SMF

# Vie de la société

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 22 (1894), p. 81-84
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__81_0>

# COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

## SÉANCE DU 2 MAI 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

*Élections :*

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société, M. Cahen et M. Andrade, présentés par MM. D. André et Picquet.

*Communications :*

M. Bioche : *Sur des surfaces remarquables du troisième degré.*

M. Painlevé : *Sur les trajectoires d'un système matériel.*

M. Humbert : *Sur les complexes de coniques.*

M. Kœnigs : *Sur les aires engendrées à l'aide de roulettes.*

M. d'Ocagne : *Sur un abaque relatif à l'équation de Képler.*

M. Fouret : *Sur une surface du quatrième degré à droite double.*

M. L. Lecornu fait la Communication suivante [1] :

### Sur quelques cas de discontinuité en Mécanique.

Dans une Communication faite le 7 février dernier à la Société mathématique, M. Kœnigs a examiné le mouvement d'un point dans un plan, en supposant ce point attiré par deux axes rectangulaires en raison inverse du cube de la distance. Il a trouvé que, dans certains cas, le temps ne peut croître au delà d'une limite déterminée, et il a expliqué ce paradoxe en remarquant que la continuation du mouvement devient impossible parce que la vitesse et l'accélération acquièrent des valeurs infinies.

Je suis loin de vouloir contester cette conclusion; toutefois, il peut être bon de regarder les choses de plus près. Quand l'expression analytique d'une accélération passe par l'infini, il est toujours possible, en modifiant un peu les données, de faire en sorte que

(1) Annexe au compte rendu de la séance du 21 février.

cette expression devienne simplement *très grande*. On obtient alors un mouvement bien déterminé, et il est naturel de chercher comment se transforme ce mouvement quand on revient graduellement aux données initiales. Peu importe que les forces infinies n'existent pas dans la nature : la Mécanique rationnelle, il ne faut pas l'oublier, est une science purement abstraite, dont les hypothèses n'ont souvent qu'un rapport fort éloigné avec les phénomènes naturels.

Mais, pour que le passage à la limite eût un sens, il faudrait que le résultat final restât le même, quelle que fût la marche suivie, et nous allons voir que cette condition essentielle n'est pas remplie. Prenons d'abord un exemple tout à fait élémentaire. Dans son *Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle*, M. de Saint-Germain a traité le cas du mouvement rectiligne d'un point M attiré par une force inversement proportionnelle au cube de la distance à un point fixe A. Si le point A est situé sur la droite parcourue par M, l'intégrale à laquelle on parvient assigne au temps une limite supérieure. M. de Saint-Germain propose alors de regarder le mouvement dont il s'agit comme la limite de celui qu'on obtient quand le point attiré est assujetti à décrire une ligne droite ne contenant pas le point attirant, mais aussi voisine qu'on le voudra de ce dernier. Il est clair que le mouvement serait alors périodique et s'effectuerait symétriquement de part et d'autre de la projection du point attirant sur la droite. On est ainsi conduit à admettre que, dans le cas où le point attirant A appartient à la droite, le point mobile M oscille de part et d'autre de A, en prenant une vitesse infinie chaque fois qu'il coïncide avec A : analytiquement cette solution revient à changer la constante d'intégration à chaque passage.

Les mêmes considérations sont applicables au cas de l'attraction newtonienne. Mais le résultat auquel on parvient alors est en contradiction complète avec la note que la rédaction du *Bulletin* de la Société a jointe à l'article de M. Gascheau, publié en 1882 dans ce recueil; comme l'a rappelé M. Kœnigs, cette note suppose que le mobile, en arrivant au centre d'attraction, va se réfléchir comme à la rencontre d'une bande élastique; et il est facile de voir pourquoi la rédaction conclut de cette manière. Si le mobile, au lieu de partir sans vitesse initiale ou avec une vitesse dirigée vers le point attirant, était animé originairement d'une très petite vitesse perpendiculaire au rayon vecteur, il décrirait une ellipse très aplatie, ayant pour grand axe la direction de ce rayon vecteur, et reviendrait à son point de départ après avoir contourné de très près le centre d'attraction. En faisant tendre la vitesse initiale vers zéro, on parviendrait au genre de mouvement qu'indique la note.

Une pareille divergence n'a rien d'étonnant : elle prouve uniquement que la nature du mouvement limite dépend de la manière dont on procède pour substituer tout d'abord une force très grande à la force infinie.

Pour en revenir au problème de M. Kœnigs, on aperçoit également diverses manières d'éviter le passage des forces attirantes par l'infini.

On peut supposer, par exemple :

Ou bien que le mobile est assujetti à rester dans un plan parallèle à celui des droites attirantes, et aussi voisin qu'on le voudra de ce dernier ;

Ou bien que l'action de l'axe $Oy$ est exprimée par $-\frac{A}{x^3}+\frac{\alpha}{x^4}$, $\alpha$ désignant une très petite constante positive, et que de même l'action de l'axe $Ox$ a pour valeur $-\frac{B}{y^3}+\frac{\beta}{y^4}$.

Dans le premier cas, rien n'empêcherait le point attiré de se mouvoir dans toute l'étendue de son plan, et il traverserait avec une très grande vitesse la projection sur ce plan de chacune des droites attirantes. Dans le second cas, au moment où le mobile arriverait à la distance $\frac{\alpha}{A}$ de l'axe des $y$, l'attraction correspondante se changerait en une répulsion susceptible, pour des distances plus petites, de croître au delà de toute limite ; la même chose aurait lieu à la distance $\frac{\beta}{B}$ de l'axe des $x$ : le point resterait indéfiniment confiné dans le même quadrant.

On pourrait encore imaginer d'autres combinaisons : citons seulement la substitution des formules d'attraction

$$-\frac{A}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad -\frac{B}{(y^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

à la place de $-\frac{A}{x^3}$ et $-\frac{B}{y^3}$. Avec ces formules, le mobile traverse sans difficulté les droites attirantes; mais, si l'on ne veut pas que l'attraction se change en répulsion, il faut considérer chaque droite comme étant une ligne de discontinuité pour la force correspondante, qui passe brusquement de $-\frac{A}{a^3}$ à $+\frac{A}{a^3}$ ou de $-\frac{B}{b^3}$ à $+\frac{B}{b^3}$.

Remarquons qu'à distance finie des droites attirantes, toutes ces hypothèses conduisent à des mouvements aussi peu différents qu'on le voudra de celui qui a été envisagé par M. Kœnigs : c'est seulement en approchant de l'une des droites que les divergences deviennent notables.

Il serait intéressant d'étudier complètement les trajectoires ainsi obtenues; mais, en le faisant ici, j'allongerais démesurément cette Note, et je m'écarterais de l'objet que je me suis proposé.

## SÉANCE DU 16 MAI 1894.

### PRÉSIDENCE DE M. DE COMBEROUSSE.

*Communications :*

M. D. André : *Sur le triangle des séquences.*

M. Fleury : *Sur certains faux principes et sur la règle de l'Hospital.*

M. Painlevé : *Identité de deux déterminants, suggérée par le principe de la moindre action.*

M. Lancelin : *Mouvement du pendule de longueur uniformément variable.*