Sciences de Bavière, Hildegardstrasse, 5, à Munich (Bavière).
1902. **EGOROFF** (Dimitry), professeur à l'Université, Povarskaïa, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).
1903. **ESPANET**, ingénieur civil, Brazil Railway Company, rue Louis-le-Grand, 9, à Paris.
1900. **ESTANAVE**, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **ETZEL**, S^t Bernard's Seminary, à Rochester (État de New-York, États-Unis).
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7^e).
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Chaptal, 17, à Montpellier.
1906. **FARAGGI**, professeur à Sétif (Algérie).
1904. **FATOU**, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Mont-Parnasse, 172, à Paris (14^e).
1891. **FAUQUEMBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.
1892. **FEHR** (Henri), professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).
1885. **FIELDS** (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1881. **FLOQUET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. **FONTENÉ**, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5^e).
1903. **FORD** (WALTER B.), professeur de Mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1889. **FOUCHÉ**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5^e).
1905. **FOUËT**, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6^e).
1872. **FOURET**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17^e). S. P.
1903. **FRAISSÉ**, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1911. **FRÉCHET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1903. **FUETER**, professeur à l'Université, Wartenbergstrasse, 17, à Bâle (Suisse).
1911. **GALBRUN**, docteur ès sciences, avenue Élysée-Reclus, 32, à Paris (7^e).
1900. **GALDEANO** (Z.-G. DE), correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1906. **GARGAM DE MONCETZ**, licencié ès sciences, square de Latour-Maubourg, 8, à Paris (7^e).
1872. **GARIEL**, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17^e).

Date
de
l'admission.

1908. **GARNIER**, docteur ès sciences, boulevard Arago, 99, à Paris (14^e).
1911. **GAU**, maître des conférences à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6^e).
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1907. **GIORDANO**, directeur du R. Ginnasio, à Licata (Italie).
1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16^e).
1907. **GOT** (Th.), ancien ingénieur de la marine, Hôtel Soufflot, rue Toullier, à Paris (5^e).
1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 39, à Paris (5^e). S. P.
1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5^e).
1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7^e).
1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).
1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6^e). S. P.
1900. **GUICHARD** (C.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Boulainvilliers, 14, à Paris (16^e).
1907. **GUICHARD** (L.), rue Condorcet, 42, à Paris (9^e).
1881. **GUNTHER** (D^r Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, membre de l'Institut, boulevard Raspail, 284, à Paris (14^e).
1882. **HABICH**, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).
1896. **HADAMARD**, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14^e). S. P.
1910. **HALPHEN** (Ch.), ingénieur des Arts et Manufactures, Chaussée de la Muette, 8 *bis*, à Paris (16^e).
1894. **HALSTED** (G.-B.), Colorado State Teachere College, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.
1901. **HANCOCK**, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1909. **HANSEN**, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6^e). S. P.
1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5^e).
1911. **HIERHOLTZ**, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).
1911. **HOLMGREN**, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, Upsal (Suède).
1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École S^{te}-Croix de Neuilly, boulevard Pereire, 218 *bis*, à Paris (17^e). S. P.
1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17^e).
1907. **HUSSON**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Tiercelins, 60, à Nancy.
1881. **IMBER**, ancien directeur des études à l'École Centrale, ancien membre du Conseil de l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11^e).

Date
de
l'admission.

1896. **JACQUET** (E.), professeur, rue Lagarde, 3, à Paris (5ᵉ).
1898. **JAHNKE** (E.), professeur à l'Académie des Mines, Darmstädter strasse, 11, à Berlin, W.15 (Allemagne).
1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Frederiksberg allée, 68, à Copenhague (Danemark).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7ᵉ). S. P.
1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).
1910. **KÉRAVAL**, professeur au lycée Louis-le-Grand, avenue du Maine, 46, à Paris (14ᵉ).
1892. **KOCH** (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. **KŒNIGS**, professeur à la Faculté des Sciences, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14ᵉ).
1907. **KRYLOFF**, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1897. **LACAUCHIE**, ingénieur civil, rue Brochant, 18, à Paris (17ᵉ).
1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, rue du Conseil, 5, à Asnières (Seine).
1906. **LALESCO**, maître de conférences à l'Université, str. Luteranà, 31, à Bucarest.
1893. **LANCELIN**, astronome-adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14ᵉ).
1899. **LANDAU**, professeur à l'Université, Herzbergerchaussee, 48, à Göttingen (Allemagne).
1896. **LAROZE**, ingénieur des télégraphes, rue Froidevaux, 8, à Paris (14ᵉ).
1908. **LATTÈS**, professeur à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1873. **LAUTH**, manufacturier à Thann (Alsace).
1896. **LEAU**, professeur au lycée Michelet, rue Denfert-Rochereau, 83, à Paris (14ᵉ).
1880. **LÉAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17ᵉ). S. P.
1896. **LEBEL**, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.
1902. **LEBESGUE**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, avenue de la Tourelle, 7, à Saint-Mandé.
1903. **LEBEUF**, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.
1893. **LECORNU**, membre de l'Institut, Inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5ᵉ).
1895. **LÉMERAY**, licencié ès sciences mathématiques et physiques, ingénieur civil du génie maritime, villa Véga, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1904. **LEMOYNE** (T.), rue Claude-Bernard, 74, à Paris (5ᵉ).
1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, à l'Observatoire de Cointe, à Liége (Belgique).
1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.
1898. **LE ROY**, docteur ès sciences, boulevard Raspail, 117, à Paris (6ᵉ),
1891. **LERY**, agent-voyer en chef de Seine-et-Oise, rue Magenta, 5, à Versailles.
1900. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1907. **LESGOURGUES**, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6ᵉ).
1909. **LÉVY** (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6ᵉ).
1882. **LÉVY** (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6ᵉ).
1907. **LÉVY** (Paul), ingénieur des mines, professeur à l'École des Mines de Saint-Étienne, à Saint-Étienne.

Date de l'admission.

1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).
1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Franz-Josefstrasse, 9, à Munich (Bavière).
1886. **LIOUVILLE**, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4ᵉ).
1912. **LOVETT** (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).
1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue Boissière, 30, à Paris (16ᵉ).
1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, au Ministère des Finances, Direction des manufactures de l'État, à Paris (2ᵉ).
1902. **LUCAS DE PESLOUAN**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7ᵉ).
1895. **MAILLET**, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1905. **MALUSKI**, proviseur du lycée de Nîmes.
1906. **MARCUS**, licencié ès sciences, rue de Montsouris, 33, à Paris (14ᵉ).
1904. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12ᵉ).
1884. **MARTIN** (Artemas), 1535, Colombia Street N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1897 **MEHMKE**, professeur à l'École technique supérieure, Lowenstrasse, à Stuttgart-Degerloch (Wurtemberg).
1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7ᵉ). S. P.
1902. **MERLIN** (Émile), docteur ès sciences physiques et mathématiques, ancien astronome adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, répétiteur à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1907. **MERLIN** (Jean), astronome à l'Observatoire de Lyon, à Saint-Genis-Laval (Rhône).
1904. **METZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1909. **MICHEL** (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14ᵉ).
1893. **MICHEL** (François), ingénieur, licencié ès sciences, chef du service des parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10ᵉ).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1904. **MIWA**, professeur à l'Université de Kyoto (Japon).
1902. **MOLK** (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1907. **MONTEL**, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15ᵉ).
1898. **MONTESSUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard Bigot-Danel, 15, à Lille (Nord).
1911. **MOORE** (CH.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati, rue Notre-Dame-des-Champs, 99, à Paris (6ᵉ).
1903. **MULLER** (J.-O.), Venusbergerweg, 32, à Bonn (Allemagne).
1909. **MYERS** (G.-W.), professeur de mathématiques et d'astronomie et supervisor de mathématiques à l'Université de Chicago (États-Unis).
1909. **NEOVIUS**, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr. Vinthersvei 3^1, à Copenhague (Danemark).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liége (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, la Chataigneraie, à Saint-Clarens (Vaud, Suisse).

Date de l'admission.

1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5e).

1882. **OCAGNE** (M. d'), ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue La Boëtie, 30, à Paris (8e). S. P.

1905. **OUIVET**, rue Pierre-Nicole, 7, à Paris (3e).

1873. **OVIDIO** (E. d'), professeur à l'Université, Corso Sommeiller, 16, à Turin (Italie).

1901. **PADÉ** (H.), recteur de l'Académie de Besançon.

1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6e).

1912. **PANGE** (de), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François Ier, 32, à Paris (8e).

1888. **PAPELIER**, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Recouvrance, 29, à Orléans.

1881. **PELLET**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.

1874. **PERCIN**, général de division, avenue Elisée-Reclus, 23, à Paris (7e).

1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.

1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17e).

1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).

1902. **PETROVITCH** (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Saint-Pétersbourg.

1887. **PEZZO** (del), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).

1905. **PFEIFFER**, maître de conférences à l'Université, Szaoudl Wladimirskaïa 45, log II, à Kiew (Russie).

1906. **PHILIPPE** (Léon), inspecteur général des ponts et chaussées, rue de Turin, 23 *bis*, à Paris (8e).

1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6e).

1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6e).

1899. **PIERPONT** (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).

1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris (5e). S. P.

1872. **POLIGNAC** (prince C. de), à Radmannsdorf (Carniole, Autriche). S. P.

1906. **POPOVICI**, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).

1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à Münich (Bavière).

1896. **PRUVOST**, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16e).

1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue Madame, 54, à Paris (6e).

1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5e).

1898. **RABUT**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6e).

1903. **RÉMOUNDOS**, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridion Tricoupis, 54, à Athènes (Grèce).

1906. **REMY**, docteur ès sciences, ingénieur des Mines, rue Jeanne-d'Arc, 25, à Arras (Pas-de-Calais).

Date de l'admission.

1903. **RICHARD**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Fonds, 100, à Châteauroux.
1908. **RICHARD D'ABONCOURT** (DE), anc. élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.
1908. **RISSER**, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7^e).
1903. **ROCHE**, agrégé de mathématiques, rue d'Assas, 76, à Paris (6^e).
1909. **ROSENBLATT**, docteur en philosophie, rue Basztowa, 19, à Cracovie (Autriche).
1908. **ROTHROCK**, Professeur à l'Université, à Bloomington (Indiana, États-Unis).
1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8^e).
1896. **ROUGIER**, professeur au lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1906. **ROUSIERS**, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14^e).
1911. **RUDNICKI**, licencié ès sciences, avenue du Parc-de-Montsouris, 21, à Paris (14^e).
1900. **SALTYKOW**, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.
1907. **SANIELEVICI**, docteur ès sciences, Calca Victorici, 193, à Bucarest (Roumanie).
1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **SCHŒNFLIES**, professeur à l'Université, IX, Schumannstrasse, 62, à Francfort (Allemagne).
1897. **SCHOU** (Erik), ingénieur, Hollaendervez, 12, à Copenhague (Danemark).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7^e).
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Pétersbourg. S. P.
1900. **SERVANT**, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).
1908. **SHAW** (J.-B.), professeur à l'Université, West California, 901, Ave Urbana (Illinois, États-Unis).
1912. **SIRE**, docteur ès sciences, rue Royer-Collard, 4, à Paris (5^e).
1900. **SPARRE** (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.
1909. **SPEISER** (Andreas), privat-docent à l'Université, Stephansplan, 7, à Strasbourg (Allemagne).
1912. **STECKER** (H.-F.), professeur de Mathématiques, à Pensylvania State College, Miles St. 306 (Pensylvanie, États-Unis).
1879. **STEPHANOS**, professeur à l'Université, rue Solon, 20, à Athènes (Grèce).
1898. **STÖRMER**, professeur à l'Université, Cort Adelers gade, 12, à Christiania (Norvège).
1904. **SUDRIA**, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14^e).
1904. **SUNDMAN**, maître de conférences à l'Université, Fredriksgatan, 19, à Helsingfors (Finlande).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, Majorstuveien, 16 III, à Christiania (Norvège). S. P.
1909. **TARNARIDER** (M^{lle}), licenciée ès sciences, Amdtstrasse 18 II, à Göttingen (Allemagne).
1882. **TARRY** (G.), membre de la Société Philomathique de Paris, boulevard de Strasbourg, 182, au Havre. S. P.
1899. **THYBAUT**, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5^e).
1910. **TIMOCHENKO**, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1896. **TORRES**, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. **TOUCHE**, ancien lieutenant-colonel d'artillerie, rue Truffault, 23, à Paris (17^e).

Date de admission.

1910. **TRAYNARD**, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. **TRESSE**, professeur au collège Rollin, rue Mizon, 6, à Paris (15e).
1907. **TRIPIER** (H.), licencié ès sciences, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17e).
1911. **TURRIÈRE**, docteur ès sciences, professeur au lycée de Poitiers.
1893. **VALLÉE-POUSSIN** (Ch.-J. DE LA), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université, rue de la Station, 149, à Louvain (Belgique).
1904. **VANDEUREN**, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. **VAN VLECK**, professeur de Mathématiques, University of Wisconsin, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), professeur à l'Ecole militaire supérieure, rue Socrate, 11 A, à Athènes (Grèce).
1898. **VASSILIEF**, membre du Conseil d'État, Vassili Ostrow ligne 12, m. 19, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1909. **VEIL** (Mlle S.), licenciée ès sciences, boulevard de Strasbourg, 55, à Paris (10e).
1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Raspail, 234, à Paris (14e).
1911. **VILLAT**, maître de conférences à l'Université de Montpellier.
1888. **VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.
1900. **VUIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5e).
1880. **WALCKENAER**, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7e).
1907. **WEBER** (Émile), rue du Mambour, 10, à Liége (Belgique).
1879. **WEILL**, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8e).
1906. **WILSON** (E.-B.), professeur à l'Institut de technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1911. **WINTER**, avenue Kléber, 29, à Paris (16e).
1909. **WOODS** (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1878. **WORMS DE ROMILLY**, inspecteur général des mines, en retraite, quai de Passy, 14, à Paris (16e).
1882. **ZABOUDSKI**, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie Znamenskaïa, 22, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1890. **ZAREMBA**, professeur à la Faculté de Philosophie de l'Université, rue Sw. Anny, 12, à Cracovie (Autriche).
1903. **ZERVOS**, professeur agrégé à l'Université, rue Acharnon, 41, à Athènes (Grèce).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Forchhammers Vej. 12, à Copenhague (Danemark).
1898. **ZIWET**, professeur de Mathématiques à l'Université de Michigan, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1911. **ZOARD DE GÉOCZE**, professeur à Ungvàr (Hongrie).
1909. **ZORETTI**, professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Caen.

Membre décédé en 1911 : M. ROUQUET.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — CANET. — CHASLES. CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE. — HIRST. LAFFON DE LADÉBAT. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). — RAFFY. — TANNERY (PAUL). TCHEBICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

	MM.		MM.
1873	CHASLES.	1893	HUMBERT.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1894	PICQUET.
1875	BIENAYMÉ.	1895	GOURSAT.
1876	DE LA GOURNERIE.	1896	KŒNIGS.
1877	MANNHEIM.	1897	PICARD.
1878	DARBOUX.	1898	LECORNU.
1879	O. BONNET.	1899	GUYOU.
1880	JORDAN.	1900	POINCARÉ.
1881	LAGUERRE.	1901	D'OCAGNE.
1882	HALPHEN.	1902	RAFFY.
1883	ROUCHÉ.	1903	PAINLEVÉ.
1884	PICARD.	1904	CARVALLO.
1885	APPELL.	1905	BOREL.
1886	POINCARÉ.	1906	HADAMARD.
1887	FOURET.	1907	BLUTEL.
1888	LAISANT.	1908	PERRIN (R.).
1889	ANDRÉ (D.).	1909	BIOCHE.
1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.	1910	BRICARD.
1891	COLLIGNON.	1911	LÉVY (L.).
1892	VICAIRE.	1912	ANDOYER.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam	*Revue semestrielle des publications mathématiques.*	Pays-Bas.
Bâle	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore	*American Journal of Mathematics.*	États-Unis.
Berlin	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin	*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*	Allemagne.
Berlin	*Journal für die reine und angewandte Mathematik.*	Allemagne.
Bologne	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania	*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*	Norvège.
Coïmbre	*Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.*	Portugal.
Copenhague	*Nyt Tidsskrift for Mathematik.*	Danemark.
Copenhague	*Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.*	Danemark
Cracovie	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand	*Mathesis.*	Belgique.
Göttingen	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax	Nova Scotian Institute of Science.	N^{lle}-Écosse (Canada)
Hambourg	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig	*Mathematische Annalen.*	Allemagne.
Leipzig	*Archiv der Mathematik und Physik.*	Allemagne.
Liége	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne	*Periodico di Matematica.*	Italie.
Londres	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres..........	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg......	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.........	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Mexico...........	Sociedad cientifica *Antonio Alzate.*	Mexique.
Milan............	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou...........	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich...........	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples...........	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.......	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York........	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa...........	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme..........	*Rendiconti del* Circolo matematico.	Italie.
Paris............	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.............	Association française pour l'avancement de Sciences.	France.
Paris.............	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.............	*Bulletin des Sciences mathématiques.*	France.
Paris.............	*Journal de l'École Polytechnique.*	France.
Paris.............	Institut des Actuaires français.	France.
Paris.............	*Intermédiaire des Mathématiciens.*	France.
Pise..............	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise..............	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise..............	*Il Nuovo Cimento.*	Italie.
Prague...........	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague...........	*Casopis pro péstováni mathematiky a fysiky.*	Autriche.
Prague...........	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Princeton.........	*Annals of Mathematics.*	New-Jersey, États-Unis
Rennes...........	*Travaux de l'Université.*	France.
Rome............	Académie Royale des *Lincei.*	Italie
Rome............	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome............	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Saint-Pétersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Sophia...........	*Annuaire de l'Université de Sophia.*	Bulgarie.
Stockholm........	*Acta mathematica.*	Suède.
Stockholm.......	*Bibliotheca mathematica.*	Suède.
Tokyo...........	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.........	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Turin............	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal............	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie.........	Prace Matematyczno Fizyczne.	Russie.
Venise...........	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne...........	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne...........	*Monatshefte für Mathematik und Physik.*	Autriche.
Zagreb (Agram)..	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Autriche-Hongrie.
Zurich...........	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1911.

PRÉSIDENCE DE M. BRICARD.

Communication :

M. Bricard : *Sur les arcs d'ellipse à différence rectifiable.*

L'auteur donne une démonstration très simple des théorèmes de Chasles et d'autres propositions relatives à ces arcs.

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1911.

PRÉSIDENCE DE M. FONTENÉ.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société : M. Bratu, présenté par MM. E. Picard et T. Lalesco.

Communications :

M. E. Cahen : *Sur l'irrationnalité des sommes des séries dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice.*

La somme d'une telle série $\sum \frac{f(n)}{g(n)}$ *s'exprime au moyen de nombres rationnels, des coefficients de* $f(n)$ *et de* $g(n)$, *des racines de* $g(n)$, *de fonctions rationnelles, de la fonction* $h(x)$ *dérivée* *logarithmique de la fonction eulérienne* Γ, *enfin des dérivées de* $h(x)$ *jusqu'à un certain ordre.*

Il résulte de là que l'étude des irrationnalités que présentent les séries en question est ramenée à celle des irrationnalités que présentent la fonction h et ses dérivées. Cette étude n'est pas faite. L'auteur la commence par le théorème suivant : *Pour des valeurs rationnelles de* x, *la fonction* $h(x)$ *s'exprime au moyen de nombres algébriques, de la constante d'Euler et de fonctions logarithmiques.*

Ceci donne la somme de la série lorsque les racines du dénominateur sont rationnelles et d'ordre 1.

L'auteur examine encore plusieurs cas où la somme de la série se ramène à des transcendantes connues.

Lorsque $g(n)$ a ses racines commensurables, mais multiples, la somme se ramène à des transcendantes, entre lesquelles l'auteur établit quelques relations.

D'ailleurs ces résultats ne présentent pas qu'un intérêt purement théorique. Le calcul de l'expression que l'on trouve dans certains cas pour la somme d'une série est souvent plus simple que le calcul direct.

M. Lebesgue : *Sur le théorème de la moyenne de Gauss.*

Ce théorème s'exprime dans le cas de deux variables x et y par la relation

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi r^2} \int \int_C f(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1,$$

C étant un cercle de centre (x, y) et de rayon r. La fonction f étant supposée continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, la relation de Gauss est la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit harmonique. M. Lebesgue complète un peu ce résultat en remarquant qu'il suffit de supposer que f est sommable (ce qui est nécessaire pour que la relation ait un sens) pour que le théorème subsiste. Même, dans des conditions assez larges, il suffit que cette relation de Gauss soit vérifiée en chaque point (x, y) pour une seule valeur $r(x, y)$ de r. Ceci conduit à essayer de calculer par le procédé suivant la fonction harmonique prenant sur la frontière d'un domaine D les mêmes valeurs qu'une fonction continue donnée f : à chaque point (x, y) intérieur à D, attachons une circonférence C n'ayant aucun point extérieur à D, de centre (x, y) et de rayon $r(x, y)$; $r(x, y)$ est supposée continue. De f nous déduisons une fonction f_1 par l'égalité

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{1}{\pi r^2(x,y)} \int\int_{C(x,y)} f(x_1,y_1)\, dx_1\, dy_1 \\ &= \int\int_D K_1(x,y;x_1,y_1)\, dx_1\, dy_1, f(x_1,y_1), \end{aligned}$$

$K_1(x, y; x_1, y_1)$ étant égal à $\frac{1}{\pi r^2(x,y)}$ quand (x_1, y_1) est intérieur à D et à zéro dans le cas contraire. De même, de f_1 on déduira f_2, de f_2 on déduira f_3, ... On a

$$f_i(x,y) = \int\int_D K_i(x,y;x_1,y_1) f(x_1,y_1)\, dx_1\, dy_1$$

en posant

$$K_i(x,y;x_1,y_1) = \int\int_D K_1(x,y;\alpha,\beta)\, K_{i-1}(\alpha,\beta;x_1,y_1)\, d\alpha\, d\beta.$$

Les fonctions f_i tendent vers la fonction cherchée pour les domaines D tels que le problème posé soit possible pour toute fonction continue $f(x, y)$.

M. Montel : *Sur des généralisations des théorèmes de MM. Picard et Landau.*

Des travaux récents dus principalement à MM. Landau, Carathéodory, Schottky, Hurwitz ont remarquablement complété les théorèmes de M. Picard sur les points singuliers essentiels. Ces travaux sont relatifs à des fonctions qui ne prennent jamais ni la valeur zéro, ni la valeur un à l'intérieur d'un cercle où elles sont holomorphes. M. Montel montre comment ces propositions peuvent être étendues au cas où les fonctions prennent un nombre limité de fois les valeurs zéro et un dans tel cercle. Par exemple, les fonctions $f(x)$, holomorphes dans un cercle de rayon R, prenant au centre la valeur a_0 et ne prenant pas plus de p fois les valeurs zéro et un dans ce cercle sont, dans un cercle concentrique de rayon $\theta R (0 < \theta < 1)$, inférieures en module à un nombre $M(a_0, p, \theta, \theta')$, en désignant par $\theta' R$ la plus courte distance au centre des points pour lesquels $f(x)$ est égale à zéro ou à un. Sous certaines conditions, ces résultats peuvent encore s'étendre au cas où $f(x)$ prend une infinité de fois les valeurs zéro et un dans le cercle.

SÉANCE DU 13 DÉCEMBRE 1911.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

SÉANCE DU 20 DÉCEMBRE 1911.

PRÉSIDENCE DE M. L. LÉVY.

Communications ;

M. Cartan : *Sur les caractéristiques de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles.*

Lorsqu'un système d'équations aux dérivées partielles *en involution* à un nombre quelconque de fonctions inconnues de n variables indépendantes jouit de la propriété que son intégrale générale ne dépend que de fonctions arbitraires d'un argument, il existe r familles de caractéristiques à $n-1$ dimensions, r désignant le nombre des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale. Chaque intégrale peut être regardée de r manières différentes comme engendrée par des caractéristiques dépendant d'une constante arbitraire.

Dans certains cas, le nombre de ces familles de caractéristiques peut être réduit, certaines familles devenant doubles, triples, etc. Ces cas de réduction sont analogues à ceux qui se présentent dans la réduction d'une substitution linéaire à sa forme normale et la recherche des caractéristiques dépend d'ailleurs d'une telle réduction.

M. Montel : *Sur une nouvelle démonstration d'un théorème de M. Picard.*

Il s'agit du théorème relatif aux valeurs que prend une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel isolé. M. Montel montre d'abord que les fonctions $f(x)$, holomorphes dans un anneau de centre origine et limité par des cercles de rayons $\frac{R}{2}$ et $2R$, qui prennent en un point situé à la distance R de l'origine une valeur de module inférieur à α et ne prennent jamais dans l'anneau ni la valeur zéro ni la valeur un, sont, sur le cercle concentrique à l'anneau et de rayon R, inférieures en module à un nombre $M(\alpha)$, indépendant de R. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une infinité de points P ayant pour unique point limite l'origine en chacun desquels le module d'une fonction $f(x)$, holomorphe autour de l'origine qui est un point essentiel, est inférieur à α. Si la fonction ne prend jamais ni la valeur zéro ni la valeur un autour de l'origine, on en déduit qu'elle est bornée sur toutes les circonférences de centre origine et passant par les points P et, par conséquent, bornée autour de l'origine qui ne peut donc être un point singulier.

SÉANCE DU 10 JANVIER 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement du Bureau et d'une partie du Conseil : elle entend le Rapport de la Commission des comptes et en approuve les conclusions à l'unanimité.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. J. Sire, présenté par MM. Vessiot et Montel.

Communication :

M. Halphen : *Sur un système différentiel relatif au problème des potentiels des accélérations d'ordre supérieur.*

Il s'agit de trouver les intégrales communes à deux équations aux dérivées partielles du second ordre que l'auteur a précédemment rencontrées; on peut le faire en ramenant le problème à la recherche de deux développables, intégrales d'une même équation du premier ordre, liées entre elles par une relation géométrique simple. Une des solutions que donne cette méthode est le mouvement d'un point sur une hyperbole équilatère qui a déjà été signalé. Une marche analogue peut s'appliquer à des équations d'un type plus général.

L'auteur se propose de revenir prochainement sur ce sujet, particulièrement sur les remarques que M. Cartan a bien voulu lui faire.

SÉANCE DU 24 JANVIER 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communications :

M. Hadamard : I. *Sur les variations unilatérales et les principes du calcul des variations.*

Il est aujourd'hui bien connu que la considération des variations successives ne suffit pas *a priori*, comme les successeurs de Lagrange avaient été tentés de le croire, à décider du maximum ou du minimum d'une intégrale.

Un des exemples les plus simples et les plus généraux de ce fait est fourni, comme M. Hadamard a déjà eu l'occasion de le remarquer ([1]), par les problèmes de *variation unilatérale.*

L'auteur expose comment, en outre, sur cet exemple, la manière dont le raisonnement en question est mis en défaut apparaît avec clarté. On voit dans certaines déformations continues du contour, l'intégrale commencer par décroître par exemple, puis augmenter jusqu'à une valeur supérieure à celle qu'elle avait initialement.

II. *Sur les extrémales du problème isopérimétrique dans le cas des intégrales doubles.*

On sait ([2]) que le problème isopérimétrique plan, relatif à deux intégrales dont l'une a la forme générale

$$I_0 = \int f(x, y, dx, dy) \tag{1}$$

([1]) Voir *Leçons sur le calcul des variations*, n^{os} 367, 388 (p. 447-448 et 470-471).

([2]) Voir *Ann. Sc. Éc. Norm. sup.*, 3^e série, t. XXIV, 1907, p. 203 et suiv.

(f vérifiant les conditions classiques pour que le problème soit régulier), tandis que l'autre est une intégrale curviligne du type élémentaire

$$\text{(2)} \qquad I_1 = \int P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

conduit à des conclusions d'une remarquable simplicité lorsqu'on considère des extrémales correspondant à de grandes valeurs du paramètre auxiliaire l par lequel on ramène l'extrémum (lié) de I_0 pour $I_1 = \text{const.}$, ou inversement, à l'extrémum libre de $I_0 + lI_1$. Les extrémales se ferment approximativement aux environs d'un de leurs points : à des infiniment petits d'ordre supérieur près, elles sont semblables à une courbe qu'on peut construire, *a priori*, par de simples différentiations et éliminations, la *figuratrice* du problème, c'est-à-dire la polaire réciproque de la courbe

$$f(x,y,\xi,\eta) = 1$$

(où x, y sont regardés comme des constantes et ξ, η comme des coordonnées cartésiennes) par rapport au cercle de rayon 1 ayant l'origine pour centre.

Comment les choses se passeront-elles si, au lieu d'intégrales simples, on envisage des intégrales doubles, l'une de la forme générale

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} I_0 = \displaystyle\int f(x,y,z,dy\,dz,dz\,dx,dx\,dy) \\ \quad = \displaystyle\int f\left[(x,y,z,\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]du\,dv \end{cases}$$

(f étant une fonction positivement homogène et de premier degré); l'autre de la forme particulière

$$\text{(4)} \qquad I_1 = \int P(x,y,z)\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy\,?$$

En opérant comme dans le cas des intégrales simples, on arrive au résultat suivant :

Soit encore la *figuratrice* du problème, polaire réciproque de la surface,

$$\text{(5)} \qquad f(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = 1$$

par rapport à la sphère de rayon 1 de l'espace, lieu du point de coordonnées cartésiennes ξ, η, ζ.

Soit (X, Y, Z) un point quelconque de cette figuratrice.

Les surfaces cherchées (lorsque le paramètre l est très grand), une fois agrandies dans le rapport l, peuvent être considérées comme liées à la surface (5) par les relations

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} k\frac{D(y,z)}{D(u,v)} &= \frac{D(y,Z)}{D(u,v)} - \frac{D(z,Y)}{D(u,v)}, \\ k\frac{D(z,x)}{D(u,v)} &= \frac{D(z,X)}{D(u,v)} - \frac{D(x,Z)}{D(u,v)}, \\ k\frac{D(x,y)}{D(u,v)} &= \frac{D(x,Y)}{D(u,v)} - \frac{D(y,X)}{D(u,v)}. \end{aligned} \right.$$

Ces relations peuvent s'interpréter d'une manière très simple; elles expriment :

1° Que les surfaces (x, y, z) et (X, Y, Z) se correspondent par plans tangents parallèles;

2° Que si, à partir d'un point de l'une d'elles, on se déplace de manière que les déplacements correspondants sur les deux surfaces soient parallèles, ce qui peut se faire de deux manières différentes, et qu'on désigne par S_1 le rapport du déplacement sur la première surface à son correspondant sur la seconde, S_2 désignant le rapport analogue relatif à la seconde direction qui jouit de la même propriété, on a

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = k.$$

Le problème de Géométrie ainsi posé est tout à fait analogue à la recherche des *surfaces à courbure moyenne constante*, recherche à laquelle il se réduit lorsque la première surface (X, Y, Z) est une sphère, S_1 et S_2 n'étant alors autres que les rayons de courbure principaux de la seconde surface. Cette analogie conduit immédiatement à une simplification notable de la question.

On sait, en effet, que la détermination des surfaces à courbure moyenne constante se ramène aisément à celle des surfaces à courbure totale constante, moyennant la considération d'une surface parallèle à la surface cherchée.

Cet artifice s'applique de lui-même à la question actuelle. Par le point (x, y, z) menons un segment de composantes $-\lambda X$, $-\lambda Y$, $-\lambda Z$; autrement dit, posons

$$x = \lambda X + x_1, \qquad y = \lambda Y + y_1, \qquad z = \lambda Z + z_1.$$

Le lieu du point (x, y, z) est une troisième surface qui correspondra encore aux deux premières par plans tangents parallèles, mais qui, cette fois, sera telle que les aires homologues décrites par le point (X, Y, Z) et par le point (x_1, y_1, z_1) soient dans un rapport constant.

On peut encore dire qu'*on connaîtra la courbure totale de cette troisième surface en fonction des cosinus directeurs du plan tangent.*

La détermination d'une surface ainsi définie dépend, comme on sait, d'une équation de Monge-Ampère, dont les caractéristiques sont les lignes asymptotiques. Minkowski a démontré que le problème ne peut admettre plus d'une solution telle que la surface soit fermée. Il en est donc de même du problème actuel, l'unique solution fermée étant (à une homothétie près) la figuratrice elle-même.

M. Cartan : *Sur les groupes de transformation de contact et la Cinématique nouvelle.*

Dans toute cinématique, il existe des systèmes de référence (espace, temps) par rapport auxquels chaque *événement* est défini par quatre coordonnées x, y, z, t, les trois premières localisant l'événement dans l'espace et la quatrième dans la durée. On arrive à la cinématique nouvelle de Lorentz en postulant l'existence d'une infinité de systèmes de référence, *non tous invariablement liés les uns aux autres*, et jouissant de la propriété suivante : *par rapport à chacun de ces systèmes, tout rayon lumineux se propage* (*dans le vide*) *d'un mouvement rectiligne et uniforme* (*dont la vitesse peut être supposée égale à l'unité*).

Par rapport à un système de référence donné on peut représenter chaque événement par une sphère *orientée* (c'est-à-dire dont le rayon a un signe) de centre (x, y, z) et de rayon t. Le passage d'un système de référence à un autre revient alors à une transformation portant sur l'ensemble des sphères orientées, *et cette transformation change deux sphères orientées tangentes en deux sphères orientées tangentes;* elle change évidemment aussi les sphères de rayon infini en sphères de rayon infini. On obtiendra donc le *groupe* de la cinématique de Lorentz en cherchant le plus grand groupe de transformation de contact changeant les sphères orientées en sphères orientées. Or ce groupe est bien connu : c'est la généralisation, dans l'espace, du *groupe de Laguerre* qui est engendré dans le plan par la composition d'un nombre quelconque de transformations par semi-droites réciproques.

Les phénomènes de contraction apparente d'un système en mouvement sont mis en évidence par la représentation géométrique précédente.

SÉANCE DU 14 FÉVRIER 1911.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société, M. E.-O. Lovett, présenté par MM. Darboux et Hadamard; M. Browne, présenté par MM. Hadamard et Montel.

Communications :

M. Volterra : *Sur le théorème de Stokes.*

M. Volterra considère d'abord le théorème de Stokes dans le cas de trois et de n variables et en fait l'extension au cas d'un nombre infini de variables.

Soit

$$X|[\underset{a}{x(t)}, \eta]|$$

une quantité qui dépend de toutes les valeurs de la fonction $x(t)$ dans l'intervalle (a, b) et qui dépend en outre d'un paramètre η qui varie entre les mêmes limites.

Représentons par

$$X'|[\overset{b}{\underset{a}{x(t)}}, \eta, \xi]|$$

la dérivée de X considérée comme une quantité qui dépend de $x(t)$, en changeant cette fonction dans le domaine du point $t = \xi$; c'est-à-dire que *le second paramètre qui paraît dans l'expression précédente représente l'indice du point de l'intervalle* (a, b) *où l'on a calculé la dérivée.*

Considérons une aire plane simplement connexe σ dont les points sont individualisés par les variables u, v. Les points du contour sont individualisés par la variable s. Cela posé, supposons qu'à chaque point de l'aire σ et du contour corresponde une fonction $x(t)$ finie qui varie avec continuité. On aura alors $x(t, u, v)$ qui sera une fonction finie et continue des trois variables et au contour nous aurons $u(t, s)$.

Le théorème donné par M. Volterra est le suivant

$$\int_s ds \int_a^b X|[x(t,s),\eta]|\frac{\partial x(\eta,s)}{\partial s}\,d\eta$$
$$= \frac{1}{2}\int_\omega du\,dv \int_a^b \int_a^b \{X'|[x(t,u,v),\eta,\xi]| - X'|[x(t,u,v)\xi,\eta]|\}$$
$$\frac{d(x(\eta,u,v),x(\xi,u,v))}{d(u,v)}\,d\xi\,d\eta.$$

On tire de là que la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\int_a^b X|[x\overset{b}{\underset{a}{(}}t),\eta]|\,\delta x(\eta)\,d\eta = \delta Y|[x\overset{b}{\underset{a}{(}}t)]|,$$

c'est-à-dire pour que le premier membre soit la différentielle d'une fonction de ligne est que

$$X'|[x\overset{b}{\underset{a}{(}}t),\eta,\xi]| = X'|[x\overset{b}{\underset{a}{(}}t),\xi,\eta]|.$$

On peut aussi déduire de la formule précédente la manière de calculer une fonction de ligne lorsque sa dérivée est donnée.

L'auteur ajoute qu'on peut par là chercher à étendre la théorie de Mayer.

Il en prend l'occasion pour parler de l'extension des parenthèses de Poisson au cas des fonctions de lignes et énonce l'extension du théorème de Jacobi sur les systèmes en involution.

M. E. Picard : *Sur les systèmes de deux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique.*

M. E. Picard a démontré en 1883 qu'il ne peut exister de relation algébrique de genre supérieur à un entre deux fonctions uniformes d'une variable ayant un point singulier essentiel isolé. Il a utilisé récemment (*Comptes rendus*, 15 janvier 1912) la méthode suivie, pour démontrer la proposition suivante, analogue à celle par laquelle M. Landau a généralisé, en 1904, le premier théorème de M. Picard sur les fonctions entières : Soient $f(x, y) = 0$ une courbe de genre au moins égal à deux; (a, b) un point de cette courbe; on remplace dans l'équation, x par une fonction méromorphe de z autour de l'origine

$$x = a + a_1 z + \ldots,$$

et l'on tire la valeur y de z prenant pour $z = 0$ la valeur b. Le rayon d'un cercle de centre origine dans lequel les deux fonctions x et y de z sont simultanément méromorphes a une limite supérieure $R(a, a_1)$ qui dépend seulement de a et a_1.

L'auteur énonce maintenant la proposition plus complète : si les fonctions méromorphes x et y de z sont telles que le point (x, y) ne coïncide jamais avec aucun de q points fixés sur la surface de Riemann correspondant à la courbe, lorsque z est dans un cercle de centre origine, le rayon R de ce cercle a une limite supérieure ne dépendant que de a et a_1.

En appliquant le même genre de considérations à une suite infinie

$$(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n), \quad \ldots,$$

de couples de fonctions méromorphes de z dans un cercle C de centre origine et vérifiant l'équation de la courbe, M. Picard obtient la proposition suivante : si le couple (x_n, y_n) a une limite pour une infinité de points C possédant au moins un point de condensation à l'intérieur de C, le couple (x_n, y_n) aura une limite pour tous les points de l'intérieur de C et les coordonnées de ce couple sont des fonctions méromorphes de z.

M. Carvallo [1] : *Sur la masculinité dans les naissances humaines.*

Le nombre des naissances masculines G l'emporte sur celui des naissances féminines F. Le rapport $\frac{G}{F}$ est la *masculinité.* Est-ce une constante naturelle? La chose est vraisemblable. Pourtant la masculinité donnée par la statistique varie avec le temps, le lieu, les conditions d'existence : celle des enfants illégitimes est moindre que celle des enfants légitimes !

La statistique serait-elle défectueuse? — Oui. C'est d'abord la réponse du calcul des probabilités. Si l'on considère en effet divers groupes comparables entre eux, les écarts des chiffres partiels avec la moyenne générale sont trop grands, relativement à la loi des écarts de Bernoulli.

Mais d'où vient l'erreur? — Des embryons. Voici pourquoi : Dans la première enfance, les garçons sont plus fragiles que les filles, c'est

---

[1] A propos de son Livre : *Le calcul des probabilités et ses applications,* dont il fait hommage à la Société.

un fait connu. Il en est de même pendant la gestation, car la masculinité des enfants nés morts l'emporte sur celle des enfants nés vivants : tandis que les naissances masculines observées à Paris l'emportent de 6 pour 100 seulement sur les naissances féminines, le nombre des garçons atteint le triple de celui des filles chez les embryons nés dans les quatre premiers mois de la gestation.

Dès lors, les inégalités de la statistique s'expliquent aisément : tandis que tous les enfants vivants sont déclarés, la plupart des morts échappent à la statistique. De là un déchet dans la masculinité. Le déchet est plus grand chez les enfants illégitimes que chez les enfants légitimes pour deux raisons qu'on devine : la mortalité est plus forte et les déclarations plus défectueuses. La situation mauvaise des parents en est la cause. De là l'infériorité apparente des illégitimes sur les légitimes au point de vue de la masculinité.

Bien d'autres faits viennent confirmer notre théorie, notamment celui-ci.

La masculinité statistique diminue en même temps que la natalité. C'est qu'en diminuant à dessein la charge des enfants, on atteint surtout les garçons parce qu'ils sont plus fragiles que les filles.

Pour conclure, *la masculinité des enfants nés vivants* est fortement atteinte par les mauvaises conditions sociales, mais tout porte à croire que *la masculinité des conceptions* humaines est sensiblement constante. Pour établir cette loi naturelle d'une façon rigoureuse, il faudrait assurer un contrôle certain des naissances embryonnaires.

M. Borel : *Sur la mesure des ensembles bien définis.*

M. Borel résume ses recherches récentes sur la théorie des fonctions de variables réelles et la définition nouvelle de l'intégrale qu'il en a déduite. Un domaine simple est, par définition, la réunion d'un nombre fini d'ensembles élémentaires (rectangles dans le cas de deux dimensions). Tout ensemble borné définissable est un domaine simple, à ε près. Toute fonction bornée diffère de moins de ε d'un polynome dans un domaine simple différant de moins de ε de l'ensemble (borné) où elle est définie; on peut dire quelle se réduit à un polynome, à *deux* ε près. L'intégration d'une fonction bornée se ramène ainsi à l'intégration d'un polynome dans un domaine simple, c'est-à-dire à une intégrale qui s'exprime au moyen de l'intégrale indéfinie du polynome.

SÉANCE DU 28 FÉVRIER 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. de Pange, présenté par MM. Carvallo et Humbert.

Communications :

M. Borel : *Sur l'ordre des ensembles réguliers de mesure nulle et les propriétés des fonctions monogènes définies dans certains ensembles.*

M. Borel expose de nouvelles recherches sur l'extension de la définition de la fonction monogène. La définition de Cauchy (monogénéité) conduit aux mêmes conséquences essentielles que l'analycité de Weierstrass, même si elle n'est vérifiée que dans certains ensembles qui peuvent n'être denses nulle part. Pour définir d'une façon précise ces ensembles, il faut indiquer une classification des ensembles de mesure nulle, classification qui paraît devoir être aussi importante que la notion même de mesure. Cette classification est basée sur la nature asymptotique de la convergence des séries d'ensembles élémentaires réguliers, au moyen desquelles l'ensemble de mesure nulle peut être défini.

M. Hadamard : *Sur la généralisation de la notion de fonction analytique.*

Indépendamment des extensions qu'on peut apporter à cette notion dans les voies indiquées par M. Borel, il en est d'autres auxquelles on est conduit par les analogies qui suggère l'étude des équations aux dérivées partielles.

Si, en effet, on considère d'abord l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

et si l'on se pose, pour cette équation, le *problème de Cauchy*, c'est-à-dire si l'on cherche à déterminer une solution de l'équation par les conditions

$$V = f(y), \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = g(y) \qquad \text{pour } x = 0),$$

on constate que le problème n'est pas toujours possible et que, si l'on donne la fonction $f(y)$, la seconde fonction $g(y)$ est déterminée à *une fonction analytique près.*

Or M. Holmgren s'est posé un problème tout semblable pour l'équation de la chaleur. Se donnant la fonction f, il constate encore que la fonction g est de la forme

$$g = g_1 + g_2,$$

où le terme g_1 est déterminé du moment qu'on se donne f, tandis que g_2 reste arbitraire dans une certaine mesure.

Les conditions auxquelles on doit satisfaire sont :

1° Que toutes les dérivées $g_2^{(n)}(y)$ de g_2 existent;

2° Que leurs valeurs absolues soient inférieures à une certaine fonction de l'ordre n de dérivation.

Mais la limitation ainsi apportée à la grandeur de $|g_2^{(n)}(y)|$ est *moins restrictive* que celle qu'entraînerait l'analyticité. On peut dès lors se demander si elle partage avec elle la propriété de déterminer le prolongement d'une fonction, c'est-à-dire si une fonction dont on sait qu'elle doit satisfaire aux conditions de M. Holmgren et qui est donnée dans un certain intervalle est, par cela même, connue dans un intervalle adjacent au premier.

La réponse est négative : on peut, sans troubler les conditions en question, prolonger une fonction de toutes sortes de manières.

Il y aurait lieu, on le voit, de rechercher quelles conditions de grandeur, imposées aux dérivées successives d'une fonction de variable réelle, entraîneraient la détermination du prolongement de cette fonction et si même les conditions requises pour l'analyticité ne seraient pas nécessaires pour qu'il en soit ainsi.

D'autres types d'équations aux dérivées partielles seraient, d'autre part, intéressants à examiner au même point de vue.

M. Hadamard : *Sur la loi d'inertie des formes quadratiques.*

On peut rattacher cette loi à des propriétés inhérentes à la forme elle-même (au lieu de donner la démonstration par l'absurde qui est fournie d'ordinaire) en considérant les multiplicités linéaires que l'on peut tracer sur l'hyperquadrique obtenue en égalant la forme donnée à zéro. Le nombre de dimensions que l'on peut donner à une telle multiplicité linéaire est moins élevé d'une unité que le plus petit nombre de carrés d'un même signe contenus dans cette forme.

M. Lebesgue : *Sur les fonctions permutables de M. Volterra.*

A toute fonction de variable complexe

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

M. Volterra fait correspondre deux autres fonctions de la forme

$$F(z) = a_1 \mathfrak{F} z + a_2 \mathfrak{F}^2 z^2 + \ldots;$$

les symboles $\mathfrak{F}^1$, $\mathfrak{F}^2, \ldots$ désignant les puissances itérées d'une fonction $\mathfrak{F}$ de deux variables, considérée soit entre des limites variables, soit entre des limites fixes.

L'intégrale de Parseval, qui sert dans la démonstration du théorème de M. Hadamard sur la multiplication des singularités, permet d'exprimer $F(z)$ en fonction de $f(z)$. Et le théorème de M. Hadamard, complété par M. Borel, permet alors de déterminer les points singuliers de $F(z)$ et la nature de ces points.

SÉANCE DU 13 MARS 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Stecker, présenté par MM. Van Vleck et Harris Hancock.

Communications :

M. Kœnigs : *Sur l'enseignement de la cinématique.*

M. Kœnigs donne l'exposé le plus simple et le plus logique, en n'employant que des considérations purement cinématiques, des théorèmes fondamentaux de la cinématique du corps solide. (Distribution des vitesses à un instant donné.)

M. Fouché : *Sur deux théorèmes de Ribaucour.*

M. Halphen : *Sur un ellipsographe.*

SÉANCE DU 27 MARS 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communications :

M. Ch. N. Moore : *Sur les facteurs de convergence dans les séries doubles et la série double de Fourier.*

L'objet du Mémoire, dont l'auteur communique ici les résultats est : (a) d'étendre aux séries doubles l'idée de la sommabilité d'une série ; (b) d'établir un théorème général sur les facteurs de convergence dans les séries doubles ; (c) d'établir la sommabilité de la série double de Fourier ; (d) de montrer de quelle façon ces résultats peuvent être appliqués à l'étude de certains problèmes de la Physique mathématique.

Étant donnée une série double

$$\sum_{i=1,j=1}^{\infty,\infty} a_{i,j}, \tag{1}$$

nous posons

$$s_{m,n} = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} a_{i,j},$$

$$\left\{ \begin{aligned} S^{(k)}_{m,n} &= \sum_{i=1,j=1}^{m,n} \binom{k+m-i-1}{k-1} \binom{k+n-j-1}{k-1} s_{i,j}, \\ A^{(k)}_{m,n} &= \binom{m+k}{k} \binom{n+k}{k}. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Alors, si la limite

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{S^{(k)}_{m,n}}{A^{(k)}_{m,n}} \tag{3}$$

existe, nous disons que la série (1) est sommable (Ck) et que sa valeur est la valeur de la limite (3).

Pour les facteurs de convergence dans les séries doubles, nous avons le théorème suivant, qui est une généralisation d'un théorème de M. T. J. Bromwich pour les facteurs de convergence dans les séries simples.

Théorème. — *Si la série* (1) *est sommable* (Ck) *à la valeur* S *et si, de plus,*

$$\left| \frac{S^{(k)}_{m,n}}{A^{(k)}_{m,n}} \right| < K \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4}$$

K *étant une constante positive, la série*

$$\text{5)} \qquad \sum_{m=1, n=1}^{\infty, \infty} a_{m,n} f_{m,n}(\alpha, \beta)$$

convergera pour toute valeur de $\alpha, \beta > 0$, *et sa valeur* $F(\alpha, \beta)$ *sera continue pour ces mêmes valeurs et tendra vers* S *quand* α *et* β *tendent vers* $+0$, *pourvu que les facteurs de convergence*

$$(6) \qquad f_{m,n}(\alpha, \beta) \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

satisfassent aux conditions suivantes :

(*a*) $f_{m,n}(\alpha, \beta)$ est continue pour $\alpha, \beta > 0$ et $\lim\limits_{\alpha, \beta = +0} f(\alpha, \beta) = 1$,

$$(b) \qquad \sum_{i=\mu_1, j=\nu_1}^{\mu_2, \nu_2} i^k j^k \,|\, \Delta_{k+1}^{k+1} f_{i,j}(\alpha, \beta) \,| < C \qquad (\alpha, \beta > 0),$$

$$(c) \qquad \lim_{m=\infty} m^k \sum_{j=\mu_m}^{j=\nu_m} j^k \,|\, f_{m,j}(\alpha, \beta) \,| = 0 \qquad (\alpha, \beta > 0),$$

$$(d) \qquad \lim_{n=\infty} n^k \sum_{i=\mu_n}^{i=\nu_n} i^k \,|\, f_{i,n}(\alpha, \beta) \,| = 0 \qquad (\alpha, \beta > 0),$$

$$(e) \qquad \lim_{m, n=\infty} [m^k n^k f_{m,n}(\alpha, \beta)] = 0 \qquad (\alpha, \beta > 0),$$

où C *est une constante positive,* $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ *sont quatre entiers positifs quelconques, et finalement* $\mu_m, \nu_m, \mu_n, \nu_n$ *sont quatre entiers positifs qui varient, les deux premiers avec m, les deux derniers avec n, d'une façon quelconque.*

Le symbole $\Delta_{k+1}^{k+1} f_{i,j}(\alpha, \beta)$ sert pour représenter l'expression suivante :

$$\sum_{r=0, s=0}^{k+1, k+1} (-1)^r (-1)^s \binom{k+1}{r} \binom{k+1}{s} f_{i+r, j+s}(\alpha, \beta).$$

Pour la sommabilité (C_1) de la série double de Fourier nous avons les résultats suivants, qui sont des généralisations des résultats trouvés par M. S. Fejer pour la série simple de Fourier.

Si la fonction $f(x, y)$ est bornée et intégrable dans la région $(-x \leqq x \leqq \pi, -\pi \leqq y \leqq \pi)$, le développement de la fonction dans une série double de Fourier sera sommable (C_1) à $f(x, y)$ en chaque point de continuité de $f(x, y)$, et sera uniformément sommable à $f(x, y)$ dans chaque région intérieure à une région de continuité de $f(x, y)$. En un point de discontinuité (x_0, y_0) qui se trouve sur une ligne de discontinuité telle que la fonction tende vers une valeur définie, quand nous nous approchons du point d'un côté ou de l'autre de la ligne de discontinuité, la série sera sommable en ce point (x_0, y_0) à une valeur qui est la demi-somme des deux valeurs limites, pourvu que la ligne de discontinuité soit une droite. Si la ligne est une courbe ayant une tangente au point (x_0, y_0), la série sera *restrictivement sommable* à la même valeur, c'est-à-dire que la limite (3) existera et aura cette valeur, pourvu que m et n s'agrandissent en satisfaisant toujours à la relation

$$k < \frac{m}{n} < K,$$

où k et K sont deux constantes positives.

Pour donner une application de ces résultats, on considère le problème suivant : Étant donnée une plaque rectangulaire dont le périmètre est tenu à la température zéro, et dont les températures initiales de tous les points sont connues, nous cherchons la température d'un point quelconque à un instant quelconque.

En s'appuyant sur les résultats que nous venons d'énoncer, on démontre assez facilement que la fonction

$$u(x, y, t) = \frac{4}{bc} \sum_{m=1,\, n=1}^{\infty,\, \infty} e^{-a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)} \sin\frac{m\pi x}{b} \sin\frac{n\pi y}{c}$$
$$\times \int_0^b \int_0^c f(x', y') \sin\frac{m\pi x'}{b} \sin\frac{n\pi y'}{c}\, dx'\, dy'$$

est la solution de notre problème.

M. Bricard : I. *Sur une courbe gauche fermée qui traverse tous ses plans rectifiants.*

M. Hadamard avait posé la question de savoir si, sur toute courbe gauche fermée, il existe au moins un point tel que le plan rectifiant en ce point laisse la courbe tout entière du même côté par rapport au plan. M. Bricard définit une courbe gauche pour laquelle cette propriété n'est pas vérifiée.

II. *Sur les courbes sphériques que rencontrent tous les grands cercles de la sphère.*

M. Bricard montre que la longueur minimum d'une telle courbe est égale à la longueur d'un grand cercle. Il donne des indications sur le problème de trouver la longueur minimum des courbes sphériques qui rencontrent tous les cercles de la sphère dont le rayon est supérieur à une longueur fixe.

SÉANCE DU 17 AVRIL 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communications :

M. A. Speiser : *Sur le déterminant d'un groupe.*

Il s'agit d'une nouvelle manière d'introduire la notion de *déterminant d'un groupe* et d'en déterminer les facteurs linéaires. Étant donné un groupe quelconque avec les éléments $e_1, e_2, \ldots, e_n$ qui satisfont aux relations $e_i e_k = e_l$, on construit la forme linéaire

$$e_1 x_1 + \ldots + e_n x_n.$$

Le produit de deux formes est de nouveau une forme linéaire dans les éléments du groupe

$$(1) \qquad (e_1 x_1 + \ldots + e_n x_n)(e_1 y_1 + \ldots + e_n y_n) = (e_1 z_1 + \ldots + e_n z_n),$$

$z_1, \ldots, z_n$ sont ici des formes bilinéaires des variables (x) et (y)

$$(2) \qquad z_1 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ikl}\, x_k y_l$$

et l'on peut énoncer ce résultat de la manière suivante :

La forme linéaire $(e_1 z_1 + \ldots + e_n z_n)$ *devient, par la substitution* (2), *le produit de deux formes semblables.*

La question fondamentale est maintenant de savoir *s'il existe des formes entières rationnelles qui possèdent la même propriété, de sorte que la relation*

$$(3) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) f(y_1, \ldots, y_n) = f(z_1, \ldots, z_n)$$

devient une identité quand on y effectue la substitution (2).

Il y a, pour trouver de telles formes, deux manières qui se complètent d'ailleurs :

1. Il existe des systèmes de n nombres réels ou complexes ordinaires qui satisfont aux relations $e_i e_k = e_l$ du groupe et qui s'appellent les *caractères du groupe*. $e_i = 1$ ($i = 1, \ldots, n$) est toujours un caractère. Si le groupe est commutatif, le nombre des systèmes différents est exactement n. Quand on remplace dans la relation (1) les éléments z_i par les nombres correspondants d'un de ces systèmes, on obtient une forme linéaire qui possède la propriété cherchée et on les obtient même toutes.

2. La seconde manière consiste à résoudre les équations (2) par rapport aux variables y

$$y_i = \frac{Y_i}{X}, \qquad X = \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ikl} x_k \right|_{il}.$$

Les Y_i sont des formes entières en (x) et (z). X s'appelle le *déterminant du groupe.*

On en conclut facilement que la relation (3) deviendra une identité par la substitution (4). Soit m le degré de f, on obtient en multipliant par X^m

$$f(x_1, \ldots, x_n) f(Y_1, \ldots, Y_n) = f(z_1, \ldots, z_n) X^m.$$

De cette identité il résulte que f est diviseur de X^m et si f ne contient pas de facteur quadratique, f est nécessairement diviseur de X qui est une forme de degré n.

Pour les groupes commutatifs le problème est ainsi résolu. Le produit des n formes linéaires qui correspondent aux n caractères du groupe donne une forme de degré n qui doit être diviseur de X. Ces deux formes, étant du même degré, ne peuvent différer que par un facteur numérique qui est d'ailleurs égal à 1. C'est un résultat bien connu de cette théorie.

M. Bioche : *Sur les coniques circonscrites à un triangle.*

SÉANCE DU 24 AVRIL 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communications :

M. Andoyer : *Sur le calcul numérique.* — M. Andoyer donne quelques indications sur les procédés modernes de calcul à l'aide des Tables logarithmiques.

SÉANCE DU 8 MAI 1912.

PRÉSIDENCE DE M. CARTAN.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Eisenhardt, présenté par MM. Cartan et Hadamard.

Communication :

M. Galbrun : *Sur certaines équations linéaires aux différences finies.*

La fonction F (x), solution de l'équation aux différences finies

$$f(x+1)-x f(x)=0$$

est représentée asymptotiquement pour les grandes valeurs de la variable par une série divergente de la forme

$$F(x)=\sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}\left[1+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\frac{\varepsilon}{x^n}\right].$$

Ce n'est là qu'un cas particulier d'une propriété générale des solutions de l'équation linéaire aux différences finies

$$A_0 f(x+z)+A_1 f(x+z-1)+\ldots+A_r f(x)=0, \tag{1}$$

dans laquelle A_0, A_1, ..., A_r sont des polynomes de degré q. Par la transformation de Laplace

$$f(x)=\int_\alpha^\beta y^{x-1}\varphi(y)\,dy, \tag{2}$$

la résolution de cette équation se ramène à celle d'une équation différentielle

$$y^q B_0 \frac{d^q\varphi}{dy^q}+y^{q-1}B_1\frac{d^{q-1}\varphi}{dy^{q-1}}+\ldots+B_q\varphi=0, \tag{3}$$

dans laquelle B_0, B_1, ..., B_q sont des polynomes en y de degré r; les solutions de l'équation (3) admettent pour points singuliers : l'origine, le point à l'infini et les racines du polynome B_0. On peut faire correspondre à chaque racine α de B_0, au voisinage de laquelle les solutions de (3) sont régulières, une solution de l'équation (1), en étendant l'intégrale définie (2) à un contour entourant l'origine et le point α et laissant à son extérieur les autres points singuliers des solutions de (3). Les fonctions ainsi formées sont méromorphes et admettent toutes les mêmes pôles ; ce sont des points situés sur plusieurs parallèles à l'axe des abscisses ; ceux qui sont situés sur une même droite ont des abscisses différant d'un entier; ils s'étendent à l'infini dans les deux sens, si les solutions de (3) sont irrégulières à l'origine, et dans le sens des abscisses négatives seulement, si ces mêmes solutions sont régulières à l'origine.

L'intégrale définissant la solution de (1) correspondant au point α, se divise en deux parties, I_1 et I_2 ; quand le point x s'éloigne à l'infini en restant à droite de l'axe des ordonnées, la première, I_1, correspondant à la portion du contour voisine de α est telle que le rapport $\frac{I_1}{\alpha^x}$ peut être représenté asymptotiquement par une série divergente ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x. La seconde, I_2, est telle que le rapport $\frac{I_2}{\alpha^x}$ tend vers o comme $e^{-h|x|^k}$, où h et k sont deux nombres positifs ; il en résulte qu'on a

$$f(x) = \alpha^x \left[a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{\varepsilon}{x^n} \right], \tag{4}$$

ε tendant vers o, quand x augmente indéfiniment.

Supposons que les solutions de (3) soient régulières au voisinage de toutes les racines de B_0 dont le module est au plus égal à celui de α ; on peut alors diviser la portion du plan située à gauche de l'axe des ordonnées par des droites issues de l'origine, en plusieurs angles ; dans chacun d'eux, la fonction $f(x)$ est représentée asymptotiquement par la série analogue à (4), provenant de la portion du contour d'intégration voisine d'un des points racines de B_0, dont le module est inférieur à α, quand le point α s'éloigne à l'infini en restant dans cet angle.

SÉANCE DU 22 MAI 1912

PRÉSIDENCE DE M. FONTENÉ.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Gerhard Kowaleski, présenté par MM. Cartan et Montel; M. Steinhaus, présenté par MM. Fatou et Montel.

Communications :

M. Borel : *Sur les fonctions monogènes :*

L'auteur se propose de définir les fonctions monogènes dans des domaines plus généraux que ceux considérés jusqu'à présent dans la théorie des fonctions analytiques : ces nouveaux domaines seront appelés domaines de Cauchy ou domaines C, les autres étant dits des domaines de Weierstrass ou domaines W.

Voici un exemple de domaine C. Soit un ensemble dénombrable de points d'affixes a_n, partout dense à l'intérieur d'un cercle S; par exemple, l'ensemble des points du cercle dont les coordonnées sont rationnelles. A chaque point a_n, attachons un nombre positif r_n, les r_n tendant très rapidement vers zéro. Excluons du cercle S les points intérieurs aux cercles $S'_{p,n}$ de centre a_n et de rayon $\frac{r_n}{2^p}$, nous obtenons un domaine C'_p. On peut remplacer ces cercles $S'_{p,n}$ par de nouveaux cercles $S_{p,n}$ n'ayant deux à deux aucun point commun et définissant, par l'exclusion de leurs points intérieurs, un domaine C_p contenant tous les points de C'_p et dont tous les points appartiennent à C'_{p+1} : ces domaines C_p pourront remplacer les domaines C'_p; la frontière de C_p est constituée par les circonférences $S_{p,n}$, les points de C_p qui n'appartiennent pas à la frontière sont dits intérieurs. Le domaine C est formé par l'ensemble de tous les points intérieurs à l'un des C_p; l'ensemble des points de C n'est pas parfait et son complémentaire, dont la mesure est nulle, a la puissance du continu. Si l'on substitue aux nombres r_n des nombres ρ_n tendant moins rapidement vers zéro, on définira de la même manière des domaines Γ_p et un domaine Γ; tous les points de Γ appartiendront à C qui possédera, en outre, d'autres points.

Soit une fonction des deux variables x et y, coordonnées d'un point M, définie en tout point de C et continue sur tout C_p : la connaissance des valeurs de cette fonction sur Γ, entraîne la connaissance de ses valeurs sur C.

Une fonction $f(z)$ sera monogène dans C, si : 1° elle est continue sur tout C_p; 2° elle admet en tout point de C une dérivée unique et continue sur tout C_p. On peut étendre les propriétés des fonctions monogènes définies dans les domaines W aux fonctions monogènes définies dans les domaines C.

M. Châtelet : *Sur une représentation des idéaux.*

L'arithmétique d'un corps de nombres algébriques étant identique à celle des corps conjugués, il est naturel de chercher à représenter les nombres correspondants de ces corps par des êtres ne contenant plus d'irrationnalités. On peut y arriver en employant des tableaux — ou substitutions — à termes rationnels vérifiant les lois des opérations élémentaires sur les nombres rationnels (formant un domaine *orthoïde*).

La définition de ces tableaux dépend d'une certaine substitution S formée de n nombres du corps et de leurs conjugués. On peut toujours disposer de S, de façon qu'aux entiers complexes du corps correspondent des tableaux à termes entiers, et réciproquement.

Alors, à tous les entiers multiples d'un entier α correspondent tous les tableaux X tels que XA^{-1} soit à termes entiers. A peut être pris égal au tableau correspondant à α ou à son produit à gauche par une substitution modulaire quelconque. En outre, à tous les entiers d'un *idéal*, c'est-à-dire de la forme $x\alpha + y\beta + \ldots$, α, $\beta\ldots$ fixes, x, y, quelconques, correspondent encore tous les tableaux X tels que XA^{-1} soit à termes entiers, A étant convenablement choisi. Mais cette fois A ne peut plus être pris égal à un tableau de l'ensemble. Ce tableau joue donc en quelque sorte le rôle du *facteur idéal* de Kummer. On peut se servir de cette représentation pour faire des calculs sur les idéaux ou établir les diverses propriétés de cette théorie.

M. Cahen : *Sur la décomposition des substitutions linéaires à coefficients entiers en produit de substitutions premières.*

Le calcul des substitutions linéaires, identique à celui des tableaux, a beaucoup d'importance, comprenant beaucoup d'autres calculs comme cas particuliers. Lorsque les coefficients sont entiers, il peut être considéré comme une généralisation de celui des nombres entiers. On peut y chercher l'analogue de la décomposition en facteurs premiers.

L'auteur démontre que toute substitution linéaire à coefficients entiers sur n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, est décomposable en un produit de substitutions unités (à déterminant égal à 1), et de substitutions de la forme $x_1 | px_1$, p étant un nombre premier positif. Ces dernières sont analogues aux facteurs premiers, les autres aux unités. Une substitution étant donnée, ses facteurs premiers sont déterminés.

Quant aux substitutions unités, l'auteur remarque d'abord qu'on peut se borner à considérer celles de déterminant égal à $+1$ (modulaires) ; toute substitution de déterminant égal à -1 étant le produit d'une substitution modulaire par la substitution $x_1 | -x_1$. L'auteur démontre alors qu'on peut représenter toute substitution modulaire par un produit composé des n facteurs suivants :

$$V = \begin{array}{c|l} x_1 & -x_1 + x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{array}, \qquad T_h = \begin{array}{c|l} x_1 & x_h \\ x_h & -x_1 \end{array} \qquad (h = 2, 3, \ldots, n),$$

V n'ayant que l'exposant 1 ou 2 ($V^3 = 1$);
T_h n'ayant que l'exposant 1, 2, ou 3 ($T_h^4 = 1$).

Mais cette décomposition est encore possible d'une infinité de manières.

A partir de là l'auteur se borne au cas de $n = 2$. Il y a, dans ce cas, deux substitutions modulaires fondamentales :

$$V = \begin{array}{c|l} x & -x + y \\ y & -x \end{array}, \qquad T = \begin{array}{c|l} x & y \\ y & -x \end{array}$$

L'auteur remarque qu'on peut supposer l'exposant de T égal à 1, en renvoyant s'il le faut un facteur T^2 à la fin du produit. On peut d'ailleurs négliger ce facteur, à condition de considérer, au lieu des substitutions homogènes sur x et y, les substitutions non homogènes sur $z = \frac{x}{y}$. Alors

$$V = z \left| \frac{z-1}{z}, \right. \qquad T = z \left| -\frac{1}{z}. \right.$$

Dans ces conditions, *la décomposition d'une substitution modulaire en facteurs* V *et* T, *les exposants de* V *étant* 1 *ou* 2, *ceux de* T *étant* 1, *n'est possible que d'une seule manière.*

La démonstration met une fois de plus en évidence le rapport qu'il y a entre la théorie des substitutions linéaires et celle des fractions continues. Elle amène à partager les substitutions modulaires sur une variable, en 24 familles, suivant le signe et l'ordre de grandeur des coefficients.

Suivent quelques applications. L'auteur montre que les substitutions de la première famille forment un ensemble analogue à celui des nombres entiers, c'est-à-dire se reproduisent entre eux par multiplication, mais non par division ; d'où des théories analogues à celle de la divisibilité, du plus grand commun diviseur, etc. De même pour la seconde, la troisième, la quatrième famille.

Resterait pour épuiser le sujet : 1° A trouver aussi une décomposition *unique* en facteurs fondamentaux pour les substitutions unités à plus de deux variables;

2° Revenant aux substitutions linéaires quelconques, à voir comment se placent dans la décomposition indiquée plus haut les facteurs unités. Car la multiplication n'étant pas commutative, on ne peut pas réunir tous ces facteurs en un seul.

RAPPORT DE LA COMMISSION DES COMPTES.

(MM. G. Fouret, G. Humbert; Ch. Bioche, rapporteur.)

Messieurs et chers Collègues,

Conformément à l'Article 16 de nos Statuts et aux Articles 33 et 34 de notre Règlement administratif, j'ai l'honneur de vous présenter le résultat de l'examen auquel a procédé la Commission chargée, par votre Conseil d'administration, de vous faire un rapport sur la gestion de notre trésorier et sur la situation morale et financière de notre Société.

Les comptes de l'exercice clos, s'étendant du 1er novembre 1910 au 31 octobre 1911, s'établissent comme il suit :

ÉTATS DES RECETTES ET DES DÉPENSES COURANTES.

En caisse au 1er novembre 1910	fr 7382,50

Recettes.

Cotisations	3918,50
Abonnements au *Bulletin*, vente de Volumes et Tables	1201,20
Souscription du Ministère	400,00
Intérêts et revenus	1471,90
Total de l'actif	14374,10

Dépenses.

Bulletin (t. XXXIX) : composition, impression, brochage, expédition	fr 6062,41
Tirages à part	576,15
Traitement de l'agent, gratifications	470,00
Frais de bureau, frais de poste, divers	354,55
Achat de 180fr de rente 3 pour 100, au porteur	5859,80
	13322,91
Excédent de l'actif au 31 octobre 1911	1051,19
Total comme ci-dessus	14374,10

PORTEFEUILLE DISPONIBLE.

Il y avait au 31 octobre 1910, à titre de réserve disponible, 318fr de rente 3 pour 100 sur l'État, ayant coûté	fr 10453,29
Il a été acheté 180fr de rente, ayant coûté	5859,80
Donc, en tout, 498fr de rente, ayant coûté	16313,09
Excédent d'actif disponible en espèces	1051,19
	17364,28

Réserve inaliénable (Art. 13 des Statuts).

La réserve inaliénable se composait au 1er novembre 1910 de :

1° En portefeuille : 886fr de rente à 3 pour 100 sur l'État et 2 obligations à 3 pour 100 des chemins de fer de l'Ouest ayant coûté ensemble 24515fr,46;

2° En espèces : 652^{fr},33.

Dans le cours de l'exercice 1910-1911 il a été encaissé pour droits d'admission de 13 nouveaux membres	fr 130,00
qui, avec le reliquat existant au 1er novembre 1910....	652,33
forment un total en espèces de.....................	782,33
Il a été acheté une obligation, 3 pour 100, du chemin de fer de l'Ouest, ayant coûté............	432,00
reste donc en espèces............................	350,33

Par suite, au 31 octobre 1911, le montant de la réserve inaliénable comprenait :

1° En portefeuille, 886^{fr} de rente 3 pour 100 sur l'État et 3 pour 100 des chemins de fer de l'Ouest, ayant coûté..................................	fr 24515,46
les titres antérieurs à l'exercice 1910-1911;	
les titres achetés au cours de cet exercice........	432,00
soit en tout....................................	24947,46
2° En espèces...................................	350,33
Total de la réserve inaliénable....	25297,79

Le recouvrement des cotisations s'est effectué de façon assez satisfaisante ; mais, par suite de décès et de quelques démissions, le montant des cotisations est légèrement inférieure à celui de l'an dernier, qui était de 4005^{fr}.

D'autre part, à cause de l'augmentation considérable de notre *Bulletin*, dont le tome XXXIX contient 29 feuilles d'impression, tandis que le tome XXXVIII n'en contenait que 18, les dépenses ont augmenté; aussi il a fallu, pour régler les dépenses de l'exercice 1910-1911, faire appel à la réserve disponible. En effet, comme on peut le voir en se reportant aux Tableaux donnés plus haut, le total des recettes courantes de l'exercice 1910-1911 est de 6991^{fr},60, et le total des dépenses relatives au fonctionnement de la Société, c'est-à-dire les dépenses autres que des achats de titres, est de 7463^{fr},11. Autrement dit, l'excédent de ces dépenses sur les recettes est de 471^{fr},51.

Il y aurait inconvénient évident à laisser les dépenses courantes de la Société dépasser les recettes de l'exercice correspondant. Il faudrait donc, si l'on ne veut pas réduire le contenu du *Bulletin*, soit chercher à réaliser des économies sur les frais courants, soit chercher à augmenter les recettes en amenant de nouveaux membres à la Société ; les deux procédés peuvent d'ailleurs être employés simultanément.

Nous prions donc nos collègues de faire de la propagande, et nous appellerons l'attention du Conseil sur la question des économies à réaliser.

En terminant, nous vous prions de voter des remerciements à notre trésorier, M. Servant, et à nos secrétaires MM. Cartan et Montel, qui donnent leurs soins à l'administration de la Société et à la publication du *Bulletin;* et nous vous demandons de vouloir bien approuver, avec les comptes qui vous sont présentés, les conclusions du présent rapport.

Ch. Bioche.

SÉANCE DU 12 JUIN 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communication :

M. Halphen : *Sur l'application des équations de la Thermodynamique aux machines frigorifiques.*

L'auteur résume quelques conclusions d'un travail sur l'étude théorique des Cycles des machines à froid. (Travail en cours de publication dans l'*Industrie frigorifique*.)

SÉANCE DU 26 JUIN 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Élection :

Est élu à l'unanimité, membre de la Société : M. de Gramont, présenté par MM. Humbert et d'Ocagne.

Communications :

M. Steinhaus : *Sur quelques séries trigonométriques particulières.*

1. Dans le travail important de M. Fatou : *Les séries trigonométriques et séries de Taylor* (1), l'auteur demandait s'il était possible de trouver une série trigonométrique partout divergente, dont les coefficients tendraient vers zéro. M. Lusin a presque résolu cette question en donnant un exemple d'une telle série, dont il démontre la divergence pour tous les points, sauf pour un ensemble de mesure nulle (2). Pour avoir l'exemple demandé par M. Fatou, considérons l'expression

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum_{a=1}^{\infty}\left\{\frac{\cos G(a)(x-w_a)}{G(a+1)-G(a)}+\frac{\cos[G(a)+1](x-w_a)}{G(a+1)-G(a)}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{\cos[G(a+1)-1](x-w_a)}{G(a+1)-G(a)}\right\}.$$

On pose

$$G(a)=1+E(a\log a) \qquad (a = \text{nombre naturel}).$$

Les nombres w_a seront déterminés plus tard. On voit bien qu'en supprimant les parenthèses dans la série précédente et en appliquant le théorème d'addition à la fonction

$$\cos[G(a)+k](x-w_a)=\cos\{[G(a)+k]x-[G(a)+k]w_a\},$$

on obtient une série trigonométrique ordinaire, les nombres

$$G(a)+k$$

étant des entiers croissants, d'après la façon même dont a été construite notre série primitive. On remarque tout de suite que les coefficients de notre série tendent vers zéro. On voit aussi très aisément que pour $x=w_a$ la valeur de la $a^{\text{ième}}$ parenthèse est l'unité. Pour démontrer la divergence de la série (A), comparons les valeurs de son terme d'indice a pour x et $x+h$. La différence ne surpasse pas en valeur absolue le nombre

$$|h|.[G(a+1)-1].$$

Si $|h|\leq\dfrac{1}{2G(a+1)}$, cette différence sera plus petite en module que $\dfrac{1}{2}$. Soit alors I_a un intervalle dont le milieu est w_a et dont la longueur est $\dfrac{1}{G(a+1)}$. Pour tout x situé dans cet intervalle, la valeur du terme $a^{\text{ième}}$ de (A) est positive et plus grande que $\dfrac{1}{2}$.

---

(1) *Acta mathematica*, 1906.

(2) *Rend. del Circ. math. di Pal.*, 1911.

Représentons la variable x sur le cercle de rayon unité et disposons les intervalles I_a l'un à côté de l'autre, parce que nous sommes libres de déterminer les w_a comme nous le voulons. Mais la série $\sum_{a+1}^{\infty} \frac{1}{G(a+1)}$ est divergente et le cercle se trouve couvert une infinité de fois par les I_a. Chaque x appartient par conséquent à une infinité d'intervalles et il y aura pour un x une infinité des termes dans (A), dont la valeur est positive et plus grande que $\frac{1}{2}$. Par conséquent, (A) et la série trigonométrique déduite de (A) sont divergents pour tout x.

2. On peut, par la même méthode, arriver à construire une série trigonométrique ayant les mêmes propriétés, mais composée seulement de termes en cosinus. Cette série donne lieu à la formation d'une série de Taylor à coefficients réels tendant vers zéro, qui est divergente lorsque le module de la variable est l'unité.

3. M. Fatou a démontré ([1]) que les conditions

$$\lim_{n=\infty} na_n = 0, \qquad \lim_{n=\infty} nb_n = 0$$

entraînent la convergence de la série trigonométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

pour tous les x, sauf pour un ensemble de mesure nulle. Il demande si cet ensemble des points exceptionnels pourrait être non dénombrable. Considérons la série des constantes :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \ldots;$$

séparons les termes de cette série par des parenthèses de manière que la valeur de chaque parenthèse soit plus grande que l'unité

$$\text{(B)} \quad \left[\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \ldots\right] + \left[\frac{1}{m \log m} + \ldots\right] + \left[\frac{1}{p \log p} + \ldots\right] + \ldots + \left[\frac{1}{q \log q} + \ldots\right] + \ldots,$$

([1]) *Loc. cit.*

et formons la série trigonométrique suivante :

$$(\mathrm{C}) \qquad \frac{\cos 2(x-\mathrm{i})}{2\log 2}+\frac{\cos 3(x-\mathrm{i})}{3\log 3}+\ldots+\frac{\cos q(x-i)}{q\log q}+\ldots,$$

i est l'entier désignant l'indice de la parenthèse dans (B), à laquelle appartient le terme $\frac{1}{q\log q}$. Si l'on sépare les termes de (C) par des parenthèses aux mêmes endroits que (B), on pourra dire que, pour $x=i$, la $i^{\text{ième}}$ parenthèse a une valeur plus grande que l'unité. La continuité en x permet de dire que, dans un certain intervalle entourant i, cela aura encore lieu. Mais les i forment un ensemble partout dense sur le cercle représentant les valeurs de x. Par conséquent il y aura un ensemble de points ayant la puissance du continu qui appartiennent à la fois à une infinité de ces intervalles. Pour tous ces points, la série (C), qui remplit bien les conditions désirées, sera divergente.

M. Montel : *Sur les fonctions monogènes.*

L'auteur a donné précédemment des conditions sous lesquelles l'expression $p\,dx+p\,dy$ est une différentielle totale, dans certains cas où l'on ne suppose pas la continuité des dérivées partielles $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ (1). Il se place maintenant dans l'hypothèse où ces dérivées existent et sont partout finies dans un domaine D et énonce le résultat suivant : *la condition nécessaire et suffisante pour que $p\,dx+q\,dy$ soit une différentielle totale est que $\frac{\partial q}{\partial x}$* et *$\frac{\partial p}{\partial y}$ soient égaux, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure superficielle nulle.* On en déduit qu'une fonction de la variable complexe z définie dans un domaine D est monogène dans ce domaine si l'on suppose l'existence de dérivées partielles par rapport à x et à y finies en tout point du domaine et si les conditions de Cauchy sont satisfaites en tout point de D, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle.

Les résultats précédents s'étendent aux fonctions et aux expressions différentielles de plusieurs variables. En particulier, on peut affirmer qu'une fonction de plusieurs variables complexes, analytique par rapport à chacune de ces variables, est analytique par rapport à l'ensemble des variables.

---

(1) *Annales de l'École Normale,* t. XXIV (3e série), 1907, p. 283.

M. Vessiot : *Sur l'emploi des représentations paramétriques dans le calcul des variations.*

1. Soient n fonctions $x_1, \ldots, x_n$ d'une variable indépendante u, liées par des équations différentielles données :

$$(1)\quad F_h(x'_1, \ldots, x'_n \mid x_1, \ldots, x_n \mid u) = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, \overline{n-\alpha}) \quad \left(x'_i = \frac{dx_i}{du}\right).$$

Nous appelons *variations* des fonctions

$$(2)\qquad x_i = \varphi_i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui constituent une solution quelconque de (1), tout système de quantités

$$(3)\qquad \delta x_i = \xi_i(u)\,\delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui sont les différentielles, prises pour $t = 0$, par rapport à t, de fonctions

$$(4)\qquad x_i = \Phi_i(u \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

remplissant la double condition de satisfaire à (1), quel que soit t, et de se réduire à (2) pour $t = 0$.

2. Nous remplaçons le système (1) par un système résolu équivalent

$$(5)\qquad x'_i = j_i(x_1, \ldots, x_n \mid t_1, \ldots, t_\alpha \mid u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

en introduisant les α fonctions de u, $t, \ldots, t_\alpha$, qui jouent le rôle de paramètres quand on considère les systèmes (1) et (5) comme représentant une même multiplicité, dans l'espace $(x'_1, \ldots, x'_n)$.

Les systèmes (2), (3), (4) sont complétés respectivement par des formules :

$$(2')\qquad t_j = \psi_j(u) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

$$(3')\qquad \delta t_j = \theta_j(u)\,\delta t \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

$$(4')\qquad t_j = \Psi_j(u \mid t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

3. Nous désignerons par le symbole $\overline{f}$ le résultat de la substitution aux x_i et t_j des fonctions (2) et (2') dans toute fonction f de ces indéterminées. Tout système de variations (3) (3') satisfait alors aux équations différentielles linéaires

$$(6)\qquad \frac{d\,\delta x_i}{du} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\frac{\partial f_i}{\partial x_k}}\,\delta x_k + \sum_{h=1}^{\alpha} \overline{\frac{\partial f_i}{\partial t_h}}\,\delta t_h \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

La réciproque est vraie. Si l'on prend, en effet, pour les fonctions (4') les expressions

$$(7) \qquad t_j = \psi_j(u) + t\,\theta_j(u) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

on peut intégrer le système

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 x_i}{\partial t\,\partial u} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t} + \sum_{h=1}^{\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial t_h}\frac{\partial t_h}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

où l'on considère les t_j comme étant ces fonctions (7), et les x_i comme étant des fonctions inconnues. Il suffit d'employer la méthode d'approximation de M. Picard avec les conditions initiales

$$(9) \qquad \begin{cases} x_i = \varphi_i(u) & \text{pour} \quad t = 0 \\ x_i = \varphi_i(0) + t\,\xi_i(0) & \text{pour} \quad u = 0 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les intégrales qu'on obtient ainsi sont des fonctions (4), qui donnent précisément naissance aux variations (3) des fonctions (2).

4. Si l'on impose aux δx_i la condition de s'annuler pour $u = a$, ils sont donnés, pour une autre valeur b quelconque, par les formules

$$(10) \qquad (\delta x_i)_{u=b} = \int_a^b \sum_{h=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(u) \overline{\frac{\partial f_j}{\partial t_h}}\, \delta t_h\, du \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les δt_h ont les valeurs (3'), arbitrairement choisies, et où les z_{ij} constituent le système fondamental

$$(11) \qquad z_i = z_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

de solutions du système linéaire adjoint à (6)

$$(12) \qquad \frac{dz_i}{du} + \sum_{k=1}^{n} \overline{\frac{\partial f_k}{\partial x_i}}\, z_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont le déterminant se réduit à un déterminant unité pour $u = b$.

5. Dans le *problème de Mayer*, relatif aux équations (1), on doit exprimer que $(\delta x_n)_{u=b}$ est nul, dès que $(\delta x_1)_{u=b}, \ldots, (\delta x_{n-1})_{u=b}$ le sont. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'il existe des identités à coefficients constants :

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(u) \overline{\frac{\partial f_j}{\partial t_h}} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha) \qquad (c_n \neq 0).$$

Cela équivaut à dire qu'il existe une solution de (12) telle que l'on ait

$$(14)\qquad \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f_j}{\partial t_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

avec la condition

$$(15)\qquad z_n(b) \neq 0.$$

Les fonctions (2), (2′) qui satisfont à cette *condition de la variation nulle* sont donc définies par le système

$$(16)\qquad \frac{dx_i}{du} = f_i(x_1, \ldots, x_n \mid t_1, \ldots, t_\alpha \mid u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(17)\qquad \frac{dz_i}{du} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} z_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(18)\qquad \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f_j}{\partial t_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

avec l'inégalité de condition (15).

6. Il est facile de déduire de là les conditions classiques. Les con ditions (18) montrent que les inconnues anxiliaires $z_1, \ldots, z_n$ définissent, dans l'espace $(x'_1, \ldots, x'_n)$, la direction d'un élément de contact de la multiplicité (1), associé au point (5) de cette multiplicité. On peut donc remplacer ces inconnues par des inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-\alpha}$, au moyen des formules

$$(19)\qquad z_i = \sum_{h=1}^{n-\alpha} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial x'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les identités évidentes

$$(20)\qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial x'_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial F_h}{\partial x_i} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-\alpha), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

donnent

$$(21)\qquad \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = -\sum_{h=1}^{n-\alpha} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et le système (15), (16), (17), (18) devient:

$$x'_i = \frac{dx_i}{du} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

$$F_h(x'_1, \ldots, x'_n \mid x_1, \ldots, x_n \mid u) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \overline{n - \alpha}), \tag{23}$$

$$\frac{d}{du} \sum_{h=1}^{n-\alpha} \lambda^h \frac{\partial F_h}{\partial x'_i} = \sum_{h=1}^{n-\alpha} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

$$\left(\sum_{h=1}^{n-\alpha} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial x'_n} \right)_{u=b} \neq 0. \tag{25}$$

7. On a donc une mise en équations simple et rigoureuse, qui échappe à l'objection de Du Bois Reymond, qui ne nécessite aucune discussion sur les champs singuliers, et met en évidence le caractère géométrique des multiplicateurs de Lagrange.

SÉANCE DU 10 JUILLET 1912

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES

Réimpression Photomécanique
LES PROCEDES DOREL - PARIS