BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 459-528

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__459_0>

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1911.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
11, rue Pierre Curie, PARIS 5e

N° 1.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES (¹).

SÉANCE DU 26 OCTOBRE 1910.

PRÉSIDENCE DE M. FONTENÉ.

Communication :

M. Fontené : *Sur la coïncidence principale d'un connexe.*

SÉANCE DU 9 NOVEMBRE 1910.

PRÉSIDENCE DE M. BRICARD.

Communications :

M. Chazy : *Sur l'indétermination des fonctions uniformes dans le voisinage de leurs singularités.*

M. Halphen : *Sur les mouvements dans lesquels les accélérations de divers ordres dérivent d'un potentiel.*

SÉANCE DU 23 NOVEMBRE 1910.

PRÉSIDENCE DE M. BRICARD.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société : M. Kéraval, présenté par MM. Bioche et Fontené.

(¹) A partir du 1er janvier 1911, les Comptes rendus des séances comporteront une analyse succincte des sujets traités.

Communications :

M. Cartan : *Sur les invariants différentiels des développables isotropes.*

M. Chazy : *Sur le théorème fondamental des équations différentielles linéaires.*

SÉANCE DU 14 DÉCEMBRE 1910.

PRÉSIDENCE DE M. BRICARD.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société : M. Gaston Bertrand, présenté par MM. Bioche et Picard.

Communication :

M. Paul Lévy : *Sur l'intégrabilité des équations définissant les fonctions de lignes.*

SÉANCE DU 21 DÉCEMBRE 1910.

PRÉSIDENCE DE M. BRICARD.

Communications :

M. Marcus : *Sur une transformation géométrique.*

M. Bricard : *Sur un théorème de Minkowski.*

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU 11 JANVIER 1911 (1).

Rapport de la Commission des Comptes.

(MM. G. HUMBERT, C. BIOCHE, G. FOURET, rapporteur.)

MESSIEURS ET CHERS COLLÈGUES,

Conformément à l'article 16 de nos Statuts et aux articles 33 et 34 de notre Règlement administratif, j'ai l'honneur de vous présenter le résultat de l'examen auquel a procédé la Commission chargée par votre Conseil d'administration de vous faire un Rapport sur la gestion de notre trésorier et sur la situation morale et financière de notre Société.

Les comptes de l'exercice clos, s'étendant du 1er novembre 1909 au 31 octobre 1910, s'établissent comme il suit :

État des recettes et des dépenses courantes.

	fr
En caisse le 1er novembre 1909	5751,24

Recettes.

Cotisations	4005 »
Abonnement au *Bulletin* (T. XXXVIII)	1115,55
Vente de volumes et tables du *Bulletin*	157,55
Souscription du Ministère de l'Instruction publique	400 »
Intérêts et revenus	1334,80
Total	12764,14

(1) La liste des Membres de la Société étant soumise à une revision complète paraîtra dans un prochain numéro.

Dépenses.

Bulletin (T. XXXVIII) : composition, impression, brochage, expédition	3732fr,84
Tirages à part et impressions diverses	447,95
Traitement de l'agent, gratifications et souscriptions diverses	530 »
Frais de bureau, frais de poste et divers	270,85
Traduction d'un Mémoire pour le *Bulletin*	400 »
Total des dépenses	5381,64
En caisse le 31 octobre 1910	7382,50
Total comme ci-dessus	12764,14

Réserve disponible.

Il y avait en portefeuille, à titre de réserve disponible, le 1er novembre 1909, 318fr de rente 3 pour 100 sur l'État, ayant coûté	10453,29
Il n'a été fait aucun placement en cours d'exercice.	
Par suite, cette réserve comprenait, au 31 octobre 1910, 318fr de rente 3 pour 100 sur l'État, ayant coûté	10453,29
Espèces en caisse, comme ci-dessus	7382,50
Total	17835,79

Réserve inaliénable (art. 13 des Statuts).

La réserve inaliénable, au 1er novembre 1909, se composait de :		
En portefeuille, 886fr de rente 3 pour 100 sur l'État, et 2 obligations 3 pour 100 des Chemins de fer de l'Ouest, ayant coûté ensemble		24515,46
En espèces	432fr,33	
Dans le cours de l'exercice 1909-1910, il a été encaissé :		
Droits d'admission de 12 nouveaux membres	120 »	
Un tiers de souscription perpétuelle	100 »	
Par suite, au 31 octobre 1910, le montant de la réserve inaliénable comprenait :		
En portefeuille, 886fr de rente 3 pour 100 sur l'État et 2 obligations 3 pour 100 des Chemins de fer de l'Ouest, ayant coûté ensemble		24515,46
En espèces	652,33	652,33
Total		25167,79

Comme vous pouvez en juger par les chiffres qui viennent de vous être donnés, la situation financière de notre Société est toujours satisfaisante et même se consolide d'année en année. Nous devons toutefois vous signaler un léger fléchissement dans le montant des cotisations recouvrées. Cette diminution est due en partie aux pertes sensibles que nous a fait éprouver la mort de plusieurs Collègues regrettés qui, pour la plupart, avaient contribué par l'éclat de leurs travaux à honorer tout particulièrement notre Société. Elle provient aussi de quelques démissions et surtout de quelques retards dans le payement des cotisations. Nous ne saurions trop insister auprès de nos Collègues pour les prier de faciliter le plus possible la tâche qui incombe à notre trésorier.

Le montant des dépenses courantes, qui s'est élevé à 5381^{fr},64, a dépassé de 750^{fr},89 le chiffre correspondant de l'exercice précédent. Il n'y a pas lieu de regretter cette augmentation, qui est due à une plus grande extension donnée à notre *Bulletin* et notamment à la publication d'une traduction d'un important Mémoire en langue russe, qu'il y avait intérêt à faire connaître plus complètement. Le total des dépenses a d'ailleurs été inférieur à celui des recettes d'une somme de 1571^{fr},24, qui est venue accroître la réserve disponible et la porter à la somme de 17 835^{fr},79.

D'autre part, la réserve statutairement inaliénable, à laquelle a été versée une somme de 220^{fr}, formait au 31 octobre dernier un total de 25167^{fr},79; de sorte que l'ensemble des deux réserves s'élevait à la même date à la somme de 43003^{fr},58, composée de 8034^{fr},83 en espèces et de 34968^{fr},75 en rente 3 pour 100 sur l'État et en obligations de chemins de fer, évaluées au prix d'achat. Nous croyons devoir appeler de nouveau l'attention du Conseil sur l'intérêt qu'il y aurait à consacrer une partie de nos ressources disponibles à publier et à réimprimer certains travaux inédits ou peu répandus, ou bien encore dispersés dans divers recueils.

Nous ne pouvons terminer ce rapide exposé sans adresser un souvenir ému à la mémoire de notre ancien secrétaire, M. Raffy, et sans vous rappeler tout ce que nous devons de gratitude à ceux de nos Collègues qui se dévouent plus spécialement aux intérêts de notre Société, notamment à notre trésorier, M. Servant, et à nos deux secrétaires, MM. Cartan et Montel. Nous vous proposons de leur voter des remercîments et d'approuver, avec les comptes qui vous sont présentés, les conclusions du présent Rapport.

G. Fouret.

N° 2.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1911 (1).

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. MITTAG-LEFFLER. PAINLEVÉ. PICARD. POINCARÉ. VOLTERRA. ZEUTHEN.

Président........................	MM. LÉVY (L.).
Vice-Présidents..................	ANDOYER. FONTENÉ. MAILLET. VESSIOT.
Secrétaires......................	CARTAN. MONTEL.
Vice-Secrétaires.................	FATOU. HALPHEN.
Archiviste.......................	FOUCHÉ.
Trésorier........................	SERVANT.
Membres du Conseil (2)..........	BIOCHE, 1913. BOREL, 1913. BOURLET, 1912. BRICARD, 1914. CARVALLO, 1912. GRÉVY, 1914. GUICHARD, 1914. HADAMARD, 1913. KOENIGS, 1912. LEBESGUE, 1912. D'OCAGNE, 1913. MAROTTE, 1913.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date de l'admission.

1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig (Allemagne). S. P. (1).
1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert D'), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).
1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5e).
1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Mouillière, 1, à Besançon.
1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6e).
1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue du Bac, 32, à Paris (7e).
1910. **ARCHIBALD** (R.), professeur à l'Université de Providence, Rhode Island (États-Unis).
1900. **AURIC**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Pierre-Corneille, 38, à Lyon.
1882. **AUTONNE**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur adjoint honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon, rue de l'Hospice, 69, à Châteauroux (Indre).
1900. **BAIRE**, professeur à la Faculté des Sciences, 24, rue Audra, à Dijon.
1896. **BAKER**, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
1905. **BARRÉ**, capitaine du génie, quai de la République, 8, à Verdun (Meuse).
1906. **BARTHELS**, docteur en philosophie, professeur honoraire de Mathématiques, à Aschaffenburg (Bavière).
1875. **BERDELLE**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P.
1904. **BERNSTEIN** (S.), docteur ès sciences, privat docent à l'Université, Apterkarsky, 22, à Kharkow (Russie).
1891. **BERTRAND DE FONTVIOLANT**, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Brémontier, 16, à Paris (17e). S. P.
1910. **BERTRAND** (G,), licencié ès sciences, rue Lhomond, 18, à Paris (5e).
1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6e) S. P.
1900. **BLUMENTHAL** (Otto), professeur à la Technische Hochschule, Rütscherstrasse, 48, à Aix-la-Chapelle (Allemagne).
1891. **BLUTEL**, professeur au lycée Saint-Louis, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14e).
1902. **BOBERIL** (vicomte Roger DU), rue d'Antibes, 110, à Cannes. S. P.
1907. **BOITEL DE DIENVAL**, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne). S. P.
1892. **BONAPARTE** (prince Roland), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16e).
1895. **BOREL** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale, rue d'Ulm, 45, à Paris (5e). S. P.
1909. **BOULAD** (F.), ingénieur des Chemins de fer de l'État égyptien, au Caire (Egypte).
1896. **BOULANGER**, docteur ès sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 68, à Paris (5e).
1896. **BOURLET**, docteur ès sciences, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Beaux-Arts, rue Raynouard, 56, à Paris (16e). S. P.
1903. **BOUTIN**, rue Lavieuville, 26, à Paris (18e).
1904. **BOUTROUX** (P.), professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. S. P.
1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (14e).
1897. **BRICARD**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14e).

(1) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Date de l'admission.

1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1901. **BUHL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1893. **BURKHARDT**, professeur à la Technische Hochschule, Martinstrasse, 3, Munich (Bavière).
1894. **CAHEN**, professeur au collège Rollin, rue Cortambert, 46, à Paris (16e).
1893. **CALDARERA**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Liberta, à Palerme.
1885. **CARON**, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).
1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 *bis*, à Paris (17e).
1896. **CARTAN**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Vaugirard, 174, à Paris (15e).
1887. **CARVALLO**, directeur des études à l'École Polytechnique, 21, rue Descartes, à Paris (5e). S. P.
1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
1892. **CELLÉRIER** (Gustave), ancien astronome à l'Observatoire, cours de Rive, 12, à Genève (Suisse).
1888. **CHAILAN** (Édouard), professeur à l'Institut catholique, rue Denfert-Rochereau, 95, à Paris (14e).
1896. **CHARVE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1911. **CHATELET**, agrégé de Mathématiques, rue Laromiguière, 7, à Paris (5e).
1907. **CHAZY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
1884. **CHRYSTAL**, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1901. **CLAIRIN**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Giélée, 57 *bis*, à Lille.
1898. **COMBEBIAC**, chef de bataillon du génie en retraite, docteur ès sciences, rue Arbonneau, 7, à Limoges.
1895. **COSSERAT** (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse.
1896. **COSSERAT** (F.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10e).
1900. **COTTON** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.
1904. **CURTISS**, Sherman avenue, 1939, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1872. **DARBOUX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Mazarine, 3, à Paris (6e).
1885. **DAUTHEVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.
1901. **DELASSUS**, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, boulevard de Talence, 226, à Bordeaux.
1905. **DENJOY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue des Ateliers, 9, à Montpellier.
1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1885. **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. **DEMOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).
1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liége (Belgique).
1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17e).
1900. **DICKSTEIN**, Marszatkowska, 117, à Varsovie.
1899. **DRACH**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Japon, 12, à Toulouse.
1909. **DRURY**, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1907. **DULAC**, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.

Date de l'admission.

1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, privat-docent à l'École Polytechnique fédérale, Asylstrasse, 81, à Zurich (Suisse).
1897. **DUMONT**, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1885. **DYCK** (Walther), professeur à l'École Polytechnique de Munich, membre de l'Académie des Sciences de Bavière, Hildegardstrasse, 5, à Munich (Bavière).
1902. **EGOROFF** (Dimitry), professeur à l'Université, Povarskaÿa, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).
1903. **ESPANET**, ingénieur civil, Brazil Railway Company, rue Louis-le-Grand, 9, à Paris.
1900. **ESTANAVE**, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **ETZEL**, S^t Bernard's Seminary, à Rochester (État de New-York, États-Unis).
1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Clercs, 18, à Paris (7^e).
1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, 17, rue Chaptal, à Montpellier.
1906. **FARAGGI**, professeur à Sétif (Algérie).
1904. **FATOU**, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Mont-Parnasse, 172, à Paris (14^e).
1891. **FAUQUEMBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.
1892. **FEHR** (Henri), professeur à l'Université, 40, route de Florissant, à Genève (Suisse).
1885. **FIELDS** (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1881. **FLOQUET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. **FONTENÉ**, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5^e).
1903. **FORD** (Walter B.), professeur de Mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1889. **FOUCHÉ**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5^e).
1905. **FOUËT**, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6^e).
1872. **FOURET**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17^e). S. P.
1903. **FRAISSÉ**, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1911. **FRÉCHET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1903. **FUETER**, professeur à l'Université, Wartenbergstrasse, 17, à Bâle (Suisse).
1911. **GALBRUN**, rue de Luynes, 11, à Paris (7^e).
1900. **GALDEANO** (Z.-G. de), correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1906. **GARGAM DE MONCETZ**, licencié ès sciences, square de Latour-Maubourg, 8, à Paris (7^e).
1872. **GARIEL**, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17^e).
1908. **GARNIER**, docteur ès sciences, boulevard Arago, 99, à Paris (14^e).
1911. **GAU**, docteur ès sciences, rue d'Ulm, 45, à Paris (5^e).
1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6^e).
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1907. **GIORDANO**, directeur du R. Ginnasio, à Licata (Italie).

Date de l'admission.

1896. **GIRARDVILLE**, capitaine d'artillerie, rue Michelet, 6, à Montreuil-sous-Bois (Seine).

1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16e).

1907. **GOT** (Th.), ancien ingénieur de la marine, professeur au lycée, rue Voltaire, 43, à Agen.

1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 39, à Paris (5e). S. P.

1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).

1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 240 *bis*, à Paris (7e).

1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).

1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6e). S. P.

1900. **GUICHARD**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Boulainvilliers, 14, à Paris (16e).

1907. **GUICHARD**, rue Condorcet, 42, à Paris (9e).

1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).

1885. **GUYOU**, membre de l'Institut, boulevard Raspail, 284, à Paris (14e).

1882. **HABICH**, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).

1896. **HADAMARD**, professeur au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14e). S. P.

1904. **HALBERSTADT**, ingénieur des Arts et Manufactures.

1910. **HALPHEN** (Ch.), ingénieur des Arts et Manufactures, Chaussée de la Muette, 8 *bis*, à Paris (16e).

1894. **HALSTED** (G.-B.), Eight Avenue 921, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.

1901. **HANCOCK**, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).

1909. **HANSEN**, privat-docent à l'Université, Dannebrogsgade, 1, Copenhague (Danemark)

1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6e). S. P.

1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).

1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5e).

1911. **HIERHOLTZ**, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).

1911. **HOLMGREN**, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, Upsal (Suède).

1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École Ste-Geneviève, rue Péclet, 9, à Paris (15e). S. P.

1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17e).

1907. **HUSSON**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Tiercelins, 60, à Nancy.

1881. **IMBER**, ancien directeur des études à l'École Centrale, ancien membre du Conseil de l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11e).

1896. **JACQUET** (E.), professeur, rue Lagarde, 3, à Paris (5e).

1898. **JAHNKE** (Dr E.), professeur à l'Académie des Mines, Pariserstrasse, 36, à Berlin, W15 (Allemagne).

1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Frederiksberg allée, 68, à Copenhague (Danemark).

1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7e). S. P.

1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).

1910. **KÉRAVAL**, professeur au lycée Louis-le-Grand, avenue du Maine, 46, à Paris (14e).

Date de l'admission.

1892. **KOCH** (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. **KŒNIGS**, professeur à la Faculté des Sciences, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14ᵉ).
1907. **KRYLOFF**, ingénieur des mines, Gitomirska Chaussée, à Kolganovska (Russie).
1897. **LACAUCHIE**, ingénieur civil, rue Brochant, 18, à Paris (17ᵉ).
1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, rue du Conseil, 5, à Asnières (Seine).
1906. **LALESCO**, maître de conférences à l'Université, str. Luteranà, 31, à Bucarest.
1893. **LANCELIN**, astronome-adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14ᵉ).
1899. **LANDAU**, professeur à l'Université, Herzbergerchaussee, 48, à Göttingen (Allemagne).
1896. **LAROZE**, ingénieur des télégraphes, rue Froidevaux, 8, à Paris (14ᵉ).
1908. **LATTÈS**, professeur à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1873. **LAUTH**, manufacturier à Thann (Alsace).
1896. **LEAU**, professeur au lycée Michelet, rue Denfert-Rochereau, 83, à Paris (14ᵉ).
1880. **LÉAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles. 18, à Paris (17ᵉ). S. P.
1896. **LEBEL**, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12. à Dijon.
1902. **LEBESGUE**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, avenue de la Tourelle, 7, à Saint-Mandé.
1903. **LEBEUF**, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.
1893. **LECORNU**, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5ᵉ).
1895. **LÉMERAY**, licencié ès sciences mathématiques et physiques, ingénieur civil du génie maritime, villa Véga, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1904. **LEMOYNE** (T.), rue Claude-Bernard, 74, à Paris (5ᵉ).
1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, à l'Observatoire de Cointe, à Liége (Belgique).
1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.
1898. **LE ROY**, docteur ès sciences, boulevard Raspail, 117, à Paris (6ᵉ),
1891. **LERY**, agent-voyer en chef de Seine-et-Oise, rue Magenta, 5, à Versailles.
1900. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1907. **LESGOURGUES**, professeur au lycée Henri IV, avenue de l'Observatoire, 16, à Paris (6ᵉ).
1909. **LÉVY** (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6ᵉ).
1882. **LÉVY** (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6ᵉ).
1907. **LÉVY** (Paul), ingénieur des mines, professeur à l'École des Mines de Saint-Étienne, à Saint-Étienne.
1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université. Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).
1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Franz-Josefstrasse, 9, à Munich (Bavière).
1886. **LIOUVILLE**, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4ᵉ).
1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue Boissière, 30, à Paris (16ᵉ).
1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, au Ministère des Finances, Direction des manufactures de l'État, à Paris (2ᵉ).
1902. **LUCAS DE PESLOUAN**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris.
1908. **LYNCH** (Arthur), rue du Luxembourg, 40, à Paris (6ᵉ).

Date de l'admission.

1895. **MAILLET**, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1905. **MALUSKI**, proviseur du lycée de Chaumont (Haute-Marne).
1906. **MARCUS**, licencié ès sciences, rue Oudry, 25, à Paris (13ᵉ).
1904. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12ᵉ).
1884. **MARTIN** (Artemas), 1535, Colombia Street N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1897. **MEHMKE**, professeur à l'École technique supérieure, Lowenstrasse, à Stuttgart-Degerloch (Wurtemberg).
1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7ᵉ). S. P.
1902. **MERLIN** (Émile), docteur ès sciences physiques et mathématiques, ancien astronome adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, répétiteur à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1907. **MERLIN** (Jean), astronome à l'Observatoire de Lyon, à Saint-Genis-Laval (Rhône).
1904. **METZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1909. **MICHEL** (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14ᵉ).
1893. **MICHEL** (François), ingénieur, licencié ès sciences, chef du service des parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10ᵉ).
1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1904. **MIWA**, professeur à l'Université de Kyoto (Japon).
1902. **MOLK** (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1907. **MONTEL**, professeur au lycée Buffon, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15ᵉ).
1898. **MONTESSUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 8, à Lille (Nord).
1903. **MULLER** (J.-O.), Venusbergerweg, 32, à Bonn (Allemagne).
1909. **MYERS** (G.-W.), professeur de mathématiques et d'astronomie et supervisor de mathématiques à l'Université de Chicago (États-Unis).
1909. **NEOVIUS**, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr. Vinthersvei 3¹, à Copenhague (Danemark).
1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liége (Belgique).
1897. **NICOLLIER**, professeur, à Montreux (Suisse).
1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5ᵉ).
1882. **OCAGNE** (M. D'), ingénieur en chef des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boëtie, 30, à Paris (8ᵉ). S. P.
1905. **OLIVET**, rue Pierre-Nicole, 7, à Paris (5ᵉ).
1873. **OVIDIO** (E. D'), professeur à l'Université, Corso Sommeiller, 16, à Turin (Italie).
1901. **PADÉ** (H.), recteur de l'Académie de Besançon.
1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6ᵉ).
1888. **PAPELIER**, professeur au lycée, route d'Olivet, 3 *bis*, à Orléans.
1881. **PELLET**, profʳ à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.
1874. **PERCIN**, général de division, avenue Elisée-Reclus, 23, à Paris (7ᵉ).
1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17ᵉ).
1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).

Date de l'admission.

1902. **PETROVITCH** (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Saint-Pétersbourg.

1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).

1905. **PFEIFFER**, maître de conférences à l'Université, Szaoudl Wladimirskaïa 45, log II, à Kiew (Russie).

1906. **PHILIPPE** (Léon), inspecteur général des ponts et chaussées, rue de Turin, 23 *bis*, à Paris (8e).

1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6e).

1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6e).

1899. **PIERPONT** (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).

1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris (5e). S. P.

1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), à Radmannsdorf (Carniole, Autriche). S. P.

1906. **POPOVICI**, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).

1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à Münich (Bavière).

1896. **PRUVOST**, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16e).

1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'Ecole Polytechnique, professeur de mathématiques, rue Madame, 54, à Paris (6e).

1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boul. Saint-Germain, 92, à Paris (5e).

1898. **RABUT**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6e).

1903. **RÉMOUNDOS**, professeur de Mathématiques, rue Soultani, 17, à Athènes (Grèce).

1906. **REMY**, docteur ès sciences, professeur à l'École des Mines, 34, cours Fauriel, à Saint-Étienne.

1903. **RICHARD**, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Fonds, 100, à Châteauroux.

1908. **RICHARD D'ABONCOURT** (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.

1908. **RISSER**, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7e).

1903. **ROCHE**, agrégé de mathématiques, rue d'Assas, 76, à Paris (6e).

1909. **ROSENBLATT**, docteur en philosophie, rue Basztowa, 19, à Cracovie (Autriche).

1908. **ROTHROCK**, Professeur à l'Université, à Bloomington (Indiana, États-Unis).

1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8e).

1896. **ROUGIER**, professeur au lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.

1885. **ROUQUET** (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpech (Aude).

1906. **ROUSIERS**, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14e).

1911. **RUDNICKI**, licencié ès sciences, avenue du Parc-de-Montsouris, 21, à Paris (14e).

1900. **SALTYKOW**, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.

1907. **SANIELEVICI**, docteur ès sciences, Calea Victorici, 193, à Bucarest (Roumanie).

1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.

1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

1907. **SCHŒNFLIES**, professeur à l'Université, IX, Haarbrückerstrasse, 12, à Königsberg (Prusse).

Date de l'admission.

1897. **SCHOU** (Erik), ingénieur, Hollaendervez, 12, à Copenhague (Danemark).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7e).
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Pétersbourg. S. P.
1900. **SERVANT**, docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 8, à Paris (7e).
1908. **SHAW** (J.-B.), professeur à l'Université, 1103 West Illinois st., à Urbana (Illinois, États-Unis).
1900. **SPARRE** (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.
1909. **SPEISER** (Andreas), docteur en philosophie, Lange Gasse, 86, à Bâle (Suisse).
1879. **STEPHANOS**, professeur à l'Université, rue Solon, 20, à Athènes (Grèce).
1898. **STÖRMER**, professeur à l'Université, Cort Adelers gade, 12, à Christiania (Norvège).
1904. **SUDRIA**, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14e).
1904. **SUNDMAN**, maître de conférences à l'Université, Fredriksgatan, 19, à Helsingfors (Finlande).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, Majorstuveien, 16 III, à Christiania (Norvège). S. P.
1909. **TARNARIDER** (Mlle), licenciée ès sciences, Amdtstrasse 18 II, à Göttingen (Allemagne).
1882. **TARRY** (G.), membre de la Société Philomathique de Paris, boulevard de Strasbourg, 182, au Havre. S. P.
1899. **THYBAUT**, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5e).
1910. **TIMOCHENKO**, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1896. **TORRES**, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. **TOUCHE**, ancien lieutenant-colonel d'artillerie, rue Truffault, 23, à Paris (17e).
1910. **TRAYNARD**, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille.
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. **TRESSE**, professeur au collège Rollin, rue Mizon, 6, à Paris (15e).
1907. **TRIPIER** (H.), licencié ès sciences, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17e).
1893. **VALLÉE-POUSSIN** (CH.-J. DE LA), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université, rue de la Station, 149, à Louvain (Belgique).
1904. **VANDEUREN**, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. **VAN VLECK**, professeur de Mathématiques, University of Wisconsin, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), professeur à l'École militaire supérieure, rue Socrate, 11 A, à Athènes (Grèce).
1898. **VASSILIEF**, membre du Conseil d'État, Vassili Ostrow ligne 12, m. 19, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1909. **VEIL** (Mlle S.), licenciée ès sciences, boulevard de Strasbourg, 55, à Paris (10e).
1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Raspail, 234, à Paris (14e).
1911. **VILLAT**, maître de conférences à l'Université de Montpellier.
1888. **VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.
1900. **VUIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5e).
1880. **WALCKENAER**, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7e).
1907. **WEBER** (Émile), rue du Mambour, 10, à Liége (Belgique).

Date de l'admission.

1879. **WEILL**, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8e).
1906. **WILSON**, Lee Street, 16, à Cambridge (Massachusetts, États-Unis).
1911. **WINTER**, avenue Kléber, 29, à Paris (16e).
1909. **WOODE** (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1878. **WORMS DE ROMILLY**, inspecteur général des mines, en retraite, quai de Passy, 14, à Paris (16e).
1882. **ZABOUDSKI**, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie Znamenskaïa, 22, à Saint-Pétersbourg (Russie).
1890. **ZAREMBA**, professeur à la Faculté de Philosophie de l'Université, rue Sw. Anny, 12, à Cracovie (Autriche).
1903. **ZERVOS**, professeur agrégé à l'Université, rue Ipiros, 44A, à Athènes (Grèce).
1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Forchhammers Vej. 12, à Copenhague (Danemark).
1898. **ZIWET**, professeur de Mathématiques à l'Université de Michigan, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1911. **ZOARD DE GËOCZE**, professeur à Ungvàr (Hongrie).
1909. **ZORETTI**, chargé de cours de Mécanique à la Faculté des Sciences de Caen.

Membres décédés en 1910 : MM. **COLOT, FONTANEAU, HAAG, HIOUX, LÉVY (M.), PARAF, PERRIN (R.), RAFFY, ROUCHÉ, TANNERY (J.).**

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — CANET. — CHASLES. CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE. — HIRST. LAFFON DE LADÉBAT. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). — RAFFY. — TANNERY (PAUL). TCHEBICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

	MM.
1873	CHASLES.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ (D.).
1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.
1892	VICAIRE.

	MM.
1893	HUMBERT.
1894	PICQUET.
1895	GOURSAT.
1896	PICARD.
1897	KŒNIGS.
1898	LECORNU.
1899	GUYOU.
1900	POINCARÉ.
1901	D'OCAGNE.
1902	RAFFY.
1903	PAINLEVÉ.
1904	CARVALLO.
1905	BOREL.
1906	HADAMARD.
1907	BLUTEL.
1908	PERRIN (R.).
1909	BIOCHE.
1910	BRICARD.
1911	LÉVY (L.).

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam	*Revue semestrielle des publications mathématiques.*	Pays-Bas.
Bâle	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore	*American Journal of Mathematics.*	États-Unis.
Berlin	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin	*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*	Allemagne.
Berlin	*Journal für die reine und angewandte Mathematik.*	Allemagne.
Bologne	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta	Calcutta mathematical Society.	Inde-Anglaise.
Cambridge	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Cambridge	*Annals of Mathematics.*	Massachusetts.
Christiania	*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*	Norvège.
Coïmbre	*Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.*	Portugal.
Copenhague	*Nyt Tidsskrift for Mathematik.*	Danemark.
Copenhague	*Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.*	Danemark
Cracovie	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand	*Mathesis.*	Belgique.
Göttingen	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax	Nova Scotian Institute of Science.	Nlle-Écosse (Canada)
Hambourg	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig	*Mathematische Annalen.*	Allemagne.
Leipzig	*Archiv der Mathematik und Physik.*	Allemagne.
Liége	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne	*Periodico di Matematica.*	Italie.
Londres	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg	Institut grand-ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Mexico	Sociedad cientifica *Antonio Alzate.*	Mexique.
Milan	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme	*Rendiconti del* Circolo matematico.	Italie.
Paris	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris	Association française pour l'avancement de Sciences.	France.
Paris	Société philomathique de Paris.	France.
Paris	*Bulletin des Sciences mathématiques.*	France.
Paris	*Journal de l'École Polytechnique.*	France.
Paris	Institut des Actuaires français.	France.
Paris	*Intermédiaire des Mathématiciens.*	France.
Pise	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise	*Il Nuovo Cimento.*	Italie.
Prague	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague	*Casopis pro péstováni mathematiky a fysiky.*	Autriche.
Prague	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Rennes	*Travaux de l'Université.*	France.
Rome	Académie Royale des *Lincei.*	Italie.
Rome	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Saint-Pétersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Sophia	*Annuaire de l'Université de Sophia.*	Bulgarie.
Stockholm	*Acta mathematica.*	Suède.
Stockholm	*Bibliotheca mathematica.*	Suède.
Tokyo	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse	*Annales de la Faculté des Sciences.*	France.
Turin	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie	Prace Matematyczno Fizyczne.	Russie.
Venise	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne	*Monatshefte für Mathematik und Physik.*	Autriche.
Washington	Philosophical Society.	États-Unis.
Zagreb (Agram)	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Autriche-Hongrie.
Zurich	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 11 JANVIER 1911.

PRÉSIDENCE DE M. BRICARD.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement du Bureau et d'une partie du Conseil : elle entend le rapport de la Commission des comptes et en approuve les conclusions à l'unanimité.

Communications :

M. Ch. Bioche.

Sur les courbes planes du quatrième ordre et de la cinquième classe. — En général les courbes pour lesquelles le nombre d des points doubles est égal au nombre t des tangentes doubles sont de classe égale à leur ordre et ont autant de rebroussements que d'inflexions. Il n'y a que deux exceptions correspondant aux cas suivants :

1° $d = t = 0$, courbes de troisième ordre et de sixième classe ou de sixième ordre et de troisième classe;

2° $d = t = 2$, courbes de quatrième ordre et de cinquième classe ou de cinquième ordre et de quatrième classe.

On peut reconnaître que les courbes du quatrième ordre et de la cinquième classe peuvent être définies comme les projections d'une biquadratique à point de rebroussement, le centre de projection n'étant pas sur la développable des tangentes. Elles ont un rebroussement et quatre inflexions.

Les courbes du cinquième ordre et de la quatrième classe s'obtiennent alors comme sections planes de la développable des tangentes à la biquadratique.

M. Fouché : *Sur les analogies entre les lignes géodésiques et les surfaces minima.*

M. Kœnigs : *Sur les courbes qui admettent une enveloppe, dans le mouvement relatif de deux corps.*

SÉANCE DU 25 JANVIER 1911.

PRÉSIDENCE DE M. L. LÉVY.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Archibald, présenté par MM. Hermann et Servant; Holmgren, présenté par MM. Hadamard et L. Lévy; Galbrun, présenté par MM. Chazy et Montel; Zoard de Geöcze, présenté par MM. Hadamard et Lebesgue.

Communications :

M. Hadamard : *Sur l'inégalité*

$$[\delta g_A^A \, \delta g_B^B - (\delta g_B^A)^2][\delta g_C^C \, \delta g_D^D - (\delta g_D^C)^2] > (\delta g_C^A \, \delta g_D^B - \delta g_D^A \, \delta g_C^B)^2,$$

à laquelle satisfont les variations de la fonction de Green quand on passe d'un contour à un contour voisin.

SÉANCE DU 8 FÉVRIER 1911.

PRÉSIDENCE DE M. VESSIOT.

Communications :

M. Fouché : *Sur les surfaces minima.*

M. Vessiot : *Une application de la théorie des groupes à l'Hydrodynamique.* — Soient, à l'instant t, au point x, y, z de l'espace : u_x, u_y, u_z les composantes de la vitesse d'un fluide; $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ celles du tourbillon; $\Omega'_x, \Omega'_y, \Omega'_z$ celles de l'accélération rotatoire. On a l'identité

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\sum u_x\frac{\partial f}{\partial x}, \sum \Omega_x \frac{\partial f}{\partial x}\right)=\sum \Omega'_x \frac{\partial f}{\partial x}-\sum \frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot \sum \Omega_x \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Dans le cas où il y a un potentiel des accélérations, cette identité se simplifie, et entraîne l'invariance de l'équation

$$\sum \Omega_x \frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

c'est-à-dire du système des lignes de tourbillon. Or, *toutes les fois qu'une telle équation admet une transformation infinitésimale, il en est de même du système des points singuliers*

$$\Omega_x=\Omega_y=\Omega_z=0.$$

De là le théorème de Lagrange; et, plus généralement, l'invariance de l'ensemble des points irrotationnels; c'est-à-dire l'énoncé suivant, qui nous paraît ajouter quelque chose à ceux qu'on déduit habituellement du théorème de Lagrange :

Imaginons, à un instant particulier quelconque, l'ensemble des points du fluide qui sont irrotationnels. Il est constitué par un ou par plusieurs ensembles continus, isolés les uns des autres. Cet ensemble, ou l'un quelconque de ces ensembles, qu'il soit un point, une ligne, une surface, un volume fini ou infini, ou tout l'espace, demeure irrotationnel pendant tout le mouvement.

SÉANCE DU 22 FÉVRIER 1911.

PRÉSIDENCE DE M. L. LÉVY.

Communications :

M. Risser : *Sur une équation fonctionnelle relative à l'assurance invalidité.* — Je me propose d'étudier les Tables par âges à l'entrée dans l'assurance invalidité, et tout particulièrement de déterminer l'équation fournissant le nombre des invalides d'âge x dont l'invalidité remonte à l'âge y. La population professionnelle d'un groupe d'âge x est formée de V valides et de I invalides.

Si l'on désigne par $i(x,y)$, l'ensemble des invalides d'âge x, faisant partie de ce groupe depuis $(x-y)$ années, il en résulte que

$$\mathrm{I}(x)=\int_{x_0}^{x} i(x,y)\,dy, \tag{1}$$

x_0 étant l'âge auquel commence à se manifester l'invalidité.

Soient ${}_p\varkappa_r$ et ${}_q\varkappa_x$ les coefficients instantanés de mortalité à l'âge x des ensembles $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{V}(x)$, ν_x le taux instantané d'invalidité et σ_x le coefficient caractéristique du passage de l'invalidité à la validité; on obtient, en écrivant les variations de population des groupes P et V dans le temps dx, les équations suivantes :

$$\mathrm{P}(x)_p\varkappa_x=\mathrm{V}(x)_v\varkappa_x-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial i(x.y)}{\partial x}\,dy, \tag{2}$$

$$-\frac{d\mathrm{V}}{dx}=\mathrm{V}(x)_v\varkappa_x+\mathrm{V}(x)\nu_x-\mathrm{I}(x)\sigma(x), \tag{3}$$

$$-\frac{d\mathrm{I}}{dx}=-\mathrm{V}(s)\nu_x+\mathrm{I}(x)\sigma(x)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial i(x.y)}{\partial x}\,dy. \tag{4}$$

Comme $\mathrm{I}(x)=\int_{x_0}^{x} i(x,y)dx$, on en déduit la valeur de $\frac{d\mathrm{I}}{dx}$ et par suite l'équation suivante

$$\mathrm{P}(x)\nu(x)-[\sigma(x)+\nu(x)]\int_{x_0}^{x} i(x,y)\,dy-i(x,x)=0. \tag{5}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(x)\nu(x) &= \Phi(x),\\ \sigma(x)+\nu(x) &= \varphi(x),\end{aligned}$$

l'équation (5) se ramène à la suivante

$$(6) \qquad \int_{x_0}^{x}\left[\varphi(x)\,i(x,y)+\frac{\partial i(x,y)}{\partial y}-\frac{\Phi(x)-i(x,x_0)}{x-x_0}\right]dy=0,$$

ce qui montre que $i(x,y)$ doit renfermer une fonction arbitraire.

Recherche de solutions particulières de l'équation (5). — *Première hypothèse.* — En supposant que $i(x,y)$ puisse se mettre sous la forme $F(x)f'(y)$, l'équation (5) est ramenée à l'équation (7)

$$(7) \qquad \frac{dz}{dx}+(\nu+\sigma)z-\frac{P\varphi}{F}=0,$$

après avoir posé $f(x)-f(x_0)=z$; si l'on se donne F, on voit qu'on est ramené à intégrer une équation linéaire.

Deuxième hypothèse. — On prend pour $i(x,y)$ le développement suivant

$$(8) \quad i(x,y)=K\left[\frac{e^{\alpha_1 x}}{\omega'-x_0}+\frac{x-y}{(\omega'-x_0)^2}e^{\alpha_2 x}+\ldots+\frac{(x-y)^{n-1}}{(\omega'-x_n)^n}e^{\alpha_n x}+\ldots\right],$$

K étant une constante ($\omega'<\omega$ âge limite de la vie humaine).

Si l'on prend $\alpha_1>\alpha_2\ldots>\alpha_n\ldots$, l'expression $i(x,y)$ est liée à la majorante

$$\frac{k}{\omega'-x_0}e^{\alpha_1 x}\frac{1}{1-\dfrac{x-y}{\omega'-x_0}}.$$

Dans ces conditions, on peut déterminer les constantes k, α_1, α_2, …, α_n, …, de la façon suivante : en posant

$$(9) \quad \left\{\begin{array}{l} P(x)\nu(x)-\dfrac{ke^{\alpha_1 x}}{\omega'-x_0}=\mathcal{F}(x) \\ \dfrac{x-x_0}{\omega'-x_0}e^{\alpha_1 x}+\ldots+\dfrac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)(\omega'-x_0)^{n-1}}e^{\alpha_{n-1}x}=f_{n-1}(x), \end{array}\right.$$

on voit facilement que α_n se déduit de la relation

$$(10) \qquad \frac{\dfrac{d^n}{dx^n}[\mathcal{F}-k(\nu+\sigma)f_{n-1}]_{x=x_0}}{n!}=\frac{k(\nu_0+\sigma_0)}{n(\omega'-x_0)^n}e^{\alpha_n x_0}.$$

Ces deux solutions particulières, et tout spécialement la dernière, permettront de trouver l'expression pratique de la fonction $i(x, y)$ et par suite du taux de mortalité des invalides d'âge x, dont l'invalidité remonte à l'âge y.

Je montrerai, dans une prochaine Communication, comment on résout l'équation (5).

M. Fouché : *Sur les trajectoires orthogonales d'une suite de surfaces minima.*

Dans un champ de forces où les surfaces de niveau sont des surfaces minima, un tube de force découpe sur les surfaces de niveau des aires égales.

M. Lebesgue : *Sur la non applicabilité de deux espaces d'un nombre différent de dimensions.*

Étant donnés deux espaces E et e respectivement à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et à p dimensions $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$, $n > p$; peut-on établir entre les points de E et de e une correspondance univoque et continue? L'impossibilité d'une telle correspondance a été démontrée par M. Brouwer dans les *Mathematischen Annalen* (Bd. LXX, 1911). Dans le même recueil, à la suite de la Note de M. Brouwer, M. Lebesgue a indiqué une méthode de démonstration qui fait l'objet de sa Communication à la Société mathémathique et dont le principe est le suivant : s'il existait une telle correspondance, elle transformerait les ensembles fermés en ensembles fermés; or, on voit facilement qu'on peut décomposer e en ensembles fermés aussi petits que l'on veut et placés de telle manière qu'il y ait des points communs à $p+1$ de ces ensembles et aucun point commun à plus de $p+1$. Il faudrait donc qu'une pareille décomposition fût possible pour E : on montre que si E est décomposé en ensembles fermés assez petits, il y a nécessairement des points communs à $n+1$ de ces ensembles.

La correspondance ne peut donc être réalisée.

M. Tresse : *Sur les fonctions exponentielle et logarithmique.*

On peut définir et étudier la fonction logarithmique d'abord, la fonction exponentielle ensuite, à l'aide seulement des deux propositions suivantes :

L'expression $a^x (a > 0)$, *définie seulement pour les valeurs rationnelles de* x :

1° Est *croissante* (pour $a > 1$);
2° Satisfait à la relation

$$a^x a^y = a^{xy}.$$

M. Vessiot : *Sur la réductibilité des équations aux dérivées partielles.* — Soit

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n, z, p_0, p_1, \ldots, p_n) = 0.$$

Si on la prend sous la forme

$$p_0 = W(x_0 \mid x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n),$$

son intégration équivaut à celle de

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} + [W, f]_{z, x_i, p_i} - W\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le groupe de rationalité de celle-ci est le groupe de transformations de contact de l'espace $z, x_1, \ldots, x_n$, ou un de ses sous-groupes. De là la discussion des cas de réductibilité de la proposée.

Pour $n = 1$, on retrouve, dans le cas général, l'intégration par la recherche d'une intégrale première et l'intégration d'une équation du premier ordre à deux variables. Dans les cas particuliers, en exceptant ceux où l'intégration équivaut à celle d'un système différentiel ordinaire à trois variables, on a : soit une quadrature (qui peut être inutile), suivie de l'intégration d'un système différentiel ordinaire à trois variables et de deux quadratures; soit l'intégration d'une équation linéaire homogène ordinaire du quatrième ordre, ayant pour groupe le groupe projectif d'un complexe linéaire, ou un de ses sous-groupes.

Une méthode analogue s'applique aux systèmes d'équations aux dérivées partielles en involution, quand les caractéristiques ne dépendent que de constantes arbitraires.

SÉANCE DU 8 MARS 1911.

PRÉSIDENCE DE M. L. LÉVY.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : MM. Chatelet, présenté par MM. Borel et Montel; Fréchet, présenté par MM. Boutroux et Hadamard; Gau, présenté par MM. Borel et Goursat; Hierholtz, présenté par MM. Vessiot et Montel; Rudnicki, présenté par MM. Kryloff et Rémy; Winter, présenté par MM. Boutroux et Cahen.

SÉANCE DU 22 MARS 1911.

PRÉSIDENCE DE M. VESSIOT.

Conférence de M. Bertrand Russel, professeur à Trinity Collège (Cambridge), *Sur les axiomes de l'infini et du transfini :*

La Mathématique pure, on le sait, peut s'exprimer et se démontrer entièrement en termes d'idées et d'axiomes de la logique. Cette thèse est évidente pour quiconque considère la nature de la déduction. Quand on déduit, on dit : x possède telle propriété, donc x possède telle autre propriété. Or, si l'on peut savoir ceci, il est certain que les deux propriétés doivent avoir un lien formel, qui permet de transformer les propriétés en variables, et d'affirmer : deux propriétés quelconques ayant tel ou tel lien formel sont telles que l'une d'elles implique l'autre. On a là une proposition de logique. En effet, toute proposition mathématique devient une proposition de logique en transformant en variables un nombre suffisant des constantes que peut contenir la proposition.

Je donnerai un exemple géométrique de ce procédé. La Géométrie des espaces infinis (qui comprend celle d'Euclide) peut se développer comme théorie de la relation *entre* parmi les points.

On définira les *points :* tout terme y qui est entre deux termes x et z. Mettons $\mathfrak{S}$ pour *entre*. On définira la ligne (x, z) : les termes y tels que $y\,\mathfrak{S}(x, z)$ ou $x\,\mathfrak{S}(y, z)$ ou $z\,\mathfrak{S}(x, y)$ et x et z. On aura des axiomes, tels que

$$y\,\mathfrak{S}(x, z) . \supset : \sim x\,\mathfrak{S}(y, z),$$
$$y\,\mathfrak{S}(x, z) . z\,\mathfrak{S}(y, w) . \supset . z\,\mathfrak{S}(x, w), \qquad \ldots .$$

On peut alors considérer une relation $\mathfrak{S}$ quelconque ayant ces propriétés, et l'on a de la logique.

Cependant on n'obtient la réduction à la logique qu'en cessant de demander avec trop d'insistance s'il existe des objets qui vérifient les hypothèses dont on considère les conséquences. Il arrivera parfois qu'on pourra construire de tels objets *a priori;* par exemple, on peut construire *a priori* une classe ayant un nombre fini quelconque de termes. (A vrai dire, cette construction n'est *a priori* qu'en admettant comme *a priori* l'axiome qu'il existe au moins un objet, ou quelque équivalent.) Mais la plupart des théorèmes d'existence (qui, du reste, ne sont pas nécessaires pour la *vérité* des autres théorèmes, mais seulement pour leur importance) ont besoin de données qui ne sont pas purement logiques. Dans la Mathématique pure, deux axiomes d'existence donnent à peu près tous les théorèmes d'existence qu'on peut désirer. Ces deux axiomes sont :

1° L'axiome de l'infini;
2° L'axiome multiplicatif, autrement dit, *l'axiome de Zermelo.*

Ces deux axiomes ne peuvent se démontrer par la logique, et, à mon avis, ils n'ont pas d'évidence intuitive. Cependant je voudrais d'abord expliquer leur nature et leurs conséquences, avant d'examiner les raisons qu'on pourrait avoir pour admettre ou nier leur vérité.

L'axiome de l'infini s'énonce comme suit : *Si n est un nombre cardinal fini quelconque, il y a des ensembles consistant en n individus.* Ici le mot *individu* s'oppose à classe, fonction, proposition, etc. ; en d'autres termes, *individu* signifie *être du monde actuel, par opposition aux êtres de la logique.* Pour amplifier cette notion, il faudrait expliquer la théorie des types logiques, ce que je ne désire pas faire; les lacunes qui résultent de ce silence seront sans doute visibles à mes auditeurs.

Appelons i_n la classe de tous les ensembles de n individus. Alors, étant donné l'axiome de l'infini, la suite

$$i_0, \quad i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_n, \quad \ldots$$

forme une *progression*, c'est-à-dire une suite dont le nombre cardinal est ω (selon le langage de Cantor). On trouve ainsi que l'axiome de l'infini est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence des progressions, c'est-à-dire pour l'existence des suites de la forme

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots, \quad ad\ inf.$$

Cet axiome est donc la condition nécessaire et suffisante pour l'existence du plus petit nombre ordinal transfini ω, et du plus petit nombre cardinal transfini $\aleph_0$.

Étant donnée l'existence de $\aleph_0$, on aura aussi l'existence de $2^{\aleph_0}$, puisque ce nombre est le nombre des classes contenues dans une classe ayant $\aleph_0$ termes. On aura de même l'existence de $2^{2^{\aleph_0}}$, $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$, et ainsi de suite; et il est facile de montrer que tous ces nombres sont différents, et qu'ils forment une suite en ordre de grandeur croissante.

Voici donc une première suite infinie de nombres cardinaux transfinis.

Étant donnée l'existence de ω, on aura aussi l'existence de tous les autres nombres ordinaux qui se forment en changeant l'ordre des termes dans une progression. Par exemple, on a les suites

$$\begin{array}{llllllllllll}
1, & 2, & 3, & \ldots, & n, & \ldots, & & & & & & \\
2, & 3, & 4, & \ldots, & n+1, & \ldots, & 1, & & & & & \\
2, & 4, & 5, & \ldots, & n+2, & \ldots, & 1, & 3, & & & & \\
2, & 4, & 6, & \ldots, & 2n, & \ldots, & 1, & 3, & 5, & \ldots, & 2n-1, & \ldots.
\end{array}$$

On obtient ainsi un certain ensemble de nombres ordinaux, à savoir, l'ensemble des nombres ordinaux des suites dont les termes sont les entiers finis. Cantor a montré qu'on peut arranger ces nombres ordinaux en ordre de grandeur croissante. Ces nombres eux-mêmes forment donc une suite bien ordonnée, dont le nombre ordinal est plus grand qu'aucun nombre qui paraît dans la suite. Ce nombre ordinal, nous l'appellerons ω_1. On montre aussi facilement que le nombre cardinal de termes dans une suite du type ω_1 est plus grand que $\aleph_0$; d'après Cantor, nous l'appelons $\aleph_1$.

On obtient ainsi une suite de nombres ordinaux et une suite de nombres cardinaux. Cette dernière est $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_n, \ldots$. On peut démontrer l'existence de tous ces nombres, en admettant l'axiome de l'infini. Mais, à mon avis, on ne peut pas démontrer, sans un nouvel axiome, l'existence de $\aleph_\omega$, ou d'un nombre cardinal quelconque plus grand que tous les nombres $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_n, \ldots$.

En admettant l'axiome de l'infini, nous avons donc démontré l'existence de deux progressions de nombres cardinaux, à savoir

$$\aleph_0,\quad 2^{\aleph_0},\quad 2^{2^{\aleph_0}},\quad \ldots,$$
$$\aleph_0,\quad \aleph_1,\quad \aleph_2,\quad \ldots.$$

Si l'on n'admet pas l'axiome multiplicatif, il n'existe aucune démonstration que les termes de la première progression sont ou plus grands ou plus petits que les termes de la seconde progression (à part le terme $\aleph_0$). Cantor a espéré pouvoir démontrer que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, mais ni lui ni aucun autre n'a réussi à démontrer une telle équation.

Il y a un autre ordre d'idées qui, en partant de l'axiome de l'infini, démontre l'existence de suites denses de divers types. Qu'on arrange, par exemple, les entiers finis d'après la règle suivante : Exprimons les entiers d'après l'échelle dyadique, de sorte qu'ils ont la forme

$$\sum^{\alpha} 2^n,$$

c'est-à-dire, la somme des nombres 2^n pour tout n qui est membre de α. Alors, étant donnés deux nombres $\sum^{\alpha} 2^n$ et $\sum^{\beta} 2^n$, on mettra le premier avant le second si le plus petit nombre qui appartient à l'une des deux classes α, β sans appartenir aux deux classes appartient à α.

On obtiendra alors une suite de nombres où les nombres qui ont le plus de zéros à la fin viendront plus tard; parmi les nombres qui ont même nombre de zéros à la fin, ceux qui ont le moins de 1 avant les zéros viendront plus tard; parmi les nombres qui ont même nombre de zéros à la fin et même nombre de 1 avant les zéros, ceux qui ont le plus de zéros avant les 1 viendront plus tard, et ainsi de suite. On peut construire cette suite de la manière suivante : mettons 1 au milieu, 10 à droite, 11 à gauche. Appelons *lacune* non pas seulement les espaces entre deux chiffres, mais aussi les espaces à droite et à gauche de tous les chiffres. Remplissons alors les lacunes, à partir de la droite, en ajoutant d'abord le chiffre 0 sans changer l'ordre, ensuite le chiffre 1, en omettant les chiffres déjà obtenus. Autrement dit, en abandonnant l'échelle dyadique, mettons 1 au premier rang; au-dessous de 1, mettons 2, 3 dans les lacunes de droite à gauche; au-dessous du second rang, doublons le second rang pour remplir les lacunes à droite de 1, et ajoutons 1 aux chiffres du troisième rang déjà obtenus pour remplir les lacunes à gauche de 1.

							1								
			3								2				
	7				5				6				4		
15		11		13		9		14		10		12		8	
31	23	27	19	29	21	25	17	30	22	26	18	28	20	24	16

Pour obtenir le $n^{\text{ième}}$ rang, on commence par 2^{n-1} à l'extrême droite; puis on y ajoute 2^{n-2}; puis on ajoute 2^{n-2} aux nombres déjà obtenus, en préservant l'ordre; puis on ajoute 2^{n-3} aux nombres déjà obtenus, en préservant l'ordre; jusqu'à ce qu'on arrive à des nombres impairs, qui remplissent la moitié gauche du rang.

En continuant par cette méthode, il est évident qu'on obtient une suite dense composée des entiers finis. Donc, en admettant l'axiome de l'infini, il y a des suites denses ayant $\aleph_0$ termes. En prenant les segments d'une telle suite, on obtient une suite continue au sens de Cantor, c'est-à-dire une suite du type des nombres réels. Donc, en admettant l'axiome de l'infini, on démontre l'existence du continu. De là on peut démontrer l'existence (au sens mathématique) des espaces euclidiens et non euclidiens de toute espèce.

D'après ce que nous venons de dire, il est évident que l'axiome de l'infini suffit, à lui seul, à démontrer la plupart des théorèmes d'existence dont on a besoin en mathématiques. Pourtant il y a un autre axiome d'existence, à savoir l'axiome multiplicatif, qui serait très utile si l'on pouvait savoir qu'il est vrai. L'utilité de cet axiome concerne plutôt la théorie du transfini que la mathématique ordinaire, tandis que l'axiome de l'infini est nécessaire pour la plus grande partie de la mathématique ordinaire, par exemple pour le calcul infinitésimal.

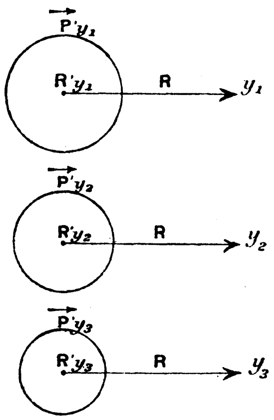
L'axiome multiplicatif a beaucoup de formes équivalentes. Zermelo, le premier qui l'ait énoncé explicitement, lui donne une forme qu'on peut exprimer de la manière suivante :

Étant donné un ensemble α quelconque, soit $\varkappa$ la classe de tous les ensembles non nuls qui sont parties de α (y compris α lui-même). Alors il existe une fonction f telle que, si β est un membre de $\varkappa$, $f\beta$ est un membre de β. Autrement dit, il existe une règle d'après laquelle on peut choisir un terme représentatif dans toute classe non nulle contenue dans α.

Pour comprendre cet axiome et son utilité pour la multiplication, il faut dire un mot de la théorie des sélections. Soit $\varkappa$ une classe d'ensembles qui s'excluent mutuellement, alors on appelle *sélection de* $\varkappa$, une classe qui contient un terme, et un seul, dans tout ensemble qui est membre de $\varkappa$. Ce terme, on peut l'appeler le *représentant* de l'ensemble auquel il appartient. Supposons, par exemple, que la Chambre des députés soit composée exclusivement d'habitants des arrondissements qu'ils représentent; alors la Chambre sera une sélection des arrondissements considérés comme classes d'électeurs.

Or, quand le nombre des membres de $\varkappa$ est fini, on peut faire un choix arbitraire des représentants des ensembles, de sorte qu'il y a toujours des sélections. Et il est évident que, dans ce cas, le nombre des sélections possibles est le produit des nombres des ensembles qui sont membres de $\varkappa$. On peut employer la classe des sélections pour définir ce produit, et l'on obtient ainsi une définition du produit qui s'étend au cas où le nombre des facteurs est infini. C'est pour cette raison que la théorie des sélections est intimement liée à la théorie de la multiplication.

Il faut d'abord préciser un peu l'idée de sélection. Quand le nombre des membres de $\varkappa$ peut être infini, il est impossible de créer une sélection par des choix arbitraires. Il est donc nécessaire d'avoir une règle d'après laquelle les choix sont effectués. (Par exemple si les ensembles qui sont membres de $\varkappa$ sont des suites dont chacune a un premier terme, on pourra choisir toujours le premier terme.) Or, une règle de choix est représentée, en logique, par une relation univoque R telle que, du moment que $\alpha \varepsilon \varkappa$, il existe un x, et un seul, qui a la relation R à α, et cet x est membre de α. C'est-à-dire, R sera une relation univoque dont le domaine converse est $\varkappa$, et qui implique ε, où ε est la relation



d'un terme à une classe dont il est membre. Une relation telle que R s'appellera *relation sélective* de $\varkappa$; nous l'écrirons $\varepsilon'_\Delta \varkappa$. En symboles,

$$\varepsilon'_\Delta \varkappa = (1 \rightarrow Cls) \cap \overleftarrow{\text{Ɑ}}'\varkappa \cap Rl'\varepsilon.$$

Or cette notion peut se généraliser encore, en mettant

$$P'_\Delta \varkappa = (1 \rightarrow Cls) \cap \overleftarrow{\text{Ɑ}}'\varkappa \cap Rl'P \qquad Df.$$

Si l'on a $R \varepsilon P_\Delta \varkappa$, R ressemblera à la relation dans le diagramme.

La notion générale est utile, mais pour le moment nous nous occuperons principalement de $\varepsilon'_\Delta \varkappa$.

On remarquera d'abord que la classe des sélections ne pourra définir le produit arithmétique que quand les membres de $\varkappa$

s'excluent l'un l'autre, tandis que ϵ_Δ'κ n'est pas sujet à cette restriction. J'écris Nc'α pour *le nombre cardinal de* α, où α est une classe (un ensemble); j'écris ΠNc'κ pour le produit des nombres des membres de κ, où κ est une classe de classes. On peut donc mettre

$$\Pi \mathrm{N}c\text{'}\kappa = \mathrm{N}c\text{'}\epsilon_\Delta\text{'}\kappa \qquad \mathrm{D}f.$$

Alors quand κ est une classe finie, même si les membres de κ sont des classes infinies, ΠNc'κ aura les propriétés connues des produits arithmétiques. Mais si κ est une classe infinie, on ne sait pas que la classe ϵ_Δ'κ n'est pas nulle, si l'on n'admet pas l'axiome multiplicatif. Il pourra donc advenir qu'un produit arithmétique soit zéro quand aucun de ses facteurs n'est zéro. Si l'on admet l'axiome multiplicatif, ceci devient impossible; en effet, la proposition : *un produit cardinal ne peut être zéro que si un de ses facteurs est zéro*, est équivalente à l'axiome multiplicatif.

L'axiome multiplicatif s'énonce comme suit : *Soit* κ *un ensemble d'ensembles non nuls; alors il y a au moins une classe* μ *qui possède un terme, et un seul, dans chaque ensemble qui est membre de* κ.

L'axiome de Zermelo s'énonce comme suit : *Soit* α *une classe quelconque, et soit* κ *la classe de toutes les classes non nulles contenues dans* α; *alors il y a au moins une relation sélective de* κ. En symboles,

$$(\alpha).\exists!\,\epsilon_\Delta\text{'}\,\mathrm{C}l\,ex\text{'}\alpha.$$

Il est facile de prouver que ces deux axiomes sont équivalents [1].

Donc, d'après le théorème de Zermelo, ils sont tous deux équivalents à la proposition : *Toute classe peut être bien ordonnée.* Ils sont aussi équivalents à la proposition que, étant donné un ensemble κ d'ensembles non nuls, il existe toujours des relations sélectives de κ; et à la proposition que, si P est une relation quelconque, et κ une classe contenue dans le domaine converse de P, alors P$_\Delta$'κ n'est pas nul.

Les propositions qu'on ne peut démontrer que par le moyen de l'axiome multiplicatif sont très nombreuses. En voici quelques-unes :

---

(1) Voir *Principia Mathematica*, § 88.

1° De deux nombres cardinaux différents, l'un doit être plus grand que l'autre.

2° Les nombres cardinaux qui s'augmentent par l'addition de l'unité sont les mêmes que les nombres inductifs, c'est-à-dire les nombres qu'on appelle *naturels*. Cette proposition identifie les deux définitions de l'infini. On peut dire qu'une classe est infinie quand elle contient une partie qu'on peut mettre en relation biunivoque avec la classe entière; d'après cette définition, un nombre est infini quand il ne s'augmente pas par l'addition de l'unité. Ou bien on peut dire qu'on appellera *nombre entier fini* tout nombre qui obéit à l'induction complète à partir de zéro. C'est-à-dire : appelons *propriété récurrente* toute propriété qui appartient à $n+1$ du moment qu'elle appartient à n, et appelons *propriété inductive* toute propriété récurrente qui appartient à zéro. Nous appellerons alors *nombre inductif* tout nombre qui possède toutes les propriétés inductives, c'est-à-dire tout nombre pour lequel les démonstrations par le moyen de l'induction complète sont valables. Il est facile de voir que les nombres inductifs sont les mêmes que les nombres *naturels* 0, 1, 2, ..., 100, ..., 1000, ..., et qu'il y a des nombres (en admettant l'axiome de l'infini) qui ne sont pas des nombres inductifs, par exemple le nombre des nombres inductifs. Le soi-disant *principe* de l'induction complète devient donc une définition, à savoir la définition des nombres inductifs. On peut alors dire que les nombres infinis sont les nombres non inductifs. Cantor suppose toujours que les nombres non inductifs sont les mêmes que les nombres qui ne s'augmentent pas par l'addition de l'unité; mais, pour démontrer ceci, on a besoin de l'axiome multiplicatif, non pas, il est vrai, dans toute sa généralité, mais seulement pour les produits de $\aleph_0$ facteurs.

3° On définit le produit de *deux* facteurs de la manière suivante : soient α et β deux classes quelconques; alors le produit de α et β sera la classe des couples (x, y) dont $x \varepsilon \alpha$ et $y \varepsilon \beta$ (en distinguant x, y de y, x). On démontre alors sans l'axiome multiplicatif la plupart des propriétés connues du produit de deux facteurs. Cependant, si l'on veut établir le rapport entre l'addition et la multiplication, on a besoin de l'axiome; c'est-à-dire, on en a besoin pour prouver que la somme de μ classes, dont chacune a

ν termes, possède $\mu \times \nu$ termes. Il en est de même pour le rapport entre la multiplication et l'exponentiation.

4° De ce que nous venons de dire il s'ensuit qu'on ne peut prouver, sans l'axiome multiplicatif, que la somme de $\aleph_0$ classes ayant chacune $\aleph_0$ membres possède $\aleph_0 \times \aleph_0$ membres. On sait que $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$, et il est usuel d'en déduire que la somme de $\aleph_0$ classes ayant chacune $\aleph_0$ membres a $\aleph_0$ membres. Cependant cette déduction n'est bonne que si l'on admet l'axiome multiplicatif.

5° Par le moyen de la déduction dont nous venons de parler, on a coutume de prouver que la limite d'une progression de nombres ordinaux de la deuxième espèce (c'est-à-dire formée par des suites dont le nombre cardinal est $\aleph_0$) est elle-même de la deuxième espèce. Ceci aussi n'est valable que si l'on admet l'axiome multiplicatif; donc une très grande partie de la théorie des nombres ordinaux transfinis devient douteuse. Il en est de même du théorème que, dans une suite quelconque, un terme ne peut être à la fois la limite d'une suite du type ω et d'une suite du type ω_1. Il s'ensuit que presque toute la belle œuvre de Hausdorff, *Untersuchungen über Ordnungstypen*, dépend de l'axiome multiplicatif.

6° L'axiome multiplicatif est nécessaire pour démontrer que la somme de μ ensembles ayant chacun ν termes a le même nombre de termes que la somme de ν ensembles ayant chacun μ termes, excepté dans le cas où μ et ν sont tous deux finies. Pour prendre le cas le plus simple, supposons une progression de couples

$$x_1, \; y_1, \; x_2, \; y_2, \; x_3, \; y_3, \; \ldots, \; x_\nu, \; y_\nu, \; \ldots,$$

et supposons qu'on ait à démontrer qu'on peut arranger les mêmes termes dans un couple de progressions. Avec la notation que nous venons d'employer, ceci se fait en prenant la suite

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_\nu, \; \ldots, \; y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_\nu, \; \ldots.$$

Mais en adoptant la notation x_ν, y_ν pour le $\nu^{\text{ième}}$ couple, nous avons introduit l'hypothèse qu'un ordre est donné pour chaque couple, de sorte qu'on peut distinguer un premier et un deuxième membre du couple. Si l'on ne fait pas cette hypothèse, il sera impossible de donner une règle d'après laquelle on choisira simultanément un terme dans chaque couple. Donc on ne saura ranger les termes en deux progressions.

Ce que nous venons de dire deviendra plus évident en prenant un exemple. Il y avait une fois un millionnaire qui possédait $\aleph_0$ paires de bottines. Peut-on démontrer que le nombre des bottines qu'il possédait était un nombre pair? Oui, car on pourra mettre dans une classe toutes les bottines gauches, et dans l'autre toutes les bottines droites. Mais si ce millionnaire avait l'excentricité d'avoir les deux bottines semblables, de sorte qu'il n'y avait pas une bottine droite et une bottine gauche dans chaque paire, alors il devient impossible d'effectuer la division de l'ensemble des bottines en deux parties égales. Il est donc impossible de montrer que le nombre de ses bottines était un nombre pair, ou qu'il y avait $\aleph_0$ bottines, malgré le fait qu'on a

$$2 \times \aleph_0 = \aleph_0 \times 2 = \aleph_0.$$

Les mathématiciens ont employé l'axiome multiplicatif inconsciemment, non pas seulement dans la théorie des ensembles, mais aussi dans la Mathématique ordinaire, jusqu'à ce que Zermelo l'ait énoncé explicitement comme axiome (1). Moi-même je l'ai employé autrefois sans le savoir; mais, en 1904, j'ai fait la découverte qu'il y avait là un axiome indépendant. Beaucoup de mathématiciens, comme Zermelo lui-même, affirment que cet axiome est aussi évident que les autres, et qu'on peut l'affirmer sans hésitation. D'autres disent qu'il n'y a aucune raison de croire que l'axiome soit vrai. Peano (2), après avoir démontré l'indépendance de l'axiome, consacre à la discussion de sa vérité seulement la remarque suivante :

« Maintenant devons-nous croire que la proposition est vraie, ou qu'elle est fausse? Notre opinion est indifférente » (p. 148).

M. Peano dit dans le même article que la question de l'évidence est une question psychologique, qui ne concerne pas la logique. Cependant la logique dépend des axiomes de la logique, et ces

---

(1) *Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann* (*Mathematische Annalen*, t. LIX, 1904).

(2) *Revista de Matematica*, 5e série, t. VIII, 1906, p. 145-148.

axiomes, on les admet parce qu'ils sont évidents, du moins l'évidence ou bien des axiomes ou bien de leurs conséquences est la seule cause qui nous fait admettre les axiomes. Il est donc permis de demander si l'axiome multiplicatif est vrai, malgré ce fait qu'il ne se déduit pas des autres axiomes. Il faut reconnaître qu'il n'y a pas beaucoup à dire sur cette question; mais il est possible de présenter quelques remarques qui tendent à faire naître le doute au sujet de l'axiome.

Quant à la prétendue évidence de cet axiome, il me semble que l'imagination nous présente toujours un nombre fini de classes, même quand nous désirons parler d'un nombre infini. Or, dans le cas des nombres finis, on n'a pas besoin d'un axiome, puisque la possibilité des sélections se démontre facilement. Donc l'évidence apparente de l'axiome tend à disparaître sous l'influence de la réflexion. De plus, quand on parle d'une classe infinie, il faut qu'elle soit donnée au moyen d'une propriété que possèdent tous les membres de la classe et que ne possède rien d'autre : il est impossible que la classe soit donnée par énumération. Donc l'axiome multiplicatif doit affirmer que, quand on a un ensemble de classes, il existe toujours une propriété quelconque que possède un terme, et un seul, dans chaque classe qui appartient à l'ensemble. Or ceci n'est nullement évident, à mon avis. Je me trouve donc amené à la conclusion que l'axiome cesse d'être évident du moment qu'on saisit ce qu'il signifie.

Il faut dire aussi que le théorème de Zermelo, à savoir que, si l'axiome est vrai, toute classe peut être bien ordonnée, donne lieu de croire que l'axiome est faux; car il n'est guère croyable que toute classe puisse être bien ordonnée. Beaucoup de mathématiciens habiles ont tâché de trouver une suite bien ordonnée composée des nombres réels, mais personne n'a réussi à trouver une telle suite. De tels arguments n'ont pas beaucoup de force, mais il faut leur accorder une certaine valeur.

Il est possible qu'on trouve plus tard une réduction à l'absurde qui montrera que l'axiome est faux. Mais, dans le moment, il me semble qu'il est seulement douteux. Il se peut qu'il soit vrai, mais l'évidence lui manque et ses conséquences sont étonnantes. Dans ces circonstances, il me semble qu'on fera bien de s'abstenir de l'employer, excepté dans les arguments qui donnent l'espoir d'aboutir à une absurdité et de trancher ainsi négativement la question de la vérité de l'axiome.

Entre l'axiome multiplicatif et l'axiome de l'infini, il subsiste une différence importante au point de vue de la théorie de la connaissance. L'axiome multiplicatif a la forme et le caractère des axiomes de la logique : on ne saurait le démontrer au moyen de données empiriques. Les considérations qui portent sur la vérité ou la fausseté de l'axiome multiplicatif sont des considérations de logique, des considérations *a priori*. L'axiome de l'infini, au contraire, est purement empirique. Quel que soit ν, pourvu que ν soit un nombre cardinal fini ou transfini, il est possible *a priori* que ν soit le nombre des individus dans l'univers. Mais, d'après l'évidence empirique, d'après la divisibilité des objets physiques, il semble artificiel de supposer qu'il y ait un nombre fini d'individus dans l'univers. Il ne me semble pas que les données empiriques suffisent à *démontrer* que le nombre des individus n'est pas fini, mais elles suffisent à démontrer que l'hypothèse finitiste est beaucoup plus difficile et moins simple que l'autre, et la logique de l'infini démontre que l'hypothèse finitiste n'est nullement préférable *a priori*. J'en conclus que, pour les raisons qui décident d'habitude des hypothèses scientifiques, il vaut mieux présumer que le nombre des individus est infini, en se souvenant, pourtant, que cette hypothèse pourrait être fausse, quoique les faits sensibles soient tels qu'on ne puisse jamais savoir qu'elle soit fausse.

En résumé, nous avons vu que, malgré le fait que toute la Mathématique pure peut se représenter comme un prolongement de la logique, les théorèmes d'existence qu'on désire démontrer ont souvent besoin de deux axiomes qui, quoiqu'on puisse les énoncer en termes logiques, ne sauraient être démontrés par le moyen des principes de la logique. Ces deux axiomes sont l'axiome de l'infini et l'axiome de Zermelo (autrement dit, l'axiome multiplicatif).

L'axiome de l'infini est nécessaire et suffisant pour démontrer qu'il y a des progressions, c'est-à-dire des suites de la forme x_1, x_2, x_3, ..., x_ν, ... à l'infini. Il est nécessaire et suffisant pour démontrer l'existence des nombres cardinaux $\aleph_0$, $\aleph_1$, ..., $\aleph_\nu$ (où ν est fini), $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, etc.; des nombres ordinaux ω, ω_1, ω_2, ..., ω_ν (où ν est fini) ainsi que tous leurs intermédiaires; des types d'ordre η et θ (c'est-à-dire les types des nombres rationnels et des nombres réels); ainsi que d'une masse d'autres types d'ordre. L'axiome multiplicatif, qui peut s'exprimer sous beaucoup de formes équivalentes, est nécessaire et suffisant pour montrer qu'un produit arithmétique, dont le nombre des facteurs est infini, ne peut être zéro que si un des facteurs est zéro, ainsi que pour montrer que toute classe peut être bien ordonnée. L'axiome suffit à démontrer beaucoup de théorèmes d'une importance capitale dans la théorie du transfini, qu'on ne sait pas démontrer autrement; il suffit, par exemple, pour l'identification des deux définitions de l'infini. Mais, à mon avis, il n'y a aucune raison de croire que l'axiome multiplicatif soit vrai, tandis que, pour des raisons empiriques, il paraît probable que l'axiome de l'infini se réalise dans le monde actuel. Pour ma part, je trouve qu'on fait bien, à présent, de n'employer ni l'un ni l'autre des deux axiomes que comme hypothèse explicite.

L'axiome de l'infini est seulement nécessaire à cause de la théorie des types logiques, qui sert à résoudre les paradoxes. Il est donc possible que, en modifiant la théorie des types, l'axiome de l'infini cesse d'être nécessaire. Quant à l'axiome multiplicatif, il reste possible qu'en cherchant ses conséquences on aboutisse à une contradiction, ce qui prouverait que l'axiome est faux. Mais, pour le moment, les deux axiomes restent douteux; il se peut que tous deux soient vrais, et il se peut que l'un soit vrai et l'autre faux. La seule chose qu'on sait être impossible, c'est que tous deux soient faux; car s'il n'y a pas de classe infinie, les sélections doivent être toujours possibles, de sorte que l'axiome multiplicatif doit être vrai.

Il est à espérer que ce résultat si mince sera bientôt grossi par les travaux des mathématiciens.

N° 3.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 AVRIL 1911.

PRÉSIDENCE DE M. VESSIOT.

SÉANCE DU 26 AVRIL 1911.

PRÉSIDENCE DE M. VESSIOT.

Élection :

Est élu à l'unanimité Membre de la Société : M. Villat, présenté par MM. Borel et Picard.

Communications :

M. Blutel : *Sur une méthode d'approximation.* — M. Blutel expose, sur une équation quelconque à une inconnue à coefficients réels, une manière de présenter la méthode d'approximation de Newton; cette façon de faire conduit à une limite supérieure de l'erreur commise au bout de *n* applications de la méthode. En la généralisant, il a obtenu les résultats contenus dans la Note qu'il a présentée à l'Académie des Sciences le 12 décembre 1910.

Il remarque ensuite que l'application indéfinie de la méthode de Newton à une équation *algébrique* entière à coefficients complexes ne fournit pas, en général, une suite convergente lorsque la valeur initiale de la variable est choisie arbitrairement. Il a cherché une méthode d'approximation qui ne présentât pas cet inconvénient; c'est l'objet d'une Note qui doit paraître au *Bulletin de la Société* (1). La limite vers laquelle converge la suite obtenue

(1) Tome XXXIX, 1911, p. 155-159.

est un zéro du polynome $f(z)$ ou du polynome dérivé. Une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques en résulte.

Il complète cette Note en remarquant que le nombre $\rho_1 = \frac{\alpha_0 \alpha'_0}{L + \alpha_0 \alpha'_0}$ peut être remplacé par le nombre $\rho'_1 = \frac{\alpha_0 \alpha'_0}{L'}$ où $L' = (n+2)l^2$. La méthode ainsi modifiée peut être interprétée géométriquement. Le polynome $f(z)$ étant mis sous la forme $F(x,y) + i G(x,y)$, où F et G sont des polynomes à coefficients réels, et où $z = x + iy$, on considère la surface S définie par l'équation $u = \sqrt{F^2 + G^2}$. Soit A_0 un point quelconque du plan xOy supposé horizontal, B_0 le point de S qui est projeté en A_0, C_0 la ligne de plus grande pente de S qui passe par B_0. La tangente à C_0 au point B_0 perce le plan xOy en un point T dont la substitution à A_0 revient à l'application de la méthode de Newton.

Dans la nouvelle méthode, on abaisse de A_0 une perpendiculaire sur la droite B_0T; cette perpendiculaire rencontre le plan horizontal mené par B_0 en un point qui se projette sur xOy en A''_1; on prend sur la droite $A_0A''_1$ un point A'_1 tel que $L' \times \overline{A_0A'_1} = \overline{A_0A''_1}$ et l'on substitue le point A'_1 au point A_0.

M. Borel : *Sur les ensembles de mesure nulle.* — L'auteur développe les idées sur la structure des ensembles de mesure nulle qu'il a indiquées dans une Note récente (*Comptes rendus*, t. 152, 6 mars 1911, p. 576).

Il donne, incidemment, une nouvelle démonstration, très simple, du théorème important qu'il a introduit dans l'étude de la mesure des ensembles et la théorie des fonctions : *si chaque point d'un intervalle* (a, b) (*extrémités comprises*) *est intérieur, au sens étroit, à un intervalle au moins appartenant à une infinité dénombrable d'intervalles* I, *on peut recouvrir l'intervalle* (a, b) *tout entier à l'aide d'un nombre limité de ces intervalles* I. Supposons qu'on ait donné aux intervalles I des numéros d'ordre $1, 2, \ldots, n \ldots$; chaque point de (a, b) est intérieur à un ou plusieurs intervalles I, nous prendrons toujours dans ce qui va suivre, celui de ces intervalles dont le numéro d'ordre est le plus faible. Partons alors de a que nous supposerons à gauche de b; a est intérieur à un intervalle I dont le rang n_1 est le plus petit possible; soit a_1

l'extrémité droite de cet intervalle; a_1 est intérieur à un intervalle dont le rang n_2 est le plus petit possible; soit a_2 l'extrémité droite de cet intervalle, on pourra continuer ainsi. Ou bien on arrivera, au bout d'un nombre fini d'opérations, à recouvrir tout l'intervalle (a, b); ou bien on définira une suite infinie d'intervalles dont les rangs $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ croissent indéfiniment avec p. Soit c le point limite de toutes les extrémités droites a_1, $a_2, \ldots, a_p, \ldots$; le point c est à l'intérieur de (a, b) ou confondu avec l'extrémité droite b. Dans tous les cas, il est intérieur à un intervalle I dont le numéro d'ordre k est le plus faible. Pour p assez grand, les points a_p sont tous dans l'intervalle de rang k, tandis que les rangs n_p croissent indéfiniment; ceci est en contradiction avec l'hypothèse que l'on a pris pour chaque point a_p le rang n_p le plus petit possible. Donc, la seconde alternative est impossible et l'intervalle (a, b) est recouvert tout entier à l'aide d'un nombre fini d'intervalles I.

M. Cahen : *Sur la résolution géométrique des équations du premier degré, les coefficients et les inconnues ayant des valeurs entières.* — Soit d'abord l'équation $ax + by = c$, les nombres a et b étant premiers entre eux. On considère, dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy, la droite variable $ax + by = \lambda$, λ variant de o inclus à $a^2 + b^2$ exclu. On constate que cette droite passe $a^2 + b^2$ fois par des points à coordonnées entières. L'équation est donc possible pour $a^2 + b^2$ valeurs entières de λ, qui sont $0, 1, 2, \ldots, a^2 + b^2 - 1$. On voit de même qu'elle est possible pour les valeurs $a^2 + b^2$, $a^2 + b^2 + 1, \ldots$, $2(a^2 + b^2) - 1, \ldots$. Elle est donc possible pour toutes les valeurs de λ.

On voit de plus que la solution générale est $x = x_0 + b\lambda$, $y = y_0 + a\lambda$, x_0, y_0 étant une solution particulière, λ un entier arbitraire.

Des considérations analogues, dans l'espace, permettent de même de retrouver tous les résultats de Smith, relatifs à l'équation

$$ax + by + cz = d$$

(a, b, c étant premiers dans leur ensemble); à savoir : l'équation est possible, la solution générale est

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + x_1\lambda + x_2\mu \\
y &= y_0 + y_1\lambda + y_2\mu \\
z &= z_0 + z_1\lambda + z_2\mu,
\end{aligned}
$$

x_0, y_0, z_0 étant une solution particulière; λ, μ, des entiers arbitraires; x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, deux solutions particulières de l'équation sans second membre, telles que

$$y_1z_2 - z_2y_1, \quad z_1x_2 - x_2z_1, \quad x_1y_2 - y_2x_1$$

soient égaux à a, b, c ou à $-a$, $-b$, $-c$.

M. Bioche : *Sur les centres de courbure principaux en un point d'une quadrique.* — On sait que si M est un point d'une conique, C le centre de courbure correspondant, P le point où le polaire de M, par rapport au cercle orthoptique, coupe la normale en M, on a

$$\text{(I)} \qquad \text{MP} + \text{MC} = 0.$$

M. Turrière a remarqué (*Enseignement mathématique* du 15 mars 1911) que si C et C′ sont les centres de courbure principaux correspondant à un point M d'une quadrique S, P le point où le plan polaire de M, par rapport à la sphère de Monge, coupe la normale en M, on a

$$\text{(II)} \qquad \text{MP} + \text{MC} + \text{MC}' = 0.$$

On peut remarquer que le cercle orthoptique d'une conique a pour analogues dans l'espace, soit la sphère de Monge, soit le quadrique Σ lieu des points d'où on peut mener à une quadrique S trois tangentes rectangulaires deux à deux. Or, on peut voir facilement que si Q est le point où le plan polaire d'un point M de S par rapport à la quadrique Σ coupe la normale menée en M à S, on a

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{\text{MQ}} + \frac{1}{\text{MC}} + \frac{1}{\text{MC}'} = 0.$$

Les relations (II) et (III), généralisation de la relation (I), permettent de déterminer facilement les rayons de courbure principaux en un point M d'une quadrique et d'en déduire diverses propriétés.

SÉANCE DU 10 MAI 1911.

PRÉSIDENCE DE M. L. LÉVY.

Communication :

M. Fouché : *Sur les systèmes orthogonaux formés de cyclides.* — L'auteur démontre par une voie purement géométrique que tous ces systèmes dérivent par inversion des systèmes réversibles composés de cyclides.

SÉANCE DU 24 MAI 1911.

PRÉSIDENCE DE M. L. LÉVY.

Communications :

M. A. Lévy : *Sur les nombres premiers dérivés de trinomes du second degré.* — Soit $f(x)$ un polynome du second degré à coefficients entiers de la forme

$$ax^2 + abx + c,$$

où

$$0 \leqq a < 4;$$

si l'on donne à x successivement toutes les valeurs entières positives, on obtient une suite de nombres entiers jouissant de la propriété suivante :

On peut déterminer un nombre x_1 tel que pour $n > x_1$, $f(n)$ ou bien est premier ou bien admet un diviseur premier qui divise un nombre $f(p)$ $(p < n)$.

Si l'on désigne par S la suite

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad \ldots.$$

le théorème précédent permet, par un crible analogue à celui d'Eratosthène, de déterminer les nombres de cette suite qui sont premiers.

Comme exemple, j'ai traité le cas de

$$x^2 - x + 41$$

connu d'Euler et j'ai montré qu'après avoir reconnu que pour ce polynome

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad f(4)$$

sont premiers, on peut en conclure que tous les nombres de cette suite jusqu'à $f(40)$ sont premiers.

La même proposition s'applique à

$$x^2 - x + 11,$$
$$x^2 - x + 17.$$

J'ai indiqué, de plus, les exemples

$$2x^2 - 2x + 19,$$
$$3x^2 - 3x + 23,$$

qui donnent, l'un une suite de 18 nombres premiers, le second une suite de 22 nombres premiers.

J'ai montré que d'une façon générale le théorème permettait de déterminer par un crible tous les nombres premiers restes quadratiques d'un nombre impair donné.

Enfin, appliquant ces considérations aux nombres algébriques d'un corps donné $K(\sqrt{n})$, n positif ou négatif, j'en conclus que le nombre des classes d'idéaux d'un corps est limité, et j'en tire un moyen d'obtenir un idéal premier au moins de chaque classe.

Toute cette méthode sera exposée dans une Note qui suivra ce court résumé.

J'ai terminé ma communication par un essai de généralisation de la méthode, étendue à des polynomes cycliques à coefficients entiers du 3^e degré.

M. Goursat : *Sur un problème de la théorie des équations aux dérivées partielles.* — Je me suis déjà occupé à diverses reprises (¹) de la détermination d'une intégrale d'une équation linéaire du type hyperbolique, connaissant les valeurs qu'elle prend

---

(¹) *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1904 et 1909.

le long de deux arcs de courbe situés dans le même angle des caractéristiques. Ce problème a fait depuis lors l'objet d'un certain nombre de travaux. La première méthode que j'ai suivie revient en réalité à résoudre par approximations successives une équation *intégro-différentielle*.

Soit à trouver une intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

définie dans le rectangle R limité par les droites $x = 0$, $x = a > 0$, $y = 0$, $y = b > 0$, et s'annulant le long des deux portions de droites $y = \alpha x$, $y = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$) situées dans ce rectangle. Soient x, y les coordonnées d'un point M de R; on forme deux lignes brisées Λ_1, Λ_2, issues de M, dont les côtés sont alternativement parallèles à l'axe des x et à l'axe des y, et dont tous les sommets sont situés sur les deux segments de droites donnés. La fonction cherchée $z(x, y)$ a pour expression

$$z(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - I_1 - I_2,$$

I_1 et I_2 désignant les intégrales doubles $\int\int f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, étendues respectivement à la portion du plan comprise entre l'axe des x et Λ_1, et à la portion du plan comprise entre Oy et Λ_2. Cette expression de $z(x, y)$ peut encore s'écrire

$$z(x, y) = \int\int_{(R)} K(x, y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$K(x, y; \xi, \eta)$ étant égal à $+1$, -1, ou zéro, suivant la position du point (ξ, η) dans R; les lignes de discontinuité de $K(x, y; \xi \eta)$, considérée comme fonction de (ξ, η) sont les lignes brisées Λ_1 et Λ_2.

Trouver une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f(x, y)$$

s'annulant le long des deux segments de droite considérés revient, d'après cela, à résoudre l'équation *intégro-différentielle*

$$z(x, y) = \int\int_{(R)} \Big[a(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\, z(\xi, \eta) + f(\xi, \eta) \Big] K(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Si, au lieu de résoudre cette équation par approximations successives, comme je l'avais fait dans mon premier Mémoire, on lui applique les méthodes de M. Volterra, on trouve, après quelques transformations d'intégrales, que la solution peut s'écrire

$$z(x,y) = \int\int_{(R)} u(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

où la résolvante $u(x,y;\xi,\eta)$ n'est autre que la fonction introduite par M. Hadamard (*Bulletin*, t. XXXII, p. 242) qui admet les lignes A_1 et A_2 comme lignes de discontinuité. Dans chaque région où elle est continue, $u(x,y;\xi,\eta)$, considérée comme fonction de (ξ,η), est solution de l'équation adjointe.

Supposons maintenant que l'on veuille trouver une intégrale de l'équation

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} - cz = f(x,y)$$

prenant des valeurs données le long des deux portions de droites données. Soit $\zeta(x,y)$ une fonction régulière dans R et prenant ces valeurs le long des deux segments. En posant $z = \zeta + Z$, on est ramené à trouver une intégrale de l'équation

$$\mathcal{F}(Z) = f(x,y) - \mathcal{F}(\zeta),$$

s'annulant le long des deux droites, c'est-à-dire au problème précédent. La solution se présente sous forme d'intégrale double, mais il suffit d'appliquer la formule de Green pour mettre la solution sous la forme même donnée par M. Hadamard.

M. Guichard : *Sur une classe particulière de réseaux* (C).

M. Hadamard : *Relation entre les solutions des équations aux dérivées partielles des types parabolique et hyperbolique.* — L'étude des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre assez avancée pour les équations elliptiques ou hyperboliques, l'est beaucoup moins, aujourd'hui encore, pour le type parabolique. C'est seulement dans ces dernières années qu'on a pu — et encore, à peu près, exclusivement dans le cas de deux variables indépendantes — étendre à ce dernier type d'équations les résultats acquis pour les deux premiers ([1]).

Il semble, cependant, *a priori*, que les équations paraboliques ne puissent plus offrir de difficultés lorsqu'on a élucidé les équations à caractéristiques distinctes. Elles constituent, en effet, un cas particulier, un *cas-limite* dont les propriétés doivent pouvoir, à ce titre, s'obtenir par dégénérescence des propriétés correspondantes relatives au cas général.

L'auteur s'est proposé d'examiner, à ce point de vue, l'équation parabolique la plus simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

en la faisant dériver de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 : \tag{2}$$

celle-ci se réduit, en effet, à la première lorsqu'on y fait $k = 0$.

L'équation (2) (où k est une constante) revient à l'équation bien connue *des télégraphistes;* on la rapporte à ses caractéristiques par le changement de variables

$$y = \eta, \qquad x - \frac{y}{K} = \xi \tag{3}$$

et l'on voit ainsi qu'elle admet comme fonction de Riemann la quantité

$$e^{\frac{\xi}{k} - \frac{\eta}{k^2}} J_0\left(2\sqrt{\frac{\xi\eta}{k^3}}\right) = e^{\frac{x}{k} - \frac{2y}{k^2}} J_0\left(\frac{2}{k^2}\sqrt{y(kx - y)}\right), \tag{4}$$

J_0 étant la fonction de Bessel.

Lorsqu'on fait tendre k vers zéro, il faut appliquer à cette expression l'évaluation asymptotique connue.

([1]) Les principaux problèmes aux limites se trouvant résolus pour l'équation de la chaleur, dans des travaux principalement dus à MM. Holmgren et E.-E. Levi; pour l'équation linéaire générale à deux variables dans une Note récente de M. Gevrey (*Comptes rendus*, 20 février 1911). La *solution fondamentale* a été obtenue par l'auteur (*Comptes rendus*, 1er mai 1911) par l'emploi d'un changement de variable sensiblement identique à celui qui avait été introduit antérieurement par M. Gevrey.

Or ceci donne précisément la valeur kF, F étant la quantité classique

$$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

qui sert à l'intégration de l'équation (1).

Le coefficient k dont elle est précédée est détruit par un dénominateur de même valeur, lorsqu'on substitue l'expression considérée dans les formules d'intégration telles que les donne la méthode de Riemann.

M. Risser : *Sur la résolution d'une équation relative à l'assurance invalidité.*

SÉANCE DU 14 JUIN 1911.

PRESIDENCE DE M. L. LÉVY.

Communication :

M. P. Lévy : *Sur certains procédés permettant de définir les intégrales des équations intégro-différentielles par des approximations successives.* — M. Hadamard a formé une équation intégro-différentielle, dont l'inconnue est une fonction d'un paramètre λ et de deux points, et qui admet comme solution la fonction de Green g_B^A relative à une famille de contours dépendant de λ. Elle admet une infinité d'autres solutions, dont on peut choisir arbitrairement la valeur φ_B^A pour $\lambda = 0$.

Dans le cas où cette fonction est finie, M. Hadamard a indiqué une méthode d'approximations successives permettant d'obtenir la solution correspondante de son équation. Tel n'est pas le cas pour la fonction de Green, et j'ai cherché à étendre cette méthode au cas où φ_B^A est la somme de g_B^A et d'une fonction analytique n'ayant aucune singularité à l'intérieur du contour $\lambda = 0$. Cette extension exige quelques précautions qu'il serait trop long d'indiquer ici et que j'exposerai dans ma thèse. Je me contente d'énoncer que j'ai pu obtenir le résultat cherché, mais en supposant connue la fonction g_B^A. Pour former cette fonction, on peut avoir recours à une série de Taylor, dont l'équation de M. Hadamard permet de calculer les termes successifs, et dont la convergence est évidente *a priori*.

Des considérations analogues s'appliquent à l'équation que vérifie la fonction G_B^A, relative au problème d'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mais au lieu de supposer connue la fonction G_B^A, il suffit de supposer connue la fonction g_B^A, de sorte que la méthode indiquée par M. Hadamard permet de ramener le problème dit *biharmonique* au problème de Dirichlet ordinaire.

SÉANCE DU 28 JUIN 1911.

PRÉSIDENCE DE M. FONTENÉ.

Communications :

M. Vessiot : *Remarques sur la cinématique des milieux continus.*

1. *Mouvement relatif.* — Un point P, mobile par rapport à un fluide (F), lui-même en mouvement, coïncide à chaque instant t avec une particule $M(t)$ de (F). Soit $Q(t, h)$ la position de $M(t+h)$ à l'instant t. Si l'on suppose t fixe et h variable, $Q(t, h)$ décrit une trajectoire suivant une loi déterminée : c'est la trajectoire relative de P, rapportée à l'instant t. La vitesse et l'accélération de $Q(t, h)$, qui correspondent à $h=0$, sont la vitesse et l'accélération relative de P, à l'instant t. La vitesse et l'accélération d'entraînement sont celles de $M(t)$, à l'instant t. Soient

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, t \mid h) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

les équations du mouvement du fluide ; et

$$x_i = \varphi_i(t, h) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

celles qui définissent le mouvement relatif de P, rapporté à l'instant t. On a pour la vitesse absolue de P, à l'instant t, les composantes

$$V_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\frac{d\varphi_k}{dh} + \frac{\partial f_i}{\partial h} \qquad (\text{pour } h = 0;\ i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Or, pour $h=0$, les f_i se réduisent aux x_i, et l'on a

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} = \varepsilon_{ih}.$$

Donc

$$V_i = \frac{d\varphi_i}{dh} + \frac{\partial f_i}{\partial h} \qquad (\text{pour } h = 0;\ i = 1, 2, \ldots, n); \tag{4}$$

c'est-à-dire que le *théorème classique du mouvement relatif subsiste.*

Pour l'accélération nous avons ensuite :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} J_i = &\sum_k \sum_l \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} \frac{d\varphi_k}{dh} \frac{d\varphi_l}{dh} \\ &+ \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_h} \frac{d^2\varphi_k}{dh^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial h^2} + 2\sum_k \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial h} \frac{d\varphi_k}{dh} \\ &(\text{pour } h = 0;\ i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right.$$

Les f_i étant alors réduits aux x_i, on a seulement

$$(6)\qquad J_i = \frac{d^2\varphi_k}{dh^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial h^2} + A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour interpréter A_i, il suffit de remarquer que la variation d'un élément $(dx_i, \ldots, dx_n)$ du fluide en $(x_1, \ldots, x_n)$ est donnée par

$$(7)\qquad \delta\, dx_i = d\,\delta x_i = d\frac{\partial f_i}{\partial h}\delta h = \left(\sum_k \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial h} dx_k\right)\delta h.$$

On voit alors que le vecteur $(A_1, \ldots, A_n)$ est le double de la vitesse de variation de l'élément du fluide qui a pour composantes $\frac{d\varphi_x}{dh}$, c'est-à-dire qui est superposé à l'instant t, avec la vitesse relative.

On retrouve donc un énoncé tout semblable à celui du théorème de Coriolis.

2. On peut considérer le *mouvement relatif de deux fluides*, dont les mouvements absolus sont définis par deux transformations infinitésimales :

$$Uf = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i u_i(x, \ldots, x_n, t)\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$Vf = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i v_i(x, \ldots, x_n, t)\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

La relation $(Uf, Vf) = 0$ exprime que le mouvement relatif de chacun des fluides par rapport à l'autre est un mouvement permanent.

La relation $(Uf, Vf) = \lambda Uf + \mu Vf$ exprime qu'il passe par chaque point de l'espace une multiplicité à une dimension qui est une multiplicité fluide pour les deux mouvements.

3. De la considération simultanée des deux fluides on peut déduire la théorie cinématique de la propagation des discontinuités.

M. Hadamard : *Sur les propriétés des fonctions de Green dans le plan.* — Soient S une aire plane simplement convexe; A, un point déterminé intérieur à cette aire. La connaissance de la fonction de Green G (A, M), où M désigne, cette fois, un point variable à l'intérieur de S, permet, comme on sait, de représenter cette aire d'une manière conforme sur l'aire S_0 d'un cercle, le centre de ce cercle correspondant au point A.

Or, dans une pareille représentation, non seulement la fonction de Green G(A, M) (quel que soit M), mais *toutes les fonctions de Green* G (M, N) *sont conservées*. Il en résulte que les relations entre ces fonctions sont les mêmes dans S et S_0.

Si A, B, C, D sont quatre points quelconques intérieurs à S, ces quatre points pris deux à deux donnent lieu à six fonctions de Green. Entre les six quantités ainsi obtenues existe une relation, la même qui existerait si S était un cercle.

On peut encore donner à ce résultat une forme différente en joignant AB, par exemple, par une ligne qui soit trajectoire orthogonale des lignes $G(A, M) = \text{const.}$, et qui se trouve en même temps trajectoire orthogonale des lignes $G(B, M) = \text{const.}$, et en opérant de même entre B, C; C, A. La géométrie de pareils triangles en en définissant les côtés par les fonctions de Green correspondantes, les angles étant ceux que forment entre elles les lignes dont nous venons d'indiquer la construction, est la même sur S et sur S_0.

Cette géométrie n'est pas distincte de la géométrie non-euclidienne ordinaire. On constate aisément, en effet (en prenant pour S, soit l'aire S_0, soit le demi-plan), que la quantité $G = G(A, B)$ est une fonction de la distance non-euclidienne $AB = d$: ces deux quantités sont liées l'une à l'autre par la relation

$$e^{-G} = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}.$$

Par contre, toutes les déductions qui précèdent sont essentiellement liées au fait que notre aire est simplement connexe. Dans le cas contraire, les propriétés de la représentation conforme, et, par conséquent, les précédentes, qui en découlent, se présentent, comme on sait, d'une manière toute différente. On doit alors prendre pour point de départ le Mémoire classique de M. Schottky (*Journal für Math.*, t. LXXXIII). C'est un sujet sur lequel l'auteur se réserve de revenir dans une communication ultérieure.

M. Cartan : *Sur les systèmes en involution d'équation aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de trois variables indépendantes.* — Les systèmes en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue z de trois variables indépendantes x, x_1, x_2 peuvent toujours s'intégrer par des équations différentielles ordinaires. Ils se partagent en deux catégories bien distinctes.

Les systèmes de la première catégorie jouissent de la propriété que toute multiplicité intégrale est engendrée par une famille de caractéristiques à une dimension et une famille de caractéristiques à deux dimensions, les caractéristiques de la première famille n'étant pas contenues dans celle de la seconde. On peut toujours les intégrer par la méthode de Monge. On obtient le système le plus général de cette catégorie en partant d'une fonction arbitraire V des x_i, z, φ_i et d'un paramètre u et en éliminant u entre les équations

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} + p_{1i} \frac{\partial V}{\partial p_1} + p_{2i} \frac{\partial V}{\partial p_2} + p_{3i} \frac{\partial V}{\partial p_3} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

L'intégrale générale s'obtient en intégrant l'équation aux dérivées partielles du premier ordre qui résulte de l'élimination de u entre les équations

$$V = f(u), \qquad \frac{\partial V}{\partial u} = f'(u).$$

Les systèmes en involution de la seconde catégorie jouissent de la propriété que toute multiplicité intégrale est engendrée par des caractéristiques à une dimension ; pour certains d'entre eux il n'y a pas de caractéristiques à deux dimensions ; pour d'autres il y en a, mais qui contiennent les caractéristiques à une dimension. Les caractéristiques à une dimension dépendent seulement de constantes arbitraires, 7 ou 8 suivant le cas. Une fois ces caractéristiques à une dimension déterminées, on peut se donner arbitrairement une fonction de deux arguments et l'on a alors une équation aux dérivées partielles du premier ordre à intégrer. Il est possible, par l'intégration d'équations différentielles ordinaires, de déterminer tous les systèmes en involution de la seconde catégorie qui n'admettent pas de caractéristiques à deux dimensions.

Dans les deux catégories, l'intégrale générale dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments.

II. Il y a plusieurs types de systèmes en involution de trois équations aux dérivées partielles du second ordre.

Un premier type est fourni en exprimant que la différentielle totale d'une fonction donnée quelconque V des x_i z, p_i est nulle; on a alors à intégrer une équation aux dérivées partielles du premier ordre. L'intégrale générale dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments.

Les systèmes du second type sont ceux qui admettent pour multiplicité intégrale générale les multiplicités qui se déduisent par une transformation de contact déterminée des courbes de l'espace à quatre dimensions.

Dans les autres types, l'intégrale générale est engendrée de trois manières différentes par une famille de caractéristiques à *deux* dimensions. Ces trois familles peuvent d'ailleurs se réduire à deux ou une. L'intégrale générale dépend de trois fonctions arbitraires d'un argument. On peut dans certains cas se servir des caractéristiques pour appliquer la méthode d'intégration de Monge ou de M. Darboux.

III. Toute multiplicité intégrale d'un système en involution de quatre équations aux dérivées partielles du second ordre peut être engendrée de deux manières différentes par une famille de caractéristiques à deux dimensions. Les intersections des caractéristiques de deux familles constituent une famille de caractéristiques à une dimension dépendant seulement de constantes arbitraires. Ces caractéristiques à une dimension étant déterminées, le système est ramené à un système à deux variables indépendantes. Dans tous les cas l'intégrale dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument.

IV. Toute multiplicité intégrale d'un système en involution de cinq équations aux dérivées partielles du second ordre est engendrée par une famille de caractéristiques à deux dimensions. Ces caractéristiques dépendent seulement de constantes arbitraires. Ces systèmes s'intègrent par des équations différentielles ordinaires. On peut, par l'intégration d'équations différentielles ordinaires, les déterminer tous. Leur intégrale générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.

N° 4.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 12 JUILLET 1911.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

Élection :

Est élu, à l'unanimité: M. Chalory, présenté par MM. Fontené et Grévy.

Communications :

M. Ch. Halphen: *Sur les surfaces de révolution.*

On peut établir, par des considérations géométriques très simples, les propriétés de la surface gauche de révolution; en particulier, démontrer que la méridienne est une hyperbole, à l'aide du théorème bien connu sur la tangente à cette courbe. Des remarques analogues donnent des propriétés des surfaces de révolution usuelles.

M. Fouché présente quelques remarques sur cette Communication.

M. Marcus : *Sur l'intégration des équations de Bernoulli.*

SÉANCE DU 24 OCTOBRE 1911.

PRÉSIDENCE DE M. L. LÉVY.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société: M. Turrière, présenté par MM. Bioche et Bourlet; M. Ch.-N. Moore, présenté par MM. L. Lévy et E. Picard.

Communications:

M. Bioche: *Sur le Congrès de Milan.*

M. Ch. Bioche donne quelques détails sur la réunion tenue à Milan, les 18, 19 et 20 septembre 1911, par la Commission internationale de l'Enseignement mathématique. Cette Commission a été instituée par le Congrès international des Mathématiciens qui a eu lieu à Rome en avril 1908, en vue de faire une enquête sur l'enseignement mathématique dans les différents pays. La réunion de Milan avait pour objet de préparer le Congrès de Cambridge (22-28 avril 1912), où doivent être présentés et discutés les Rapports publiés par des sous-commissions nationales.

Grâce à l'activité de son président, M. de Saint-Germain, la sous-commission française a pu présenter à la réunion de Milan l'ensemble de ses Rapports, constituant cinq Volumes publiés par la librairie Hachette.

La réunion de Milan a étudié spécialement trois questions:

1° Le rôle de la logique et de l'intuition dans l'enseignement moyen;

2° La question de la fusion des différentes parties de l'enseignement;

3° La question de la préparation mathématique des étudiants en sciences physiques et naturelles.

Un compte rendu des séances de Milan, qui ont été très intéressantes, a paru dans le numéro du 16 novembre de l'*Enseignement mathématique*, organe officiel de la Commission internationale.

M. Denjoy: *Sur l'*analysis situs *du plan.*

M. Denjoy énonce le théorème suivant :

Si les frontières F *et* F′ *de deux continus distincts* C *et* C′ *ont deux points communs* A *et* B, *chacune de ces frontières est d'un seul tenant entre* A *et* B.

La démonstration s'appuie sur un lemme préliminaire, d'après lequel chaque sommet de la frontière d'un domaine constitué par des carrés de côtés égaux détermine un cycle de sommets, et un seul, le dernier sommet du cycle coïncidant avec le premier.

Ce lemme étant admis, il est possible d'établir l'existence d'une suite de points appartenant à F (ou à F′) et joignant A à B, la distance de deux points consécutifs étant inférieure à un nombre arbitraire ε.

Ce théorème, essentiel dans la théorie de l'*analysis situs* du plan, et inexact pour les continua définis pour le tore, appartient à tout ensemble possédant, comme le plan, la propriété que M. Denjoy appelle la *biconnexité*.

Un ensemble E, *d'un seul tenant*, *est biconnexe*, *si* A, B, C, D, *étant quatre quelconques de ses points*, (AB), (BC), (CD), (DA), *quatre continus arbitraires joignant respectivement* A *à* B, *etc.*, *il est possible de déterminer sur* E *un ensemble de points à deux indices* M_{ip} : M_{00} *étant en* A, M_{0n} *en* B, M_{mn} *en* C, M_{m0} *en* D, M_{0i} *sur* (AB), M_{pn} *sur* (BC), M_{mi} *sur* (CD), M_{pn} *sur* (DA).

M. Fouché: *Sur une extension de la règle de Duhamel relative à la convergence des séries.*

CORRESPONDANCE.

SUR LA MAGIE ARITHMÉTIQUE;

PAR M. G. TARRY.

Dans l'espace magique à k dimensions, il y a $\frac{3^k-1}{2}$ directions pandiagonales. Pour nous limiter aux espaces réels, nous compterons : dans le cube λ, $\frac{3^3-1}{2}=13$ directions pandiagonales, savoir : 3 pour les arêtes du cube, 4 pour les diagonales du cube, 6 pour les diagonales des faces; dans le carré λ, $\frac{3^2-1}{2}=4$ directions pandiagonales, données par les 2 directions des côtés et les 2 directions des diagonales.

J'ai appelé *espace panmagique aux n premiers degrés*, tout espace à un nombre quelconque k de dimensions, dont les cases sont remplies avec la suite des nombres naturels, de telle manière que dans toutes les lignes arithmétiques de chacune des $\frac{3^k - 1}{2}$ directions pandiagonales, la somme des nombres soit la même, ainsi que la somme de leurs carrés, de leurs cubes, etc., jusqu'à la somme de leurs $n^{\text{ièmes}}$ puissances.

La découverte de la magie à tous les degrés a été communiquée à l'Académie des Sciences, dans une Note présentée par M. H. Poincaré, qu'on trouvera dans les *Comptes rendus* de la séance du 26 mars 1906. Je me propose de faire connaître la méthode suivie au Ve Congrès international des Mathématiciens à Cambridge, en l'appliquant à la construction d'un cube pantrimagique, c'est-à-dire donnant l'égalité aux 3 premiers degrés dans les 13 directions pandiagonales.

Les carrés panmagiques ont été appelés *diaboliques*, puis *pandiagonaux*. Actuellement, c'est l'expression panmagique qui prévaut en France. Il est à souhaiter qu'on se mette d'accord sur une dénomination uniforme.

Dans tous les Ouvrages où il est question de carrés panmagiques, les auteurs déclarent qu'on ne peut, par les méthodes connues, obtenir de carré panmagique lorsque le module est un nombre impair de la forme $3n$, n ne contenant pas le facteur 3. J'ai comblé cette lacune en faisant connaître un procédé pour construire de pareils carrés, à l'aide de deux rectangles magiques de côtés 3 et n.

Le plus petit de ces carrés panmagiques est celui de module 15. J'en présente un qui me paraît posséder le maximum de propriétés magiques. Les 225 premiers nombres, de 0 à 224, ont été écrits dans le système de numération de base 15 pour bien faire voir le mécanisme du procédé; ce qui me dispensera de toute explication.

Je me contenterai d'énoncer les plus importantes propriétés magiques.

Carré panmagique de module 15.

0.13	8. 8	13. 0	14. 3	1.11	6. 7	12. 6	5. 1	4.14	7. 9	11.10	3. 2	2. 4	10. 5	9.12
13. 8	0. 0	8.13	6.11	14. 7	1. 3	4. 1	12.14	5. 6	3.10	7. 2	11. 9	9. 5	2.12	10. 4
8. 0	13.13	0. 8	1. 7	6. 3	14.11	5.14	4. 6	12. 1	11. 2	3. 9	7.10	10.12	9. 4	2. 5
7. 6	11. 1	3.14	2. 9	10.10	9. 2	0. 4	8. 5	13.12	14.13	1. 8	6. 0	12. 3	5.11	4. 7
3. 1	7.14	11. 6	9.10	2. 2	10. 9	13. 5	0.12	8. 4	6. 8	14. 0	1.13	4.11	12. 7	5. 3
11.14	3. 6	7. 1	10. 2	9. 9	2.10	8.12	13. 4	0. 5	1. 0	6.13	14. 8	5. 7	4. 3	12.11
14. 4	1. 5	6.12	12.13	5. 8	4. 0	7. 3	11.11	3. 7	2. 6	10. 1	9.14	0. 9	8.10	13. 2
6. 5	14.12	1. 4	4. 8	12. 0	5.13	3.11	7. 7	11. 3	9 1	2.14	10. 6	13.10	0. 2	8. 9
1.12	6. 4	14. 5	5. 0	4.13	12. 8	11. 7	3. 3	7.11	10.14	9. 6	2. 1	8. 2	13. 9	0.10
2. 3	10.11	9. 7	0. 6	8. 1	13.14	14. 9	1.10	6. 2	12. 4	5. 5	4.12	7.13	11. 8	3. 0
9.11	2. 7	10. 3	13. 1	0.14	8. 6	6 10	14. 2	1. 9	4. 5	12.12	5. 4	3. 8	7. 0	11.13
10. 7	9. 3	2.11	8.14	13. 6	0. 1	1. 2	6. 9	14.10	5.12	4. 4	12. 5	11. 0	3.13	7. 8
12. 9	5.10	4. 2	7. 4	11. 5	3.12	2.13	10. 8	9. 0	0. 3	8.11	13. 7	14. 6	1. 1	6.14
4 10	12. 2	5. 9	3. 5	7.12	11. 4	9. 8	2. 0	10.13	13.11	0. 7	8. 3	6. 1	14.14	1. 6
5. 2	4. 9	12.10	11.12	3. 4	7. 5	10. 0	9.13	2. 8	8. 7	13. 3	0.11	1.14	6. 6	14. 1

I. Le carré est réparti en 25 compartiments carrés de 3 cases de côté, et dans chaque compartiment, la somme des 3 nombres situés sur une même ligne, horizontale ou verticale, est égale à 336.

Les compartiments ne sont que quasi-magiques à cause de la petitesse du nombre 3. On voit aisément que si le plus petit diviseur du module était supérieur à 3, les compartiments seraient des carrés magiques, et même panmagiques.

II. Tout groupe de cases homologues dans les compartiments forme un carré panmagique de côté 5, dont la somme magique est 560.

III. Sur la figure appliquons un carton sur lequel nous découperons 5 fenêtres, correspondant aux cases d'une constellation magique de l'un de ces carrés panmagiques. Jetons cette grille, suivant l'une quelconque de ses 8 orientations, de manière à découvrir 5 cases de notre carré répété autant de fois qu'on voudra. Partout la somme de 5 nombres vus à travers les lucarnes sera égale à 560.

IV. Deux nombres placés dans des cases symétriques, par rapport au centre, sont toujours complémentaires à 224.

C'est un choix convenable des rectangles magiques générateurs, qui a permis d'obtenir un carré auto-complémentaire.

V. On remarquera que notre carré fournit une solution du problème des 225 officiers.

Observation. — Dans mes recherches sur la magie, il m'a semblé que chaque carré possédait une somme constante de propriétés magiques, pouvant se transformer les unes dans les autres.

Par exemple, dans le carré de côté 15, la propriété de panmagie peut se transformer en propriété de bimagie; ce qui m'a permis de construire un carré magique de base 15 dans lequel la somme des carrés des 15 nombres est la même dans chacune des 15 rangées et des 15 colonnes. Il manque l'égalité au 2^e degré dans les 2 diagonales, pour que le carré soit bimagique ; mais par une sorte de compensation, il est auto-complémentaire.

J'espère arriver à échanger cette dernière propriété contre la bimagie dans les deux diagonales.

Société mathématique de France

Comptes rendus des séances de l'année 1911

TABLE DES MATIÈRES

Pages

Note bibliographique, ajoutée en 1967 lors de la réimpression :

De 1873 à 1910, les comptes rendus des séances de la Société mathématique de France ne paraissaient pas séparément, mais figuraient, sous diverses formes, dans le "Bulletin de la Société mathématique de France", et étaient mentionnés dans la table annuelle de chaque tome.

En 1911, les "Comptes rendus des séances", plus détaillés, ont paru séparément, en quatre cahiers. La présente réimpression les regroupe avec une table, après le Bulletin, sous une pagination continue (superposée à la pagination d'origine) qui prolonge celle du Bulletin proprement dit.

De 1911 à 1938, les "Comptes rendus des séances" ont continué à paraître isolément, sous forme d'un fascicule annuel (2 fascicules en 1924, pour célébrer le "Cinquantenaire" de la Société), avec pagination et table distinctes de celle du Bulletin. Les tables de 1921, 1922, 1923 et des deux fascicules de 1924 (séance du cinquantenaire et séances ordinaires) n'ont été rédigées que lors de la réimpression.

La réimpression actuelle des tomes 39 (1911) à 66 (1938) reproduit, à la fin des Bulletins et après la table annuelle de ceux-ci, la série complète de ces "Comptes rendus des séances".

Les Conférences de la Réunion internationale des mathématiciens, tenue à Paris en juillet 1937, ont paru en 1939, et sont réimprimées sous forme de Supplément au Bulletin de 1939.

Des communications, conférences et comptes rendus de 1938 à 1944 figurent, sous diverses formes, à la fin des Bulletins de 1941 à 1944. Ultérieurement, des pages administratives (Bureau et Conseil, Répertoire des membres, Listes de conférences, etc.) continuent à figurer en tête ou en queue du Bulletin de la Société mathématique de France.

Réimpression Photomécanique
LES PROCEDES DOREL - PARIS