BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JANVIER 1897.

PRÉSIDENCE DE M. KŒNIGS.

La Société, réunie en assemblée générale, procède au renouvellement de son bureau et à l'élection de membres du Conseil.

Communications :

M. Boulanger : *Sur l'équation de la propagation de la chaleur.*

M. Girardville : *Sur la théorie du vol des oiseaux.*

MM. Touche et Lecornu présentent des observations sur le même sujet.

M. Raffy fait la Communication suivante :

Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces.

Commençons par rappeler les formules dont il s'agit. Soient E, F, G les coefficients de l'élément linéaire d'une surface, D, D′, D″ les déterminants qui figurent dans l'équation différentielle des lignes asymptotiques. Si l'on pose

$$\Delta = \frac{D}{H^2}, \qquad \Delta' = \frac{D'}{H^2}, \qquad \Delta'' = \frac{D''}{H^2}, \qquad H^2 = EG - F^2,$$

et qu'on désigne par $-k^2$ le produit des courbures principales, on a les relations

$$(1) \qquad \Delta\Delta'' - \Delta'^2 = -k^2,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta'}{\partial u} - \dfrac{\partial \Delta}{\partial v} = C_1 \Delta - 2 B_1 \Delta' + A_1 \Delta'', \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial v} - \dfrac{\partial \Delta''}{\partial u} = C\Delta - 2 B \Delta' + A \Delta'', \end{cases}$$

où A, B, C, A_1, B_1, C_1 désignent six fonctions connues de E, F, G et de leurs dérivées premières, savoir

$$A = \frac{GE'_u + FE'_v - 2FF'_u}{2H^2}, \qquad A_1 = \frac{2EF'_u - FE'_u - EE'_v}{2H^2},$$

$$B = \frac{GE'_v - FG'_u}{2H^2}, \qquad B_1 = \frac{EG'_u - FE'_v}{2H^2},$$

$$C = \frac{2GF'_v - FG'_v - GG'_u}{2H^2}, \qquad C_1 = \frac{EG'_v + FG'_u - 2FF'_v}{2H^2}.$$

Les équations (1) et (2) sont les formules fondamentales de la théorie des surfaces : on sait qu'une surface est entièrement déterminée de forme, quand on connaît son élément linéaire et un système de trois fonctions Δ, Δ', Δ'', satisfaisant à ces conditions.

Nous allons exprimer Δ, Δ', Δ'' au moyen d'une seule fonction auxiliaire t, qui sera déterminée (si l'on donne E, F, G) par une équation aux dérivées partielles du second ordre. A cet effet, introduisons la courbure moyenne

$$(3) \qquad h = \frac{G\Delta - 2F\Delta' + E\Delta''}{2H}.$$

On satisfait aux deux équations (1) et (3) en posant

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta = \dfrac{2Hh - 2k(Et + F)}{Et^2 + 2Ft + G}, \\ \Delta' = \dfrac{-2Hht + k(Et^2 - G)}{Et^2 + 2Ft + G}, \\ \Delta'' = \dfrac{2Hht^2 + 2k(Ft^2 + Gt)}{Et^2 + 2Ft + G}. \end{cases}$$

Pour trouver la signification de t, il suffit de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$\Delta\, du^2 + 2\Delta'\, du\, dv + \Delta''\, dv^2 = 0;$$

comme elle s'écrit

$$(du - t\,dv)\{[k(Et + F) - Hh]\,du + [k(Ft + G) + Hht]\,dv\} = 0,$$

on voit que t est la valeur du rapport $du : dv$ qui correspond à l'une des lignes asymptotiques.

Si maintenant on substitue les expressions (4) dans les équations (2), on a, entre h et t, deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui sont telles qu'en éliminant entre elles l'une des dérivées de h on élimine en même temps l'autre. Ainsi *la courbure moyenne s'exprime explicitement en fonction des coefficients de l'élément linéaire, ainsi que de la fonction t et de ses dérivées premières ; il en est de même des coefficients* Δ, Δ', Δ'' à raison des formules (4). Il n'y a exception que si h se présente sous la forme $0 : 0$. Cette hypothèse caractérise les surfaces réglées et conduit aux déformations bien connues qui dépendent d'une fonction arbitraire.

La substitution de h dans l'une des deux équations (2) conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre pour la fonction t. Mais *cette équation, dont dépend la détermination de toutes les surfaces ayant un élément linéaire donné, est* LINÉAIRE *par rapport aux dérivées secondes,* tandis que toutes les équations antérieurement données pour résoudre le problème de la déformation contiennent ces dérivées au second degré. Elle admet pour caractéristiques les lignes asymptotiques des surfaces cherchées.

SÉANCE DU 20 JANVIER 1897.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Laisant : *Sur l'organisation des Congrès internationaux de mathématiciens.*

M. Raffy : *Sur les lignes asymptotiques des développées des surfaces à courbure totale constante.*

M. Maillet adresse un Mémoire intitulé : *Des groupes primitifs de classe* N — 1 *et de degré* N.

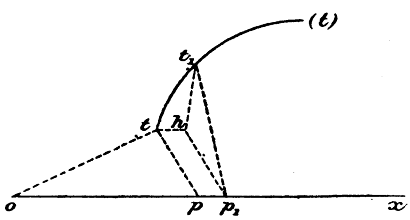
M. Mannheim adresse la Communication suivante :

Sur les formules de Frenet.

On donne une courbe (m). On mène en un de ses points m sa tangente T, sa normale principale N et sa binormale B. Appelons, τ, ν, β les angles de ces droites avec un axe ox.

Du point o (*fig.* 1) comme centre décrivons une sphère de

Fig. 1.



rayon 1 et menons de o le rayon ot parallèlement à T. Le lieu des points tels que t, lorsqu'on fait varier la position de la tangente à (m), est une courbe (t). Le cône de sommet o, dont la directrice est (t), a pour plan tangent suivant ot un plan parallèle au plan osculateur de (m) en m.

La tangente en t à (t) est dans ce plan tangent, et comme cette droite est perpendiculaire à ot, elle est parallèle à N.

Du point t et du point t_1, infiniment voisin de t sur (t), abaissons sur ox les perpendiculaires tp, t_1p_1. Menons p_1h parallèlement à pt et th parallèlement à ox. L'angle que fait th avec tt_1 est alors égal à ν. Dans le triangle htt_1 on a : $th = tt_1 \cos\nu$.

Comme l'angle xot est égal à τ, cette égalité montre que

$$(1) \qquad d\cos\tau = tt_1\cos\nu;$$

tt_1 est égal à l'angle de contingence de (m) pour le point m; si l'on appelle $d(m)$ un arc infiniment petit de (m) et ρ le rayon de courbure de (m) en m, on a alors $tt_1 = \frac{d(m)}{\rho}$ et la relation (1) s'écrit

$$(2) \qquad d\cos\tau = \frac{d(m)}{\rho}\cos\nu.$$

Appliquons la formule (1) à l'arête de rebroussement (m') de la surface développable enveloppe des plans normaux à (m). Dans le plan normal issu de m, il y a l'axe de courbure de (m), qui est une génératrice de cette surface : appelons m' le point où cette génératrice, qui est parallèle à B, touche l'arête de rebroussement (m'). La normale principale de cette courbe pour m' est parallèle à N. L'angle de contingence de (m') pour m' est égal à l'angle que le plan osculateur de (m) en m fait avec le plan osculateur de (m) pour le point infiniment voisin de m : cet angle est égal à $\frac{d(m)}{r}$, en appelant r le rayon de seconde courbure de (m) en m.

La formule (2), appliquée à (m') et exprimée au moyen des éléments de (m), donne alors

$$d \cos\beta = \frac{d(m)}{r} \cos\nu. \tag{3}$$

Les formules (2) et (3) sont deux des formules de Frenet; on sait qu'il est facile d'en déduire la troisième.

M. Touche fait la Communication suivante :

Équations d'une trajectoire fluide dans le cas général.

Soit mn un élément de trajectoire et nr un élément de la normale principale à la trajectoire en n. Nous pouvons choisir le point r de telle manière que la pression en ce point soit la même qu'au point m.

Soit $mn = ds$ et $nr = ds_1$; nous pouvons aussi choisir sur nr un point r' tel que la projection de la tangente à la trajectoire qui passe par ce point, sur le plan osculateur relatif au point m, soit parallèle à la tangente en m à la trajectoire; soit $nr' = ds'_1$.

La première des équations générales du mouvement des fluides transformées nous donne

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}ds = \mathrm{U}\,ds - \frac{dv_1}{dt}ds - v_1\frac{dv_1}{ds}ds \tag{1}$$

et la seconde

$$(2)\qquad -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds'}ds_1 = -\mathrm{U}'\,ds_1 - v_1\frac{d\alpha_1}{dt}ds_1 - v_1^2\frac{d\alpha}{ds}ds_1.$$

Remarquons que la variation de pression de m en n est la même que celle de r en n, puisque m et r ont la même pression; donc, dans les équations (1) et (2) les premiers membres sont égaux et l'on a

$$v_1\frac{dv_1}{ds}ds = \mathrm{U}\,ds - \frac{dv_1}{dt}ds + \mathrm{U}'\,ds_1 + v_1\frac{d\alpha_1}{dt}ds_1 + v_1^2\frac{d\alpha}{ds}ds_1,$$

ou

$$(3)\qquad \frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{ds}ds = \frac{1}{v_1^2}\mathrm{U}\,ds + \frac{1}{v_1^2}\mathrm{U}'\,ds_1 - \frac{1}{v_1^2}\frac{dv_1}{dt}ds + \frac{1}{v_1}\frac{d\alpha_1}{dt}ds_1 + \frac{d\alpha}{ds}ds_1.$$

L'équation de continuité transformée nous donne

$$(4)\qquad \frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{ds}ds = \frac{\delta\alpha}{ds'}ds + \frac{\delta'\alpha}{ds''}ds - \frac{1}{\rho v_1}\frac{d\rho}{dt}ds - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}ds.$$

Les deux premiers membres de (3) et (4) étant égaux, on aura

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta\alpha}{ds'}ds + \frac{\delta'\alpha}{ds''}ds = \frac{d\alpha}{ds}ds_1 + \frac{1}{v_1^2}\mathrm{U}\,ds + \frac{1}{v_1^2}\mathrm{U}'\,ds_1 - \frac{1}{v_1^2}\frac{dv_1}{dt}ds \\ + \frac{1}{v_1}\frac{d\alpha_1}{dt}ds_1 + \frac{1}{\rho v_1}\frac{d\rho}{dt}ds + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}ds. \end{aligned}\right.$$

Comme la tangente à la trajectoire en m est parallèle à la projection, sur le plan osculateur, de la tangente en r' à la trajectoire qui passe par ce point, $d\alpha$ représente à la fois l'angle des deux tangentes à la trajectoire en m et en n et l'angle des deux tangentes en r' et en n aux trajectoires qui passent par ces points; or, ce dernier angle est

$$-\frac{\delta\alpha}{ds'}ds'_1$$

et l'on aura

$$-\frac{\delta\alpha}{ds'}ds'_1 = \frac{d\alpha}{ds}ds$$

ou

$$\frac{\delta\alpha}{ds'}ds = -\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds'_1}ds,$$

et en substituant dans (5) il vient

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\delta' \alpha}{ds''} ds = \frac{d\alpha}{ds}\left(\frac{ds_1}{ds} + \frac{ds}{ds'_1}\right) ds + \frac{1}{v_1^2} \mathrm{U}\, ds + \frac{1}{v_1^2} \mathrm{U}'\, ds_1 \\ - \frac{1}{v_1^2} \frac{dv_1}{dt} ds + \frac{1}{v_1} \frac{d\alpha_1}{dt} ds_1 + \frac{1}{\rho v_1} \frac{d\rho}{dt} ds + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} ds.\end{aligned}\right.$$

Comme pour l'équation d'une trajectoire dans un cas particulier, on a dans le cas général

$$\frac{\delta' \alpha}{ds''} ds = \frac{dx}{x},$$

en prenant pour axe des y l'intersection du plan osculateur passant par le point m avec le plan osculateur passant par un point très voisin sur la même trajectoire. En substituant, nous obtenons l'équation

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{dx}{x} = \frac{d\alpha}{ds}\left(\frac{ds_1}{ds} + \frac{ds}{ds'_1}\right) ds + \frac{1}{v_1^2} \mathrm{U}\, ds + \frac{1}{v_1^2} \mathrm{U}'\, ds_1 \\ - \frac{1}{v_1^2} \frac{dv_1}{dt} ds + \frac{1}{v^1} \frac{d\alpha_1}{dt} ds_1 + \frac{1}{\rho v_1} \frac{d\rho}{dt} ds + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} ds.\end{aligned}\right.$$

Pour avoir une seconde équation, considérons un élément ns de binormale à la trajectoire. Nous pouvons choisir le point s de telle manière que la pression en ce point soit la même qu'au point m. Soit $ns = ds_2$. La première des équations générales du mouvement des fluides transformées nous donne

$$(1)\quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds = \mathrm{U}\, ds - \frac{dv_1}{dt} ds - v_1 \frac{dv_1}{ds} ds$$

et la troisième

$$(2)\quad -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds''} ds_2 = -\mathrm{U}''\, ds_2 - v_1 \frac{d\alpha_2}{dt} ds_2.$$

Remarquons que la variation de pression de m en n est la même que celle de s en n, puisque m et s ont la même pression; donc, dans les équations (1) et (2) les premiers membres sont égaux et l'on a

$$(3)\quad \frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{ds} ds = \frac{1}{v_1^2} \mathrm{U}\, ds + \frac{1}{v_1^2} \mathrm{U}''\, ds_2 + \frac{1}{v_1} \frac{d\alpha_2}{dt} ds_2 - \frac{1}{v_1^2} \frac{dv_1}{dt} ds.$$

L'équation de continuité nous donne

$$(4)\qquad \frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{ds}ds = \frac{\delta\alpha}{ds'}ds + \frac{\delta'\alpha}{ds''}ds - \frac{1}{\rho v_1}\frac{d\rho}{dt}ds - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}ds.$$

Les deux premiers membres de (3) et (4) étant égaux, on aura

$$\frac{\delta\alpha}{ds'}ds + \frac{\delta'\alpha}{ds''}ds = \frac{1}{v_1^2}\mathrm{U}\,ds + \frac{1}{v_1^2}\mathrm{U}''\,ds_2 + \frac{1}{v_1}\frac{d\alpha_2}{dt}ds_2$$
$$- \frac{1}{v_1^2}\frac{dv_1}{dt}ds + \frac{1}{\rho v_1}\frac{d\rho}{dt}ds + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}ds;$$

$\delta\alpha$ et $\delta'\alpha$ ont les mêmes valeurs que précédemment et il vient, en substituant,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{x} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{ds'_1}ds + \frac{1}{v_1^2}\mathrm{U}\,ds + \frac{1}{v_1^2}\mathrm{U}''\,ds_2 + \frac{1}{v_1}\frac{d\alpha_2}{dt}ds_2 \\ - \frac{1}{v_1^2}\frac{dv_1}{dt}ds + \frac{1}{\rho v_1}\frac{d\rho}{dt}ds + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}ds. \end{aligned}\right.$$

Les équations (7) et (8) constituent un système d'équations complètement générales.

Remarquons que si nous nous limitons au cas du mouvement permanent, tout en considérant les forces extérieures, et si nous supposons que le plan auquel se rapportent les équations (7) et (8) se meuve le long de la trajectoire en restant toujours osculateur, nous pouvons obtenir, par une transformation de coordonnées rectangulaires, les équations de la trajectoire par rapport à des axes fixes.

M. D'OCAGNE fait la Communication suivante :

Sur une transformation birationnelle réciproque de l'espace.

La transformation envisagée est celle dans laquelle deux points se correspondent lorsqu'ils sont diamétralement opposés dans une sphère passant par un cercle fixe Γ donné à distance finie dans l'espace.

Cette transformation, à laquelle j'ai déjà consacré une Note (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*; 1889), peut se ramener homographiquement à l'inversion en faisant correspondre le cercle Γ au cercle isotrope.

La transformée d'un plan quelconque P est, en effet, une quadrique Q passant par le cercle Γ et par le point situé à l'infini dans la direction normale au plan de ce cercle. Cette quadrique Q est d'ailleurs coupée par le plan P suivant un cercle, et la sphère admettant ce cercle pour section diamétrale passe aussi par le cercle Γ.

D'une manière plus générale, une quadrique Q passant par le cercle Γ a pour transformée une quadrique Q′ passant également par ce cercle. En outre, les quadriques Q et Q′ se rencontrent suivant un second cercle et la sphère admettant ce cercle pour section diamétrale contient aussi le cercle Γ.

Soient M et M′ deux points correspondants, auxquels on fait décrire deux surfaces S et S′, ou deux courbes C et C′, transformées l'une de l'autre. On a ces théorèmes :

Les parallèles aux normales en M *et en* M′ *aux surfaces* S *et* S′, *respectivement menées par* M′ *et par* M, *se coupent dans le plan du cercle* Γ.

Les plans parallèles aux plans normaux en M′ *et en* M *aux courbes* C *et* C′, *respectivement menés par* M *et par* M′, *se coupent dans le plan du cercle* Γ.

Ce second théorème est d'ailleurs un corollaire immédiat du premier.

M. d'Ocagne fait la Communication suivante :

Sur la représentation des équations du second ordre par des droites et par des cercles.

L'équation du second ordre à trois variables la plus générale étant écrite

$$\begin{aligned} a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + a_3\alpha_3^2 + 2b_1\alpha_2\alpha_3 + 2b_2\alpha_3\alpha_1 \\ + 2b_3\alpha_1\alpha_2 + 2c_1\alpha_1 + 2c_2\alpha_2 + 2c_3\alpha_3 + d = 0, \end{aligned}$$

j'ai fait voir (¹) que *la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation soit représentable par deux systèmes de droites parallèles et par un système de cercles est que l'une*

(¹) *Bull. de la Soc. math.*, t. XXIV, p. 81.

des quantités $a_2a_3 - b_1^2$, $a_3a_1 - b_2^2$, $a_1a_2 - b_3^2$ *soit positive.*

J'ai fait observer depuis lors (¹) que ce résultat pouvait être complété ainsi : *La condition énoncée est nécessaire et suffisante pour que l'équation soit représentable par deux faisceaux de droites et un systèmes de cercles, et chacun de ces faisceaux est* NÉCESSAIREMENT *formé de droites parallèles.*

M. Appell adresse la Note suivante :

Sur un mode d'inversion des intégrales multiples (²).

Soient $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$, ..., $F_n(x,y)$, n fonctions de deux variables indépendantes x et y. Soit, d'autre part, un domaine d'intégration D *dont la définition dépend d'une façon uniforme de n variables indépendantes* a_1, a_2, ..., a_n. Les équations

$$\iint F_1(x,y)\,dx\,dy = u_1,$$
$$\iint F_2(x,y)\,dx\,dy = u_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\iint F_n(x,y)\,dx\,dy = u_n,$$

où les intégrales sont étendues au domaine D, définissent a_1, a_2, ..., a_n, comme fonctions de u_1, u_2, ..., u_n.

Plus généralement, on peut considérer plusieurs domaines d'intégration dépendant des variables a_1, a_2, ..., a_n et définir a_1, a_2, ..., a_n comme fonctions de u_1, u_2, ..., u_n par des équations de même forme contenant plusieurs intégrales doubles dans les premiers membres.

L'étude des fonctions ainsi définies conduit à des problèmes analogues à ceux qui se présentent dans la théorie des intégrales simples (théorème d'Abel : Uniformité des fonctions inverses). Nous en donnerons des exemples élémentaires dans une Note qui sera publiée dans l'*American Journal.*

(¹) *Bull. de la Soc. phys.-math. de Kasan*, 2ᵉ série, t. VI.
(²) Annexe au procès-verbal de la séance du 20 janvier. (Note reçue le 27 janvier.)