SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 263-272
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__263_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 DÉCEMBRE 1898.

PRÉSIDENCE DE M. LECORNU.

Démissions :

MM. S. Mangeot et Dennery adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communications :

M. Ripert : *Sur une question posée par Chasles dans son* Aperçu historique.

MM. G. Humbert, Borel, Fontené et Bricard présentent diverses observations sur cette Communication.

M. Painlevé : *Sur la théorie des transcendantes uniformes engendrées par les équations différentielles du second ordre.*

M. Hadamard fait la Communication suivante :

Sur la généralisation du théorème de Guldin.

On connaît la belle proposition par laquelle M. Kœnigs ([1]) a généralisé le théorème classique de Guldin sur les volumes de révolution, et d'après laquelle le volume engendré par une portion de surface quelconque, dans un déplacement quelconque, peut se représenter par le moment mutuel de deux systèmes de segments, dont l'un, S, ne dépend que de la forme de la surface mobile, tandis que l'autre, Σ, ne dépend que de la loi du déplacement et peut être calculé par des quadratures lorsqu'on donne, pour chaque valeur de t, les composantes de la translation et de la rotation instantanée sur trois axes invariablement liés à la surface en question.

M. Kœnigs parvient à cette proposition par un calcul direct, en considérant successivement les cas où le déplacement instantané se réduit à une translation parallèle à chacun des axes de coordonnées ou à une rotation autour de ces axes, et en composant ensuite les déplacements ainsi obtenus.

On peut présenter le raisonnement sous une forme qui rend intuitive la forme du résultat, et, de plus, met en évidence la signification géométrique du système de segments S.

Il suffit, à cet effet, de faire appel au théorème bien connu qui s'énonce ainsi : Le travail élémentaire d'un système de forces agissant sur un solide invariable est égal au moment mutuel de deux systèmes de segments, dont l'un est constitué par les forces agissantes, tandis que l'autre est celui qui correspond au déplacement instantané.

On sait, d'autre part, que le travail d'une pression uniforme et normale p, exercée sur une surface qui se déplace, est mesuré par $p\,dv$, où dv est l'élément de volume décrit par la surface. Il suffit de rapprocher l'un de l'autre ces deux énoncés pour arriver au résultat cherché. Le volume élémentaire n'étant autre que le travail élémentaire d'une pression uniforme et égale à l'unité,

([1]) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. V, p. 321 et suivantes.

agissant sur la surface mobile, sera exprimé par le moment mutuel de deux systèmes de segments dont l'un, Σ, correspond au déplacement élémentaire.

L'autre, S (et c'est ce résultat que nous voulions obtenir), *est le système résultant de segments normaux à la surface mobile en ses différents points et égaux aux éléments de surface correspondants.*

Bien entendu, en écrivant les projections et les moments de ce système, on retombe sur les expressions trouvées par M. Kœnigs. Le fait, signalé au commencement de son Mémoire, que le résultat doit ne dépendre que du contour de la surface, correspond manifestement ici à cette proposition bien connue que *des pressions uniformes, distribuées sur une surface fermée, se font équilibre.*

M. Appell adresse la Note suivante :

Sur les équations de Lagrange et le principe d'Hamilton.

L'attention des géomètres a déjà été attirée plusieurs fois sur un genre particulier de liaisons qui ne peuvent pas être exprimées en termes finis. Citons, notamment, M. Vierkandt, M. Hadamard (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 4e série, t. V). Les équations de Lagrange ne peuvent pas être appliquées, en général, aux systèmes contenant ce genre de liaisons : c'est ce que vient encore de montrer M. Carvallo dans un Mémoire présenté à l'Académie pour le concours du prix Fourneyron.

D'un autre côté, quand on établit les équations de Lagrange par le principe d'Hamilton

$$\delta \int (\mathrm{T} + \mathrm{U})\, dt = 0, \tag{1}$$

il semble que toutes les liaisons soient comprises dans la démonstration. Je ne sais si l'on a indiqué déjà comment ces liaisons exceptionnelles se trouvent écartées. D'après le principe de d'Alembert, associé au principe du travail virtuel, on a

$$\int [\delta \mathrm{U} - \Sigma m (x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z)]\, dt = 0. \tag{2}$$

On transforme le terme

$$\int x'' \, \delta x \, dt$$

par l'intégration par partie, et l'on a

$$x' \, \delta x - \int x' \, d \, \delta x\,;$$

on fait ensuite

$$(3) \qquad d \, \delta x = \delta \, dx = \delta x' \, dt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et l'équation (2) devient, en laissant de côté la partie intégrée,

$$\int [\delta U + \Sigma m(x' \, \delta x' + y' \, \delta y' + z' \, \delta z')] \, dt = 0,$$

qui est l'équation (1).

De cette équation (1) on déduit ensuite les équations de Lagrange en supposant que T soit fonction de q_1, q_2, ..., q_k, q'_1, q'_2, ..., q'_k et s'appuyant encore sur les relations

$$(4) \qquad d \, \delta q_1 \equiv \delta \, dq_1, \quad \ldots,$$

or, ces conditions (3) et (4) sont incompatibles dans le cas qui nous occupe. En effet, supposons le système à deux degrés de liberté q_1 et q_2, les liaisons étant indépendantes de t. Alors on a, pour un déplacement virtuel compatible avec les liaisons

$$\delta x = A_1 \, \delta q_1 + A_2 \, \delta q_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et pour le déplacement réel

$$dx = A_1 \, dq_1 + A_2 \, dq_2.$$

Ces expressions différentielles ne sont pas supposées intégrables, sans quoi x s'exprimerait en termes finis en q_1, q_2, ce qui est contre l'hypothèse.

Alors

$$d\,\delta x = \left(\frac{\partial A_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial A_1}{\partial q_2} dq_2\right)\delta q_1 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial A_2}{\partial q_2} dq_2\right)\delta q_2$$
$$+ A_1\, d\,\delta q_1 + A_2\, d\,\delta q_2,$$

$$\delta\, dx = \left(\frac{\partial A_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial A_1}{\partial q_2}\delta q_2\right) dq_1 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial A_2}{\partial q_2}\delta q_2\right) dq_2$$
$$+ A_1 \delta\, dq_1 + A_2 \delta\, dq_2.$$

Si l'on suppose les conditions (4) remplies, les conditions (3) ne le sont pas, car les termes en $\delta q_2\, dq_1$, par exemple, dans $d\,\delta x$ et $\delta\, dx$, ont pour coefficients les deux quantités

$$\frac{\partial A_2}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial q_2},$$

qui, actuellement, ne sont pas égales.

M. Leau adresse la Note suivante :

Extension d'un théorème de M. Hadamard à l'étude des séries de Taylor.

1. Le théorème dont il s'agit est le suivant :

Si l'on pose

$$\varphi(z) = \Sigma a_n z^n, \tag{1}$$

$$\psi(z) = \Sigma b_n z^n \tag{2}$$

et

$$f(z) = \Sigma a_n b_n z^n, \tag{3}$$

la fonction $f(z)$ ne peut pas avoir d'autres points singuliers que ceux dont les affixes sont le produit des affixes de deux points singuliers, l'un de φ, l'autre de ψ.

On a une généralisation immédiate de cette propriété si l'on considère une série de la forme $\Sigma P(a_n, b_n, c_n, \ldots) z^n$, P étant un polynôme et les a_n, b_n, c_n, ... les coefficients de rang n d'un certain nombre de séries. En ne prenant qu'une seule de ces dernières, $\Sigma a_n z^n$, on peut chercher à remplacer le polynôme P par une fonction entière de a_n. C'est là précisément l'extension que je me suis proposé de faire. Je me suis d'abord limité à l'étude de la nouvelle série sur le cercle de convergence, cas pour lequel j'avais trouvé, de mon côté, une démonstration du théorème de M. Hadamard.

Mais, à la suite d'une Communication [1] de M. Borel sur ce même théorème, faite à la réunion de la Société mathématique du 9 novembre dernier, j'ai reconnu que mes conclusions pouvaient s'étendre facilement à une plus grande région du plan.

Voici, sur un cas particulier, mais dans des conditions très larges, le principe de cette application, qui sera ultérieurement développée.

2. Soient α et β deux points singuliers quelconques, l'un de φ, l'autre de ψ.

On connaît la formule

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \psi(x)\,\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x}; \tag{4}$$

C est un contour qui comprend l'origine, z, et les points $\frac{z}{\alpha}$, et qui laisse les points β à l'extérieur.

Cela posé, désignons par $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ... les séries $\Sigma a_n^2 z^n$, $\Sigma a_n^3 z^n$, ... *Nous remplacerons successivement, dans la formule* (4), $\psi(x)$ *par* $\varphi(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... *de sorte que* $f(z)$ *sera tour à tour* $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ... Dans ce but, formons l'ensemble E_1 des valeurs singulières α, l'ensemble E_2 de leurs produits deux à deux, celui E_3 de leurs produits trois à trois, ...; enfin l'ensemble $\mathcal{E}$, qui les comprend tous. *Le contour* C *sera assujetti à rester compris entre les* γ *et les* $\frac{z}{\gamma}$, les γ étant les points de $\mathcal{E}$. Pour plus de précision, je suppose que les points de l'ensemble E et aussi ceux de $\mathcal{E}$ sont isolés.

3. Soit une aire A quelconque, à contour simple, contenant l'origine, et laissant les points γ à l'extérieur; toutes les aires $\frac{A}{\gamma}$

---

[1] Je me réfère à cette Communication. *Voir* ci-dessus, p. 238.

seront dans les mêmes conditions. L'aire totale $\mathcal{A}$, ainsi constituée, est d'un seul tenant. Toute aire B intérieure à A, donne naissance à une aire $\mathcal{B}$ intérieure à $\mathcal{A}$.

Supposons que le module d'une fonction $\psi(z)$ ne dépasse pas M quand z est à l'intérieur d'une certaine aire $\mathcal{A}$ ou sur son contour. Si z reste à l'intérieur de $\mathcal{B}$, $\frac{z}{x}$ restera à distance finie et ne passera pas par les points singuliers de φ, mais il pourra en être voisin. En posant

$$\frac{z}{\alpha} = z',$$

on a

$$\frac{z}{x} - \alpha = (z' - x)\frac{\alpha}{x}.$$

Si le contour de $\mathcal{B}$ est rapproché de celui de $\mathcal{A}$, il pourra y avoir des valeurs α pour lesquelles $|z' - x|$ soit petit. *Supposons qu'il existe un membre m tel que pour chaque point* α

$$(z - \alpha)^m \varphi(z)$$

tende uniformément vers zéro quand z tend vers α. Alors, δ étant la plus courte distance des contours de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, et M_1 le maximum du module de $f(z)$, quand z est sur $\mathcal{B}$ ou à son intérieur, la formule (4) montre qu'on peut trouver une constante P, valable aussi pour des aires voisines de $\mathcal{A}$, et telle que l'on ait

$$M_1 < P\frac{M}{\delta^m}.$$

4. Partant d'une aire telle que $\mathcal{A}$, nous pouvons en construire successivement d'autres, intérieures aux précédentes, de manière que la plus courte distance de deux contours voisins soit donnée, par exemple, par les termes de la série

$$\frac{h}{1^\alpha}, \quad \frac{h}{2^\alpha}, \quad \ldots, \quad \frac{h}{n^\alpha}, \quad \ldots \qquad (\alpha > 1).$$

Elles pourront ainsi contenir toutes une aire $\mathcal{A}'$ différant de $\mathcal{A}$ d'aussi peu que l'on veut. On aura des limites des modules des fonctions $\varphi_n(z)$ à l'intérieur de $\mathcal{A}'$. D'où l'on conclut facilement la propriété suivante :

Si $g(t)$ est une fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{m}$, la série $\Phi(z) = \Sigma g(a_n) z^n$ n'a pas d'autres points singuliers que ceux de $\mathcal{C}$, sous les conditions énoncées.

J'ajoute que, dans une région où $\varphi(z)$ est uniforme, il en est de même de $\Phi(z)$.

Le même procédé permet d'étudier le cas où, pour certains points α, $(z-\alpha)^m \varphi(z)$ ne tendrait pas vers zéro.

Enfin, on voit deux généralisations immédiates :

1° $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ étant certaines constantes, on peut substituer aux séries $\Sigma a_n^p z^n$ les séries $\Sigma \lambda_p^n a_n^p z^n$, ce qui modifie les points singuliers γ.

2° On peut associer à la fonction $\varphi(z)$ d'autres fonctions $\Sigma a'_n z^n$, $\Sigma a''_n z^n$, ..., de manière à les employer *simultanément* à la formation des nouvelles séries par l'application répétée de la méthode de M. Hadamard.

SÉANCE DU 21 DÉCEMBRE 1898.

PRÉSIDENCE DE M. LECORNU.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Ferber, présenté par MM. Laisant et Lémeray; M. C. Naud, présenté par MM. Appell et Laisant; M. E. Lindelöf, présenté par MM. Painlevé et Borel; M. Le Roy, présenté par MM. Blutel et Borel.

Communications :

M. Borel : *Sur les séries entières à rayon de convergence nul.*

M. Le Roy : *Sur le prolongement analytique des fonctions.*

M. Humbert : *Sur la multiplication complexe des fonctions abéliennes et la transformation univoque des surfaces hyperelliptiques en elles-mêmes.*

M. Laisant fait la Communication suivante :

Coordonnées polaires symétriques.

L'emploi des coordonnées polaires, si avantageux dans un grand nombre de questions, est à peu près nul lorsqu'il s'agit de la Géométrie de l'espace. Cela tient, je le crois, à l'introduction des deux angles (longitude et latitude) qui interviennent dans le calcul sans aucune symétrie.

Il semble qu'on remédierait à cet inconvénient, en introduisant, comme coordonnées angulaires d'un point M, les cosinus directeurs α, β, γ des trois angles que forme la direction OM joignant l'origine au point M, avec les trois axes coordonnés. La quatrième coordonnée serait le rayon vecteur $OM = r$; et on aurait la condition $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

On peut dire qu'au fond ce ne serait jamais, avec une écriture différente, qu'un système de coordonnées rectangulaires; mais il est tout aussi vrai qu'une équation polaire dans le plan $f(r, \theta) = 0$ n'est autre que $f\left(\sqrt{x^2+y^2}, \text{arc tang}\frac{y}{x}\right) = 0$. En ces matières, c'est justement le mode d'écriture qui importe.

Les formules de transformation sont ici

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \ldots, \quad x = \alpha r, \quad y = \beta r, \quad r = \gamma r.$$

Dans ce système de coordonnées, on a pour l'équation générale d'un plan

$$\frac{d}{r} = a\alpha + b\beta + c\gamma;$$

si $d = 0$, le plan passe par l'origine.

L'équation d'une sphère passant par l'origine est

$$r = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

L'équation $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ représente un cône ayant son sommet à l'origine.

Une surface quelconque est représentée par l'équation

$$f(r, \alpha, \beta, \gamma) = 0. \tag{1}$$

On trouve facilement que les paramètres directeurs de la normale en un point de la surface sont exprimés par

$$\alpha(rf'_r - \varphi) + f'_\alpha, \quad \beta(rf'_r - \varphi) + f'_\beta, \quad \gamma(rf'_r - \varphi) + f'_\gamma,$$

en posant $\varphi = \alpha f'_\alpha + \beta f'_\beta + \gamma f'_\gamma$.

On vérifie, d'après ces valeurs, que l'équation $f'_r = 0$ représente une surface passant par la courbe de contact du cône circonscrit ayant son sommet à l'origine.

La faculté d'introduire à volonté le facteur $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, à une puissance quelconque, permet de rendre l'équation (1) homogène et de lui donner un degré quelconque si elle est algébrique. En supposant, par exemple, qu'on ait choisi le degré 0, les paramètres directeurs de la normale deviennent $\alpha r f'_r + f'_\alpha, \ldots$.

Deux équations $f_1(r, \alpha, \beta, \gamma) = 0$, $f_2(r, \alpha, \beta, \gamma) = 0$ étant données, l'équation $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ qu'on aura en éliminant r représentera le cône ayant son sommet à l'origine et passant par l'intersection des deux surfaces.

Si dans l'équation (1) on remplace r par $r + l$, la nouvelle équation $f(r + l, \alpha, \beta, \gamma)$ représentera une surface conchoïdale de la première.

Si r_0, α_0, β_0, γ_0 sont des valeurs fixes données, l'équation

$$f(r_0, \alpha, \beta, \gamma) = 0$$

représente un cône ayant son sommet à l'origine et passant par l'intersection de la surface avec la sphère de centre O et de rayon r_0 ; l'équation

$$f(r, \alpha_0, \beta, \gamma) = 0$$

représente une surface passant par l'intersection de la surface avec un cône de révolution de sommet O, ayant Ox pour axe et un angle d'ouverture $2 \arccos \alpha_0$.

Je me borne ici à ces indications très sommaires, en pensant que quelqu'un pourra peut-être en tirer profit dans certaines applications.

FIN DU TOME XXVI.

Erratum : Tome XXVI, page 186, 6ᵉ ligne, *au lieu de* (A, B), *lire* (B, A).
